# Curs Limbaje formale și compilatoare
# Minimizarea automatelor finite deterministe

Universitatea *Transilvania* din Brașov
Facultatea de Matematică și Informatică

2021/2022

# Relații de echivalentă

**Definiția 1**: Se numește *relație de echivalență* peste o mulțime $S$, o relație binară $R$ cu următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $xRx \ \forall x \in S$
2. Simetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
3. Tranzitivitate: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

# Relații de echivalență - Exemple

**Definiția 1**: Se numește *relație de echivalență* peste o mulțime $S$, o relație binară $R$ cu următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $xRx\ \forall x \in S$
2. Simetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
3. Tranzitivitate: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

**Definiția 1**: Se numește *relație de echivalență* peste o mulțime $S$, o relație binară $R$ cu următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $xRx\ \forall x \in S$
2. Simetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
3. Tranzitivitate: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol.

**Definiția 1**: Se numește *relație de echivalență* peste o mulțime $S$, o relație binară $R$ cu următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $xRx \; \forall x \in S$
2. Simetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
3. Tranzitivitate: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol.

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$.

**Definiția 1**: Se numește *relație de echivalență* peste o mulțime $S$, o relație binară $R$ cu următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $xRx \ \forall x \in S$
2. Simetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
3. Tranzitivitate: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol.

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$.

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$.

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - NU este de indice finit

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$.

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - NU este de indice finit

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol - este de indice finit (trei clase)

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$.

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - NU este de indice finit

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol - este de indice finit (trei clase)

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$. - este evident de indice finit (2 clase)

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

# Relații de echivalență

**Definiția 2**: O relație de echivalență $R$ peste o mulțime $S$ se numește de *indice finit* dacă numărul de clase de echivalență determinate de $R$ în $S$ este finit.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - NU este de indice finit

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol - este de indice finit (trei clase)

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$ - este evident de indice finit (2 clase)

(4) $R_4$ peste mulțimea numerelor întregi, $xR_4y \Leftrightarrow x$ mod $5 = y$ mod $5$ - este de indice finit - 5 clase

**Definiția 3**: Se consideră un vocabular $\Sigma$. O relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ se numește *invariantă la dreapta* dacă: $xRy \Rightarrow xzRyz\ \forall z \in S$, $x, y, z \in \Sigma^*$.

**Definiția 3**: Se consideră un vocabular $\Sigma$. O relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ se numește *invariantă la dreapta* dacă: $xRy \Rightarrow xzRyz\ \forall z \in S$, $x, y, z \in \Sigma^*$.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$

**Definiția 3**: Se consideră un vocabular $\Sigma$. O relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ se numește *invariantă la dreapta* dacă: $xRy \Rightarrow xzRyz\ \forall z \in S$, $x, y, z \in \Sigma^*$.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - este invariabilă la dreapta

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$

**Definiția 3**: Se consideră un vocabular $\Sigma$. O relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ se numește *invariantă la dreapta* dacă: $xRy \Rightarrow xzRyz\ \forall z \in S,\ x, y, z \in \Sigma^*$.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - este invariabilă la dreapta

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol - este invariabilă la dreapta

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * \,||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * \,||x|$ nu epătrat perfect$\}$

**Definiția 3**: Se consideră un vocabular $\Sigma$. O relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ se numește *invariantă la dreapta* dacă: $xRy \Rightarrow xzRyz\ \forall z \in S$, $x, y, z \in \Sigma^*$.

**Exemple:**

(1) $R_1$ peste $\Sigma^*$, unde $\Sigma = \{a, b, c\}$, $xR_1y \Leftrightarrow |x| = |y|$ - este invariabilă la dreapta

(2) $R_2$ peste $\Sigma^*$, $xR_2y \Leftrightarrow x, y$ încep cu același simbol - este invariabilă la dreapta

(3) $R_3$ peste $\Sigma^*$, dată prin două clase: $C_1 = \{x \in \Sigma * ||x|$ pătrat perfect$\}$, $C_2 = \{x \in \Sigma * ||x|$ nu epătrat perfect$\}$ - NU este invariabilă la dreapta

# Teorema Myhill-Nerode

**Teoremă**. Fie un limbaj $L$ peste un alfabet $\Sigma$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Limbajul $L$ este acceptat de către un automat finit
2. Există o relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ invariantă la dreapta de inidce finit astfel încât $L$ este reuniunea unor clase de echivalență determinate de $R$.
3. Relația de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ defintă de $xRy \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \ \Leftrightarrow yz \in L)$ este de indice finit.

**Teoremă**. Fie un limbaj $L$ peste un alfabet $\Sigma$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Limbajul $L$ este acceptat de către un automat finit
2. Există o relație de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ invariantă la dreapta de inidce finit astfel încât $L$ este reuniunea unor clase de echivalență determinate de $R$.
3. Relația de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ defintă de $xRy \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ este de indice finit.

**Exemplu de relație de echivalență care satisface teorema**: Pentru AFD-ul $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ cu $L = T(M)$ se poate defini relația de echivalență $R_M$ dată de:

$$xR_My \Leftrightarrow \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

Teorema Myhill-Nerode poate fi utilizată pentru a demonstra faptul că, anumite limbaje nu sunt regulate.

**Exemplu:** fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. Arătăm prin reducere la absurd, că nu este regulat.

- Presupunem că $L$ este regulat

Teorema Myhill-Nerode poate fi utilizată pentru a demonstra faptul că, anumite limbaje nu sunt regulate.

**Exemplu:** fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. Arătăm prin reducere la absurd, că nu este regulat.

- Presupunem că $L$ este regulat
- Din Teorema Myhill-Nerode $\Rightarrow$ relația de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ defintă de $xRy$ $\Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \ \Leftrightarrow yz \in L)$ este de indice finit.

Teorema Myhill-Nerode poate fi utilizată pentru a demonstra faptul că, anumite limbaje nu sunt regulate.

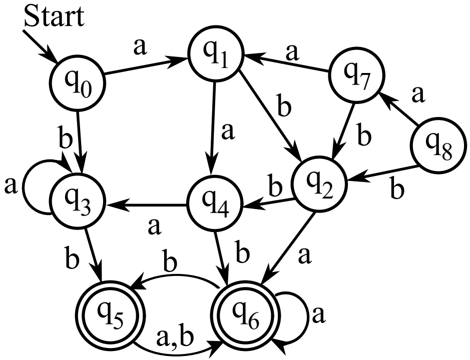
**Exemplu:** fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. Arătăm prin reducere la absurd, că nu este regulat.

