

Uma revisão sobre o índice de frenagem de Pulsares

A review of the braking index of Pulsars

D.L. Ramos^{*1}, M.M.F. Perovano², W. Spalenza³, J.G. Coelho¹

¹Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física, Vitória, ES, Brasil.

²E.E.E.F.M. Dr. José Moyses, Cariacica, ES, Brasil.

³Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica, ES, Brasil.

Recebido em 03 de setembro de 2024. Aceito em 09 de novembro de 2024.

Neste artigo, propomos uma revisão destinada a explorar o tema do índice de frenagem (*“braking index”, n*), com o objetivo de torná-lo mais acessível e compreensível para estudantes em início de graduação ou pós-graduação. Dentro dessa perspectiva, apresentamos um estudo desse parâmetro astrofísico para pulsares. A perda de energia na forma de radiação é um fenômeno fundamental para a compreensão do comportamento de diversos objetos celestes. Portanto, estudando o índice de frenagem de um pulsar, que é uma medida de sua desaceleração rotacional devido à perda de energia, temos um importante parâmetro astrofísico que nos auxilia a compreender a evolução temporal da rotação do pulsar. Tradicionalmente, assumimos n como uma constante igual a três, indicando uma desaceleração constante ao longo do tempo. No entanto, variações no índice de frenagem podem sugerir a presença de mecanismos físicos que afetam a perda de momento angular, como emissão de vento pulsar, sistemas binários ou campos magnéticos variados. Com base nisso, estudamos a evolução temporal da frequência angular Ω em função do tempo, Ω em função do período P e do índice de frenagem em função do período de rotação do pulsar Caranguejo.

Palavras-chave: Índice de frenagem, estrelas de nêutrons, pulsar do Caranguejo, astrofísica.

In this article, we propose a review aimed at exploring the topic of the braking index (*“ n ”*) to make it more accessible and comprehensible for undergraduate and graduate students. Within this perspective, we present a study of this astrophysical parameter for pulsars. The loss of energy in the form of radiation is a fundamental phenomenon for understanding the behavior of various celestial objects. Therefore, by studying the braking index of a pulsar, which measures its rotational deceleration due to energy loss, we have an important astrophysical parameter that helps us understand the temporal evolution of the pulsar’s rotation. Traditionally, n is assumed to be a constant equal to three, indicating constant deceleration over time. However, variations in the braking index may suggest the presence of physical mechanisms affecting angular momentum loss, such as pulsar wind emission, binary systems, or variable magnetic fields. Based on this, we examine the temporal evolution of the angular frequency Ω as a function of time, Ω as a function of the period P , and the braking index as a function of the rotation period of the Crab pulsar.

Keywords: Braking-index, neutron stars, Crab pulsar, astrophysics.

1. Introduction

Historicamente, o conceito de índice de frenagem ou de desaceleração (abreviado por n) – que vem do termo em inglês *“braking index”* – [1–4] teve sua origem na década de 1960, quando os primeiros pulsares foram descobertos. Desde então, tem sido objeto de investigação intensa, resultando em uma ampla gama de teorias e modelos para explicar sua natureza e variação observada. Uma das contribuições pioneiras foi a formulação do modelo de frenagem magnética, proposto por Gold [5] e Pacini [6] em 1968, que descreve a perda de energia rotacional devido à emissão de radiação eletromagnética em um campo magnético forte.

As estrelas de nêutrons, remanescentes altamente compactas resultantes da explosão de supernovas

[1, 7, 8], são uma das classes mais fascinantes de objetos celestes em nossa galáxia. Dentre elas, destacam-se os pulsares e magnetares, cujas características únicas desafiam nossa compreensão da física estelar [9]. Quando uma estrela massiva esgota seu combustível nuclear, ela entra em colapso gravitacional, resultando em uma estrela de nêutrons altamente compacta, com um diâmetro de apenas alguns quilômetros, mas com uma massa maior que a do Sol [3]. Os pulsares são caracterizadas por sua rotação extremamente rápida, com períodos que variam de frações de segundo a alguns segundos. Devido a isso, a radiação emitida por esses objetos é tão intensa que, quando detectados da Terra, criam pulsos regulares de energia eletromagnética – daí a origem do nome pulsar.

O índice de frenagem (n) é um parâmetro astrofísico adimensional usado para quantificar a desaceleração de pulsares e nos fornece informações sobre os mecanismos

*Endereço de correspondência: dominiquelramos@gmail.com

físicos que estão envolvidos nessa frenagem. Ele é definido como a taxa de mudança do período de rotação do pulsar em relação ao tempo. De acordo com a teoria da eletrodinâmica clássica, é esperado um valor igual a três para o índice de frenagem de um pulsar que está perdendo energia apenas por meio da emissão de radiação eletromagnética em concordância com o modelo de dipolo magnético (MoDM) [3]. Contudo, é o fenômeno do índice de frenagem que confere a esses pulsares um caráter ainda mais enigmático, pois há uma clara discordância entre o valor que é observado e o previsto por essa teoria de radiação dipolar.

