UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SIGULARES

Andevaldo da Encarnação Vitório

MANAUS-AM

2024

Andevaldo da Encarnação Vitório

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SIGULARES

Este trabalho foi preparado como parte dos requisitos da disciplina *Sistemas Lineares* oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas.

Prof. Dr. João Edgar Chaves Filho

MANAUS-AM

2024

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) é uma das técnicas mais poderosas e versáteis em álgebra linear, com ampla aplicação em diversas áreas da matemática, ciência e engenharia. Ela proporciona uma maneira eficiente de analisar e entender as propriedades de matrizes, seja em problemas de análise de dados, processamento de sinais, ou modelagem matemática. Ao decompor uma matriz em três componentes — uma matriz ortogonal U, uma matriz diagonal Σ, e uma matriz ortogonal transposta $V^\top$ — a SVD revela informações cruciais sobre a estrutura da matriz, como sua dimensionalidade, dependências lineares e comportamento sob transformações lineares.

Além de sua importância teórica, a SVD possui um grande número de aplicações práticas. Ela é essencial para a resolução de sistemas lineares, a compressão de dados, a aproximação de matrizes, e é amplamente utilizada em áreas como estatística e aprendizado de máquina. O poder da SVD reside na sua capacidade de simplificar problemas complexos, fornecendo representações compactas e mais compreensíveis de grandes volumes de dados.

Este trabalho explora a teoria e as aplicações da decomposição em valores singulares, destacando sua importância para a compreensão e manipulação de matrizes em uma variedade de contextos práticos. Através de exemplos, como a compressão de imagens, ilustramos o impacto da SVD na simplificação e otimização de processos computacionais.

Capítulo 2

Decomposição em Valores Singulares

A SVD é uma técnica fundamental em álgebra linear com aplicações em diversas áreas, como compressão de dados, processamento de imagens e solução de sistemas lineares. Este capítulo explora a utilização da SVD para fatoração e aproximação de matrizes grandes, com foco em imagens como caso prático.

2.1 Fundamentos Matemáticos

Seja A uma matriz de dimensões $m \times n$. A SVD permite escrever A como o produto de três matrizes:

$$A = USV^\top, \tag{2.1}$$

onde U é uma matriz ortogonal de dimensão $m \times m$, cujas colunas são os vetores singulares à esquerda; S é uma matriz diagonal de dimensão $m \times n$, contendo os valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ na diagonal, ordenados de forma decrescente ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$), sendo r o posto de A; e V é uma matriz ortogonal de dimensão $n \times n$, cujas colunas são os vetores singulares à direita.

A decomposição é possível para qualquer matriz A, sem restrições de simetria ou de outros critérios. Isso distingue a SVD de outras técnicas de fatoração, como a diagonalização, que exige que a matriz seja quadrada e simétrica.

2.1.1 Construção das Matrizes

A matriz S contém os valores singulares de A, que estão relacionados com as raízes quadradas dos autovalores das matrizes $A^\top A$ e $AA^\top$. Esses valores medem a importância das diferentes dimensões em A e desempenham papel central em aplicações de compressão e aproximação. As colunas de U e

V são os vetores próprios de $AA^\top$ e $A^\top A$, respectivamente. Esses vetores definem bases ortonormais no domínio e na imagem da transformação linear associada a A.

No processo de cálculo da SVD, primeiramente determina-se V multiplicando A por sua transposta $A^\top$, resultando na matriz simétrica $A^\top A$:

$$A^\top A = VS^2V^\top. \tag{2.2}$$

Diagonalizando $A^\top A$, os autovetores obtidos formam as colunas de V, enquanto os autovalores são os quadrados dos valores singulares.

Em seguida, determina-se U de forma similar a matriz V. Neste caso, calcula-se $AA^\top$, que também é simétrica:

$$AA^\top = US^2U^\top. \tag{2.3}$$

Os autovetores dessa matriz correspondem às colunas de U.

Por fim, a matriz S é construída posicionando os valores singulares na diagonal principal, com as demais entradas iguais a zero.