- Presupunem că $L$ este regulat
- Din Teorema Myhill-Nerode $\Rightarrow$ relația de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ defintă de $xRy$ $\Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \ \Leftrightarrow yz \in L)$ este de indice finit.
- $a^m$ și $a^n \in \Sigma^*$, dar, deoarece $R$ este de indice finit rezultă că $\exists m, n$ pentru care $a^m R a^n$

Teorema Myhill-Nerode poate fi utilizată pentru a demonstra faptul că, anumite limbaje nu sunt regulate.

**Exemplu:** fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. Arătăm prin reducere la absurd, că nu este regulat.

- Presupunem că $L$ este regulat
- Din Teorema Myhill-Nerode $\Rightarrow$ relația de echivalență $R$ peste $\Sigma^*$ defintă de $xRy \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ este de indice finit.
- $a^m$ și $a^n \in \Sigma^*$, dar, deoarece $R$ este de indice finit rezultă că $\exists m, n$ pentru care $a^m R a^n$
- Fie $z = b^m$. Cuvântul $a^m b^m \in L \Rightarrow a^n b^m \in L \Rightarrow$ contradicție,

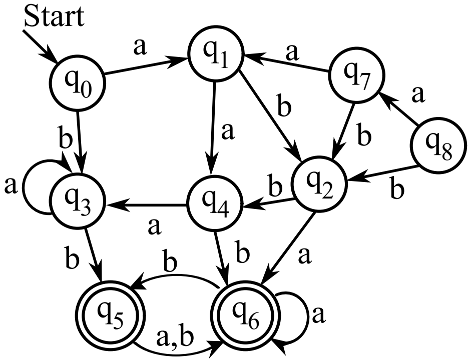



**Definiția 4**: Considerăm un automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Spunem că un cuvânt $x \in \Sigma^*$ *distinge* $q_1$ *de* $q_2$ dacă:

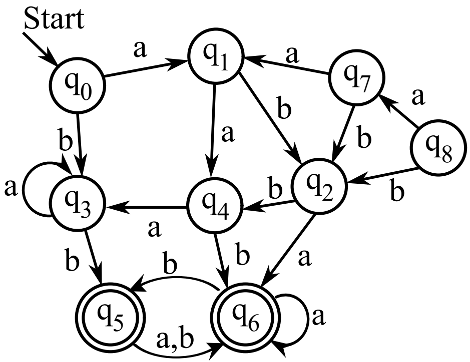
$$\begin{cases} (q_1, x) \overset{*}{\vdash} (q_3, \lambda) \\ (q_2, x) \overset{*}{\vdash} (q_4, \lambda) \end{cases}$$

și una și numai una dintre stările $q_3$ și $q_4$ este stare finală.

# Stări echivalente




**Definiția 5**: Spunem că stările $q_1$ și $q_2$ sunt **k-nedistinctibile** ($q_1 \overset{k}{\equiv} q_2$) dacă și numai dacă nu există $x$, $|x| \leq k$ astfel încât $x$ distinge $q_1$ de $q_2$.

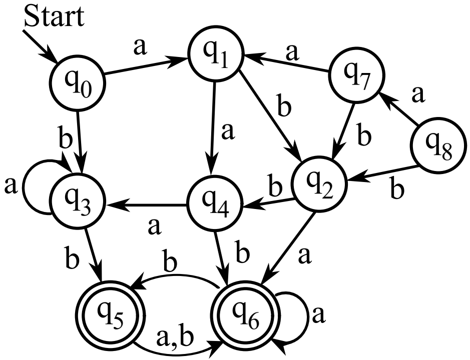



**Definiția 6**: Două stări $q_1$ și $q_2$ se numesc **nedistinctibile** sau **echivalente** $(q_1 \equiv q_2)$ dacă sunt k-nedistinctibile pentru $\forall k \geq 0$.

# Stări echivalente

**Observație**: Pentru $q_1, q_2 \in Q$ avem:

$$\begin{cases} (1) \quad q_1 \overset{0}{\equiv} q_2 \Leftrightarrow (q_1, q_2 \in F \vee q_1, q_2 \notin F) \\ (2) \quad q_1 \overset{k}{\equiv} q_2 \Leftrightarrow \left(q_1 \overset{k-1}{\equiv} q_2 \wedge \forall a \in \Sigma, \delta(q_1, a) \overset{k-1}{\equiv} \delta(q_2, a)\right) \end{cases}$$




**Definiția 7**: O stare $q$ se numește **inaccesibilă** dacă nu există nici un cuvânt $x$ astfel încât $(q_0, x) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda)$

**Definiția 8**: Un automat $M$ se numește **automat redus** dacă nici o stare nu este inaccesibilă și nu există două stări echivalente.

**Minimizare prin construcția claselor de echivalență**

**Pas 1.** Se elimină toate stările inaccesibile.

# Algoritm de minimizare (I)

**Minimizare prin construcția claselor de echivalență**

**Pas 1.** Se elimină toate stările inaccesibile.

**Pas 2.** Se construiesc clasele de echivalență pentru $\overset{0}{\equiv}, \overset{1}{\equiv}, \ldots$ până când clasele pentru $\overset{k}{\equiv}$ și $\overset{k+1}{\equiv}$ sunt aceleași. Alegem relația de echivalență $\equiv = \overset{k}{\equiv}$.

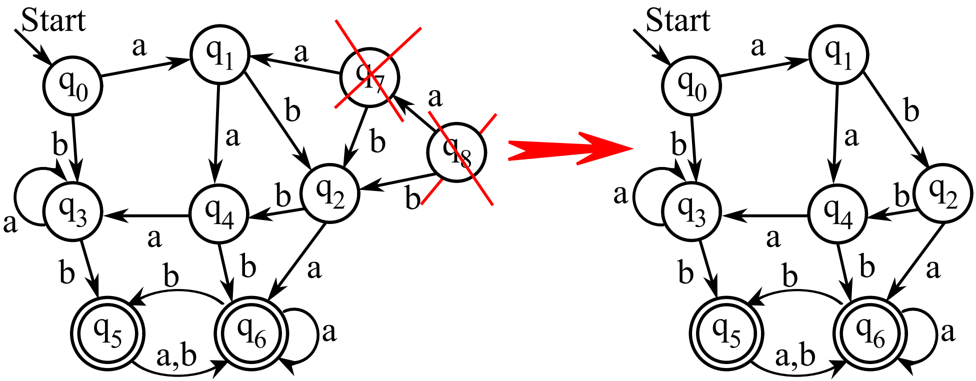
**Minimizare prin construcția claselor de echivalență**

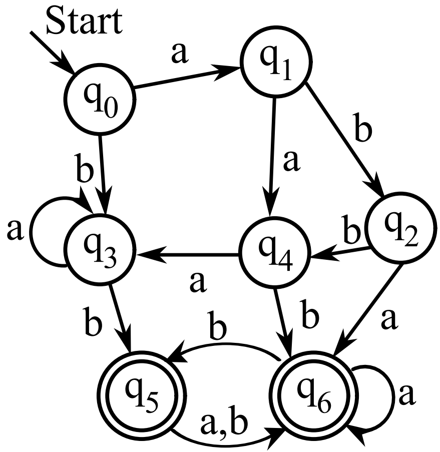
**Pas 1.** Se elimină toate stările inaccesibile.

