UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE FUZZY ADAPTATIVO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Andevaldo da Encarnação Vitório

MANAUS-AM

2024

Andevaldo da Encarnação Vitório

CONTROLE FUZZY ADAPTATIVO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Inteligentes* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

Capítulo 1

Resolução da Primeira Lista

Questão 1

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e α é um escalar, qual é $\det(\alpha A)$? Qual é $\det(-A)$?

Resolução:

Para resolver esta questão, é necessário usar duas propriedades fundamentais das matrizes: o produto de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ com um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha M)_{ij} = \alpha m_{ij}, \quad \textit{para todos } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n, \tag{1.1}$$

e o determinante de uma matriz $N \in \mathbb{R}^{p\times p}$,

$$\det(N) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i+j} n_{ij} \det(N_{ij}), \tag{1.2}$$

onde N_{ij} é a matriz menor obtida removendo a i-ésima linha e a j-ésima coluna de N, com i sendo um valor fixo.

Dado isso, podemos escrever:

$$\det(\alpha A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha a_{ij} \det(\alpha A_{ij}). \tag{1.3}$$

Esse processo pode ser aplicado recursivamente até chegarmos a uma matriz quadrada de ordem 2, onde:

$$\det\left(\alpha\begin{bmatrix} A_{ij_{11}} & A_{ij_{12}} \\ A_{ij_{21}} & A_{ij_{22}} \end{bmatrix}\right) = \alpha^2\left(A_{ij_{11}}A_{ij_{22}} - A_{ij_{12}}A_{ij_{21}}\right) = \alpha^2 \det(A_{ij}). \tag{1.4}$$

Esse é o critério de parada. No processo de retorno, observando a equação anterior, nota-se o fator α multiplicando os determinantes das matrizes menores. Isso resulta em uma cadeia de multiplicações por α que ocorre em cada passo da recursão. Como são $n-2$ passos até a matriz de ordem 2, temos $n-2$ produtos de α, que ao serem combinados com α^2, resultam em α^n. Assim, temos:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \alpha^n \det(A). \tag{1.5}$$

No caso especial em que $\alpha = -1$, obtemos:

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A). \tag{1.6}$$

Ou seja, se a ordem da matriz A for par, o determinante da matriz oposta $-A$ será igual ao de A; se for ímpar, o determinante de $-A$ será o oposto do determinante de A.

Questão 2

Se A é orthogonal, qual é $\det A$? Se A é unitária, qual é $\det A$?

Resolução:

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada de ortogonal se:

$$A^T A = I, \tag{1.7}$$

onde A^T é a transposta de A e I é a matriz identidade de ordem n. Para Qualquer matriz A, temos:

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{1.8}$$

Para duas matrizes A e B, a seguinte relação é válida:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{1.9}$$

Além disso, sabemos que:

$$\det(I) = 1. \tag{1.10}$$

Usando a definição de matriz ortogonal, temos:

$$A^T A = I. \tag{1.11}$$

Aplicando o determinante em ambos os lados da equação, obtemos:

$$\det(A^T A) = \det(I). \tag{1.12}$$

Aplicando a propriedade do determinante do produto de matrizes, temos:

$$\det(A^T)\det(A) = \det(I). \tag{1.13}$$

Como o determinante da transposta é igual ao determinante da matriz original, $\det(A^T) = \det(A)$. *Portanto, a equação se simplifica para:*

$$\det(A)\det(A) = 1, \tag{1.14}$$

ou seja:

$$\det(A)^2 = 1. \tag{1.15}$$

A solução para essa equação é:

$$\det(A) = \pm 1. \tag{1.16}$$

Assim, o determinante de uma matriz ortogonal A é sempre ± 1.

Uma matriz A é dita unitária se $A^\dagger A = I$, *onde* $A^\dagger$ *é a matriz adjunta (ou conjugada transposta) de A, e I é a matriz identidade. Considerando que* $A^\dagger A = I$, *aplique o determinante em ambos os lados da igualdade:*

$$\det(A^\dagger A) = \det(I) \tag{1.17}$$

Usando a propriedade de que o determinante do produto de duas matrizes é o produto dos determinantes:

$$\det(A^\dagger A) = \det(A^\dagger)\det(A) \tag{1.18}$$

E como $\det(I) = 1$, *temos:*

$$\det(A^\dagger)\det(A) = 1 \tag{1.19}$$

Note que $\det(A^\dagger) = \overline{\det(A)}$, *onde* $\overline{\det(A)}$ *é o conjugado complexo de* $\det(A)$. *Assim:*

$$\overline{\det(A)}\det(A) = 1 \tag{1.20}$$

O produto $\overline{\det(A)}\det(A)$ *é, na verdade, o quadrado do módulo de* $\det(A)$*:*

$$|\det(A)|^2 = 1 \tag{1.21}$$

Portanto, tomando a raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtemos:

$$|\det(A)| = 1 \tag{1.22}$$

Assim, o módulo do determinante de uma matriz unitária é igual a 1.