As observações têm mostrado que alguns pulsares apresentam valores do parâmetro n diferentes de três [10–12]. Isso implica que outros mecanismos além da radiação eletromagnética podem contribuir para a desaceleração dessas estrelas. Esses mecanismos podem incluir a perda de energia devido à emissão de partículas carregadas, interações com campos magnéticos, interações com o meio interestelar ou emissão de radiação gravitacional, a chamada onda gravitacional [13–15]. Portanto, valores de índice de frenagem diferentes de $n = 3$ podem indicar a presença de fenômenos complexos e ainda não completamente compreendidos nos pulsares como, por exemplo, modelos envolvendo fricção do vácuo quântico [16]. Como exemplo da discrepância no valor de n , apresentamos uma lista de pulsares que possuem medidas de seu índice de frenagem diferentes de três na Tabela 1 do presente trabalho.

Determinar com precisão o valor de n para diferentes pulsares e entender as causas subjacentes a essas variações é um tópico ativo de pesquisa na astrofísica. Frente a isso, esse tema também se mostra importante para entender a física das estrelas de nêutrons e seus processos dinâmicos que ocorrem no seu interior.

Embora muito progresso tenha sido feito na compreensão do índice de frenagem, muitas questões permanecem em aberto. Desvendar os mecanismos exatos por trás das variações observadas e sua relação com a física fundamental continua sendo um desafio importante. Todavia, com o avanço contínuo da tecnologia observacional e teórica, esperamos uma compreensão mais profunda dos processos astrofísicos envolvidos futuramente.

Em vista disso, propomos que o presente artigo seja um material de revisão que tem como objetivo explorar o tema em questão – *índice de frenagem em pulsares* – para elucidar o assunto aos estudantes que estão iniciando a graduação ou a pós-graduação. Temos também o intuito de discutir os problemas associados a radiação de dipolo desses objetos compactos, pois há uma clara discordância entre a teoria de dipolo desenvolvida para um pulsar e as observações para radiação de dipolo clássico em pulsares. Para isso, como sequência didática, escolhemos abordar o modo que é feito o tratamento clássico para um pulsar. Com esse propósito, usamos o modelo de Gold [5] e Pacini [6], que atribuem a um pulsar o equivalente a emissão de radiação de dipolo

magnético. Neste contexto, investigamos as propriedades intrínsecas em estrelas dessas nêutrons e examinamos como o índice de frenagem está intimamente relacionado com esses objetos cósmicos, buscando compreender as implicações fundamentais de suas propriedades para a astrofísica.

A organização das seções seguintes se dá primeiramente pela abordagem da aproximação do modelo de dipolo magnético (MoDM) de uma antena para um pulsar na Seção 2, que tem como objetivo apresentar aos leitores uma revisão do eletromagnetismo de Maxwell com o intuito de obtermos a potência da onda irradiada por uma antena em termos do dipolo magnético; a Seção 3 tem como finalidade mostrar como chegamos no parâmetro $n = 3$ a partir da relação para a potência da equação 32 vista na seção anterior; por fim, na Seção 4 expomos nossa discussão dos resultados e observações finais a cerca do tratamento analítico da equação 40 e do seu tratamento numérico, com o propósito de mostrarmos aos leitores a possibilidade de tratar um problema simples de através de um método mais preciso de resolução.

2. Modelo de Dipolo Magnético de uma Antena no Eletromagnetismo de Maxwell

Nesta seção, faremos uma revisão sobre o Modelo de Dipolo Magnético (MoDM) de uma antena para o Eletromagnetismo Clássico de Maxwell [17]. O modelo de dipolo magnético é uma simplificação que nos permite entender os princípios básicos por trás da radiação eletromagnética emitida por um objeto astrofísico. De acordo com [18] o MoDM simplifica a complexidade de um pulsar em um sistema mais gerenciável, em que podemos visualizar os processos físicos envolvidos de modo aproximado. Portanto, como esse modelo é uma representação teórica fundamental para descrever a radiação eletromagnética gerada por sistemas radiantes, como antenas de comunicação, podemos fazer uma aproximação da radiação de um dipolo magnético para um pulsar.

Partindo da definição do quadri-potencial eletromagnético $A_\mu = (\frac{V}{c}, \mathbf{A})$ e da quadri-densidade de corrente $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, podemos chegar às equações de Maxwell na forma covariante, que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético em toda a teoria eletromagnética. O quadri-potencial eletromagnético é uma forma matemática que unifica os campos elétrico e magnético em uma estrutura quadridimensional, em que V é o potencial escalar elétrico, c a velocidade da luz e \mathbf{A} é o potencial vetor magnético ou, como também iremos chamar, potencial vetor retardado. A quadri-densidade de corrente é definida por ρ que é a densidade de carga elétrica e \mathbf{j} que é a densidade de corrente elétrica.

