



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES**

**Andevaldo da Encarnação Vitório**

**MANAUS-AM**

**2024**

Andeivaldo da Encarnação Vitorio

## LISTA 4 DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Lineares* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

# Capítulo I

## Resolução da Lista de Exercícios

### Questão 1

Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

i)  $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & -6 & 16 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

j)  $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

h)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

k)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

### Resolução:

(a) Os autovalores  $\lambda$  são encontrados resolvendo o determinante da matriz característica  $A -$

$\lambda I = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2)(-2),$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4,$$

$$\det(A - \lambda I) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4,$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Agora resolve-se a equação característica:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Fatorando:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$$

Portanto, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores são encontrados resolvendo  $(A - \lambda I)v = 0$  para cada  $\lambda$ . Para  $\lambda_1 = 3$ :

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 - 3 & -2 \\ -2 & 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo  $(A - 3I)v = 0$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação reduzida é:

$$-2v_1 - 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = 0.$$

Escolhendo  $v_1 = 1$ , então  $v_2 = -1$ . O autovetor associado a  $\lambda_1 = 3$  é:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = -1$ :

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1+1 & -2 \\ -2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo  $(A + I)v = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação reduzida é:

$$2v_1 - 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2.$$

Escolhendo  $v_1 = 1$ , então  $v_2 = 1$ . O autovetor associado a  $\lambda_2 = -1$  é:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**(b)** Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$6\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0.$$

Como o discriminante é negativo ( $\Delta = -23$ ), os autovalores são complexos:

$$\lambda_1 = \frac{7}{12} + i\frac{\sqrt{23}}{12}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12} - i\frac{\sqrt{23}}{12}.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - i\frac{\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + (1 - \lambda)v_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(d) Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0.$$

Como o discriminante é negativo ( $\Delta = -8$ ), os autovalores são complexos:

$$\lambda_1 = 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + (1 - \lambda)v_2 = 0 \end{cases}.$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**(e)** Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + (2 - \lambda)v_2 - v_3 = 0 \\ -v_2 + (3 - \lambda)v_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**(f)** Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 6 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\sqrt{6}, \quad \lambda_3 = \sqrt{6}$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 4 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)v_1 - v_2 + 4v_3 = 0 \\ -v_1 + (3-\lambda)v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + (-1-\lambda)v_3 = 0 \end{cases} .$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 - \sqrt{6} \\ 4 - \sqrt{6} \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -2 + \sqrt{6} \\ 4 + \sqrt{6} \\ 2 \end{bmatrix} .$$

**(g)** Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$-\lambda^3 + 12\lambda = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2\sqrt{3}, \lambda_3 = 2\sqrt{3}.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & 11 \\ 2 & -6-\lambda & 16 \\ 1 & -3 & 7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)v_1 + 3v_2 + 11v_3 = 0 \\ 2v_1 + (-6-\lambda)v_2 + 16v_3 = 0 \\ v_1 - 3v_2 + (7-\lambda)v_3 = 0 \end{cases} .$$

Assim, os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 - 9\sqrt{3} \\ 6 - \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -3 + 9\sqrt{3} \\ 6 + \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} .$$

**(h)** Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$$



Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda - 52 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{105}}{2}, \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{105}}{2}$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 9 - \sqrt{105} \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 9 + \sqrt{105} \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(j) Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 22\lambda^2 + 84\lambda + 49 = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_{3,4} = 7.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(k) Resolve-se a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que resulta em:

$$(-\lambda + 4)(-\lambda + 3)(-\lambda + 2)(-\lambda + 1) = 0$$

Logo, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1.$$

Para cada  $\lambda$ , resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Os autovetores associados são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

### Questão 2

- a) Calcule os autovalores e os autovetores correspondentes de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .
- b) Calcule o traço de  $A$  e verifique que é igual a soma dos autovalores.
- c) Encontre o determinante de  $A$  e verifique que é igual ao produto dos autovalores.

### Resolução:

Primeiramente, inicia-se pelo cálculo dos autovalores e autovetores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

Os autovalores são encontrados resolvendo o determinante da matriz característica  $A - \lambda I$ , ou seja,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . A matriz característica é dada por

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 & 4 \\ 3 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 & 4 \\ 3 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 13\lambda - 15.$$

Os autovalores de  $A$  são as raízes da equação cúbica  $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 13\lambda - 15 = 0$ . Aplicando métodos de fatoração, obtém-se que os autovalores são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = 5$ .