2.2 Aplicações em Processamento de Imagens

A SVD é amplamente utilizada para compressão de imagens. Ao representar uma imagem como uma matriz de intensidades, os valores singulares maiores capturam a maior parte da informação visual. Assim, pode-se aproximar a matriz original com poucos valores singulares, reduzindo o espaço de armazenamento sem perda significativa de qualidade visual.

2.2.1 Compressão de Imagens

A compressão de imagens utilizando a SVD baseia-se na transformação de uma matriz A, que representa a imagem, no formato $A = USV^\top$. O objetivo principal dessa transformação é reduzir o número de entradas necessárias para representar a matriz A sem comprometer significativamente a qualidade da informação.

Ao decompor A no produto $USV^\top$, é possível aproximar A utilizando uma versão de posto reduzido. Em termos práticos, essa redução remove informações redundantes, ou seja, aquelas que são linearmente dependentes. Assim, para um posto r menor que m ou n (as dimensões da matriz A), obtém-se uma matriz que captura a maior parte da essência estrutural de A, minimizando a perda de informação relevante.

A matriz A pode ser reescrita como uma soma dos produtos externos escalados pelos valores singulares:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\top + \sigma_2 u_2 v_2^\top + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\top + \sum_{i=r+1}^{p} \sigma_i u_i v_i^\top,$$

onde σ_i são os valores singulares ordenados em ordem decrescente ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$) e u_i, v_i são os vetores singulares à esquerda e à direita, respectivamente.

Os valores singulares associados a índices maiores que o posto r são iguais a zero. Consequentemente, os termos correspondentes não contribuem para a matriz A e podem ser ignorados, resultando na seguinte aproximação:

$$A \approx \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top.$$

Além disso, mesmo os valores singulares menores (aqueles próximos a zero) podem ser desconsiderados para reduzir ainda mais o número de termos na soma. Como os valores singulares são dispostos em ordem decrescente, os termos associados a valores singulares menores têm impacto reduzido na estrutura geral de A.

Ao descartar termos associados a valores singulares menores, a quantidade de dados necessária para representar a imagem é reduzida significativamente. Essa redução ocorre porque, em vez de armazenar todos os $m \times n$ elementos de A, armazenamos apenas os vetores singulares (u_i e v_i) e os valores singulares (σ_i) para $i \leq k$, onde k é o número de termos retidos. Além disso, a precisão da aproximação pode ser ajustada variando k. Retendo mais termos (k maior), preserva-se mais detalhes da imagem; ao reduzir k, a compressão é maior, mas pode haver perda de qualidade.

2.3 Exemplo Prático

Para ilustrar o processo de compressão de imagens utilizando a SVD, considera-se uma imagem, apresentada na Figura 2.1, representada por uma matriz A. O objetivo é reduzir o posto da matriz A para obter versões aproximadas da imagem original, utilizando um número menor de valores singulares.

A matriz A foi fatorada no formato $A = USV^\top$. Em seguida, foram construídas aproximações de posto reduzido ao reter apenas os k maiores valores singulares e seus vetores singulares associados.

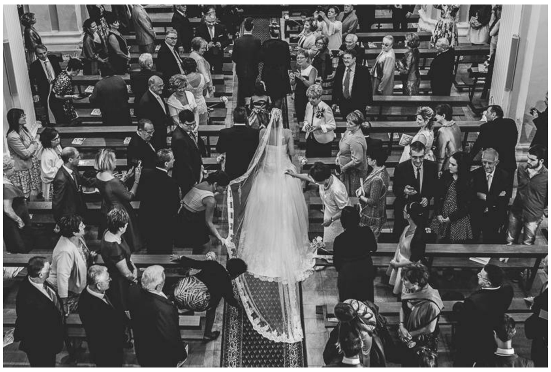

Figura 2.1: Imagem original a ser compressada.

Cada aproximação pode ser expressa como:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top, \tag{2.4}$$

onde k é o posto escolhido.

