UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES

Andevaldo da Encarnação Vitório

MANAUS-AM

2024

Andevaldo da Encarnação Vitório

LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Lineares* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

Capítulo 1

Resolução da Lista de Exercícios

Questão 1

Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & -6 & 16 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Os autovalores λ são encontrados resolvendo o determinante da matriz característica $A -$

$\lambda I = 0$, onde I é a matriz identidade.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) - (-2)(-2),$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4,$$

$$\det(A - \lambda I) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4,$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Agora resolve-se a equação característica:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Fatorando:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$$

Portanto, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores são encontrados resolvendo $(A - \lambda I)v = 0$ para cada λ. Para $\lambda_1 = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo $(A - 3I)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação reduzida é:

$$-2v_1 - 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = 0.$$

Escolhendo $v_1 = 1$, então $v_2 = -1$. O autovetor associado a $\lambda_1 = 3$ é:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$:

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1+1 & -2 \\ -2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo $(A + I)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação reduzida é:

$$2v_1 - 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2.$$

Escolhendo $v_1 = 1$, então $v_2 = 1$. O autovetor associado a $\lambda_2 = -1$ é:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$6\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0.$$

Como o discriminante é negativo ($\Delta = -23$), os autovalores são complexos:

$$\lambda_1 = \frac{7}{12} + i\frac{\sqrt{23}}{12}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12} - i\frac{\sqrt{23}}{12}.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - i\frac{\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Resolve-se a equação característica det$(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(d) Resolve-se a equação característica det$(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0.$$

Como o discriminante é negativo ($\Delta = -8$), os autovalores são complexos:

$$\lambda_1 = 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases} .$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + (2-\lambda)v_2 - v_3 = 0 \\ -v_2 + (3-\lambda)v_3 = 0 \end{cases} .$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(f) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 6 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\sqrt{6},\ \lambda_3 = \sqrt{6}$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 4 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)v_1 - v_2 + 4v_3 = 0 \\ -v_1 + (3-\lambda)v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + (-1-\lambda)v_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} -2-\sqrt{6} \\ 4-\sqrt{6} \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} -2+\sqrt{6} \\ 4+\sqrt{6} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(g) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$-\lambda^3 + 12\lambda = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -2\sqrt{3}, \; \lambda_3 = 2\sqrt{3}.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & 11 \\ 2 & -6-\lambda & 16 \\ 1 & -3 & 7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)v_1 + 3v_2 + 11v_3 = 0 \\ 2v_1 + (-6-\lambda)v_2 + 16v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_2 + (7-\lambda)v_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} -3-9\sqrt{3} \\ 6-\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} -3+9\sqrt{3} \\ 6+\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(h) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 2.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda - 52 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{105}}{2},\ \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{105}}{2}$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 9-\sqrt{105} \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 9+\sqrt{105} \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(j) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 22\lambda^2 + 84\lambda + 49 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_{3,4} = 7.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(k) Resolve-se a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que resulta em:

$$(-\lambda + 4)(-\lambda + 3)(-\lambda + 2)(-\lambda + 1) = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 1.$$

Para cada λ, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

Questão 2

a) Calcule os autovalores e os autovetores correspondentes de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) Calcule o traço de A e verifique que é igual a soma dos autovalores.

c) Encontre o determinante de A e verifique que é igual ao produto dos autovalores.

Resolução:

Primeiramente, inicia-se pelo cálculo dos autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Os autovalores são encontrados resolvendo o determinante da matriz característica $A - \lambda I$, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$. A matriz característica é dada por

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & 4 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 4\\ 3 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2+13\lambda-15.$$

Os autovalores de A são as raízes da equação cúbica $-\lambda^3+3\lambda^2+13\lambda-15=0$. Aplicando métodos de fatoração, obtém-se que os autovalores são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=5$.

Para os autovetores, resolve-se $(A-\lambda I)v=0$ para cada autovalor. Para $\lambda_1=1$, tem-se a matriz

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

e a solução do sistema linear correspondente fornece o autovetor $v_1=\begin{bmatrix}-2\\ -3\\ 3\end{bmatrix}$. Analogamente, para $\lambda_2=-3$, a matriz

$$A+3I=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

leva ao autovetor $v_2=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$. Por fim, para $\lambda_3=5$, resolve-se

$$A-5I=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ 3 & -6 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

resultando no autovetor $v_3=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

O traço de A é a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, $1+(-1)+3=3$. Nota-se que isso é igual à soma dos autovalores $1+(-3)+5=3$, confirmando a relação. O determinante de