Escrevendo a densidade Lagrangiana do eletromagnetismo clássico [19], nas unidades Gaussianas,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (1)$$

em que $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético que contém as componentes dos campos elétrico e magnético e seu antissimétrico $F_{\mu\nu}$. Usando as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \right] = 0, \quad (2)$$

o que nos permite derivar as equações de movimento para os campos elétrico e magnético a partir dos princípios variacionais da mecânica clássica, obtemos as equações de Maxwell escrita no sistema CGS Gaussiano $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu$ ¹ e da identidade de Bianchi $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, que em componentes nos dá as quatro equações

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (6)$$

No contexto astrofísico, a perda de energia na forma de radiação é um fenômeno fundamental para entender o comportamento de uma variedade de objetos celestes, como os pulsares, dentre outros corpos cósmicos. Nesse cenário, o vetor de Poynting desempenha um papel importante para esse estudo, pois o vetor descreve a taxa de fluxo de energia e o transporte de momento eletromagnético em um sistema e pode ser obtido a partir do tensor energia-momento² obtido a partir da Lagrangiana de Maxwell (equação 1),

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\kappa} F^\nu{}_\kappa - \frac{1}{4} F^{\sigma\kappa} F_{\sigma\kappa} \right], \quad (7)$$

em que $F^{\mu\kappa}$ é o tensor eletromagnético e o vetor de Poynting $T^{0i} = \frac{1}{c}S^i = \frac{1}{4\pi}\epsilon^{ijk}E^jB^k$, ou na notação vetorial

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (8)$$

que usaremos mais a diante no nosso trabalho.

Para fazermos o tratamento da perda de energia da estrela, vamos nos aprofundar no estudo da radiação de

¹ As unidades são escolhidas de forma que a constante de permissividade do vácuo ϵ_0 e a constante de permeabilidade do vácuo μ_0 assumem os valores $1/c^2$ e 1, respectivamente, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Nesse sistema, as equações de Maxwell são expressas de forma simplificada.

² O tensor energia-momento descreve a distribuição de energia e momento do campo eletromagnético em um ponto no espaço-tempo.

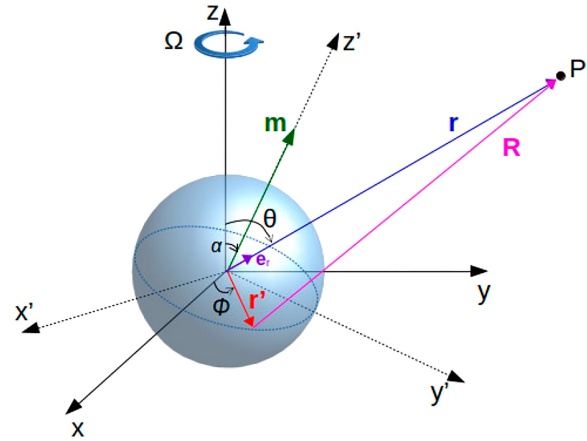


Figura 1: Objeto compacto, como Pulsar, está esquematizado nos eixos xyz , girando com velocidade/frequência angular Ω ao longo de z , possuindo dipolo magnético \mathbf{m} sob um eixo $x'y'z'$ e sendo r a distância entre o ponto de medida e o centro da estrela.

um dipolo magnético como aproximação. Seja, portanto, um objeto compacto esquematizado na Figura (1), no qual consideramos $R \gg r'$, ou seja, $R \gg \lambda = c/v$ para grandes distâncias, sendo r' o raio da estrela e R a distância entre a sua superfície e o ponto de medida, a Terra, com $R \equiv r - \mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r$, de modo que \hat{e}_r seja um vetor unitário na direção de \mathbf{r} .

Como queremos encontrar o vetor de Poynting (8), precisamos definir como \mathbf{E} e \mathbf{B} se comportam em determinadas condições. Para isso, definimos o potencial vetor retardado \mathbf{A} , tendo em vista a dependência desse por \mathbf{E} e \mathbf{B} ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10)$$

Como estamos analisando o problema onde o potencial elétrico é nulo $V = 0$, vamos estudar apenas o potencial vetor magnético. Dessa forma, para grandes distâncias, como feito em [17], \mathbf{A} pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t')}{R} dV \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t - R/c)}{R} dV \Big|_{t'=t-R/c} \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t - r/c + (\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r)/c)}{r - \mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r} dV. \end{aligned} \quad (11)$$

Em comparação a r , o termo $\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r$ pode ser desprezado caso não haja mudanças muito rápidas na distribuição de cargas. Logo, obtemos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t - r/c) dV, \quad (12)$$

em que $t' = t - r/c$, pois $R \equiv r$, já que o termo $\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r$ foi desprezado em comparação a r . Expandindo os

integrandos da equação 12 em primeira ordem

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \left[\int \mathbf{j}(t') dV + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r) \mathbf{j}(t') dV \right], \quad (13)$$

em que $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ com $\int \mathbf{j} dV = \sum q \mathbf{v}$ para cargas pontuais. Assim, o potencial fica

$$\mathbf{A} = \frac{\sum q \mathbf{v}}{cr} + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum q \mathbf{v} (\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r), \quad (14)$$

e o termo $\mathbf{v}(\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}' \cdot \hat{e}_r) &= \frac{1}{2} \mathbf{r}' (\hat{e}_r \cdot \mathbf{r}') + \frac{1}{2} \mathbf{v} (\hat{e}_r \cdot \mathbf{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{r}' (\hat{e}_r \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r}' (\hat{e}_r \cdot \mathbf{r}')] + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}) \times \hat{e}_r. \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo 15 na equação 14, obtemos o potencial \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\sum q \mathbf{v}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum q [\mathbf{r}' (\hat{e}_r \cdot \mathbf{r}')] \\ &\quad + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum q (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}) \times \hat{e}_r. \end{aligned} \quad (16)$$

