Title

Anderson A. Borba,
PPGEEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação
Universidade Presbiteriana Mackenzie
ISITEC - Instituto Superior de Inovação e Tecnologia
São Paulo, Brasil

Maurício Marengoni
Universidade Presbiteriana Mackenzie
São Paulo, Brasil

anderborba@gmail.com

Abstract

Estudo sobre equações anisotrópicas aplicadas em imagens.

Keywords: Multigrid Methods, Computational Vision, Edge detection, Sobel operators, Laplacian methods.

1 Introdução

Este artigo está baseado nas ideias proposta no artigo [1], o intuíto é investigar a resolução da equação diferencial anisotrópica e propor uma resolução mais eficiênte da mesma.

2 Difusão anisotrópica

E equação da anisotropia pode ser modelada por

$$\begin{cases} I_t = div(c(x,y,t)\nabla I), & \forall x,y \in \Omega \\ I(x,y,t) = g, & \forall x,y \in \partial\Omega \\ I(x,y,t_0) = I_0(x,y,0), & \forall x,y \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Onde t é um parametro de tempo, $I(x,y,0)$ é a imagem original e $\nabla I(x,y,t)$ é o gradiente da imagem para cada tempo t, e $c(x,y,t) = g(||\nabla I(x,y,t)||)$ é chama de função de condutância responsável pela anisotropia da equação diferencial.

A função g é escolhida para satisfazer a difusão máxima em regiões uniformes e e que a difusão é interrompida pelas as arrestas, isto é, respectivamente respectivamente $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. No artigo [2] foram propostas duas funções

$$g_1(x,y,t) \quad = \quad \exp\left[-\left(\tfrac{x}{K}\right)^2\right] \tag{2}$$

e

$$g_2(x,y,t) \quad = \quad \frac{1}{1+\left(\frac{x}{K}\right)^2} \tag{3}$$

onde K é um limiar para a magnitude do gradiente que controla a razão da difusão e serve como um limiar suave entre os gradientes das imagens que são atribuídos ao ruído e aqueles atribuídos as bordas.

No artigo [3] foi proposta outra função de condutância denominada função duplamente pesada de Turkey

$$g_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{S}\right)^2\right]^2, & \forall x < S \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4}$$

onde $S = \sqrt{2}K$.

Definimos a função fluxo por $\phi(x) := g(x)x$ que representa a soma do fluxo de brilho qu é gerado. O fluxo máximo é gerado nos locais onde $|\nabla I| = K$.

2.1 Discretização da equação anisotrópica

A discretização de equação (1) pode ser representada pela equação algébrica discreta

$$I_{i,j}^{t+1} = a_e I_{i+1,j}^t + a_w I_{i-1,j}^t + a_c I_{i,j}^t + a_n I_{i,j+1}^t + a_s I_{i,j-1}, \tag{5}$$

sendo a_e, a_w, a_c, a_n, e a_s coeficientes da equação discreta de difusão anisotrópica. Cada um desses coeficientes dependen da posição do pixel e ainda do tempo em que são calculados.

A equação algébrica discreta pode ser representada pela notação usando estencil ou núcleo

$$I_{i,j}^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & a_n & 0 \\ a_w & a_c & a_e \\ 0 & a_s & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} * I_{i,j}^t$$

2.2 Validação e verificação da acurácia para a equação isotrópica

Nesta seção serão definidos os problemas para a validação dos códigos implementados e sua respectivas acurácia.

Inicialmente vamos resolver a equação da difusão isotrópica

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} & = & \nabla I(x,y,t). & (x,y) \in \quad D \\ I(x,y,0) & = & g(x,y) & (x,y) \in \quad D \\ I(x,y,t) & = & h(x,y,t) & (x,y) \in \quad \partial D \end{array} \tag{6}$$