A, calculado diretamente, é -15, o que corresponde ao produto dos autovalores $1 \cdot (-3) \cdot (5) = -15$, confirmando a propriedade. ■

Questão 3

Encontre os autovalores e a base de cada autoespaço das seguinte matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, inicia-se determinando os autovalores resolvendo o determinante da matriz característica $A - \lambda I$. Tem-se:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-\lambda) - (-4)(1).$$

Expandindo os termos:

$$\det(A - \lambda I) = -4\lambda + \lambda^2 + 4.$$

Fatorando a equação quadrática:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Logo, o autovalor de A é $\lambda = 2$, com multiplicidade algébrica 2. Para determinar a base do autoespaço associado, resolve-se o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Substituindo $\lambda = 2$, obtém-se:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A forma escalonada da matriz é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema correspondente é:

$$x_1 - 2x_2 = 0.$$

Logo, $x_1 = 2x_2$, e a solução geral é:

$$v = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a base do autoespaço associado a $\lambda = 2$ é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Segue a solução resumida para as matrizes fornecidas, com cálculo dos autovalores e as bases dos autoespaços associados:

(b) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, temos que o determinante de $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$, os autoespaços: Para $\lambda_1 = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},$$

base $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Para $\lambda_2 = -2$:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$

base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = 0.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$. Assim, para $\lambda_1 = 1 + 2i$, a base é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$; e para $\lambda_2 = 1 - 2i$, a base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, temos:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - i)^2 + 1 = 0.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i$. Logo, para $\lambda_1 = 0$, a base é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$; e para $\lambda_2 = i - 1$, a base é $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$.

(e) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, os autovalores são $\lambda_{1,2,3} = 3$ (multiplicidade algébrica 3).

Dessa forma, os autovetores, para $\lambda_{1,2,3} = 3$. são obtidos pela base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(f) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, os autovalores são $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -2$. Logo, para $\lambda_{1,2} = 2$, a base é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Para $\lambda_3 = -2$, a base é $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(g) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, os autovalores são $\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = 3$. Para cada autovalor, as bases são $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(h) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, os autovalores são $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1, \lambda_4 = -1$. Para cada autovalor, as bases são $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(i) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, os autovalores são $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 2$. Para cada autovalor, as bases são $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

■

Questão 4

Diagonalize as seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução:

As matrizes foram diagonalizadas usando o algoritmo de decomposição por valores singulares implementado em um trabalho requerido nessa disciplina.

(a) $$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8321 & -0.55 \\ -0.555 & 0.832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.4 & 0 \\ 0 & 2.81 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.316 & 0.949 \\ -0.949 & -0.316 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.946 & -0.325 \\ -0.325 & 0.946 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.77 & 0 \\ 0 & 0.443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.795 & 0.607 \\ -0.607 & -0.795 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.639 & -0.770 \\ -0.770 & 0.639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.99 & 0 \\ 0 & 0.286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.915 & 0.403 \\ 0.403 & -0.915 \end{bmatrix}$

(d)

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.967 & -0.201 & 0.159 \\ 0.0665 & 0.402 & 0.913 \\ 0.248 & -0.893 & 0.375 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.46 & 0 & 0 \\ 0 & 3.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0.649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.650 & 0.665 & 0.368 \\ -0.194 & 0.323 & -0.926 \\ -0.735 & -0.673 & -0.0811 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.893 & -0.0926 & 0.440 \\ 0.262 & -0.902 & -0.342 \\ -0.365 & -0.421 & 0.831 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9.56 & 0 & 0 \\ 0 & 2.14 & 0 \\ 0 & 0 & 1.71 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.944 & 0 & 0.329 \\ 0.329 & 0 & 0.944 \\ 0 & -1 & 2.22 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.393 & 0.914 & 0.101 \\ -0.569 & -0.327 & 0.754 \\ 0.723 & 0.239 & 0.649 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 16.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.471 & -0.639 & -0.608 \\ -0.0526 & -0.668 & 0.743 \\ 0.881 & -0.381 & -0.281 \end{bmatrix}$$

(g)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.775 & 0.577 & 0.256 \\ 0.166 & -0.577 & 0.800 \\ -0.610 & 0.577 & 0.543 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 9.36 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.641 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.166 & 0.775 & 0.610 \\ 0.577 & -0.577 & 0.577 \\ 0.8 & 0.256s & -0.543 \end{bmatrix}$$