Como o momento magnético é dado por

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum q (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}), \quad (17)$$

podemos escrever a equação (16) em termos do momento magnético

$$\mathbf{A} = \frac{\sum q \mathbf{v}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum q [\mathbf{r}' (\hat{e}_r \cdot \mathbf{r}')] + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{m} \times \hat{e}_r). \quad (18)$$

No caso em que não há densidade de carga, por se tratar de uma estrela de nêutrons, o único termo que sobra da equação (18) é o último termo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} (\dot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r). \quad (19)$$

Os campos elétrico e magnético ficam escritos apenas em termos do potencial vetor magnético e, portanto, de acordo com [17], temos que $\mathbf{E} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \hat{e}_r$. Assim, substituindo (18) nas relações para os respectivos campos, obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} (\hat{e}_r \times \ddot{\mathbf{m}}), \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_r, \quad (21)$$

onde usamos a notação de ponto em cima das variáveis para representar derivadas temporais. Utilizando a equação (8) e substituindo \mathbf{E} e \mathbf{B} pelas relações em (20) e (21), respectivamente, o vetor de Poynting fica

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^2 r} (\hat{e}_r \times \ddot{\mathbf{m}}) \times \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_r]. \quad (22)$$

Pela Figura 1 temos que o momento magnético da estrela é dado por:

$$\mathbf{m} = m_0 [\sin \alpha \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \sin(\Omega t) \hat{\mathbf{j}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}] = m_0 \hat{e}_r. \quad (23)$$

sendo \hat{e}_r o versor radial esférico. A derivada de (23) fica,

$$\dot{\mathbf{m}} = m_0 \Omega \sin \alpha \hat{e}_\phi, \quad (24)$$

com \hat{e}_ϕ sendo o versor azimutal esférico. A derivada segunda de (23),

$$\ddot{\mathbf{m}} = -m_0 \sin \alpha \Omega^2 \hat{e}_\rho, \quad (25)$$

onde \hat{e}_ρ é o versor polar no plano xy . A rotação é azimutal no plano xy , de modo que $\phi = \Omega t$, em que a frequência angular³ é $\Omega = 2\pi\nu$, sendo ν a frequência linear, e o momento de dipolo magnético é $m_0 = B R^3/3$ [1].

Os termos $(\dot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r)$, $(\hat{e}_r \times \ddot{\mathbf{m}})$ e $(\ddot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r)$ que usamos para definir os campos e potencial e da equação (22) ficam, respectivamente

$$(\dot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r) = m_0 \sin \alpha \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = m_0 \sin \alpha \hat{e}_\theta, \quad (26)$$

$$(\hat{e}_r \times \ddot{\mathbf{m}}) = -m_0 \sin \alpha \Omega^2 (\hat{e}_r \times \hat{e}_\rho), \quad (27)$$

$$(\ddot{\mathbf{m}} \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_r = -m_0 \sin \alpha \Omega^2 (\hat{e}_\rho \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_r. \quad (28)$$

Em concordância com a Figura 1, então $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi$, $\hat{e}_\rho \times \hat{e}_r = -\cos \theta \hat{e}_\phi$, $(\hat{e}_\rho \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_r = -\cos \theta \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_\theta$ e por último $(\hat{e}_\phi \times \hat{e}_\theta) = -\hat{e}_r$. Desta forma, o potencial vetor magnético e campos elétrico e magnético, ficam

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{cr} \Omega m_0 \sin \alpha \hat{e}_\theta, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2 r} \Omega m_0 \sin \alpha \cos \theta \hat{e}_\phi, \\ \mathbf{B} &= -\frac{1}{c^3 r} \Omega m_0 \sin \alpha \cos \theta \hat{e}_\theta, \end{aligned} \quad (29)$$

e reescrevendo a equação (22), chegamos em

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c^3 r^2} \Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta \hat{e}_r. \quad (30)$$

Assim, a potência total irradiada é obtida integrando o vetor de Poynting sobre uma superfície fechada que circunda uma distribuição de carga $Pot = \oint_s \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$. Assim, escrevendo a potência em coordenadas esféricas, temos

$$Pot = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{S} \cdot \hat{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (31)$$

³ A frequência angular Ω foi assumida aqui como constante, por um momento, mas veremos que este fato não se sustentará, devido à perda de radiação da estrela, gerando assim uma desaceração que será mostrado posteriormente.

Substituindo (29) na potência para o caso clássico, chegamos à

$$\begin{aligned} Pot &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi c^3} \Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= - \frac{1}{4\pi c^3} \Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= - \frac{m_0^2 \Omega^4 \sin^2 \alpha}{3c^3}, \end{aligned} \quad (32)$$

em que $|\dot{\mathbf{m}}|^2 = \Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha$, desta forma, a Pot também pode ser escrita em termos do momento de dipolo magnético como $Pot = -\frac{|\dot{\mathbf{m}}|^2}{3c^3}$. A partir daí, podemos fazer a conexão entre a potência irradiada pelo dipolo, no contexto da estrela de nêutrons com a sua rotação. Portanto, veremos na próxima seção que esta perda de radiação vai alterar a rotação e algumas variáveis (observáveis) importantes apresentarão essa “assinatura”.

