

Pensumnotat om ytelsesmetrikker i TTK4105 Reguleringsteknikk våren 2024

Bruken av såkalte ytelsesmetrikker (på engelsk «performance metrics») er både nyttig og viktig når man skal vurdere oppførselen og ytelsen til reguleringsystemer.

Hvordan kan man for eksempel sammenligne ytelsen til to ulike regulatorer som brukes til å regulere det samme systemet?

Hvordan kan man finne ut hvilken regulator som gir mest nøyaktig regulering, minst energiforbruk eller minst aktuator-slitasje?

Man kan selvfølgelig prøve å se på tidsplottet av hvordan tilstanden x følger referansen r , eller se på tidsplottet til pådraget u .

Men det er vanskelig å se forskjell på oppførselen til ulike regulatorer med det blotte øyet og på den måten avgjøre hvilken som er best.

Derfor kan man definere matematiske funksjoner som automatisk beregner hvilken som er best, dvs. man kan definere såkalte metrikker.

Ordet metrikk kommer fra engelsk «metrics» og betyr et mål på noe, som et litermål. Dvs. man måler noe gjennom en metrikk.

Ved bruk av ytelsesmetrikker kan man objektivt beregne og vurdere forskjellen i ytelse for ulike regulatorer.

Det finnes ulike metrikker som hver uttrykker ulike perspektiver på hva som er best i en gitt kontekst, dvs. det finnes metrikker som har med reguleringsnøyaktighet å gjøre, metrikker som har med pådragsbruk å gjøre og metrikker som har med energieffektivitet å gjøre.

Måten metrikkene defineres på, som tidsintegralet av ulike tidsvarierende signaler, gjør at den metrikken som har minst verdi på slutten av det tidsintervallet man ser på, er best. Dvs. hvis metrikken som beregnes for regulator A har mindre verdi til slutt enn metrikken som beregnes for regulator B, så er regulator A best utifra perspektivet til den metrikken.

I dette notatet defineres de metrikkene som dere skal kunne i TTK4105 Reguleringsteknikk.

Disse metrikkene har enda ikke blitt tatt i bruk i andre emner ved NTNU, så her lærer dere noe nyttig og viktig som selv mange kybernetikere ikke kan noe om 😊

Innholdet i dette notatet er basert på referansene [1] og [2], der [1] er en PhD-avhandling fra NTNU og [2] er en forskningsartikkel om utvikling og sammenligning av ulike regulatorer for bevegelsesstyring av en høyhastighetsbåt, som inngikk i PhD-arbeidet til en annen NTNU-kandidat.

Ytelsesmetrikker for reguleringsnøyaktighet

Reguleringsnøyaktigheten uttrykkes ved å bruke reguleringsfeilen, som er definert som:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

der $r(t)$ er referansesignalet og $y(t)$ er målingen av tilstanden $x(t)$.

Vi skal nå definere tre metrikker som bruker reguleringsfeilen for å måle reguleringsnøyaktighet på tre ulike måter.

Den første metrikken heter «Integral of the Absolute value of the Error» og har forkortelsen IAE. Den defineres som:

$$IAE(t) = \int_0^t |e(\tau)| d\tau$$

IAE tar altså absoluttverdien til reguleringsfeilen og integrerer den fra starttiden (her lik null) til sluttiden (her lik t).

For vektortilfellet, dvs. der $e(t)$ er en vektor, kan man f.eks bruke den såkalte 2-normen for å beregne absoluttverdien av vektoren $e(t)$ som:

$$|e(t)| = \sqrt{e(t)^T e(t)}$$

eller man kan bruke en annen type norm eller skalering som er hensiktsmessig for å uttrykke reguleringsfeilen i det tilfellet man ser på.

Den andre metrikken heter «Integral of the Square of the Error» og har forkortelsen ISE. Den defineres som:

$$ISE(t) = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau$$

som vekter større reguleringsfeil mer enn små reguleringsfeil. Dermed vil ISE indikere tydelig hvilken regulator som er best på å fjerne større reguleringsfeil.

