UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LISTA 1 DE SISTEMAS LINEARES

Andevaldo da Encarnação Vitório

MANAUS-AM

2024

Andevaldo da Encarnação Vitório

LISTA 1 DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Inteligentes* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

Capítulo 1

Resolução da Lista de Exercícios

Questão 1

Encontre a matriz padrão das seguintes transformações lineares:

a) $T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2)$

b) $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, 2v_1 - v_2, -v_1 + 3v_2)$

c) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1 + v_2, v_1 + v_2 - v_3)$

d) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2, 2v_1 + v_3, v_2 - v_3)$

Resolução:

a) A transformação pode ser definida por uma expressão matemática, como $T(v) = Av$, onde A é uma matriz que representa a transformação. Assim, calculando as imagens dos vetores da base do domínio $\{(1,0), (0,1)\}$, obtemos:

$$T(1,0) = (1,3) \qquad \text{e} \qquad T(0,1) = (2,-1) \tag{1.1}$$

A matriz padrão é definida como $A = [T(1,0), T(0,1)]$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

b) Seguindo os mesmo procedimentos do item (a), obtemos:

$$T(1,0) = (1,2,-1) \qquad \text{e} \qquad T(0,1) = (1,-1,3) \tag{1.3}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

c) Seguindo os mesmo procedimentos do item (a), obtemos:

$$T(1,0,0) = (1,1), \qquad T(0,1,0) = (1,1) \qquad \text{e} \qquad T(0,0,1) = (0,-1) \tag{1.5}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

d) Seguindo os mesmo procedimentos do item (a), obtemos:

$$T(1,0,0) = (0,2,0), \qquad T(0,1,0) = (1,0,1) \qquad \text{e} \qquad T(0,0,1) = (0,1,-1) \tag{1.7}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

■

Questão 2

Encontre as matrizes padrões das transformações lineares T que agem da seguinte forma:

a) $T(1,0) = (3,-1)$ and $T(0,1) = (1,2)$.

b) $T(1,0) = (1,3)$ and $T(1,1) = (3,7)$.

c) $T(1,0) = (-1,0,1)$ and $T(0,1) = (2,3,0)$.

d) $T(1,0,0) = (2,1)$ and $T(0,1,0) = (-1,1)$ and $T(0,0,1) = (0,3)$.

e) $T(1,0,0) = (1,2,3)$, $T(1,1,0) = (0,1,2)$ and $T(1,1,1) = (0,0,1)$

Resolução:

a) As operações foram realizadas com os vetores que formam uma base. Portanto, a matriz padrão é definida como $A = [T(1,0), T(0,1)]$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

b) Temos que para encontrar o segundo vetor que forma base com o vetor $(1,0)$, podemos usar a propriedade de vetores linearmente dependentes para fragmentar o vetor $(1,1)$:

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) \tag{1.10}$$

$$T(1,1) = T(1,0) + T(0,1) \tag{1.11}$$

$$T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) \tag{1.12}$$

$$T(0,1) = (3,7) - (1,3) \tag{1.13}$$

$$T(0,1) = (2,4) \tag{1.14}$$

Logo, a matriz padrão é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

c) As operações foram realizadas com os vetores que formam uma base. Portanto, a matriz padrão é definida como $A = [T(1,0), T(0,1)]$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

d) As operações foram realizadas com os vetores que formam uma base. Portanto, a matriz padrão é definida como $A = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)]$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

e) A matriz padrão pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos apresentados no item (b). Para o vetor $(1,1,0)$:

$$(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) \tag{1.18}$$

$$T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0) \tag{1.19}$$

$$T(0,1,0) = T(1,1,0) - T(1,0,0) \tag{1.20}$$

$$T(0,1,0) = (0,1,2) - (1,2,3) \tag{1.21}$$

$$T(0,1,0) = (-1,-1,-1) \tag{1.22}$$

Para o vetor $(1,1,1)$:

$$(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) \tag{1.23}$$

$$T(1,1,1) = T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) \tag{1.24}$$

$$T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,0,0) - T(0,1,0) \tag{1.25}$$

$$T(0,0,1) = (0,0,1) - (1,2,3) - (-1,-1,-1) \tag{1.26}$$

$$T(0,0,1) = (0,-1,-1) \tag{1.27}$$

Logo, a matriz padrão é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

■

Questão 3

Encontre a matriz padrão da composição de transformações lineares $S \circ T$, quando S e T são definidas como segue:

a) $S(v_1, v_2) = (2v_2, v_1 + v_2)$ and $T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2)$.

b) $S(v_1, v_2) = (v_1 - 2v_2, 3v_1 + v_2)$ and $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1 + v_2, v_1 + v_2 - v_3)$.

c) $S(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3)$ and $T(v_1, v_2) = (v_1+v_2, 2v_1-v_2, -v_1+3v_2)$.