3. O Cálculo do Índice de Frenagem em Pulsares para um Dipolo Oscilante

Ao longo desta seção, apresentaremos o cálculo do índice de frenagem dos pulsares que envolve técnicas de análise de dados observacionais [20] combinadas com modelos teóricos [21].

A partir da coleta de dados vindos das observações de pulsares ao longo do tempo, astrônomos conseguiram registrar o tempo de chegada de cada pulso, obtendo dados observacionais para os pulsares [22]. Para modelar o tempo de chegada dos pulsos, utilizamos modelos teóricos de rotação e emissão de radiação de estrelas como o MoDM, que é um modelo canônico para o estudo do índice de frenagem [23]. Com base nisso, podemos obter as estimativas do período P ou frequência Ω , a partir da taxa de variação do período com relação ao tempo \dot{P} ou da frequência $\dot{\Omega}$ e da derivada segunda dessas quantidades (\ddot{P} ou $\ddot{\Omega}$) que são as propriedades de rotação da estrela.

As observações têm mostrado que essa frequência de rotação é igual a frequência com que o pulso da onda eletromagnética é emitida [1], e a taxa de variação da frequência de rotação da estrela é tida como sendo proporcional a potências da própria frequência

$$\frac{d\Omega}{dt} = -k\Omega^n, \quad (33)$$

sendo esta potência n o índice de frenagem e k uma constante de proporcionalidade. Desta forma, a previsão é feita derivando a equação acima no tempo,

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = -k n \Omega^{n-1} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (34)$$

Substituindo (33) na equação acima e isolando a potência, temos

$$n = \frac{\ddot{\Omega}\Omega}{\dot{\Omega}^2}, \quad (35)$$

sendo n o índice da desaceleração da rotação que também pode ser escrito em função do período (P), como [24]

$$n = 2 - \frac{P\ddot{P}}{\dot{P}^2}. \quad (36)$$

Quando consideramos a radiação de um dipolo magnético ideal para análise da perda de energia do pulsar, esperamos encontrar um valor de n igual a três. Todavia, como é mostrado na Tabela 1, encontramos valores para o índice de frenagem de pulsares diferente de $n = 3$ e, em vista disso, necessitamos de modelos mais complexos para podermos explicar tais resultados. Atribuímos isso a outros mecanismos responsáveis pela perda de energia dos pulsares que influenciam no valor de n , como, por exemplo, vento de partículas [36] e ondas gravitacionais [13–15, 25].

Tomando a aproximação da energia irradiada por uma antena [17] (análogo a um dipolo magnético) para calcularmos o índice de frenagem de um pulsar, igualamos a equação (32) com a energia de rotação perdida da estrela

$$\dot{E}_{rot} = -\frac{\Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha}{3c^3}, \quad (37)$$

Tabela 1: Diferentes valores para o índice de frenagem de 10 pulsares, sendo o Pulsar do Caranguejo nomeado por J0534+2200, o primeiro listado na Tabela. Retirado de [35] com modificações.

Pulsares	Frequência Ω (Hz)	Período (s)	Índice de Frenagem (n)	Referências
J0534+2200	29,946923	0,0334	2,342(1)	[25]
J0537–6910	62	0,0161	–1,22(4)	[26]
J0835–4510	11,200	0,0893	1.7(2)	[27]
J1119–6127	2,4512027814	0,4080	2,91(5) \sim 2,684(2)	[28]
J1208–6238	2,26968010518	0,4406	2,598(1)	[29]
J1513–5908	6,611515243850	0,1513	2,832(3)	[30]
J1640–4631	4,843410287	0,2065	3,5(3)	[31]
J1734–3333	0,855182765	1,1693	0,9(2)	[32]
J1833–1034	16,15935711336	0,0619	1,857(1)	[33]
J1846–0258	3,0621185502	0,3266	2,65(1) \sim 2,16(1)	[34]

em que o lado esquerdo da igualdade é a derivada em relação ao tempo da energia cinética de um corpo em rotação $E_{rot} = \frac{1}{2}I\Omega^2$, e a sua derivada no tempo,

$$\dot{E}_{rot} = I\Omega\dot{\Omega}, \quad (38)$$

em que I é o momento de inércia da estrela, obtida em termos da massa e do raio da estrela, e que ela não depende do tempo, $dI/dt = 0$. Substituindo (38) na equação (37),

$$I\dot{\Omega}\Omega = -\frac{\Omega^4 m_0^2 \sin^2 \alpha}{3c^3} \quad (39)$$

temos então uma equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{\Omega} + k\Omega^3 = 0, \quad (40)$$

em que $\Omega = \Omega(t)$ deve ser encontrado e $k = \frac{m_0^2 \sin^2 \alpha}{3c^3 I}$. A partir destes dados, podemos obter $\dot{\Omega}$ e $\ddot{\Omega}$ e em seguida o índice de frenagem da equação (35).