Den tredje metrikken vi skal se på her heter «Integral of Time multiplied by the Absolute value of the Error» og har forkortelsen ITAE. Den defineres som:

$$ITAE(t) = \int_0^t \tau |e(\tau)| d\tau$$

der tidsvektingen bidrar til å redusere betydningen av reguleringsfeilen som finnes i transientfasen, men der betydningen av en eventuell stasjonær reguleringsfeil som ikke forsvinner blir vektet opp. Dersom reguleringsfeilen $e(t)$ stabiliserer seg på en liten konstant verdi og ikke går til null, vil ITAE vokse kvadratisk med tiden.

Ytelsesmetrikk for aktuator-slitasje

Aktuatorbruken uttrykkes gjennom pådragssignalet $u(t)$.

Vi skal nå definere en metrikk som er et mål på aktuator-slitasje.

Denne metrikken heter «Integral of the Absolute Differentiated Control» og har forkortelsen IADC. Den defineres som:

$$IADC(t) = \int_0^t |\dot{u}(\tau)| d\tau$$

der $\dot{u}(t)$ er den tidsderivate av pådragssignalet, som for eksempel kan beregnes som:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}$$

der $h > 0$ er tidsintervallet mellom hver oppdatering av pådragssignalet, dvs. den såkalte samplingstiden (tastetiden) for systemet.

IADC-metrikken bryr seg altså kun om endringer i pådragssignalet og er derfor et uttrykk for slitasjen som aktuatorene blir påført.

Den regulatoren som gir størst sluttverdi for IADC er den regulatoren som gjør at pådragssignalet $u(t)$ varierer mest over tidsintervallet man ser på.

Kombinert ytelsesmetrikk for energieffektivitet

Tilslutt skal vi se på en såkalt kombinert ytelsesmetrikk, som mikser sammen to ulike metrikker i en ny metrikk gjennom multiplikasjon.

Hvis en regulator har minst sluttverdi for IAE-metrikken kan det være fordi den har brukt mest energi underveis. Selv om det er ønskelig med en presis regulering er det samtidig ønskelig med så lite energibruk som mulig. Derfor kan man definere en metrikk som indikerer kombinasjonen av reguleringsnøyaktighet og energibruk i én og samme metrikk.

Vi skal derfor definere en metrikk som er et mål på energieffektivitet, dvs. som beregner kombinasjonen av reguleringsnøyaktighet og energibruk.

Denne metrikken heter «Integral of the Absolute value of the Error multiplied by the energy consumption» og har forkortelsen IAEW. Den defineres som:

$$IAEW(t) = IAE(t) \cdot W(t) = \int_0^t |e(\tau)| d\tau \cdot \int_0^t P(\tau) d\tau$$

der $W(t)$ brukes om energiforbruket som beregnes ved å tidsintegrere effektbruken $P(t)$:

$$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau$$

slik at IAEW-metrikken er en sammensatt metrikk der IAE-metrikken multipliseres med energibruken W i systemet, som altså beregnes ved å tidsintegrere effektbruken $P(t)$.

Hvordan man beregner effektbruken $P(t)$ (engelsk «power») vil variere etter hvilket system man ser på. For eksempel kan den mekaniske effekten til et objekt som beveger seg med hastigheten $U(t)$ og bruker pådraget $u(t)$ beregnes fra:

$$P(t) = |U(t)u(t)|$$

For andre systemer, som for eksempel et elektrisk system, må man bruke en annen formel for å beregne effektbruken i systemet.