Questão 3

Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\det(I - xy^\top) = 1 - y^\top x$.

Resolução:

Seja $A = I - xy^\top$. *A matriz A pode ser escrita como* I *menos o produto externo* $xy^\top$. *Usamos a fórmula de determinante para matrizes de rank 1:*

$$\det(I - xy^\top) = (1 - v^\top u). \tag{1.23}$$

Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, *a matriz* $xy^\top$ *é uma matriz de rank 1. O determinante de* $I - xy^\top$ *pode ser* *encontrado através da fórmula de determinante para matrizes de rank 1. Em particular, se M é uma matriz $n \times n$ e w é um vetor coluna, a fórmula de determinante para matrizes $M + xy^\top$ é dada por:*

$$\det(M + xy^\top) = \det(M)\left(1 + v^\top M^{-1}u\right). \tag{1.24}$$

Para $M = I$, temos:

$$\det(I + xy^\top) = 1 + y^\top x. \tag{1.25}$$

Assim, obtemos:

$$\det(I - xy^\top) = 1 - y^\top x. \tag{1.26}$$

Questão 4

Seja $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes ortogonais. Mostre que o produto $U = U_1U_2 \ldots U_k$ é uma matriz ortogonal.

Resolução:

Para demonstrar que o produto $U = U_1U_2 \cdots U_k$ de matrizes ortogonais $U_1, U_2, \ldots, U_k$ é também uma matriz ortogonal, é necessário provar que U satisfaz a condição de ortogonalidade. Especificamente, uma matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é considerada ortogonal se, e somente se, $U^TU = I$, onde U^T denota a transposta de U e I representa a matriz identidade.

Dado que cada matriz U_i para $i = 1, 2, \ldots, k$ é ortogonal, elas satisfazem a condição $U_i^TU_i = I$ e $U_iU_i^T = I$. O objetivo é demonstrar que o produto $U = U_1U_2 \cdots U_k$ também atende a essa condição. Para verificar isso, calculamos o produto U^TU. A transposta de U é dada por:

$$U^T = (U_1U_2 \cdots U_k)^T = U_k^T \cdots U_2^TU_1^T \tag{1.27}$$

Consequentemente, o produto U^TU é:

$$U^TU = (U_k^T \cdots U_2^TU_1^T)(U_1U_2 \cdots U_k) \tag{1.28}$$

Agrupando os termos, obtemos:

$$U^T U = U_k^T (U_k^T U_k)(U_{k-1}^T U_{k-1}) \cdots (U_2^T U_2)(U_1^T U_1) \tag{1.29}$$

Como $U_i^T U_i = I$ para cada i, o produto acima simplifica para:

$$U^T U = U_k^T I U_{k-1}^T I \cdots U_2^T I U_1^T I = I \tag{1.30}$$

Portanto, $U^T U = I$, o que confirma que a matriz U é ortogonal. Dessa forma, o produto de matrizes ortogonais é, de fato, ortogonal.

Questão 5

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O traço de A, denotado por $\operatorname{trace}(A)$, é definido como a soma de seus elementos diagonais, ou seja, $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Mostre que o traço é uma função linear; isto é, se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{trace}(A) + \beta \operatorname{trace}(B)$.

(b) Mostre que $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$, mesmo que em geral $AB \neq BA$.

(c) Seja $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antissimétrico, ou seja, $S^\top = -S$. Mostre que $\operatorname{trace}(S) = 0$. Então prove a afirmação contrária ou forneça um contraexemplo.

Resolução:

(a) *Prova de que o traço é uma função linear*

Para mostrar que o traço é uma função linear, devemos verificar que, para quaisquer matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\operatorname{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{trace}(A) + \beta \operatorname{trace}(B) \tag{1.31}$$

O traço de uma matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de C:

$$\mathrm{trace}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \tag{1.32}$$

Para a matriz $\alpha A + \beta B$, onde $(\alpha A + \beta B)_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$, temos:

$$\mathrm{trace}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) \tag{1.33}$$

Distribuindo a soma:

$$\mathrm{trace}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \beta b_{ii} \tag{1.34}$$

$$\mathrm{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \tag{1.35}$$

$$\mathrm{trace}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{trace}(A) + \beta\,\mathrm{trace}(B) \tag{1.36}$$

Portanto, o traço é uma função linear.