Munidos da definição do índice de frenagem, agora podemos estudar como as características físicas de um pulsar, como a frequência ou o período de rotação, influenciam no valor de n e como interpretamos fisicamente a variação dessa medida em função período de um pulsar, o que será visto na próxima seção.

4. Discussão dos Resultados e Observações Finais

Vamos agora analisar o tratamento numérico do problema, resolvendo a equação diferencial da equação (40) e plotando os gráficos da teoria. Faremos isso usando um método numérico de Runge-Kutta 4 (RK4) [37], escrito na linguagem FORTRAN 77/90 [38] e confirmada em PYTHON 3.0 [39].

Para testar o resultado, vamos usar o Pulsar Caranguejo em que os dados são amplamente testados. Para resolver a equação (40), precisamos das condições iniciais do problema, como $\Omega(t_0) = \Omega_0$. Para o tratamento de dados, usamos os valores da Tabela 2.

A solução analítica da equação (40) pode ser obtida facilmente a partir da resolução da equação diferencial separável de primeira ordem com coeficientes constantes e homogênea que tem a forma

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + 2k\Omega_0^2(t - t_0)}} \quad (41)$$

em que os valores dos parâmetros e das condições iniciais estão apresentados da Tabela 2. Porém, apesar de podermos resolver o problema de forma simples, optamos por mostrar aos leitores uma forma alternativa de resolução dessa questão utilizando o método de numérico de integração ⁴ citado para resolver a equação (40).

O tratamento numérico-computacional, foi obtido a partir da resolução da equação diferencial (40), usando o método de RK4, em que variamos a variável independente tempo, $t_{k+1} = t_k + h$ e a dependente $\Omega_{k+1} = \Omega_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, com

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, \Omega_k), \\ k_2 &= f(t_k + h/2, \Omega_k + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_k + h/2, \Omega_k + hk_2/2), \\ k_4 &= f(t_k + h, \Omega_k + hk_3). \end{aligned}$$

que são os integradores do método RK4 e função da equação diferencial (40) é $f(t, \Omega) = -k\Omega^3$.

O tratamento apresentado aos leitores, que descreve um problema que aborda os assuntos apresentados separadamente em cursos de graduação em física, pedagogicamente falando – eletromagnetismo e mecânica rotacional – é um problema de pesquisa atual em astrofísica estelar, a desaceração estelar por perda de radiação. O primeiro tratamento matemático, trata-se da resolução da equação diferencial de primeira ordem de forma analítica, com condições iniciais e o segundo, trata-se da resolução numérica, usando o método Runge-Kutta 4, as mesmas condições iniciais em ambos a fim de obter o mesmo resultado gráfico. Devido ao tratamento com boa precisão numérica, os gráficos gerados tiveram um resultado satisfatório descrevendo o modelo MoDM com uma boa acurácia. Consequentemente, os gráficos gerados mostram que a frequência angular de rotação do Pulsar do Caranguejo (PSR B0531+21 ou PSR J0534+2200) muda ao longo do tempo. Sabemos que pulsares são estrelas de nêutrons altamente magnetizadas, que giram extremamente rápido em torno do seu eixo, com períodos em torno de milissegundos [40].

⁴ Se a equação diferencial tem solução analítica, por que usamos um método numérico? Sob o ponto de vista da pesquisa científica, existem problemas em aberto no estudo em questão que as equações se tornam não lineares [13] [16], por isso, temos que recorrer aos métodos numéricos para nos auxiliar na resolução de questões de forma eficiente e precisa.

Tabela 2: A tabela mostra os parâmetros empregados no processo de tratamento de dados para resolver a equação diferencial (40).

Parâmetros fixados	Parâmetros iniciais
Campo na superfície $B = 1.0 \times 10^{14} G$	Tempo inicial $t_0 = 0$
Raio da estrela $r' = 1.0 \times 10^6 cm$	Período $P = 0.0334 s$
Velocidade da luz $c = 3.0 \times 10^{10} cm/s$	Frequência angular de rotação $\Omega = 2\pi/P$
Distância de medida $r = 3.086 \times 10^{18} cm$	tempo final $t = 1000 s$
Momento de inércia $I = 1 \times 10^{36} g.cm^2$	Derivada do Período $\dot{P} = 4.210 \times 10^{-13} s^{-1}$
Ângulo beta $\beta = 1.0 \times 10^{10}$	Taxa de frequência de rotação $\dot{\Omega} = 2\pi\dot{P}/P^2$

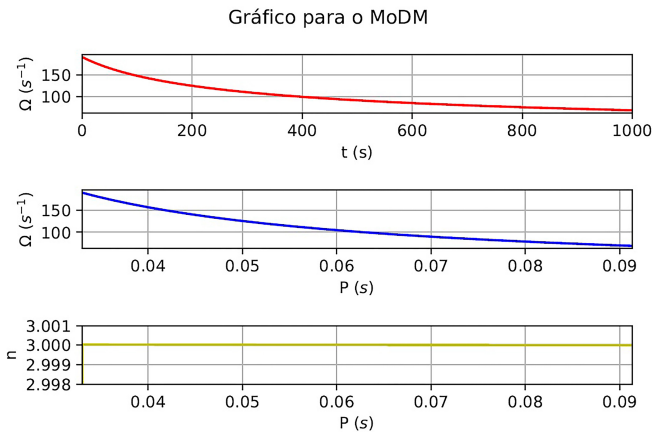


Figura 2: Gráfico do problema do modelo de dipolo magnético (MoDM) na rotação do pulsar do Caranguejo para as soluções analítica e numérica.

