**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

# LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES

**Andevaldo da Encarnação Vitório**

**MANAUS-AM**

**2024**

Andevaldo da Encarnação Vitório

LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Lineares* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

# Capítulo 1

# Resolução da Lista de Exercícios

**Questão 1**

Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & -6 & 16 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Resolução:**

■

**Questão 2**

a) Calcule os autovalores e os autovetores correspondentes de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) Calcule o traço de $A$ e verifique que é igual a soma dos autovalores.

c) Encontre o determinante de $A$ e verifique que é igual ao produto dos autovalores.

**Resolução:**

■

**Questão 3**

Encontre os autovalores e a base de cada autoespaço das seguinte matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Resolução:**

■

**Questão 4**

Diagonalize as seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**Resolução:**

■

**Questão 5**

Escreva abaixo um matriz real que tenha:

a) autovalores $-1, 3$ e autovalores correspondentes $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

b) autovalores $0, 2, -2$ e autovalores correspondentes $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

c) um autovalor de $3$ e um autovalor correspondente $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

d) autovalores $-1+2i$ e autovalor correspondente $\begin{bmatrix} 1+i \\ 3i \end{bmatrix}$;

e) autovalores $-2$ e autovalor correspondente $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$;

**Resolução:**

■

**Questão 6**

Encontre uma base para o complemento ortogonal de cada um dos conjuntos a seguir no espaço de produto interno indicado.

(a) $\{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $\{(1,1,1),(2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

**Resolução:**

■

**Questão 7**

Calcule uma base de cada um dos quatro subespaços fundamentais das seguintes matrizes e verifique que elas satisfazem as relações de ortogonalidade:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

■

**Questão 8**

Calcule a decomposição QR da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■

**Questão 9**

Calcule a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■

**Questão 10**

Considere o seguinte conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$ (com o produto interno convencional):

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Agora, realize o processo de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal de vetores.

**Resolução:**

■

**Questão 11**

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Encontre $P(\lambda)$, o polinômio característico de $A$.

b. Encontre os autovalores de $A$.

c. Mostre que $P(A) = 0$.

**Resolução:**

■

**Questão 12**

Seja a matriz $3 \times 3$ $A$ definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $A^{2004}$ e $e^{At}$.

**Resolução:**

■

**Questão 13**

Encontre a representação no espaço de estados para os seguintes sistemas dinâmicos na forma canônica controlável:

a. $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 7u(t).$

**Resolução:**

■

**Questão 14**

Determine se as seguintes matrizes são definidas positivas / semi-definidas ou definidas negativas / semi-definidas:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; c. $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

■

**Questão 15**

Considere o sistema no tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

a. Encontre a matriz de transição de estados $A^k$.

b. Encontre $y(k)$ se $x(0) = [1\,1\,1\,1]^T$ e $u(k) = 0$.

c. Encontre $y(k)$ se $x(0) = [1\,1\,1\,1]^T$ e $u(k) = 1$ para $k \geq 0$.

**Resolução:**

■

**Questão 16**

O seguinte sistema é controlável? Ele é observável?

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■