As imagens apresentadas na Figura 2.2 ilustram os resultados da compressão para diferentes valores de posto k, obtidas por meio do algoritmo implementado apresentado em Código A.1. Utilizando apenas os cinco maiores valores singulares ($k = 5$), observa-se que a estrutura geral da imagem é visível, embora com perda significativa de detalhes. Quando o número de termos é aumentado para $k = 20$, os contornos e formas tornam-se mais definidos. Com $k = 50$, a imagem apresenta maior nitidez e detalhes perceptíveis, aproximando-se da qualidade do original. Finalmente, ao utilizar $k = 100$, a imagem se aproxima ainda mais da original, com uma perda mínima de qualidade. Esses resultados demonstram que os primeiros valores singulares capturam a maior parte das informações relevantes da imagem, permitindo que uma retenção reduzida de termos seja suficiente para reconstruir uma aproximação de boa qualidade, ao mesmo tempo em que reduz significativamente o espaço necessário para armazenamento.

Do ponto de vista da eficiência, a compressão oferece uma redução considerável na complexidade de armazenamento. Enquanto a imagem original, de posto completo, exige o armazenamento de $m \times n$ entradas, uma aproximação de posto k requer apenas $k(m + n + 1)$ entradas, devido ao armazenamento das colunas de U_k, $V_k^\top$ e dos valores σ_i.