Tradicionalmente, acredita-se que essa vertiginosa rotação seja influenciada pela conservação do momento angular durante o colapso estelar (durante sua evolução) [41]. Entretanto, os pulsares podem perder momento angular ao longo do tempo [42] [43] devido a processos de liberação de energia dentro de suas magnetosferas, o que afeta suas taxas de rotação [44]. Em razão disso, notamos a variação ou diminuição da rotação da estrela (apresentados na Figura 2). No caso clássico que estudamos, esse processo de perda de momento angular está relacionado com a radiação eletromagnética na forma de pulsos de radiação de rádio (característica dos pulsares) ou radiação de dipolo magnético, pois emitir radiação significa perda de energia. Por influência disso, a taxa da frequência angular também diminui gradativamente no tempo. Em nosso gráfico $\Omega \times P$, notamos que conforme o período de rotação do pulsar (o tempo necessário para que o pulsar complete uma rotação completa) aumenta, a frequência angular diminui. Essa relação é devido ao fato de que a frequência angular é inversamente proporcional ao período.

As análises foram para mostrar o cerne do trabalho, o observável índice de frenagem. Como apresentamos ao longo do texto, esse parâmetro astrofísico é uma medida muito importante que nos auxilia no entendimento da evolução temporal da rotação dos pulsares [45] e descreve a taxa de desaceleração de um pulsar devido a perda de energia. Dessa forma, o gráfico presente na Figura 2 do índice de frenagem em função do período, representa essa evolução. Consequentemente, constatamos que no caso do estudo clássico, isto é, para a aproximação que tomamos para um pulsar, a emissão de radiação dipolo magnético, considerando apenas a perda de energia através da emissão de radiação eletromagnética, obtemos o índice de frenagem igual a três sem variações perceptíveis, como vemos na Figura 2, o que condiz com a literatura. Um valor constante para essa quantidade nos sugere que há um desaceleramento também constante do pulsar ao longo do tempo. No entanto, a presença de

variações nesse valor podem apontar para a existência de mecanismos físicos que estão afetando a perda de momento angular, como emissão de vento pulsar [45], sistemas binários (interações com campos gravitacionais de outros corpos celestes), campo magnético variáveis [46].

De acordo com a Tabela 1, o índice de desaceleração difere de $n = 3$ para diferentes pulsares como, por exemplo, para o pulsar do Caranguejo, primeiro pulsar da Tabela 1, com índice de frenagem igual a 2,342. Este desvio da previsão do modelo canônico ($n = 3$) desse observável é atribuído a fatores que não consideramos nesse trabalho, como, além dos mencionados anteriormente, a oscilação do formato da estrela, mudanças no momento de inércia devido à desaceleração [47], processos no interior estelar que podem influenciar na frequência de rotação da estrela e, portanto, no valor do índice de frenagem. Nessa perspectiva, o objetivo deste trabalho foi apresentar o problema da radiação de dipolo como uma aplicação direta de duas áreas da física, aplicada a estrelas de nêutrons e suas extrapolações de pesquisas atuais em astrofísica, levando em conta que os tratamentos computacionais podem estar presentes em problemas simples e também variações deste assunto, em que a complexidade da física envolvida, podem aparecer de acordo com as propostas de pesquisa entre as medidas observacionais e novos cenários teóricos [13, 16].

Referências

- [1] S.L. Shapiro e S.A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects* (John Wiley & Sons, New York, 2008).
- [2] A. Lyne, F. Graham-Smith e B. Stappers, *Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, Cambridge, 2022).
- [3] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes* (Springer, Berlin, 2007).
- [4] H. O. de Oliveira, *Relacionando índices de frenagem de jovens pulsares à estrutura superfluida de seu núcleo*. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos (2007).
- [5] T. Gold, *Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources* (Harvard University Press, Massachusetts, 1979).
- [6] F. Pacini, *Nat. (Lon.)* **219**, 145 (1968).
- [7] H.O. Thurman III, *Neutron star electromagnetic field structure* (Old Dominion University, Virgínia, 2004).
- [8] R. Kippenhahn, A. Weigert e A. Weiss, *Stellar structure and evolution* (Springer – A&A Library, Heidelberg, 2012).
- [9] J.G. Coelho, *Magnetares e os pulsares de anãs brancas*. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos (2013).
- [10] S. Johnston e D. Galloway, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **306**, L50 (1999).
- [11] H.O. de Oliveira, N.S. Magalhaes, R.M. Marinho, G.A. Carvalho e C. Frajuca, *J. of Phys.: Conf. Ser.* **1291**, 012012 (2019).