**Pas 2.** Se construiesc clasele de echivalență pentru $\overset{0}{\equiv}, \overset{1}{\equiv}, \ldots$ până când clasele pentru $\overset{k}{\equiv}$ și $\overset{k+1}{\equiv}$ sunt aceleași. Alegem relația de echivalență $\equiv = \overset{k}{\equiv}$.

**Pas 3.** Se construiește $M = (Q', \Sigma, \delta', {q'}_0, F')$ unde $Q'$ este mulțimea claselor de echivalență ale lui $Q$, astfel:
$\delta'([q], a) = [p]$ dacă $\delta(q, a) = p$
${q'}_0 = [q_0]$
$F' = \{[q] | q \in F\}$.

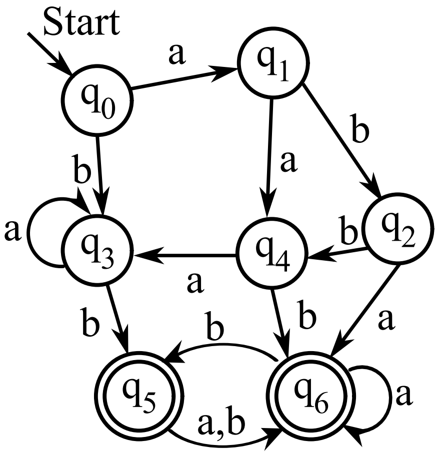
**Pas 1** Se elimină toate stările inaccesibile.






**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{0}{\equiv}$ - adică se separă stările finale de cele nefinale:

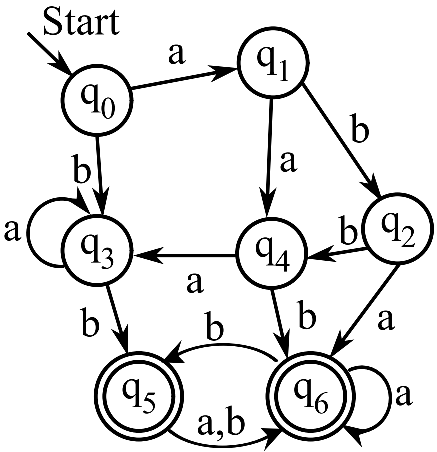
$$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$$




$\stackrel{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{1}{\equiv}$. Se consideră fiecare clasă de echivalență $\stackrel{0}{\equiv}$ și se verifică dacă se separă stări:

$$\left.\begin{array}{l} (q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4), q_1 \stackrel{0}{\equiv} q_4 \\ (q_0, q_1) \xrightarrow{b} (q_3, q_2), q_3 \stackrel{0}{\equiv} q_2 \end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \stackrel{1}{\equiv} q_1$$



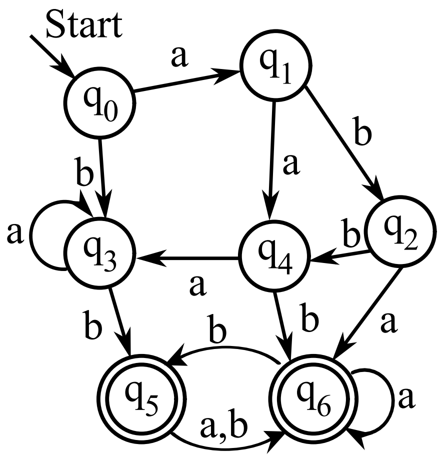

$\stackrel{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{1}{\equiv}$. Se consideră fiecare clasă de echivalență $\stackrel{0}{\equiv}$ și se verifică dacă se separă stări:

$$\left.\begin{array}{l} (q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4),\ q_1 \stackrel{0}{\equiv} q_4 \\ (q_0, q_1) \xrightarrow{b} (q_3, q_2),\ q_3 \stackrel{0}{\equiv} q_2 \end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \stackrel{1}{\equiv} q_1$$

$$(q_0, q_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_6),\ q_1 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_0 \stackrel{1}{\not\equiv} q_2$$

# Algoritm de minimizare (I)



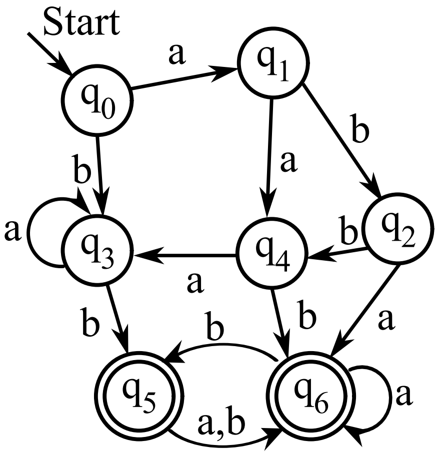

$\overset{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{1}{\equiv}$. Se consideră fiecare clasă de echivalență $\overset{0}{\equiv}$ și se verifică dacă se separă stări:

$$\left.\begin{array}{l}(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4), q_1 \overset{0}{\equiv} q_4 \\ (q_0, q_1) \xrightarrow{b} (q_3, q_2), q_3 \overset{0}{\equiv} q_2\end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \overset{1}{\equiv} q_1$$

$$(q_0, q_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_6), q_1 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_0 \overset{1}{\not\equiv} q_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_0, q_3) \xrightarrow{a} (q_1, q_3) q_1 \overset{0}{\equiv} q_3 \\ (q_0, q_3) \xrightarrow{b} (q_3, q_5), q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_5\end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \overset{1}{\not\equiv} q_3$$




$$\overset{0}{\equiv}: \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$$

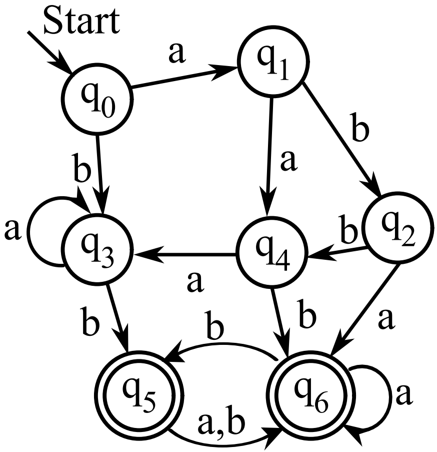
**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{1}{\equiv}$. Se consideră fiecare clasă de echivalență $\overset{0}{\equiv}$ și se verifică dacă se separă stări:

$$\left.\begin{array}{l}(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4), q_1 \overset{0}{\equiv} q_4 \\ (q_0, q_1) \xrightarrow{b} (q_3, q_2), q_3 \overset{0}{\equiv} q_2\end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \overset{1}{\equiv} q_1$$

$$(q_0, q_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_6), q_1 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_0 \overset{1}{\not\equiv} q_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_0, q_3) \xrightarrow{a} (q_1, q_3) q_1 \overset{0}{\equiv} q_3 \\ (q_0, q_3) \xrightarrow{b} (q_3, q_5), q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_5\end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \overset{1}{\not\equiv} q_3$$