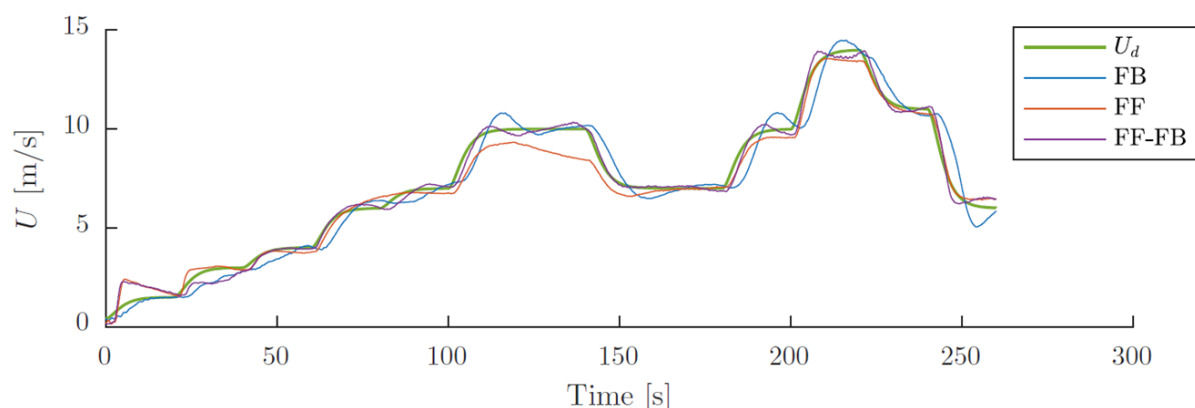
Eksempel: Styring av høyhastighetsbåt

Et illustrerende eksempel om hvorfor det er nyttig og viktig å bruke ytelsesmetriker handler om styring av foroverhastigheten og rotasjonsraten for en høyhastighetsbåt. Eksempelet er hentet fra [2] og har blitt omtalt i flere av forelesningstimene.

Det er utviklet tre ulike regulatorer for å styre hhv. båtens foroverhastighet $U(t)$ og dens rotasjonsrate $r(t)$:

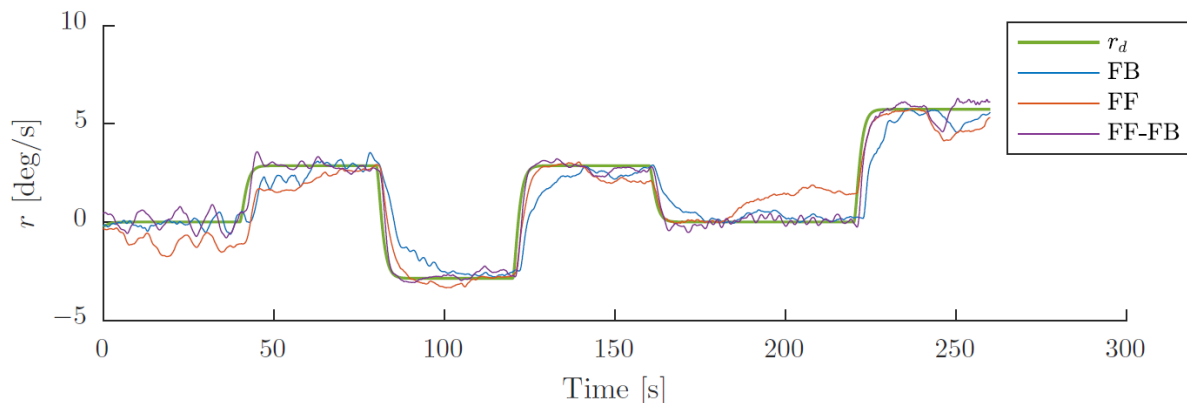
1. En ren modellbasert foroverkoblingsregulator, der modellen er utviklet basert på systemidentifikasjonstester, omtalt som «FF» i tidsplottene.
2. En ren PI-tilbakekoblingsregulator, omtalt som «FB» i tidsplottene.
3. En kombinasjon av modellbasert foroverkobling og PI-basert tilbakekobling, omtalt som «FF-FB» i tidsplottene.

I et scenario med kjøring i relativt rolig sjø ser tidsplottet for følgende av referansesignalet U_d for foroverhastigheten slik ut for de tre regulatortypene:

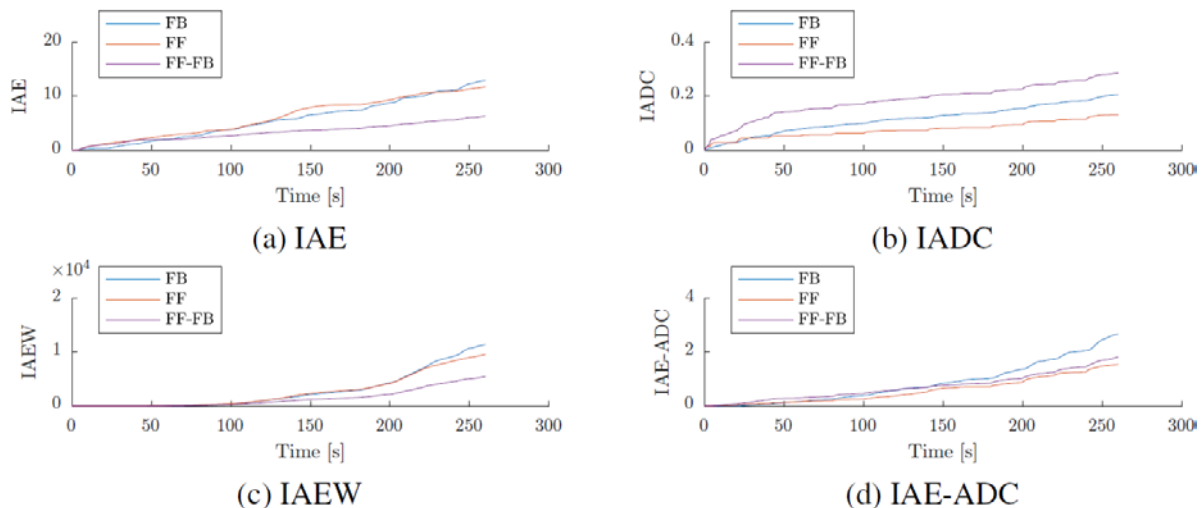


Her ser vi at det ikke er så lett å vurdere hvilken regulator som har best reguleringsnøyaktighet bare ved å se på tidsresponsene til lukket sløyfe-oppførselen til de ulike regulatorene.

Det samme ser vi for tidsplottet for følging av referansesignalet r_d for rotasjonsraten for de tre regulatortypene:



Men ved å beregne og plote noen av ytelsesmetrikkene vi har lært om i dette notatet blir det mye enklere å se hvilken regulator som er best fra de ulike metrikkenes perspektiv:



Her har reguleringsfeilen blitt beregnet fra 2-normen til et vektorielt feilsignal $\mathbf{e}(t)$ som inneholder både reguleringsfeilen for foroverhastigheten og reguleringsfeilen for rotasjonsraten i en tilstandsvektor, mens pådraget har blitt beregnet fra 2-normen til et vektorielt pådragssignal $\mathbf{u}(t)$ som inneholder både pådraget til propellens skyvkraft og pådraget til propellens rotasjonsmoment i en pådragsvektor.

Vi ser at den kombinerte FF-FB-regulatoren er klart best på reguleringsnøyaktighet fordi den har klart minst sluttverdi for IAE-metrikken, men har mest variasjon i pådragsbruken fordi den har størst sluttverdi for IADC-metrikken.

Samtidig er den kombinerte FF-FB-regulatoren mest energieffektiv fordi den har klart minst sluttverdi for IAEW-metrikken. Metrikken IAE-ADC er en kombinert metrikk som multipliserer sammen IAE-metrikken og IADC-metrikken, men som ikke er pensum her.

Ellers er det interessant å se at FF-regulatoren har hårfint lavere sluttverdi for IAE-metrikken enn FB-regulatoren, som betyr at det ble utviklet en meget god modell for foroverkoblingsregulatoren.

Gyldigheten av denne modellen vil variere over tid og generelt bli dårligere jo lenger tid som har gått siden den ble laget fordi de fysiske egenskapene til høyhastighetsbåten vil endre seg noe over tid. Styringstestene ble kjørt relativt kort tid etter at modellen ble laget, og derfor er ytelsen til den modellbaserte foroverkoblingsregulatoren FF så bra, faktisk oppsiktsvekkende bra.

Samtidig er FF-regulatoren klart best med hensyn på aktuator-slitasje fordi den har klart minst sluttverdi for IADC-metrikken, som skyldes at den beregner et støyfritt pådragssignal siden den ikke inneholder noen målesignaler og dermed ikke noe målestøy.

Men i sum er det klart at den kombinerte FF-FB-regulatoren fungerer best med hensyn på både reguleringsnøyaktighet og energieffektivitet. Dette er en konklusjon som er umulig å gjøre på en objektivt tydelig måte uten å beregne og sammenligne ytelsen gjennom disse ytelsesmetrikkene.

Morten Breivik, 14. februar 2024

Referanser

- [1] M. E. N. Sørensen. «Topics in nonlinear and model-based control of ships». PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Norway. Se <https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/2977595>
- [2] B.-O. H. Eriksen and M. Breivik. «Modeling, identification and control of high-speed ASVs: Theory and experiments». In «Sensing and Control for Autonomous Vehicles: Applications to Land, Water and Air Vehicles», Springer International Publishing, 2017, pp. 407–431. Se <https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/2483676>