Resolução:

a) A matriz padrão da composição é obtida pela multiplicação entre cada matriz padrão das transformação lineares da composição. A matriz padrão da transformação linear S é:

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.29}$$

e da transformação linear T,

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

Desta forma, a matriz padrão da composição é:

$$A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T \Rightarrow A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

b) Seguindo os mesmos passos do item (a), temos que a matriz padrão da transformação S é:

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.32}$$

e da transformação T:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Desta forma, a matriz padrão da composição é:

$$A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T \Rightarrow A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

c) Seguindo os mesmos passos do item (a), temos que a matriz padrão da transformação S é:

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

e da transformação T:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Desta forma, a matriz padrão da composição é:

$$A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T \Rightarrow A_{S \circ T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

■

Questão 4

Determine quais das seguintes funções $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são e não são transformações lineares. Se T é uma transformação linear, encontre a matriz padrão. Se não for uma transformação linear, justifique sua resposta (i.e., mostre uma propriedade da transformação linear que falhe).

a) $T(v_1, v_2) = (v_1^2, v_2)$.

b) $T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, v_2 - v_1)$.

c) $T(v_1, v_2) = (\sin(v_1) + v_2, v_1 - \cos(v_2))$.

Resolução:

a) Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (a_1, a_2) e $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$T(\alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)) := \alpha T(a_1, a_2) + \beta T(b_1, b_2) \tag{1.38}$$

$$T(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha(a_1^2, a_2) + \beta(b_1^2, b_2) \tag{1.39}$$

$$((\alpha a_1 + \beta b_1)^2, \alpha a_2 + \beta b_2) = (\alpha a_1^2 + \beta b_1^2, \alpha a_2 + \beta b_2) \tag{1.40}$$

A igualdade resultante é claramente falsa. Logo, a função T não é uma transformação linear.

b) Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (a_1, a_2) e $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$T(\alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)) := \alpha T(a_1, a_2) + \beta T(b_1, b_2) \tag{1.41}$$

$$T(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha(a_1 + 2a_2, a_2 - a_1) + \beta(b_1 + 2b_2, b_2 - b_1) \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}((\alpha a_1 + \beta b_1) - 2(\alpha a_2 + \beta b_2), (\alpha a_2 + \beta b_2) - (\alpha a_1 + \beta b_1))\\ = \alpha(a_1 + 2a_2, a_2 - a_1) + \beta(b_1 + 2b_2, b_2 - b_1)\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}(\alpha(a_1 - 2\alpha_2) + \beta(b_1 - 2\beta b_1), \alpha(a_2 - a_1) + \beta(b_2 - b_1))\\ = (\alpha(a_1 - 2\alpha_2) + \beta(b_1 - 2\beta b_1), \alpha(a_2 - a_1) + \beta(b_2 - b_1))\end{aligned} \tag{1.44}$$

Devido a igualdade resultante ser verdadeira, então a função T é uma transformação linear, cuja matriz padrão é:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

c) Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (a_1, a_2) e $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$T(\alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)) := \alpha T(a_1, a_2) + \beta T(b_1, b_2) \tag{1.46}$$

$$T(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha(\sin a_1 + a_2, a_1 - \cos a_2) + \beta(\sin b_1 + b_2, b_1 - \cos b_2) \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}(\sin(\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2), (\alpha a_1 + \beta b_1) - \cos(\alpha a_2 + \beta b_2))\\ = (\alpha(\sin a_1 + a_2) + \beta(\sin b_1 + b_2), \alpha(a_1 - \cos a_2) + \beta(b_1 - \cos b_2))\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}(\sin(\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2), (\alpha a_1 + \beta b_1) - \cos(\alpha a_2 + \beta b_2))\\ = ((\alpha \sin a_1 + \beta \sin b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2), (\alpha a_1 + \beta b_1) - (\alpha \cos a_2 + \beta \cos b_2))\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$(\sin(\alpha a_1 + \beta b_1), -\cos(\alpha a_2 + \beta b_2)) = ((\alpha \sin a_1 + \beta \sin b_1), -(\alpha \cos a_2 + \beta \cos b_2)) \tag{1.50}$$

A desigualdade resultante é claramente falsa. Portanto, a função T não é uma transformação linear.