Para os autovetores, resolve-se  $(A - \lambda I)v = 0$  para cada autovalor. Para  $\lambda_1 = 1$ , tem-se a matriz

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

e a solução do sistema linear correspondente fornece o autovetor  $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Analogamente, para

$\lambda_2 = -3$ , a matriz

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

leva ao autovetor  $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Por fim, para  $\lambda_3 = 5$ , resolve-se

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

resultando no autovetor  $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

O traço de  $A$  é a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,  $1 + (-1) + 3 = 3$ . Nota-se que isso é igual à soma dos autovalores  $1 + (-3) + 5 = 3$ , confirmando a relação. O determinante de

$A$ , calculado diretamente, é  $-15$ , o que corresponde ao produto dos autovalores  $1 \cdot (-3) \cdot (5) = -15$ , confirmando a propriedade. ■

**Questão 3**

Encontre os autovalores e a base de cada autoespaço das seguintes matrizes:

a)  $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

h)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

i)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Resolução:**

(a) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , inicia-se determinando os autovalores resolvendo o determinante da matriz característica  $A - \lambda I$ . Tem-se:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(-\lambda) - (-4)(1).$$

Expandindo os termos:

$$\det(A - \lambda I) = -4\lambda + \lambda^2 + 4.$$

Fatorando a equação quadrática:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Logo, o autovalor de  $A$  é  $\lambda = 2$ , com multiplicidade algébrica 2. Para determinar a base do autoespaço associado, resolve-se o sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Substituindo  $\lambda = 2$ , obtém-se:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A forma escalonada da matriz é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema correspondente é:

$$x_1 - 2x_2 = 0.$$

Logo,  $x_1 = 2x_2$ , e a solução geral é:

$$v = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a base do autoespaço associado a  $\lambda = 2$  é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Segue a solução resumida para as matrizes fornecidas, com cálculo dos autovalores e as bases dos autoespaços associados:

**(b)** Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ , temos que o determinante de  $A - \lambda I$ :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -8 \\ 4 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Logo, os autovalores são  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -2$ , os autoespaços: Para  $\lambda_1 = 2$ :

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\text{base } \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Para } \lambda_2 = -2:$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\text{base } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**(c)** Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ , temos:

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = 0.$$

Logo, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 1 - 2i$ . Assim, para  $\lambda_1 = 1 + 2i$ , a base é  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 + i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ; e para  $\lambda_2 = 1 - 2i$ , a base  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ .

**(d)** Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ , temos:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - i)^2 + 1 = 0.$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2i$ . Logo, para  $\lambda_1 = 0$ , a base é  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$ ; e para  $\lambda_2 = i - 1$ ,

$$\text{a base é } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

(e) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , os autovalores são  $\lambda_{1,2,3} = 3$  (multiplicidade algébrica 3).

Dessa forma, os autovetores, para  $\lambda_{1,2,3} = 3$ , são obtidos pela base  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

(f) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ , os autovalores são  $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -2$ . Logo, para  $\lambda_{1,2} = 2$ , a base é  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Para  $\lambda_3 = -2$ , a base é  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

(g) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ , os autovalores são  $\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = 3$ . Para cada autovalor, as bases são  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

(h) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ , os autovalores são  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1, \lambda_4 = -1$ . Para cada autovalor, as bases são  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ,  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

(i) Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , os autovalores são  $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 2$ . Para cada

autovalor, as bases são  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

■

**Questão 4**

Diagonalize as seguintes matrizes:

a)  $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

h)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

i)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

j)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**Resolução:**

As matrizes foram diagonalizadas usando o algoritmo de decomposição por valores singulares implementado em um trabalho requerido nessa disciplina.

(a)  $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8321 & -0.555 \\ -0.555 & 0.832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.4 & 0 \\ 0 & 2.81 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.316 & 0.949 \\ -0.949 & -0.316 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.946 & -0.325 \\ -0.325 & 0.946 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.77 & 0 \\ 0 & 0.443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.795 & 0.607 \\ -0.607 & -0.795 \end{bmatrix}$



$$(c) \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.639 & -0.770 \\ -0.770 & 0.639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.99 & 0 \\ 0 & 0.286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.915 & 0.403 \\ 0.403 & -0.915 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.967 & -0.201 & 0.159 \\ 0.0665 & 0.402 & 0.913 \\ 0.248 & -0.893 & 0.375 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 4.46 & 0 & 0 \\ 0 & 3.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0.649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.650 & 0.665 & 0.368 \\ -0.194 & 0.323 & -0.926 \\ -0.735 & -0.673 & -0.0811 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.893 & -0.0926 & 0.440 \\ 0.262 & -0.902 & -0.342 \\ -0.365 & -0.421 & 0.831 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 9.56 & 0 & 0 \\ 0 & 2.14 & 0 \\ 0 & 0 & 1.71 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.944 & 0 & 0.329 \\ 0.329 & 0 & 0.944 \\ 0 & -1 & 2.22 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.393 & 0.914 & 0.101 \\ -0.569 & -0.327 & 0.754 \\ 0.723 & 0.239 & 0.649 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 16.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.471 & -0.639 & -0.608 \\ -0.0526 & -0.668 & 0.743 \\ 0.881 & -0.381 & -0.281 \end{bmatrix}$$