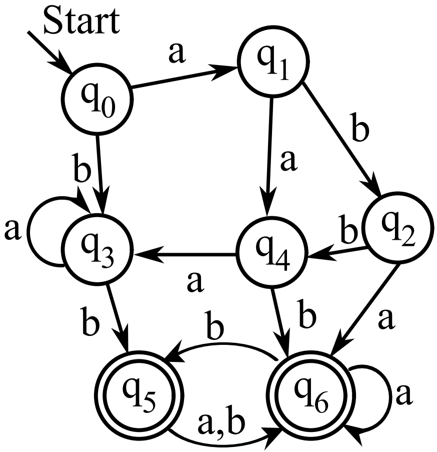
$$\left.\begin{array}{l}(q_0, q_4) \xrightarrow{a} (q_1, q_3) q_1 \overset{0}{\equiv} q_3 \\ (q_0, q_4) \xrightarrow{b} (q_3, q_6), q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_0 \overset{1}{\not\equiv} q_4$$




$\stackrel{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{1}{\equiv}$.Pâna acum $q_0 \stackrel{1}{\not\equiv}$ cu $q_2, q_3, q_3$ și $q_1 \stackrel{1}{\equiv} q_1$.

$$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \stackrel{1}{\not\equiv} q_3$$

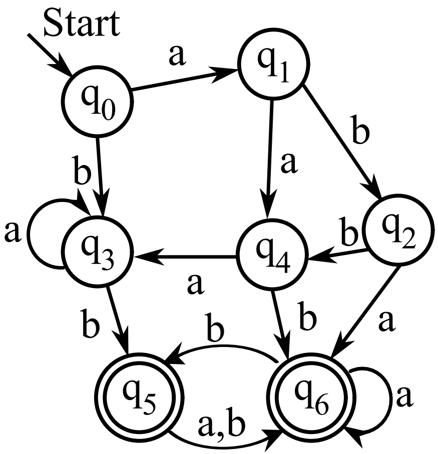



$\stackrel{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{1}{\equiv}$.Până acum $q_0 \stackrel{1}{\not\equiv}$ cu $q_2, q_3, q_3$ și $q_1 \stackrel{1}{\equiv} q_1$.

$$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \stackrel{1}{\not\equiv} q_3$$

$$(q_2, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \stackrel{1}{\not\equiv} q_4$$




$\stackrel{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

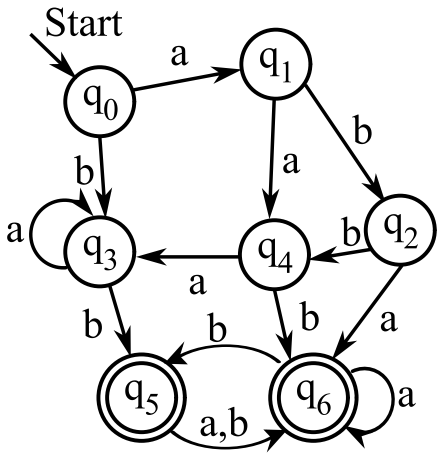
**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{1}{\equiv}$.Până acum $q_0 \stackrel{1}{\not\equiv}$ cu $q_2, q_3, q_3$ și $q_1 \stackrel{1}{\equiv} q_1$.

$$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \stackrel{1}{\not\equiv} q_3$$

$$(q_2, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \stackrel{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \stackrel{1}{\not\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6), q_5 \stackrel{0}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \stackrel{1}{\equiv} q_4$$

# Algoritm de minimizare (I)




$\overset{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

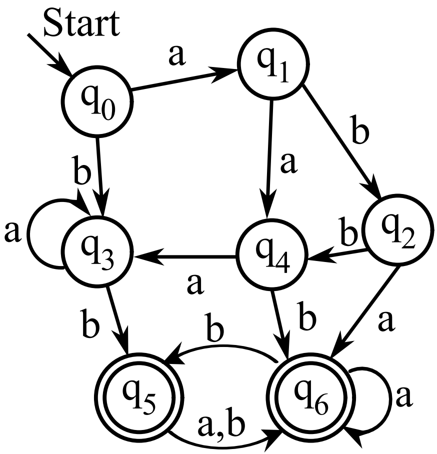
**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{1}{\equiv}$.Pâna acum $q_0 \overset{1}{\not\equiv}$ cu $q_2, q_3, q_3$ și $q_1 \overset{1}{\equiv} q_1$.

$$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3),\ q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \overset{1}{\not\equiv} q_3$$

$$(q_2, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_3),\ q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \overset{1}{\not\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l} (q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \overset{0}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \overset{1}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l} (q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5),\ q_5 \overset{0}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \overset{1}{\equiv} q_6$$




$\overset{0}{\equiv}$: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{1}{\equiv}$.Până acum $q_0 \overset{1}{\not\equiv}$ cu $q_2, q_3, q_3$ și $q_1 \overset{1}{\equiv} q_1$.

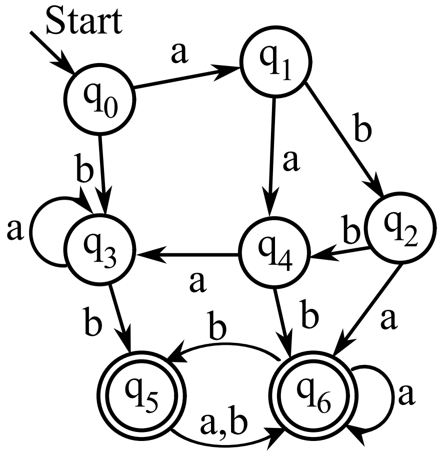
$$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \overset{1}{\not\equiv} q_3$$

$$(q_2, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_3), q_3 \overset{0}{\not\equiv} q_6 \Rightarrow q_2 \overset{1}{\not\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6), q_5 \overset{0}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \overset{1}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5), q_5 \overset{0}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \overset{1}{\equiv} q_6$$