(b) *Prova de que* $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$

Para provar que $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$ *para matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, seguimos os seguintes passos: O traço de AB é:*

$$\mathrm{trace}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \tag{1.37}$$

O elemento $(AB)_{ii}$ é dado por:

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \tag{1.38}$$

Portanto:

$$\mathrm{trace}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \tag{1.39}$$

Reorganizando a soma:

$$\mathrm{trace}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \tag{1.40}$$

O traço de BA é:

$$\mathrm{trace}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \tag{1.41}$$

$$(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \tag{1.42}$$

Portanto:

$$\text{trace}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \tag{1.43}$$

Comparando as somas:

$$\text{trace}(BA) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}, \tag{1.44}$$

$$\text{trace}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}. \tag{1.45}$$

Logo, $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

(c) *Uma matriz* $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é anti-simétrica se* $S^T = -S$*. Vamos mostrar que* $\text{trace}(S) = 0$*. O traço de* S *é:*

$$\text{trace}(S) = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}. \tag{1.46}$$

Como $S^T = -S$*, os elementos da diagonal de* S *satisfazem:*

$$s_{ii} = -s_{ii}. \tag{1.47}$$

Portanto:

$$2s_{ii} = 0 \implies s_{ii} = 0. \tag{1.48}$$

Assim, o traço de S *é:*

$$\text{trace}(S) = \sum_{i=1}^{n} s_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0. \tag{1.49}$$

Portanto, o traço de uma matriz anti-simétrica é zero.

Nota sobre o Converse

Se uma matriz S *tem traço zero, isso não implica necessariamente que* S *seja anti-simétrica. Por exemplo, a matriz nula* $S = 0$ *é anti-simétrica e tem traço zero, mas uma matriz com traço zero não precisa ser anti-simétrica.*

Contraexemplo

Considere a matriz:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

O traço de S é $1 + 4 = 5$, que não é zero. Portanto, uma matriz com traço zero não precisa ser anti-simétrica, e anti-simetria não é uma condição necessária para que o traço seja zero.

Questão 6

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita ser idempotente se $A^2 = A$.

(a) Mostre que $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{bmatrix}$ é idempotente para todo θ.

(b) Suponha que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é idempotente e $A \neq I$. Mostre que A deve ser singular.

Resolução:

(a) *Primeiro, calculamos A^2. Se denotarmos A como $\frac{1}{2}B$, onde*

$$B = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

então

$$A = \frac{1}{2}B, \tag{1.52}$$

e precisamos calcular

$$A^2 = \left(\frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}B^2. \tag{1.53}$$

Assim, precisamos encontrar B^2:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{1.54}$$

Calculando o produto, obtemos:

$$B^2 = \begin{bmatrix} (2\cos^2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 & 2\cos^2\theta\cdot\sin 2\theta + \sin 2\theta\cdot 2\sin^2\theta \\ \sin 2\theta\cdot 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta & (\sin 2\theta)^2 + (2\sin^2\theta)^2 \end{bmatrix}. \tag{1.55}$$

Utilizando as identidades trigonométricas $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ *e* $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$*:*

$$(2\cos^2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2 = 4\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta = 4\cos^2\theta, \tag{1.56}$$

$$\sin 2\theta \cdot 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta \cdot \sin 2\theta = 2\sin 2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2\sin 2\theta, \tag{1.57}$$

$$(\sin 2\theta)^2 + (2\sin^2\theta)^2 = 4\sin^2\theta. \tag{1.58}$$

Logo,

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{1.59}$$

Então,

$$A^2 = \frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot B = \frac{1}{2}B = A. \tag{1.60}$$

Portanto, $A^2 = A$*, confirmando que* A *é idempotente para todo* θ*.*

(b) *Se* A *é idempotente, então:*

$$A^2 = A. \tag{1.61}$$

Suponha que λ *é um autovalor de* A*. Então, para um vetor próprio* v *associado a* λ*, temos:*

$$Av = \lambda v. \tag{1.62}$$

Aplicando a condição idempotente:

$$A^2 v = Av \implies \lambda^2 v = \lambda v \tag{1.63}$$

$$\lambda^2 = \lambda \implies \lambda(\lambda - 1) = 0 \tag{1.64}$$

Assim, os autovalores de A *devem ser* 0 *ou* 1*. Se* $A \neq I$*, então* A *não pode ser uma matriz onde todos os autovalores são* 1*. Assim, deve existir pelo menos um autovalor igual a* 0*. Logo, a matriz* A *tem pelo menos um autovalor igual a* 0*, o que implica que a matriz é singular (ou seja, seu determinante é zero). Portanto, qualquer matriz idempotente que não seja a matriz identidade deve ser singular.*