(h)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.449 & -0.286 & -0.704 & 0.470 \\ 0.730 & 0.621 & 0.271 & 0.0863 \\ 0.151 & 0.163 & -0.520 & -0.825 \\ -0.493 & 0.711 & -0.4 & 0.303 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 2.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.151 & 0.493 & -0.449 & 0.730 \\ -0.163 & 0.711 & -0.286 & -0.621 \\ -0.520 & 0.4 & 0.704 & 0.271 \\ 0.825 & 0.303 & 0.470 & 0.0863 \end{bmatrix}$$

(i)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(j)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.512 & -0.337 & 0.618 & -0.492 \\ 0.853 & -0.0953 & 0.415 & -0.302 \\ -0.0926 & 0.790 & 0.552 & 0.248 \\ -0.0362 & 0.503 & -0.376 & -0.778 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 4.37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.582 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.821 & -0.508 & 0.0879 & 0.246 \\ -0.141 & -0.0532 & 0.592 & -0.792 \\ -0.0169 & -0.365 & -0.758 & -0.540 \\ -0.553 & 0.778 & -0.258 & -0.147 \end{bmatrix}$$

■

Questão 5

Escreva abaixo um matriz real que tenha:

a) autovalores $-1, 3$ e autovalores correspondentes $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

b) autovalores $0, 2, -2$ e autovalores correspondentes $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

c) um autovalor de 3 e um autovalor correspondente $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

d) autovalores $-1 + 2i$ e autovalor correspondente $\begin{bmatrix} 1+i \\ 3i \end{bmatrix}$;

e) autovalores -2 e autovalor correspondente $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$;

Resolução:

(a) Autovalores $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ e autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Forma diagonalizável:

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz resultante é:

$$A = \begin{bmatrix} 1.67 & 1.33 \\ 2.67 & 0.333 \end{bmatrix}.$$

(b) Autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ e autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Forma diagonalizável:

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Invertendo P, calcula-se A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

(c) Autovalor $\lambda = 3$ e autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Os vetores fornecidos formam uma base do autoespaço de $\lambda = 3$. Logo,

$$3a_{11} - a_{12} = 9 \quad 3a_{21} - a_{22} = -3,$$

Assim, a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

(d) Autovalor $\lambda = -1 + 2i$ e autovetor $v = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3i \end{bmatrix}$. Para uma matriz com autovalores complexos, a matriz será do tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} + 1 - 2i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + 1 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(a_{11} + 1 - 2i)(1 + i) + a_{12} \cdot 3i = 0.$$

Selecionando $a_{12} = 0$, temos $a_{11} = -1 + 2i$.

$$a_{21}(1 + i) + (a_{22} + 1 - 2i) \cdot 3i = 0.$$

Selecionando $a_{21} = 0$, temos $a_{22} = -1 + 2i$. Logo,

$$\begin{bmatrix} -1 + 2i & 0 \\ 0 & -1 + 2i \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

(e) Autovalor $\lambda = -2$ e autovetor $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Neste caso, a matriz A é escalonada com $\lambda = -2$ e o autoespaço é gerado pelo vetor dado:

$$A = -2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

■

Questão 6

Encontre uma base para o complemento ortogonal de cada um dos conjuntos a seguir no espaço de produto interno indicado.

(a) $\{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $\{(1,1,1),(2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Resolução:

(a) O conjunto dado contém apenas o vetor nulo. O complemento ortogonal é o conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}^3$, pois qualquer vetor é ortogonal ao vetor nulo. Assim, uma base para o complemento ortogonal é a base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Para encontrar o complemento ortogonal, busca-se os vetores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem:

$$(1,1,1) \cdot (x,y,z) = 0,$$
$$(2,1,0) \cdot (x,y,z) = 0.$$

Escrevendo as equações:

$$x + y + z = 0, \quad 2x + y = 0.$$

Resolvendo o sistema, temos da segunda equação: $y = -2x$. Substituindo na primeira equação:

$$x - 2x + z = 0 \implies -x + z = 0 \implies z = x.$$

O vetor v assume a forma $v = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim, o complemento ortogonal é gerado por este vetor, e a base é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

Questão 7

Calcule uma base de cada um dos quatro subespaços fundamentais das seguintes matrizes e verifique que elas satisfazem as relações de ortogonalidade:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

As colunas de A são linearmente dependentes ($\text{rank}(A) = 1$). A base de $\mathcal{C}(A)$ é formada pela primeira coluna:

$$\mathcal{C}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Resolvendo $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução é $x_1 + 2x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = -2x_2$. O núcleo é:

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

As linhas de A são linearmente dependentes. A base de $\mathcal{C}(A^T)$ é a primeira linha:

$$\mathcal{C}(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Resolvendo $A^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução é $y_2 = -3y_1$. O núcleo é:

$$\mathcal{N}(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Logo, temos $\mathcal{C}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$ e $\mathcal{C}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$.