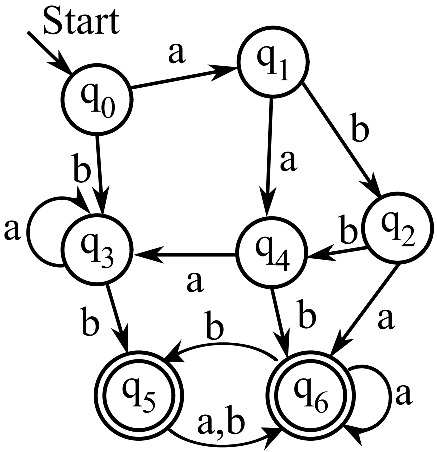
Clasele de echivalență $\overset{1}{\equiv}$ sunt:
$\{q_0, q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$




$\overset{1}{\equiv}$: $\{q_0, q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{2}{\equiv}$.

$$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4), q_1 \overset{1}{\not\equiv} q_4 \Rightarrow q_0 \overset{2}{\not\equiv} q_1$$

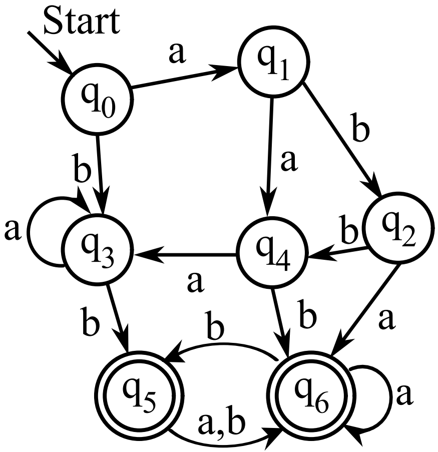



$\overset{1}{\equiv}$: $\{q_0, q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{2}{\equiv}$.

$$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4),\ q_1 \overset{1}{\not\equiv} q_4 \Rightarrow q_0 \overset{2}{\not\equiv} q_1$$

$$\left.\begin{array}{l} (q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \overset{1}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \overset{2}{\equiv} q_4$$



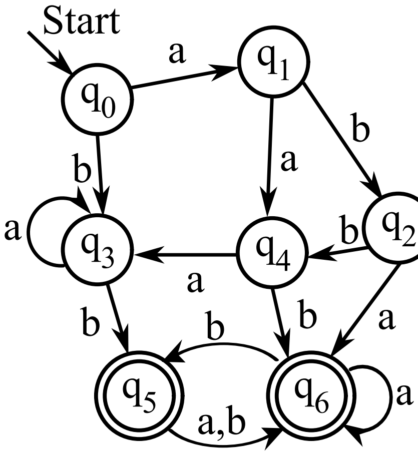

$\stackrel{1}{\equiv}$: $\{q_0, q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{2}{\equiv}$.

$$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4),\ q_1 \stackrel{1}{\not\equiv} q_4 \Rightarrow q_0 \stackrel{2}{\not\equiv} q_1$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3)\\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \stackrel{1}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \stackrel{2}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)\\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5),\ q_5 \stackrel{1}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \stackrel{2}{\equiv} q_6$$




$\stackrel{1}{\equiv}$: $\{q_0, q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

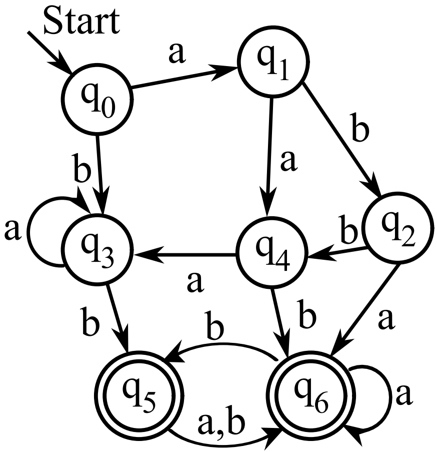
**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{2}{\equiv}$.

$$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4),\ q_1 \stackrel{1}{\not\equiv} q_4 \Rightarrow q_0 \stackrel{2}{\not\equiv} q_1$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3)\\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \stackrel{1}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \stackrel{2}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)\\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5),\ q_5 \stackrel{1}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \stackrel{2}{\equiv} q_6$$

Clasele de echivalență $\stackrel{2}{\equiv}$ sunt:
$\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

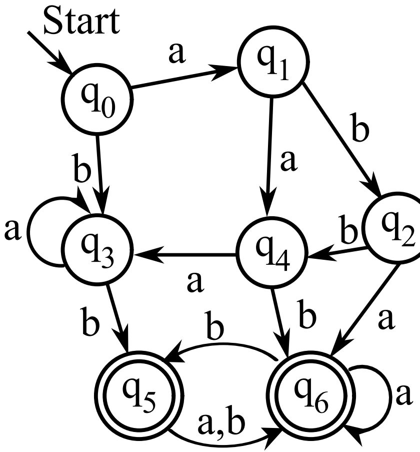



$\stackrel{2}{\equiv}$: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{3}{\equiv}$.

$$\left.\begin{array}{l} (q_3, q_4) \stackrel{a}{\rightarrow} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \stackrel{b}{\rightarrow} (q_5, q_6),\ q_5 \stackrel{2}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \stackrel{3}{\equiv} q_4$$

# Algoritm de minimizare (I)

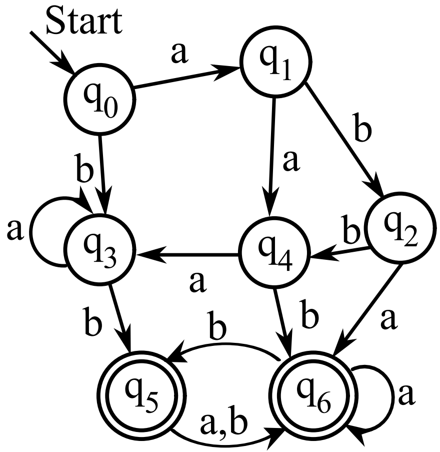



$\overset{2}{\equiv}$: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{3}{\equiv}$.

