UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LISTA 3 DE SISTEMAS LINEARES

Andevaldo da Encarnação Vitório

MANAUS-AM

2024

Andevaldo da Encarnação Vitório

LISTA 3 DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Lineares* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

Capítulo 1

Resolução da Lista de Exercícios

Questão 1

Determine se o subespaços são ortogonais.

a) $S_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $S_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

b) $S_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $S_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

c) $S_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $S_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Resolução:

Dois subespaços S_1 e S_2 são ortogonais se qualquer vetor de S_1 é ortogonal a qualquer vetor de S_2, ou seja, se o produto interno entre todos os pares de vetores de S_1 e S_2 é zero.

a) Produto entre $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^\top = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 = 6 - 6 + 0 = 0.$$

Produto entre $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}^\top = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = -3.$$

O produto interno do segundo par não é zero, logo, S_1 e S_2 não são ortogonais.

b) Produto entre $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix}2 & 1 & 6\end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix}2 & 1 & 6\end{bmatrix}^\top = (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = -6 + 6 = 0.$$

Produto entre $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top = (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Todos os produtos internos são zero, logo, S_1 e S_2 são ortogonais.

c) Produto entre $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^\top = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

Produto entre $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$ e $\begin{bmatrix}0 & 2 & -2 & 0\end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix}0 & 2 & -2 & 0\end{bmatrix}^\top = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 0.$$

Todos os produtos internos são zero, logo, S_1 e S_2 são ortogonaisx.

■

Questão 2

Encontre a projeção do vetor v sobre o espaço S:

a) $S = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}, v = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$

b) $S = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$

Resolução:

A projeção de um vetor v sobre um subespaço S pode ser obtida resolvendo o sistema linear associado à projeção ortogonal. Se os vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ são geradores de S, a projeção de v sobre S é dada por:

$$\text{proj}_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \text{proj}_{u_i}(v) = U(U^T U)^{-1} U^T v, \tag{1.1}$$

onde U é a matriz cujas colunas são os vetores geradores de S.

a) Dada a matriz U:

$$U = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

o produto $U^T U$ é:

$$U^T U = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}.$$

A inversa de U^TU é dada por:

$$(U^TU)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

O produto U^Tv, onde $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, é:

$$U^Tv = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a projeção de v no subespaço gerado pelas colunas de U, denotada por $\text{proj}_S(v)$, é calculada como:

$$\text{proj}_S(v) = U(U^TU)^{-1}U^Tv = U \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primeiro, calculamos:

$$(U^TU)^{-1}U^Tv = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos pela matriz U:

$$\text{proj}_S(v) = U \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

b) Considerando a matriz U:

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o produto U^TU resulta em:

$$U^TU = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A inversa de U^TU é:

$$(U^TU)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O produto U^Tv, com $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, é:

$$U^Tv = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A projeção $\text{proj}_S(v)$ é dada por:

$$\text{proj}_S(v) = U(U^TU)^{-1}U^Tv = U \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando:

$$(U^TU)^{-1}U^Tv = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, temos:

$$\text{proj}_S(v) = U \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

Questão 3

Encontre as bases para os quatro subespaços fundamentais da matriz A:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

Para determinar as bases dos quatro subespaços fundamentais de uma matriz A ($C(A), N(A), C(A^T)$, $N(A^T)$), os seguintes passos são realizados:

- Espaço Nulo ker(A): Resolve-se a equação $Ax = 0$ para encontrar os vetores que compõem o espaço nulo.
- Espaço Coluna $C(A)$: Identificam-se as colunas linearmente independentes de A, utilizando escalonamento ou decomposição.
- Espaço Linha $C(A^T)$: Identificam-se as linhas linearmente independentes de A, que correspondem às colunas linearmente independentes de A^T.
- Espaço Nulo à Esquerda ker(A^T): Resolve-se a equação $A^T y = 0$.

a) Para determinar o espaço coluna ($C(A)$), encontra-se as colunas independentes por meio da eliminação:

$$C(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo (ker(A)), resolve-se $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que leva às equações:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Logo:

$$x_1 = -3x_3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_3.$$

A base é:

$$\ker(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço linha ($C(A^T)$), segue-se o mesmo procedimento:

$$C(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo à esquerda ($\ker(A^T)$), resolve-se $A^T y = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que implica que:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0.$$