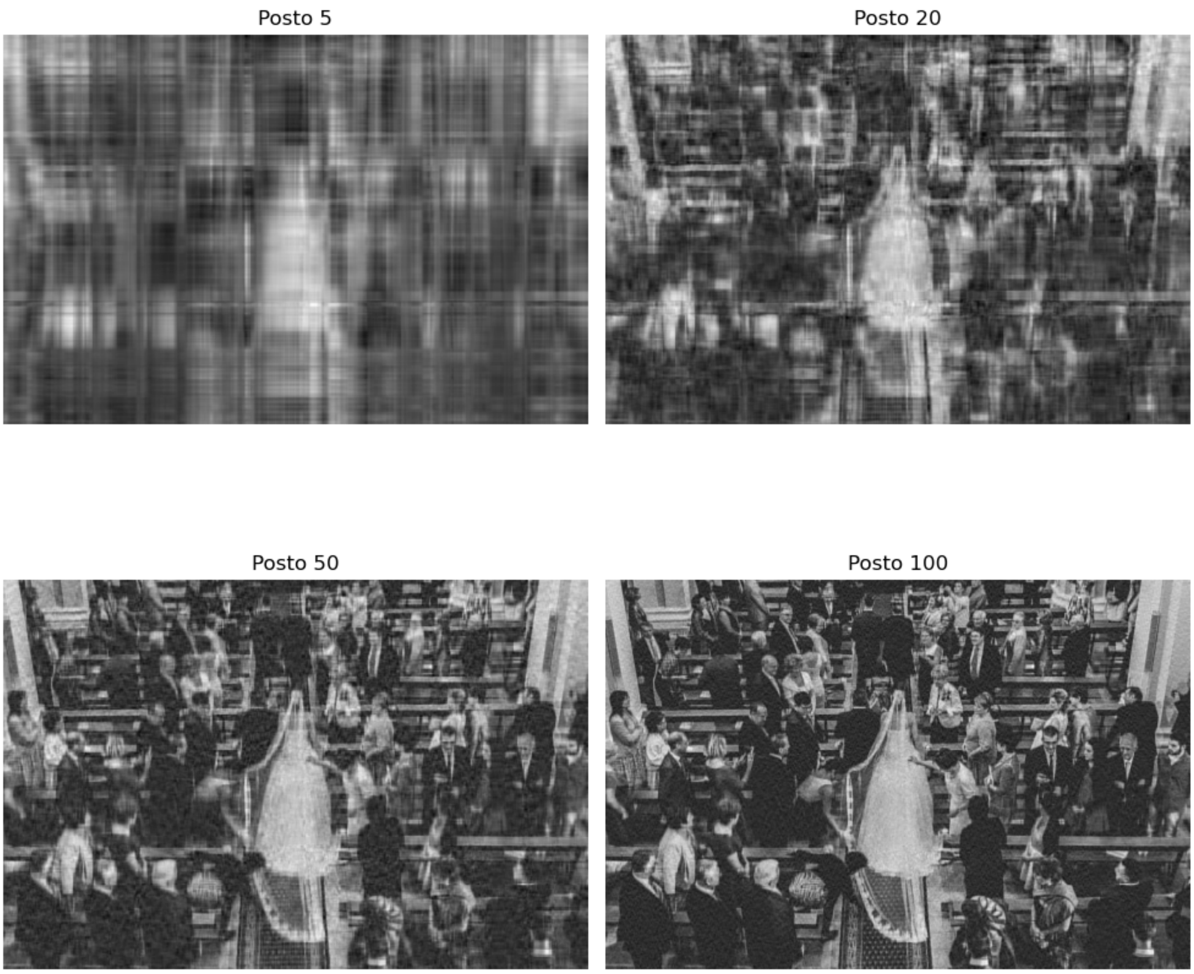

Figura 2.2: Resultados obtidos na compressão da imagem para postos iguais a 5, 20, 50 e 100.

Capítulo 3

Conclusão

A SVD é uma ferramenta fundamental em álgebra linear, amplamente utilizada para analisar e manipular matrizes em diversas aplicações práticas. Ao fatorar uma matriz A em três componentes — U, Σ e $V^\top$ —, a SVD permite interpretar as propriedades intrínsecas da matriz, como sua dimensão efetiva, dependência linear entre linhas e colunas e comportamento em transformações lineares.

O exemplo da compressão de imagens ilustra de forma prática a capacidade da SVD de capturar as informações mais relevantes de uma matriz ao reter apenas os maiores valores singulares. No entanto, suas aplicações vão muito além, abrangendo desde a solução de sistemas lineares e aproximações de matrizes até a análise de dados em estatística e aprendizado de máquina. A capacidade de reduzir matrizes complexas a formas simplificadas e interpretáveis torna a SVD uma ferramenta indispensável em áreas como processamento de sinais e reconhecimento de padrões.

Além disso, a SVD destaca-se por sua robustez, permitindo lidar com matrizes retangulares e mal-condicionadas, oferecendo uma base teórica sólida para resolver problemas de otimização e análise de estabilidade. Assim, a decomposição em valores singulares não apenas exemplifica a versatilidade da álgebra linear, mas também consolida seu papel essencial na ciência e na engenharia modernas.

Apêndice A

Algoritmos Implementados

O código a seguir realiza a compressão de imagens utilizando a linguagem *Python* e os seus pacotes *numpy* e *matplotlib*.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.image import imread

def compress_image(image, k):
  """
  Aplica a decomposição SVD e retorna a imagem reconstruída com rank k.
  :param image: Matriz representando a imagem (grayscale ou canal de cor).
  :param k: Número de componentes a serem mantidos.
  :return: Imagem reconstruída com rank k.
  """
  U, S, Vt = np.linalg.svd(image, full_matrices=False)
  S_k = np.diag(S[:k])  # Reduz os valores singulares para os k primeiros
  return U[:, :k] @ S_k @ Vt[:k, :]


# Carregar imagem em escala de cinza
image = imread("image.jpeg")  # Caminho da imagem
if image.ndim == 3:  # Converte para escala de cinza, se necessário
  image = np.mean(image, axis=2)

# Parâmetros de compressão
ranks = [5, 20, 50, 100]  # Níveis de compressão (postos)
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(10, 10))

# Aplicar compressão e exibir resultados
for i, k in enumerate(ranks):
  row, col = divmod(i, 2)
  compressed_image = compress_image(image, k)
```

```
    axs[row, col].imshow(compressed_image, cmap='gray')
    axs[row, col].set_title(f"Posto {k}")
    axs[row, col].axis('off')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Código A.1: Implementação do algoritmo de compressão de imagens usando SVD.