(b) Matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Oposto as colunas de A, reduzimos A por escalonamento. O posto de A é 2, então duas colunas formam a base:

$$\mathcal{C}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Resolvendo $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$. A solução do sistema fornece dois vetores independentes:

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

As linhas de A são linearmente independentes, então ambas formam a base:

$$\mathcal{C}(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

O núcleo é nulo, pois rank$(A^T) = 2$, e A^T não possui vetores livres.

Relações de Ortogonalidade: $\mathcal{C}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$ e $\mathcal{C}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$.

■

Questão 8

Calcule a decomposição QR da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Usando o algoritmo implementado como requisitado durante a disciplina, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.33 & -0.67 \\ -0.67 & 0.67 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Questão 9

Calcule a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Usando o algoritmo implementado como requisitado durante a disciplina, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.577 & -0.408 \\ 0 & -0.577 & 0.816 \\ -0.707 & 0.577 & 0.408 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 4.90 & 0 & 0 \\ 0 & 2.45 & 0 \\ 0 & 0 & 3.46 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.577 & -0.577 & -0.577 \\ 0.707 & -1.11 \cdot 10^{-16} & 0.707 \\ 0.408 & -0.816 & 0.408 \end{bmatrix}$$

■

Questão 10

Considere o seguinte conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$ (com o produto interno convencional):

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Agora, realize o processo de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal de vetores.

Resolução:

Segue a resolução do problema utilizando o processo de Gram-Schmidt:

Dado o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, os vetores ortogonais $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ são obtidos pelo seguinte procedimento:

Primeiro, define-se $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, ou seja:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, calcula-se $\mathbf{u}_2$, subtraindo de $\mathbf{v}_2$ a projeção de $\mathbf{v}_2$ sobre $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2),$$

onde:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1.$$

Assim, o conjunto ortogonal é:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.95 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

Questão 11

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Encontre $P(\lambda)$, o polinômio característico de A.

b. Encontre os autovalores de A.

c. Mostre que $P(A) = 0$.

Resolução:

(a) O polinômio característico é dado por $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, onde I é a matriz identidade. Calcula-se:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

A partir do determinante:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda - 6.$$

(b) Os autovalores são as raízes de $P(\lambda) = 0$:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda - 6 = 0.$$

Assim, os autovalores de A são:

$$\lambda_1 \approx\ 0.57005\ldots,\ \lambda_2 \approx\ -1.71331\ldots,\ \lambda_3 \approx\ 6.14325\ldots.$$

(c)

Substituindo A no polinômio $P(A) = -A^3+7A^2+8A-32I$, verifica-se que a matriz resultante é nula. Este resultado é garantido pelo Teorema de Cayley-Hamilton, que afirma que toda matriz quadrada satisfaz sua própria equação característica. ■

Questão 12

Seja a matriz 3×3 A definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{2004} e e^{At}.

Resolução:

Cálculo de A^{2004}

Primeiramente, encontra-se a diagonalização de A, ou seja, $A = PDP^{-1}$, onde D é diagonal, contendo os autovalores de A. Assim:

$$A^{2004} = PD^{2004}P^{-1}.$$

O polinômio característico de A é dado por $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, com:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Calcula-se:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda.$$

Logo:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2).$$

Os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Para $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$:

$$(A - \sqrt{2}I)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = -\sqrt{2}$:

$$(A + \sqrt{2}I)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz D é diagonal, com os autovalores:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A matriz P contém os autovetores como colunas:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como D^{2004} é:

$$D^{2004} = \begin{bmatrix} 0^{2004} & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^{2004} & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^{2004} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1002} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1002} \end{bmatrix},$$

tem-se:

$$A^{2004} = PD^{2004}P^{-1}.$$

Cálculo de $\mathbf{e^{At}}$

A exponencial de matriz é dada por:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1},$$

onde:

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}.$$

Substituindo e^{Dt} e usando P e P^{-1}, calcula-se e^{At}:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{2 + e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{4} & \dfrac{-e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}}{2\sqrt{2}} & \dfrac{-2 + e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{4} \\ \dfrac{e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}}{2\sqrt{2}} & \dfrac{-e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}}{2} & \dfrac{e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{-2 + e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{4} & \dfrac{-e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}}{2\sqrt{2}} & \dfrac{2 + e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{4} \end{bmatrix}$$