Logo:

$$\ker(A^T) = \{0\}.$$

b) Para determinar o espaço coluna ($C(A)$), encontra-se as colunas independentes por meio da eliminação:

$$C(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo (ker(A)), resolve-se $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que leva às equações:

$$-x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Logo:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

A base é:

$$\text{ker}(A) = \{0\}.$$

Para determinar o espaço linha ($C(A^T)$), segue-se o mesmo procedimento:

$$C(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo à esquerda (ker(A^T)), resolve-se $A^T y = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que leva às equações:

$$y_2 + y_3 = 0, \quad -y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \quad y_1 + y_3 = 0.$$

Logo:

$$\text{ker}(A^T) = \{0\}.$$

c) Para determinar o espaço coluna ($C(A)$), encontra-se as colunas independentes por meio da eliminação:

$$C(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo ($\ker(A)$), resolve-se $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que leva às equações:

$$x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

Logo:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -x_3, \quad x_3 = x_3.$$

A base é:

$$\ker(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço linha ($C(A^T)$), segue-se o mesmo procedimento:

$$C(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar o espaço nulo à esquerda ($\ker(A^T)$), resolve-se $A^T y = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que leva à equação:

$$y_1 = -y_3 - y_4, \quad y_2 = -y_3 - 2y_4.$$

Logo:

$$\ker(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

Questão 4

Encontre as solução dos mínimos quadrados do sistemas $Ax = b$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Resolução:

A solução dos mínimos quadrados de um sistema $Ax = b$ é dada pela minimização da norma $||Ax - b||^2$, o que resulta na equação normal:

$$A^T Ax = A^T b.$$

a) O primeiro passo consiste em calcular $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, calcula-se $A^T b$:

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, resolve-se o sistema $A^T Ax = A^T b$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O sistema resultante é:

$$6x_1 + 5x_2 = 1, \quad 5x_1 + 6x_2 = -1.$$

A solução obtida por substituição é:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Portanto, a solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Inicialmente, calcula-se $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, calcula-se $A^T b$:

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolve-se o sistema $A^T Ax = A^T b$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

O sistema resultante é:

$$3x_1 + 3x_3 = 5,$$

$$3x_2 + x_3 = -1,$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5.$$

A solução obtida por substituição é:

$$x_1 = \frac{7}{6}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução é:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

Questão 5

Encontre a complemente ortogonal $S^{\perp}$ e encontre a soma direta $S \oplus S^{\perp}$:

a) $S = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$

b) $S = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$

c) $= \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}.$

d) $S = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}.$

Resolução:

Para determinar o complemento ortogonal $S^{\perp}$, é necessário encontrar o conjunto de vetores x tais que $x \cdot s = 0$ para todos os vetores $s \in S$. Isso equivale a resolver $A^T x = 0$, onde A é a matriz cujas colunas são os geradores de S. A soma direta $S \oplus S^{\perp}$ equivale ao espaço completo, com $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(\text{espaço total})$.

a) Primeiramente, constrói-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Em seguida, resolve-se $A^T x = 0$: O sistema é:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0.$$

Expandindo:

$$x_2 = 0,$$

$$2x_1 + x_3 = 0 \implies x_3 = -2x_1.$$

Logo, o complemento ortogonal $S^\perp$:

$$S^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

E a soma direta $S \oplus S^\perp$: Como S tem dimensão 2 e $S^\perp$ tem dimensão 1, temos:

$$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3.$$

b) Construindo a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo $A^T x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Expandindo:

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 + x_4.$$

Complemento ortogonal $S^\perp$: $S^\perp$ é o espaço das soluções do sistema, dado por:

$$S^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soma direta $S \oplus S^\perp$: Como S tem dimensão 1 e $S^\perp$ tem dimensão 2, temos:

$$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3.$$

c) Construindo-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolver $A^T x = 0$: O sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Expandindo:

$$-2x_2 + x_3 = 0 \implies x_3 = 2x_2.$$

Complemento ortogonal $S^\perp$:

$$S^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soma direta $S \oplus S^\perp$: Como S tem dimensão 1 e $S^\perp$ tem dimensão 2, temos:

$$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3.$$

d) Construindo-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolver $A^T x = 0$: O sistema é:

$$A^T x = 0.$$

Calculando $S^\perp$ (usando escalonamento ou outras técnicas), temos:

Complemento ortogonal $S^\perp$:

$$S^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soma direta $S \oplus S^\perp$: Como S tem dimensão 3 e $S^\perp$ tem dimensão 3, temos:

$$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^6.$$

■

Questão 6

Encontre a fatoração QR de cada matriz:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

Por meio do algoritmo implementado no trabalho pedido, temos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.41 \\ 0. & 0.82 \\ 0.71 & -0.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.41 & 0.71 \\ 0. & 1.22 \end{bmatrix}$.

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 & -0.71 \\ 0. & 0. \\ 0.58 & 0. \\ 0.58 & 0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.73 & 1.73 \\ 0. & 1.41 \end{bmatrix}.$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.71 \\ 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0.5 & -0.5 & 0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2. & 2. & -0.5 \\ 0. & 2. & 0.5 \\ 0. & 0. & 0.71 \end{bmatrix}.$$

■

Questão 7

Determine se o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal. Se o conjunto é ortogonal, então determine se ele é ortonormal também e se o conjunto é base para $\mathbb{R}^n$.

a) $\{(2,-4),(2,1)\}$

b) $\{(-2,5),(4,0)\}$

c) $\left\{\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$

d) $\left\{(2,1),\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$

e) $\{(4,-1,1),(-1,0,4),(-4,-17,-1)\}$

f) $\{(2,-4,2),(0,2,4),(-10,-4,2)\}$

g) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},0,-\frac{\sqrt{2}}{6}\right),\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{1}{2}\right)\right\}$

h) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

i) $\{(2,5,-3),(4,2,6)\}$

j) $\{(-6,3,2,1),(2,0,6,0)\}$

Resolução:

Para verificar se os conjuntos são ortogonais, calcula-se o produto escalar entre os vetores. Se o produto escalar entre todos os pares de vetores for zero, o conjunto é ortogonal. Se o conjunto for ortogonal, verifica-se se é ortonormal ao calcular o módulo ($\|v\|$) de cada vetor. Para ser ortonormal, todos os vetores devem ter módulo igual a 1. Se o conjunto tem n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, ele forma uma base para $\mathbb{R}^n$.

a) O produto escalar entre os vetores $(2,-4)$ e $(2,1)$ é calculado da seguinte forma:

$$(2,-4)\cdot(2,1) = 2\cdot 2 + (-4)\cdot 1 = 4-4 = 0.$$

Portanto, os vetores são ortogonais. O módulo dos vetores é dado por:

$$\|(2,-4)\| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20},$$

$$\|(2,1)\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Como os vetores não possuem módulo unitário, o conjunto não é ortonormal. Considerando que existem dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e eles são linearmente independentes, o conjunto forma uma base para $\mathbb{R}^2$.

b) O produto escalar entre os vetores $(-2,5)$ e $(4,0)$ é calculado como:

$$(-2,5)\cdot(4,0) = -2\cdot 4 + 5\cdot 0 = -8.$$

Assim, o conjunto não é ortogonal.

c) O produto escalar entre os vetores $\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$ e $\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)$ resulta em:

$$\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{-4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{16}{25}+\frac{12}{25} = -\frac{4}{25}.$$

Portanto, o conjunto não é ortogonal.

d) O produto escalar entre $(2,1)$ e $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ é dado por:

$$(2,1)\cdot\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}-\frac{2}{3} = 0.$$

Assim, os vetores são ortogonais. O módulo dos vetores é calculado como:

$$\|(2,1)\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$

$$\left\|\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Como os vetores não têm módulo unitário, o conjunto não é ortonormal. Considerando que existem dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e eles são linearmente independentes, o conjunto forma uma base para $\mathbb{R}^2$.

e) Os produtos escalares entre os vetores $(4,-1,1)$, $(-1,0,4)$ e $(-4,-17,-1)$ são os seguintes:

- $(4,-1,1)\cdot(-1,0,4) = -4+0+4 = 0,$
- $(4,-1,1)\cdot(-4,-17,-1) = -16+17-1 = 0,$
- $(-1,0,4)\cdot(-4,-17,-1) = 4+0-4 = 0.$

O conjunto é ortogonal. O módulo dos vetores é dado por:

- $\|(4,-1,1)\| = \sqrt{4^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18},$
- $\|(-1,0,4)\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17},$
- $\|(-4,-17,-1)\| = \sqrt{(-4)^2+(-17)^2+(-1)^2} = \sqrt{16+289+1} = \sqrt{306}.$

Como os vetores não possuem módulo unitário, o conjunto não é ortonormal. Como há três vetores em $\mathbb{R}^3$ e eles são linearmente independentes, o conjunto forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

f) Os produtos escalares entre os vetores $(2,-4,2)$, $(0,2,4)$ e $(-10,-4,2)$ são os seguintes:

- $(2,-4,2)\cdot(0,2,4) = 0-8+8 = 0,$
- $(2,-4,2)\cdot(-10,-4,2) = -20+16+4 = 0,$
- $(0,2,4)\cdot(-10,-4,2) = 0-8+8 = 0.$

O conjunto é ortogonal. O módulo dos vetores é dado por:

- $\|(2,-4,2)\| = \sqrt{2^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24},$
- $\|(0,2,4)\| = \sqrt{0^2+2^2+4^2} = \sqrt{20},$
- $\|(-10,-4,2)\| = \sqrt{(-10)^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{100+16+4} = \sqrt{120}.$

Como os vetores não possuem módulo unitário, o conjunto não é ortonormal. Como há três vetores em $\mathbb{R}^3$ e eles são linearmente independentes, o conjunto forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

g) O primeiro produto escalar é:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \cdot \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \neq 0.$$

Logo, o conjunto não é ortogonal.

h) Os produtos escalares entre os vetores $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ são os seguintes:

- Primeiro e segundo vetores:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{12}}{18} + 0 + \frac{\sqrt{12}}{12} = 0.$$

- Primeiro e terceiro vetores:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9} + 0 - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0.$$

- Segundo e terceiro vetores:

$$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{18}}{18} + \frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{18}}{18} = 0.$$

O conjunto é ortogonal. O módulo do primeiro vetor é

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \neq 1.$$

Portanto, o conjunto não é ortonormal. Como há três vetores em $\mathbb{R}^3$ e eles são linearmente independentes, o conjunto forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

i) O produto escalar entre os vetores $(2, 5, -3)$ e $(4, 2, 6)$ é dado por:

$$(2, 5, -3) \cdot (4, 2, 6) = 8 + 10 - 18 = 0.$$

O conjunto é ortogonal. O módulo dos vetores é:

$$\|(2,5,-3)\| = \sqrt{2^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38} \neq 1.$$

O conjunto não é ortonormal. Como há dois vetores em $\mathbb{R}^3$, o conjunto não é base para $\mathbb{R}^3$.

j) O produto escalar entre $(-6,3,2,1)$ e $(2,0,6,0)$ é dado por:

$$(-6,3,2,1)\cdot(2,0,6,0) = -12+0+12+0 = 0.$$

O conjunto é ortogonal. O módulo dos vetores é:

$$\|(-6,3,2,1)\| = \sqrt{(-6)^2+3^2+2^2+1^2} = \sqrt{36+9+4+1} = \sqrt{50} \neq 1.$$

O conjunto não é ortonormal. Como há dois vetores em $\mathbb{R}^4$, o conjunto não é base para $\mathbb{R}^4$.