■

Questão 5

Use eliminação de Gauss-Jordan para calcular a matriz escalonada reduzida de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

f) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

As matrizes escalonadas foram obtidas a partir do algoritmo implementado na atividade realizada na disciplina sobre a forma reduzida de Echelon.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

■

Questão 6

Use um software computacional para encontrar todas as soluções de ada um dos sistemas de equações lineares a seguir:

a) $\begin{cases} 6v + 5w + 3x - 2y - 2z = 1 \\ 3v - w + x + 5y + 4z = 2 \\ 3v + 4w + x + 3y + 4z = 3 \\ 2v + 6w + x - 2y - z = 4 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} v - w + 2x + 6y + 6z = 3 \\ 4v + 3w - y + 4z = 0 \\ 5v + 2 - 2x - 2y - 2z = 2 \\ w - 2x + 3y - 2z = -1 \\ v + 5w - x + 5z = 3 \end{cases}$.

Resolução:

a) $v = \dfrac{3\,(-17w + 31)}{2}$, $x = 53w - 99$, $y = -\dfrac{-5w + 1}{2}$, $z = 3\,(w - 3)$

b) $v = -\dfrac{56}{80}$, $x = -\dfrac{891}{80}$, $y = -\dfrac{13}{10}$, $w = -\dfrac{149}{20}$, $z = \dfrac{477}{80}$.

■

Questão 7

Determine qual dos seguintes conjuntos são e não são subespaços.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + yz = 0\}$.

Resolução:

a) Seja os vetores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes ao conjunto. A soma de ambos os vetores também deve pertencer ao conjunto. Assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1.51}$$

Como $x_1 = -2y_1$ e $x_2 = -2y_2$. Então,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (-2y_1 - 2y_2, y_1 + y_2). \tag{1.52}$$

Logo,

$$-2y_1 - 2y_2 + 2(y_1 + y_2) = 0 \tag{1.53}$$

$$0 = 0 \tag{1.54}$$

Portanto, o conjunto é fechado sob adição. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha(x_1, y_1)$ deve pertencer ao conjunto. Ou seja, $(\alpha x_1, \alpha y_1)$ pertence ao conjunto. No entanto:

$$\alpha x_1 + 2\alpha y_1 = 0 \tag{1.55}$$

$$x_1 + 2y_1 = 0 \tag{1.56}$$

Logo, o conjunto é fechado sob a multiplicação escalar. Além disso, o conjunto claramente contém o vetor nulo $(0, 0)$. Portanto, o conjunto é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

b) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^2$ e o vetor (x_1, y_1) pertencente ao conjunto, têm-se que $\alpha(x_1, y_1)$ deve pertencer ao conjunto também. Assim:

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 \geq 0 \tag{1.57}$$

Esta inequação nem sempre é verdadeira, dadas as regras estabelecidas ao conjunto. Se $x_1, y_1 \geq 0$ e $\alpha < 0$, a inequação é falsa. Portanto, o conjunto não é fechado sob a multiplicação escalar e, consequentemente, não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

c) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^2$ e o vetor (x_1, y_1) pertencente ao conjunto, têm-se que $\alpha(x_1, y_1)$ deve pertencer ao conjunto também. Assim:

$$\alpha x_1 y_1 > 0 \tag{1.58}$$

Esta inequação nem sempre é verdadeira, dadas as regras estabelecidas ao conjunto. Se $x_1, y_1 \geq 0$ e $\alpha < 0$, a inequação é falsa. Portanto, o conjunto não é fechado sob a multiplicação escalar e, consequentemente, não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$

d) Seja os vetores (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) pertencentes ao conjunto. A soma de ambos os vetores também deve perecer ao conjunto. Temos que:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{1.59}$$

Como $x_i y_i + y_i z_i = 0, i = 1, 2$ e

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 0. \tag{1.60}$$

Têm-se:

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2 = 0 \tag{1.61}$$

$$x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2 + y_2z_1 = 0 \tag{1.62}$$

Não há regras no conjunto que garantem que a equação resultante seja sempre verdadeira. Portanto, o conjunto não é fechado sob a adição e, consequentemente, não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

■

Questão 8

Determine qual dos seguintes conjuntos são e não linearmente independentes.

a) $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

c) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, -1)\}$.

d) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$.

e) $\{(1, 1), (2, 1), (3, -2)\}$.

f) $\{(2, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 2)\}$.

g) $\{(1, 2, 4, 1), (2, 4, -1, 3), (-1, 1, 1, -1)\}$.