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \overset{2}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \overset{3}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5),\ q_5 \overset{2}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \overset{3}{\equiv} q_6$$



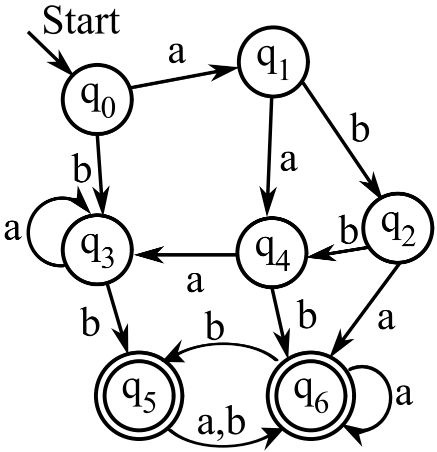

$\stackrel{2}{\equiv}$: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\stackrel{3}{\equiv}$.

$$\left.\begin{array}{l} (q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6), q_5 \stackrel{2}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \stackrel{3}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l} (q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5), q_5 \stackrel{2}{\equiv} q_6 \end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \stackrel{3}{\equiv} q_6$$

Clasele de echivalență $\stackrel{3}{\equiv}$ sunt:
$\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$




$\overset{2}{\equiv}$: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

**Pas 2** Se construiesc clasele de echivalență $\overset{3}{\equiv}$.

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6),\ q_5 \overset{2}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_3 \overset{3}{\equiv} q_4$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5),\ q_5 \overset{2}{\equiv} q_6\end{array}\right\} \Rightarrow q_5 \overset{3}{\equiv} q_6$$

Clasele de echivalență $\overset{3}{\equiv}$ sunt:

$\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$

$\overset{2}{\equiv} = \overset{3}{\equiv} \Rightarrow$ GATA

# Algoritm de minimizare (I)

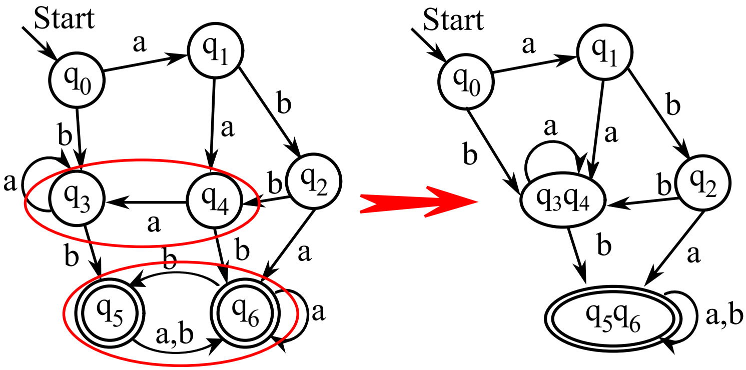
**Pas 3** Se construiește $M = (Q', \Sigma, \delta', {q'}_0, F')$ unde $Q'$ este mulțimea claselor de echivalență ale lui $Q$, astfel:

$\delta'([q], a) = [p]$ dacă $\delta(q, a) = p$

${q'}_0 = [q_0]$

$F' = \{[q] | q \in F\}$.

Clasele de echivalență sunt: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6\}$



# Algoritm de minimizare (II)

**Minimizare prin construcția unui tabel de echivalență**
Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Algoritmul va marca perechile de stări $(p, q)$ echivalente. Se construiește automatul redus $M'$ parcurgând următorii pași:

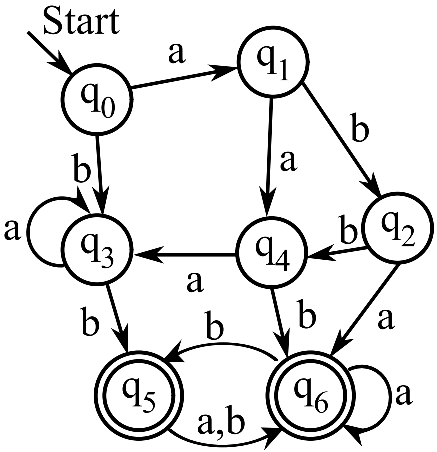
**Pas 1.** Se elimină stările inaccesibile.

**Pas 2.** Se scrie tabelul tuturor perechilor $(p, q)$ inițial nemarcate.

**Pas 3.** Se marchează toate perechile $(p, q)$ pentru care $p \in F$ și $q \notin F$ sau invers.

**Pas 4.** Dacă $\exists (p, q)$ nemarcată și $\exists a \in \Sigma$, astfel încât $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ marcată, atunci perechea $(p, q)$ se marchează. Se repetă pasul 4 până când nu mai au loc modificări în tabel.

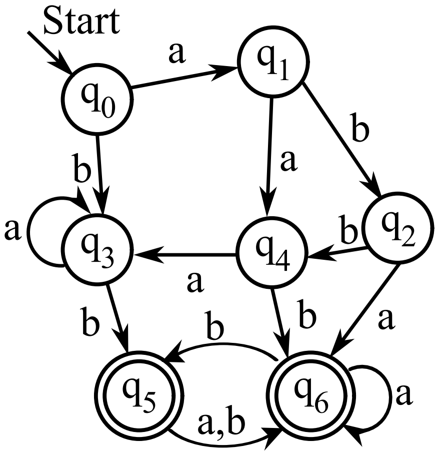
**Pas 5.** Perechile nemarcate sunt cele echivalente.




**Pas 1** Tabelul inițial este cu toate perechile nemarcate.

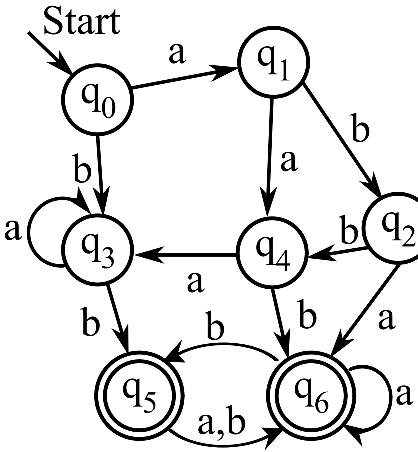
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| — | — | $q_2$ | | | | |
| — | — | — | $q_3$ | | | |
| — | — | — | — | $q_4$ | | |
| — | — | — | — | — | $q_5$ | |
| — | — | — | — | — | — | $q_6$ |

# Algoritm de minimizare (II)




**Pas 2** Marchează perechile: (stare finală, stare nefinală)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| — | — | $q_2$ | | | | |
| — | — | — | $q_3$ | | | |
| — | — | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

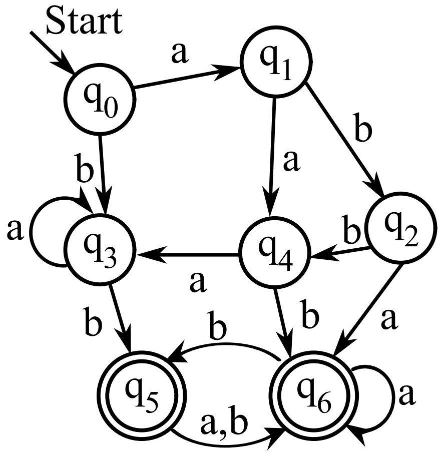
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $-$ | $q_1$ | | | | | |
| $-$ | $-$ | $q_2$ | | | | |
| $-$ | $-$ | $-$ | $q_3$ | | | |
| $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $-$ | $q_6$ |