(g)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.775 & 0.577 & 0.256 \\ 0.166 & -0.577 & 0.800 \\ -0.610 & 0.577 & 0.543 \end{bmatrix} \\
 \times \begin{bmatrix} 9.36 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.641 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.166 & 0.775 & 0.610 \\ 0.577 & -0.577 & 0.577 \\ 0.8 & 0.256s & -0.543 \end{bmatrix}$$

(h)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.449 & -0.286 & -0.704 & 0.470 \\ 0.730 & 0.621 & 0.271 & 0.0863 \\ 0.151 & 0.163 & -0.520 & -0.825 \\ -0.493 & 0.711 & -0.4 & 0.303 \end{bmatrix} \\
 \times \begin{bmatrix} 2.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.151 & 0.493 & -0.449 & 0.730 \\ -0.163 & 0.711 & -0.286 & -0.621 \\ -0.520 & 0.4 & 0.704 & 0.271 \\ 0.825 & 0.303 & 0.470 & 0.0863 \end{bmatrix}$$

(i)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(j)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.512 & -0.337 & 0.618 & -0.492 \\ 0.853 & -0.0953 & 0.415 & -0.302 \\ -0.0926 & 0.790 & 0.552 & 0.248 \\ -0.0362 & 0.503 & -0.376 & -0.778 \end{bmatrix} \\
 \times \begin{bmatrix} 4.37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.582 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.821 & -0.508 & 0.0879 & 0.246 \\ -0.141 & -0.0532 & 0.592 & -0.792 \\ -0.0169 & -0.365 & -0.758 & -0.540 \\ -0.553 & 0.778 & -0.258 & -0.147 \end{bmatrix}$$

■

**Questão 5**

Escreva abaixo um matriz real que tenha:

- a) autovalores  $-1, 3$  e autovalores correspondentes  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
- b) autovalores  $0, 2, -2$  e autovalores correspondentes  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ;
- c) um autovalor de  $3$  e um autovalor correspondente  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;
- d) autovalores  $-1 + 2i$  e autovalor correspondente  $\begin{bmatrix} 1 + i \\ 3i \end{bmatrix}$ ;
- e) autovalores  $-2$  e autovalor correspondente  $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ;

**Resolução:**

■

**Questão 6**

Encontre uma base para o complemento ortogonal de cada um dos conjuntos a seguir no espaço de produto interno indicado.

(a)  $\{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ ;

(b)  $\{(1, 1, 1), (2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ .

**Resolução:**

■

**Questão 7**

Calcule uma base de cada um dos quatro subespaços fundamentais das seguintes matrizes e verifique que elas satisfazem as relações de ortogonalidade:

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

**Resolução:**

■

**Questão 8**

Calcule a decomposição QR da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■

**Questão 9**

Calcule a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■

**Questão 10**

Considere o seguinte conjunto de vetores em  $\mathbb{R}^2$  (com o produto interno convencional):

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Agora, realize o processo de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal de vetores.

**Resolução:**

■

**Questão 11**

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Encontre  $P(\lambda)$ , o polinômio característico de  $A$ .
- Encontre os autovalores de  $A$ .
- Mostre que  $P(A) = 0$ .

**Resolução:**

**Questão 12**

Seja a matriz  $3 \times 3$   $A$  definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $A^{2004}$  e  $e^{At}$ .

**Resolução:**

**Questão 13**

Encontre a representação no espaço de estados para os seguintes sistemas dinâmicos na forma canônica controlável:

$$\text{a. } \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 7u(t).$$

**Resolução:**



**Questão 14**

Determine se as seguintes matrizes são definidas positivas / semi-definidas ou definidas negativas / semi-definidas:

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{b. } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{c. } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**



**Questão 15**

Considere o sistema no tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

a. Encontre a matriz de transição de estados  $A^k$ .

b. Encontre  $y(k)$  se  $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $u(k) = 0$ .

c. Encontre  $y(k)$  se  $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $u(k) = 1$  para  $k \geq 0$ .

**Resolução:**

■

**Questão 16**

O seguinte sistema é controlável? Ele é observável?

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

■