Resolução:

a) O conjunto é LI pois os vetores não podem ser obtidos por meio de um combinação linear entre eles.

b) O conjunto é LI pois os vetores não podem ser obtidos por meio de um combinação linear entre eles.

c) O conjunto é LI pois os vetores não podem ser obtidos por meio de um combinação linear entre eles.

d) O conjunto é LI pois os vetores não podem ser obtidos por meio de um combinação linear entre eles.

e) O conjunto é LD pois pelo menos um dos vetores pode ser obtido como combinação linear dos demais:

$$(3, -2) = -7(1, 1) + 5(2, 1) \tag{1.63}$$

f) O conjunto é LD pois contém o vetor nulo.

g) O conjunto é LI pois os vetores não podem ser obtidos por meio de um combinação linear entre eles.

■

Questão 9

Use um software computacional para determinar qual dos seguintes conjuntos de vetores gera todo o $\mathbb{R}^4$.

a) $\{(1, 2, 3, 4), (3, 1, 4, 2), (2, 4, 1, 3)\}$.

b) $\{(4, 2, 5, 2), (3, 1, 2, 4), (1, 4, 2, 3), (3, 1, 4, 2)\}$.

c) $\{(4, 4, 4, 3), (3, 3, -1, 1), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, -1), (3, 3, 2, 2)\}$.

Resolução:

a) Não, o conjunto não é gerador do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ pois contém apenas 3 vetores, quantidade menor que a dimensão do espaço vetorial.

b) Sim, o conjunto é gerador do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

c) Sim, o conjunto é gerador do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

■

Questão 10

Use um software computacional para determinar se $v = (1, 2, 3, 4, 5)$ estar ou não na imagem (range) da matriz dada.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

a) Não, o vetor não pertence à imagem da matriz.

b) Sim, o vetor pertence à imagem da matriz.

■

Questão 11

Para quais valor de k o seguinte conjunto de vetores é linearmente independente?

$$\{(1, 2, 3), (-1, k, 1), (1, 1, 0)\}$$

Resolução:

Para determinar os valores de k para os quais o conjunto de vetores $\{(1, 2, 3), (-1, k, 1), (1, 1, 0)\}$ é linearmente independente, é necessário verificar se a única solução da combinação linear

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, k, 1) + c_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \tag{1.64}$$

é a trivial, ou seja, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Isso leva à seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

O conjunto de vetores será linearmente independente se o determinante da matriz acima for diferente de zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.66}$$

Calculando o determinante, temos:

$$\det = 1 \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.67}$$

Calculando os determinantes 2x2:

- $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (k)(0) - (1)(1) = -1$
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0) - (1)(3) = -3$
- $\begin{vmatrix} 2 & k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (k)(3) = 2 - 3k$

Substituindo esses valores no determinante original:

$$\det = 1(-1) - (-1)(-3) + 1(2 - 3k) \tag{1.68}$$

$$\det = -1 - 3 + (2 - 3k) \tag{1.69}$$

$$\det = -4 + 2 - 3k = -2 - 3k \tag{1.70}$$

Para que os vetores sejam linearmente independentes, precisamos que:

$$-2 - 3k \neq 0 \tag{1.71}$$

Resolvendo a inequação:

$$-3k \neq 2 \quad \Rightarrow \quad k \neq -\frac{2}{3} \tag{1.72}$$

Portanto, o conjunto de vetores $\{(1,2,3),(-1,k,1),(1,1,0)\}$ é linearmente independente para todos os valores de k exceto $k = -\dfrac{2}{3}$.

■

Questão 12

Para cada uma das matrizes A a seguir, encontre bases para cada um dos seguintes subespaços: range(A), null(A), range(A^T) e null(A^T).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) A matriz contém três vetores colunas LI (1, 3, 5). Desta forma, o range(A) é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores LI. Ou seja,

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}). \tag{1.73}$$

O null(A) ou kernel(A) é formado pela base definida pelos vetores colunas das variáveis livres. Desta forma:

$$\text{null}(A) = \text{span}(\{(2,0,0),(3,1,0)\}). \tag{1.74}$$

De forma semelhante, têm que range$(A^\top)$ é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores linhas LI.