$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4)$ - pereche nemarcată

$(q_0, q_1) \xrightarrow{b} (q_3, q_2)$ - pereche nemarcată

$\Rightarrow$ nu se marchează $(q_0, q_1)$

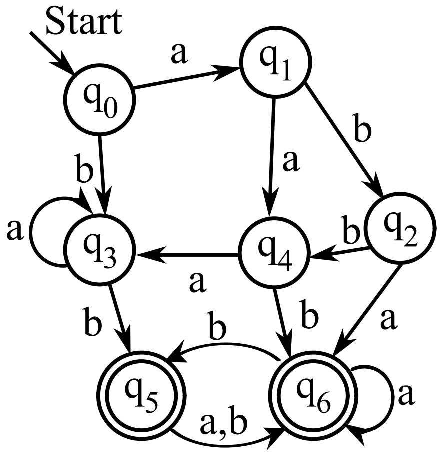
# Algoritm de minimizare (I)




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | — | $q_2$ | | | | |
| — | — | — | $q_3$ | | | |
| — | — | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

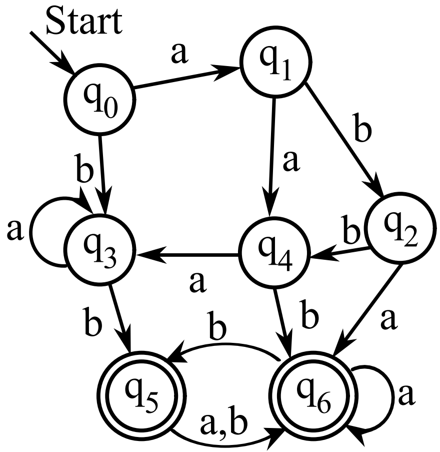
$(q_0, q_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_6)$ - marcată, $\Rightarrow$ se marchează $(q_0, q_2)$.




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | — | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | — | — | $q_3$ | | | |
| — | — | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_0, q_3) \xrightarrow{a} (q_1, q_3)$ - nemarcată
$(q_0, q_3) \xrightarrow{b} (q_3, q_5)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_0, q_3)$.

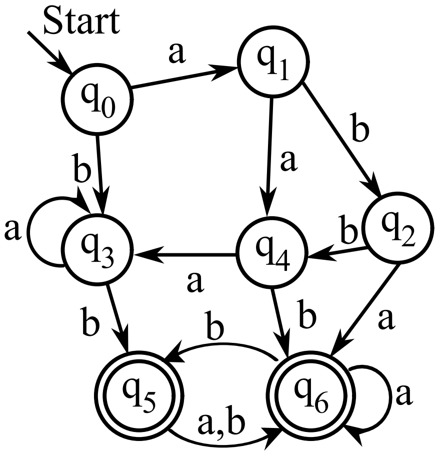



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

$$
\begin{array}{lllllll}
q_0 & & & & & & \\
- & q_1 & & & & & \\
X_1 & - & q_2 & & & & \\
X_1 & - & - & q_3 & & & \\
X_1 & - & - & - & q_4 & & \\
X_0 & X_0 & X_0 & X_0 & X_0 & q_5 & \\
X_0 & X_0 & X_0 & X_0 & X_0 & - & q_6
\end{array}
$$

$(q_0, q_4) \xrightarrow{a} (q_1, q_3)$ - nemarcată
$(q_0, q_4) \xrightarrow{b} (q_3, q_6)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_0, q_4)$.

# Algoritm de minimizare (II)

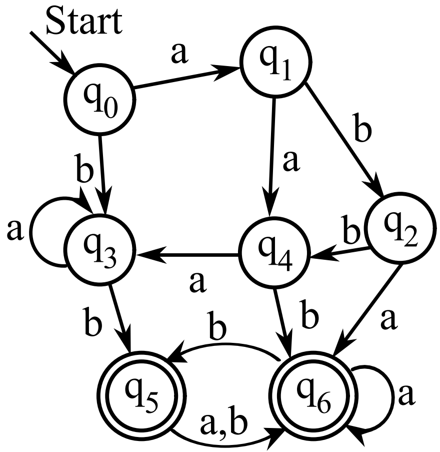



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | — | — | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | — | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_1, q_2) \xrightarrow{a} (q_4, q_6)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_1, q_2)$.

# Algoritm de minimizare (II)

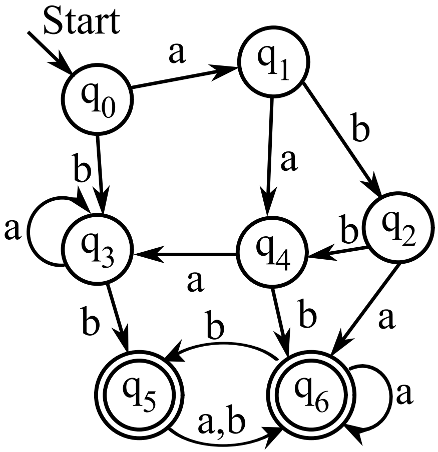



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | — | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | — | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_1, q_3) \xrightarrow{a} (q_4, q_3)$ - nemarcată
$(q_1, q_3) \xrightarrow{b} (q_2, q_5)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_1, q_3)$.

# Algoritm de minimizare (II)

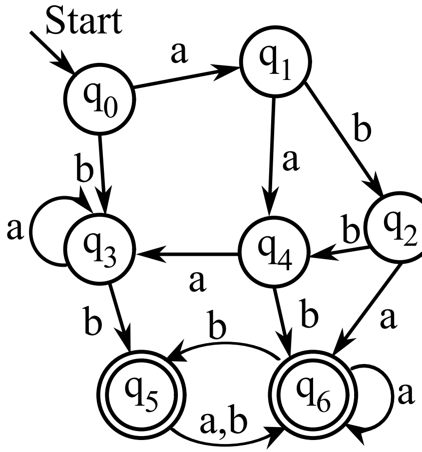



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $-$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $-$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $-$ | $-$ | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $-$ | $q_6$ |

$(q_1, q_4) \xrightarrow{a} (q_4, q_3)$ - nemarcată
$(q_1, q_4) \xrightarrow{b} (q_2, q_6)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_1, q_4)$.

# Algoritm de minimizare (II)

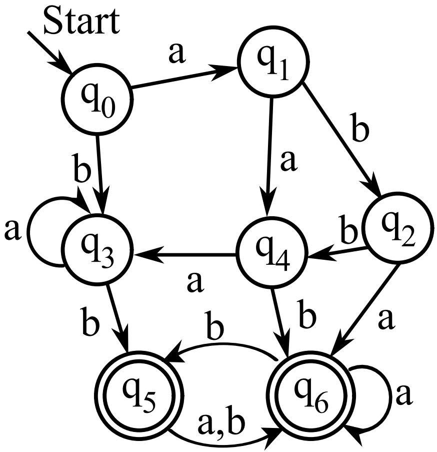



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | — | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_2, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_3)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_2, q_3)$.