A discretização será realizada por diferênças finitas de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço (Domínio D). Realizando o processo de discretização obteremos a seguinte equação algébrica:

$$I_{i,j}^{t+1} \quad = \quad I_{i+1,j}^t + I_{i-1,j}^t + I_{i,j}^t + I_{i,j+1}^t + I_{i,j-1} - 4I_{i,j}^t, \tag{7}$$

que pode ser representada pelo seguinte núcleo:

$$LI(x,y)^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} * I(x,y)^t,$$

A validação será testada no seguinte exemplo no qual também mostraremos a acurácia:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} & = & \nabla I(x,y,t). & (x,y) \in \quad [0,1]\times[0,1] \\ I(x,y,0) & = & g(x,y) & (x,y) \in \quad D \\ I(x,y,t) & = & h(x,y,t) & (x,y) \in \quad \partial D \end{array} \tag{8}$$

onde a condição inicial é dada por,

$$I(x,y,0) \quad = \quad g(x,y) \quad = \quad \exp(x+y). \tag{9}$$

onde as condições de contorno são dadas por,

$$\begin{array}{rcll} h(0,y,t) & = & \exp(y+2t), & 0 \le t \le T, \quad 0 \le y \le 1. \\ h(1,y,t) & = & \exp(1+y+2t), & 0 \le t \le T, \quad 0 \le y \le 1. \\ h(x,0,t) & = & \exp(x+2t), & 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 1. \\ h(x,1,t) & = & \exp(1+x+2t), & 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 1. \end{array} \tag{10}$$

No caso destes testes conhecemos a solução exata que será usada para verificar a acurácia com auxilio da norma do máximo, isto é, $erro = \|I - \bar{I}\|$, onde I é a solução exata e $\bar{I}$ a solução aproximada.

$$I(x,y,t) \quad = \quad \exp(x+y+2t). \tag{11}$$

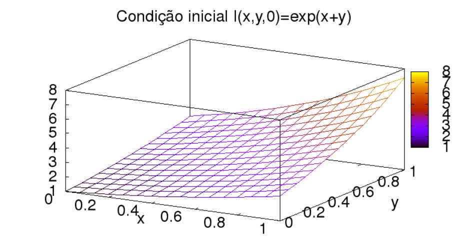

Figure 1: Condição inicial.

2.2.1 Verificação da acurácia

A tabela mostra a acurácia e a ordem de aproximação da discretização na domínio D.

n	erro	razão
16	0.002130709465	****
32	0.000500641341	4.2560
64	0.000121225177	4.1298
128	0.000029839353	4.0625
256	0.000007401560	4.0315

É destacado na 3 coluna da tabela a razão entre os consecutivo erros (norma do máximo entre a solução aproximada e a solução exata no devido tempo). Esse é o comportamento esperado para o erro de uma discretização por diferenças finitas de ordem 2 no domínio D, como é o caso da discretização realizada nesta pesquisa.

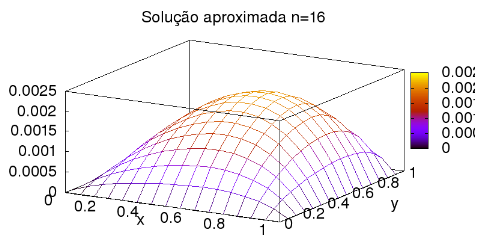

Figure 2: Erro para $n = 16$.

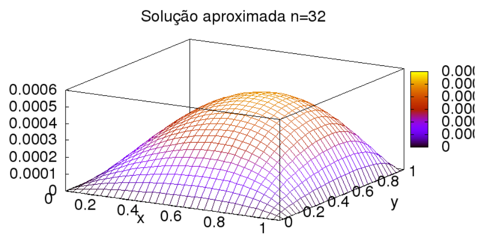

Figure 3: Erro para $n = 32$.

2.3 Discretização da equação anisotrópica

Seja a equação anisotrópica (1) e seu domínio. A discretização na variável tempo será realizada da mesma maneira como na equação isotrópica, a mudança irá ocorrer na discretização da variável bidimensional no espaço, para mais detalhes pode-se ler as referências [2] e [4].

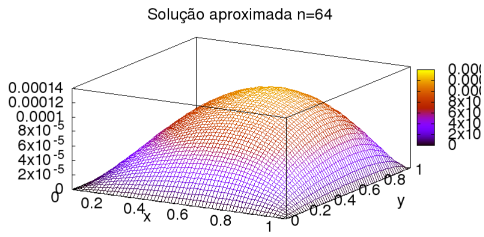

Figure 4: Erro para $n = 64$.

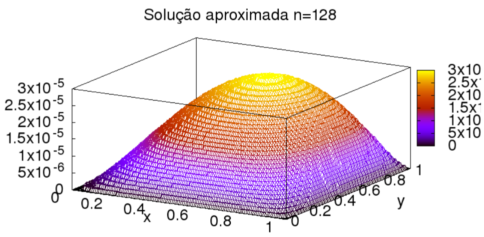

Figure 5: Erro para $n = 128$.