■

Questão 8

Aplique o processo de ortogonalização Gram-Schmidt para transformar a base para $\mathbb{R}^n$ dada em um base ortonormal. Use os vetores na ordem e que eles são dados.

a) $B = \{(3,4),(1,0)\}$

b) $B = \{(-1,2),(1,0)\}$

c) $B = \{(0,1),(2,5)\}$

d) $B = \{(4,-3),(3,2)\}$

e) $B = \{(2,1,-2),(1,2,2),(2,-2,1)\}$

f) $B = \{(1,0,0),(1,1,1),(1,1,-1)\}$

g) $B = \{(4,-3,0),(1,2,0),(0,0,4)\}$

h) $B = \{(0,1,2),(2,0,0),(1,1,1)\}$

Resolução:

Por meio do algoritmo imeplementado no trabalho pedido nesta disicplinas, temos:

a) $B = \{(0.6,0.8),(0.8,-0.6)\}$

b) $B = \{(-0.45,0.89),(0.89,0.45)\}$

c) $B = \{(0,1),(1,0)\}$

d) $B = \{(0.8, -0.6), (0.6, 0.8)\}$

e) $B = \{(0.67, 0.33, -0.67), (0.33, 0.67, 0.67), (0.67, -0.67, 0.33)\}$

f) $B = \{(1, 0, 0), (0, 0.71, 0.71), (0, 0.71, -0.71)\}$

g) $B = \{(0.8, -0.6, 0.), (0.6, 0.8, 0), (0, 0, 1)\}$

h) $B = \{(0, 0.45, 0.89), (1, 0, 0), (0, 0.89, -0.45)\}$

■

Questão 9

Encontre a matriz de coordenadas de w relativo a base ortonormal de B em $\mathbb{R}^n$.

a) $w = (1, 2), B = \left\{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right), \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)\right\}.$

b) $w = (4, -3), B = \left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$

c) $w = (2, -2, 1), B = \left\{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right), (0, 1, 0), \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}.$

Resolução:

Para encontrar a matriz de coordenadas de w relativo à base ortonormal B, usamos o fato de que, para bases ortonormais, a coordenada de w em relação a cada vetor v_i da base é o produto interno de w com v_i. Ou seja, se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então:

$$[w]_B = \begin{bmatrix} \langle w, v_1 \rangle \\ \langle w, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

O produto interno no $\mathbb{R}^n$ é dado por:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

a) Os vetores da base são:

$$v_1 = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right), \quad v_2 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right).$$

Coordenada relativa a v_1:

$$\langle w, v_1 \rangle = (1)\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) + (2)\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) = -\frac{2\sqrt{13}}{13} + \frac{6\sqrt{13}}{13} = \frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

Coordenada relativa a v_2:

$$\langle w, v_2 \rangle = (1)\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) + (2)\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{4\sqrt{13}}{13} = \frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

Matriz de coordenadas:

$$[w]_B = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{13}}{13} \\ \frac{7\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}.$$

b) Os vetores da base são:

$$v_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Coordenada relativa a v_1:

$$\langle w, v_1 \rangle = (4)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-3)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{6}}{3} = -\frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{3}.$$

Coordenada relativa a v_2:

$$\langle w, v_2 \rangle = (4)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + (-3)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{3}}{3}.$$

Matriz de coordenadas:

$$[w]_B = \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

c) Os vetores da base são:

$$v_1 = \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

Coordenada relativa a v_1:

$$\langle w, v_1 \rangle = (2)\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + (-2)(0) + (1)\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{2\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Coordenada relativa a v_2:

$$\langle w, v_2 \rangle = (2)(0) + (-2)(1) + (1)(0) = -2.$$

Coordenada relativa a v_3:

$$\langle w, v_3 \rangle = (2)\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + (-2)(0) + (1)\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{6\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{5\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Matriz de coordenadas:

$$[w]_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -2 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}.$$

■

Questão 10

Considere o conjunto de polinômios $S = \{1, t, t^2\}$ definida sobre o intervalo $-1 \leq t \leq 1$. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha o conjunto orthonormal.

Resolução:

Para obter um conjunto ortonormal a partir de $S = \{1, t, t^2\}$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$ usando o processo de Gram-Schmidt, considera-se o produto interno definido como:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Primeiramente, define-se $q_1 = 1$, já que o vetor constante é ortogonal por construção. Em seguida, o vetor t é ortogonalizado por meio da subtração de sua projeção em q_1, dada por

$$\text{proj}_{q_1}(t) = \frac{\langle t, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1.$$

Calculando $\langle t, q_1\rangle = \int_{-1}^{1} t \cdot 1\,dt = 0$, conclui-se que $q_2 = t$, pois $\text{proj}_{q_1}(t) = 0$.