■

Questão 13

Encontre a representação no espaço de estados para os seguintes sistemas dinâmicos na forma canônica controlável:

a. $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 7u(t).$

Resolução:

Para obter a representação no espaço de estados na forma canônica controlável, inicia-se reorganizando a equação diferencial dada:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 7u(t).$$

Reescrevendo, isolando a derivada de maior ordem:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} = -3\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + 7u(t).$$

Define-se as variáveis de estado para transformar a equação diferencial em um sistema de equações de primeira ordem:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad x_3(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

Derivando cada uma:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_3(t) = \frac{d^3y(t)}{dt^3}.$$

Substituindo a última expressão na equação original:

$$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t) - 4x_2(t) - 2x_1(t) + 7u(t).$$

Escrevendo o sistema na forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

onde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

A matriz A (forma canônica controlável), vetor B, matriz C, e escalar D são determinados como segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Portanto, a representação do sistema no espaço de estados na forma canônica controlável é:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

■

Questão 14

Determine se as seguintes matrizes são definidas positivas / semi-definidas ou definidas negativas / semi-definidas:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; c. $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Critérios para definição positiva / negativa:

Uma matriz M é:

- *Definida positiva* se todos os autovalores de M forem positivos;
- *Definida negativa* se todos os autovalores de M forem negativos;

- *Semi-definida positiva* se todos os autovalores forem não-negativos (incluindo zero);
- *Semi-definida negativa* se todos os autovalores forem não-positivos (incluindo zero);
- Caso contrário, M é indefinida;

(a) Os autovalores da datriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ são 1 e 5. Ambos os autovalores são positivos, logo, A é definida positiva.

(b) Os autovalores da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ são 0 e 5. Os autovalores são não-negativos, logo, B é semi-definida positiva.

(c) Os autovalores da matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ são $_1 = \dfrac{-5+\sqrt{65}}{2}$, $_2 = \dfrac{-5-\sqrt{65}}{2}$. Como há um autovalor positivo e outro negativo, então a matriz é indefinida. ■

Questão 15

Considere o sistema no tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

a. Encontre a matriz de transição de estados A^k.

b. Encontre $y(k)$ se $x(0) = [1\,1\,1\,1]^T$ e $u(k) = 0$.

c. Encontre $y(k)$ se $x(0) = [1\,1\,1\,1]^T$ e $u(k) = 1$ para $k \geq 0$.

Resolução:

A matriz de estados A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A^k é calculada utilizando a estrutura da matriz. Observando A, percebe-se que a matriz desloca os elementos para cima ao multiplicar por A. Para k, tem-se:

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ para } k \geq 4.$$

Para $k < 4$, cada passo desloca os valores das colunas para a direita. Especificamente:

- $k = 1$: $A^1 = A$,
- $k = 2$: $A^2 = A \cdot A$,
- $k = 3$: $A^3 = A^2 \cdot A$.

Quando $u(k) = 0$, a equação do sistema reduz-se a:

$$x(k+1) = Ax(k).$$

Portanto:

$$x(k) = A^k x(0).$$

O vetor inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é atualizado iterativamente com A^k. Com a matriz de saída:

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

Como C seleciona apenas o primeiro elemento de $x(k)$, tem-se $y(k) = 0$ para $k \geq 1$, já que $A^k x(0)$ resulta em zeros nas posições correspondentes após o deslocamento.

Para $u(k) = 1$, a solução do sistema no tempo discreto é dada por:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j),$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando a resposta de estado:

- O termo $A^k x(0)$ foi calculado na parte (b).
- O segundo termo envolve a soma ponderada por $u(j)$, que vale 1 para todo j. Substituindo B e A^k, obtém-se:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B.$$

Para $y(k) = Cx(k)$:

$$y(k) = C \left(A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B \right).$$

Substituindo os valores de $C, A, x(0)$, e B, conclui-se que o resultado para $y(k)$ envolve uma combinação linear dos deslocamentos, com valores dependentes de k. ■

Questão 16

O seguinte sistema é controlável? Ele é observável?

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Controlabilidade: O sistema é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ é dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}.$$

Calculando AB e A^2B:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Determinando o posto de $\mathcal{C}$:

$$\text{posto}(\mathcal{C}) = 3,$$

que é igual à dimensão do estado. Logo, o sistema é controlável.

Observabilidade:

O sistema de saída é descrito por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ é dada por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}.$$

Calculando CA e CA^2:

$$CA = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad CA^2 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 18 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -7 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinando o posto de $\mathcal{O}$:

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = 3,$$

que é igual à dimensão do estado. Logo, o sistema é observável.

■