- [12] Z.F. Gao, N. Wang, H. Shan, X.D. Li e W. Wang, *The Astr. Journ.* **849**, 19 (2017).
- [13] J.C. de Araujo, J.G. Coelho e C.A. Costa, *Jour. of Cosm. and Astro. Phys.* **2016**, 023 (2016).
- [14] J.C. de Araujo, J.G. Coelho e C.A. Costa, *The Euro. Phys. Journ. C.* **76**, 1 (2016).
- [15] J.C. de Araujo, J.G. Coelho e C.A. Costa, *The Euro. Phys. Journ. C.* **77**, 1 (2017).
- [16] J.G. Coelho, J.P. Pereira e J.C. de Araujo, *The Astro. Journ.* **823**, 97 (2016).
- [17] L.D. Landau, *The classical theory of fields* (Elsevier, Amsterdã, 2013), v. 2.
- [18] O. Hamil, N.J. Stone e J.R. Stone, *Phy. Rev. D.* **94**, 063012 (2016).
- [19] J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983).
- [20] C.M. Espinoza, em: *Proceedings of the International Astronomical Union* (Cambridge, 2017).
- [21] H.O. de Oliveira, R.M. Marinho Jr. e N.S. Magalhães, em: *International Journal of Modern Physics: Conference Series* (Cingapura, 2017).
- [22] R.N. Manchester, em: *AIP Conference Proceedings* (Maryland, 2011).
- [23] O. Hamil, arXiv:1503.09110 (2015).
- [24] R.N. Manchester e J.H. Taylor, *Pulsars* (WH Freeman and Company, São Francisco, 1977).
- [25] A. Lyne, C. Jordan, F. Graham-Smith, C.M. Espinoza, L.B. Stappers e P. Weltevrede, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **446**, 857 (2015).
- [26] D. Antonopoulou, C.M. Espinoza, L. Kuiper e N. Andersson, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **473**, 1644 (2018).
- [27] C. Espinoza, A. Lyne e B. Stappers, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **466**, 147 (2017).
- [28] D. Antonopoulou, P. Weltevrede, C.M. Espinoza, A.L. Watts, S. Johnston, R.M. Shannon e M. Kerr, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **447**, 3924 (2015).
- [29] C.J. Clark, H.J. Pletsch, J. Wu, L. Guillemot, F. Camilo, T.J. Johnson, M. Kerr, B. Allen, C. Aulbert, C. Beer et al., *The Astrophys. J. Lett.* **832**, L15 (2016).
- [30] M.A. Livingstone e V.M. Kaspi, *The Astrophys. J.* **742**, 31 (2011).
- [31] R.F. Archibald, E.V. Gotthelf, R.D. Ferdman, V.M. Kaspi, S. Guillot, F.A. Harrison, E.F. Keane, M.J. Pivovarov, D. Stern, S.P. Tendulkar et al., *The Astrophys. J. Lett.* **819**, L16 (2016).
- [32] C.M. Espinoza, A.G. Lyne, M. Kramer, R.N. Manchester e V.M. Kaspi, *The Astrophys. J. Lett.* **741**, L13 (2011).
- [33] J. Roy, Y. Gupta e W. Lewandowski, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **424**, 2213 (2012).
- [34] R.F. Archibald, V.M. Kaspi, A.P. Beardmore, N. Gehrels e J.A. Kennea, *The Astrophys. J.* **810**, 67 (2015).
- [35] M. Kim e H. An, arXiv:1903.01107 (2019).
- [36] J.G. Coelho, J.C.N. de Araujo, S.M. Ladislau e R.C. Nunes, *The Astrophys. J.* **920**, 57 (2021).
- [37] R.L. Burden e J.F. Douglas, *Numerical analysis* (Brooks/Cole Cengage Learning, Boston, 2011).
- [38] J.C. Adams, W.S. Brainerd, J.T. Martin, B.T. Smith e J.L. Wagener, *Fortran 90 Handbook* (McGraw-Hill, New York, 1992), v. 32.
- [39] N.N.C. Menezes, *Introdução à programação com Python-2ª edição: Algoritmos e lógica de programação para iniciantes* (Novatec Editora, São Paulo, 2016).
- [40] Z.K. Huang e X.J. Wu Chinese, *J. of Astron. and Astrophys* **3**, 166 (2003).
- [41] R. Kazeroni, J. Guilet e T. Foglizzo, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **471**, 914 (2017).
- [42] A. Treves, M. Pilia e M.L. Moya, em: *AIP Conference Proceedings* (Maryland, 2011).
- [43] I. Malov, *Astron. Rep.* **45**, 389 (2001).
- [44] S. Shibata e S. Kisaka, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **507**, 1055 (2021).
- [45] E.C.A. Araujo, V.A. de Lorenci, P. Peter e L.S. Ruiz, arXiv:2302.13322 (2023).
- [46] A.P. Igoshev e S.B. Popov, *Mon. Not. of the Roy. Astron. Soc.* **499**, 2826 (2020).
- [47] A. Rusul e X.P. Zheng, *The Astrophysical Journal* **951**, 40 (2023).