Para ortogonalizar t^2, considera-se

$$q_3 = t^2 - \text{proj}_{q_1}(t^2) - \text{proj}_{q_2}(t^2),$$

com as projeções definidas por:

$$\text{proj}_{q_1}(t^2) = \frac{\langle t^2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1, \quad \text{proj}_{q_2}(t^2) = \frac{\langle t^2, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2.$$

Calcula-se

$$\langle t^2, q_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\,dt = \frac{2}{3},$$

$$\langle q_1, q_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dt = 2,$$

$$\langle q_2, q_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

$$\langle t^2, q_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0.$$

Assim, $\text{proj}_{q_1}(t^2) = \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot q_1 = \frac{1}{3} \cdot 1$, enquanto $\text{proj}_{q_2}(t^2) = 0$, resultando em $q_3 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Para normalizar os vetores, calcula-se suas normas. Para q_1, obtém-se $\|q_1\| = \sqrt{\langle q_1, q_1\rangle} = \sqrt{2}$, levando a $e_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Para q_2, $\|q_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, resultando em $e_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$. Finalmente, para q_3, calcula-se $\langle q_3, q_3\rangle = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{2}{45}$, o que dá $\|q_3\| = \sqrt{\frac{2}{45}}$, resultando em

$e_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|} = \sqrt{\frac{45}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$. Assim, o conjunto ortonormal obtido é:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \sqrt{\frac{45}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

■

Questão 11

Encontre o fatoração QR da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Utilizando o algoritmo implementado, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.6 & 0.78 \\ -0.18 & -0.6 & 0.49 \\ 0.36 & -0.53 & 0.34 \\ -0.9 & 0.03 & 0.19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.57 & 3.41 & 0. \\ 0. & 2.31 & -2.16 \\ 0. & 0. & 5.51 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

■

Questão 12

Resolva o seguinte conjunto de equações lineares usando a fatorações QR:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Temos que a matriz de transformação pode ser decompostas nas seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.83 & -0.38 \\ -0.82 & 0.52 & 0.25 \\ 0.41 & 0.21 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.45 & -1.63 & -0.82 \\ 0. & 3.21 & 3.94 \\ 0. & 0. & 5.08 \end{bmatrix}$$

Calculando $y = Q^\top b$, temos:

$$y = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.83 & -0.38 \\ -0.82 & 0.52 & 0.25 \\ 0.41 & 0.21 & 0.89 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.16 \\ 18.25 \\ 15.24 \end{bmatrix}$$

Por fim, calculamos $Rx = y$:

$$\begin{bmatrix} 2.45 & -1.63 & -0.82 \\ 0. & 3.21 & 3.94 \\ 0. & 0. & 5.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.16 \\ 18.25 \\ 15.24 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$x_1 = -1.00, \quad x_2 = 2.00, \quad x_3 = 3.00 \tag{1.3}$$

■

Questão 13

Resolva o seguinte conjunto de equações lineares usando fatoração QR.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 32$$
$$7x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$$

Resolução:

Temos que a matriz de transformação pode ser decompostas nas seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.32 & 0.94 \\ 0.49 & 0.8 & -0.34 \\ 0.86 & -0.5 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.12 & 0.12 & 1.6 \\ 0. & 6.16 & 6.78 \\ 0. & 0. & 0.66 \end{bmatrix}$$

Calculando $y = Q^\top b$, temos:

$$y = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.32 & 0.94 \\ 0.49 & 0.8 & -0.34 \\ 0.86 & -0.5 & 0.06 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.17 \\ 32.67 \\ 1.98 \end{bmatrix}$$

Por fim, calculamos $Rx = y$:

$$\begin{bmatrix} 8.12 & 0.12 & 1.6 \\ 0. & 6.16 & 6.78 \\ 0. & 0. & 0.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.17 \\ 32.67 \\ 1.98 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$x_1 = 1.00, \quad x_2 = 2.00, \quad x_3 = 3.00 \tag{1.4}$$

■