# Algoritm de minimizare (II)

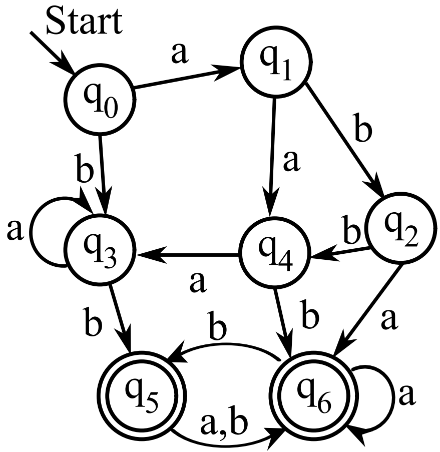



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $-$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $-$ | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $-$ | $q_6$ |

$(q_2, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_3)$- marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_2, q_4)$.

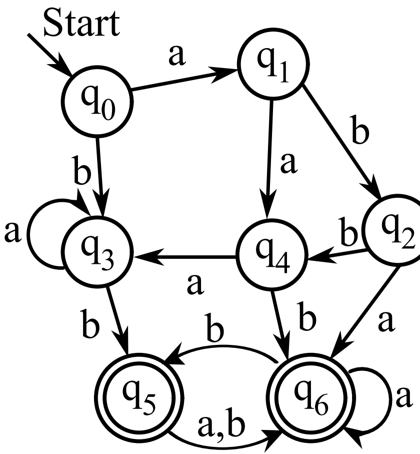
# Algoritm de minimizare (II)




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3)$
$(q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6)$ - nemarcată
$\Rightarrow$ NU se marchează $(q_2, q_4)$.

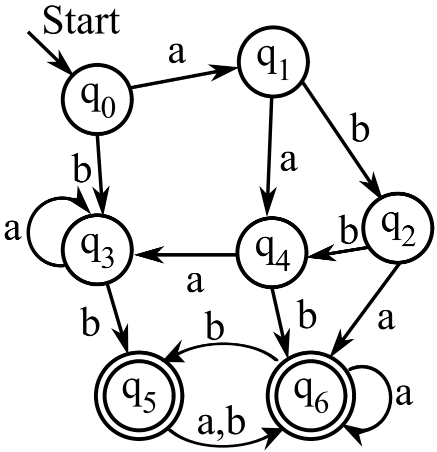



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 1:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| — | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)$
$(q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5)$ - nemarcată
$\Rightarrow$ NU se marchează $(q_5, q_6)$.
S-a terminat prima iterație. S-a modificat tabelul $\Rightarrow$ se reia algoritmul.

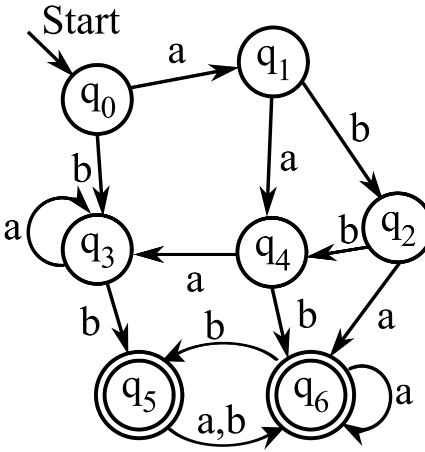
# Algoritm de minimizare (II)




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 2:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $X_2$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $-$ | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $-$ | $q_6$ |

$(q_0, q_1) \xrightarrow{a} (q_1, q_4)$ - marcată $\Rightarrow$ se marchează $(q_0, q_1)$




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 2:**

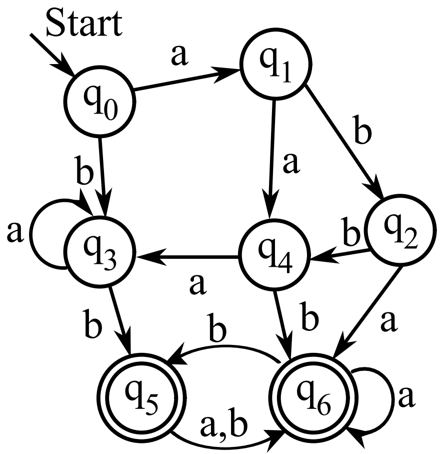
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $X_2$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3)$

$(q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6)$ - nemarcată

$\Rightarrow$ NU se marchează $(q_2, q_4)$.

# Algoritm de minimizare (II)

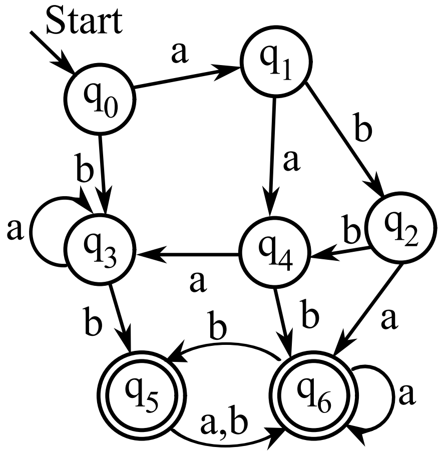



**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 2:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $X_2$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)$
$(q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5)$ - nemarcată
$\Rightarrow$ NU se marchează $(q_5, q_6)$.
S-a terminat a doua iterație. S-a modificat tabelul $\Rightarrow$ se reia algoritmul.

# Algoritm de minimizare (II)




**Pas 4** Se ia fiecare pereche nemarcată $(p, q)$ și se verifică dacă se marchează. **Iterația 3:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | |
| $X_2$ | $q_1$ | | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $q_2$ | | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | $q_3$ | | | |
| $X_1$ | $X_1$ | $X_1$ | — | $q_4$ | | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $q_5$ | |
| $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | $X_0$ | — | $q_6$ |

$$\left.\begin{array}{l}(q_3, q_4) \xrightarrow{a} (q_3, q_3) \\ (q_3, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_6) - \text{nemarcată}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{NU se}$$

marchează $(q_2, q_4)$.

$$\left.\begin{array}{l}(q_5, q_6) \xrightarrow{a} (q_6, q_6) \\ (q_5, q_6) \xrightarrow{b} (q_6, q_5) - \text{nemarcată}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{NU se}$$

marchează $(q_5, q_6)$.

Nu s-a modificat tabelul $\Rightarrow$ STOP.

# Algoritm de minimizare (II)

**Pas 5** Se construiește automatul redus. Perechile nemarcate sunt perechi de stări echivalente.