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(1,2,0,3,0),(0,0,1,1,0),(0,0,0,0,1)\}). \tag{1.75}$$

A forma escalonada reduzida da matriz $A^\top$ é:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{1.76}$$

Não há variáveis livres, logo:

$$\text{null}(A^\top) = \{0\} \tag{1.77}$$

b) A matriz contém três vetores colunas LI (1, 2, 3). Desta forma, o range(A) é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores LI. Ou seja,

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}). \tag{1.78}$$

O null(A) ou kernel(A) é formado pela base definida pelos vetores colunas das variáveis livres. Desta forma:

$$\text{null}(A) = \text{span}(\{(1,0,0)\}). \tag{1.79}$$

De forma semelhante, têm que range$(A^\top)$ é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores linhas LI.

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(0,0,1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}). \tag{1.80}$$

A forma escalonada reduzida da matriz $A^\top$ é:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{1.81}$$

Não há variáveis livres, logo:

$$\text{null}(A^\top) = \{0\} \tag{1.82}$$

c) A matriz contém dois vetores colunas LI (1, 2). Desta forma, o range(A) é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores LI. Ou seja,

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(0,-1,-2),(-4,2,0)\}). \tag{1.83}$$

O null(A) ou kernel(A) é formado pela base definida pelos vetores colunas das variáveis livres. Desta forma:

$$\text{null}(A) = \text{span}(\{(0,1,2),(2,2,6),(1,1,3)\}). \tag{1.84}$$

De forma semelhante, têm que range$(A^\top)$ é determinado pelo conjunto gerador contendo estes vetores linhas LI.

$$\text{range}(A) = \text{span}(\{(0,-4,0,2,1),(-1,2,1,2,1)\}). \tag{1.85}$$

Assim,

$$\text{null}(A^\top) = \text{span}(\{1,2,0,0,0\}) \tag{1.86}$$

■

Questão 13

Dado

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.87}$$

Utilize um software computacional para calcular decomposição LU da matriz A.

Resolução:

Foi obtida a seguinte matriz L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.27777778 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.26865672 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.11111111 & 0.02985075 & -0.51351351 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.88}$$

e matriz U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6 & -1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.72222222 & -0.88888889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.76119403 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.48648649 \end{bmatrix}, \tag{1.89}$$

■

Questão 14

Prove que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(a,b,c) = (a-b) + (c-a)x + (b+c)x^2 \tag{1.90}$$

é um isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $P_2(\mathbb{R})$.

Resolução:

Para a transformação linear ser isomorfa, a função que rege a transformação deve ser bijetiva, ou seja, ser tanto injetiva quanto sobrejetiva. Para ser injetiva, basta que o núcleo contenha apenas o elemento nulo. Ou seja, $T(a,b,c) = 0$, somente para a, b, c nulos. Assim,

$$(a-b) + (c-a)x + (b+c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \tag{1.91}$$

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \tag{1.92}$$

$$c - a = 0 \Rightarrow c = a \Rightarrow c = b \tag{1.93}$$

$$b + c = 0 \Rightarrow b = -c \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0, c = 0, a = 0 \tag{1.94}$$

A única solução para $T(a,b,c) = 0$ é a solução trivial. Portanto, o kernel contém apenas o vetor nulo e, consequentemente, a transformações é injetiva.

Para a transformação ser sobrejetiva, basta que os vetores que formam uma base de $\mathbb{R}^3$ gerem vetores que forem uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Escolhendo a base canônica de $\mathbb{R}^{\nvDash}$, temos:

$$T(1,0,0) = 1 - x \qquad T(0,1,0) = -1 + x^2 \qquad T(0,0,1) = x + x^2 \tag{1.95}$$

Verificando se os vetores são LIs,

$$\alpha(1-x) + \beta(-1+x^2) + \gamma(x+x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \tag{1.96}$$

ou seja,

$$\alpha - \beta = 0 \qquad -\alpha + \gamma = 0 \qquad \beta + \gamma = 0 \tag{1.97}$$

Logo, $\gamma = \alpha = \beta$. Desta forma, $2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Portanto, há apenas uma solução, a solução trivial $(0,0,0)$ e, consequentemente, os vetores $1-x$, $-1+x^2$ e $x+x^2$ formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Assim, conclui-se que a transformação é sobrejetiva. Como é injetiva também, ela é bijetiva. E, portanto, a transformação é isomórfica.

■