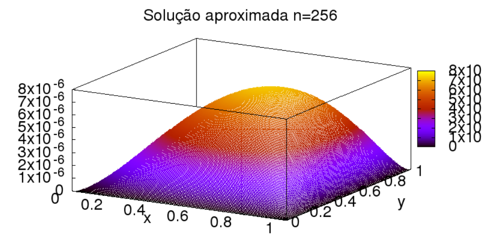

Figure 6: Erro para $n = 256$.

Discretização de primeira ordem da variável tempo

$$I_t = \left.\frac{\partial I}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{I_{i,j}^{t+1} - I_{i,j}^{t}}{\Delta t}. \tag{12}$$

Discretização do termo advectivo anisotrópico

$$div(c(x,y,t)\nabla I) = div(c\nabla I)_{i,j}^{t}, \tag{13}$$

para isso, usaremos aproximações de segunda ordem do polinômio de Taylor,

$$\begin{aligned} div(c\nabla I)_{i,j}^{t} &= \frac{1}{h^2}\Big[c_{i+\frac{1}{2},j} I_{i+1,j}^{t} + c_{i-\frac{1}{2},j} I_{i-1,j}^{t} + c_{i,j+\frac{1}{2}} I_{i,j+1}^{t} + c_{i,j-\frac{1}{2}} I_{i,j-1}^{t} \\ &- (c_{i+\frac{1}{2},j} + c_{i-\frac{1}{2},j} + c_{i,j+\frac{1}{2}} I_{i,j+1} + c_{i,j-\frac{1}{2}}) I_{i,j}^{t}\Big]. \end{aligned} \tag{14}$$

e realizando o algebrismo necessário na equação (1)

$$\left.\frac{\partial I}{\partial t}\right|_{i,j}^{t+1} = div(c\nabla I)_{i,j}^{t} \tag{15}$$

$$\frac{I_{i,j}^{t+1} - I_{i,j}^{i} t}{\Delta t} = div(c\nabla I)_{i,j}^{t} \tag{16}$$

$$I_{i,j}^{t+1} = I_{i,j}^{t} + \Delta t div(c\nabla I)_{i,j}^{t} \tag{17}$$

é finalizado a discretização da mesma, tal que podemos representa-lá como a equação algébrica discreta

$$I_{i,j}^{t+1} = a_e I_{i+1,j}^t + a_w I_{i-1,j}^t + a_c I_{i,j}^t + a_n I_{i,j+1}^t + a_s I_{i,j-1}, \tag{18}$$

sendo

$$\begin{aligned} a_e &= c_{i+\frac{1}{2},j}, \\ a_w &= c_{i-\frac{1}{2},j}, \\ a_n &= c_{i,j+\frac{1}{2}}, \\ a_s &= c_{i,j-\frac{1}{2}}, \\ a_c &= 1 - \Delta_t(a_e + a_w + a_n + a_s). \end{aligned} \tag{19}$$

A equação algébrica discreta pode ser representada pela notação usando estencil ou núcleo

$$I_{i,j}^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & a_n & 0 \\ a_w & a_c & a_e \\ 0 & a_s & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} * I_{i,j}^t.$$

2.3.1 Validação e verificação da acurácia para a equação anisotrópica

Para validar e verificar a acurácia da implementação e discretização da equação de difusão anisotrópica é necessário testar nesse momento somente a discretização na variável espacial, pois o *setup* da evolução no tempo é o mesmo do algoritmo anterior. Para isso, usaremos o exemplo 1 do artigo [5] que trata da equação governate para estado estacionário da equação do calor em meios anisotrópicos.

2.4 Características das funções de condutância

3 Conclusão

References

[1] Chourmouzios Tsiotsios and Maria Petrou. On the choice of the parameters for anisotropic diffusion in image processing. *Pattern Recognition*, 46:1369–1381, 2013.

[2] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 12(7):629–639, 1990.

[3] Michael J Black, Guillermo Sapiro, David H Marimont, and David Heeger. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on image processing*, 7(3):421–432, 1998.

[4] Donghui Chen, Scott MacLachlan, and M Kilmer. Iterative parameter-choice and multigrid methods for anisotropic diffusion denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2972–2994, 2011.

[5] Hui Wang, Q-H Qin, and Yi Lan Kang. A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media. *Archive of Applied Mechanics*, 74(8):563–579, 2005.