




Article

# Quantifying the Information Content of Intensity SAR Imagery for Edge Detection

Anderson Adaime Borba <sup>1,3,†</sup> , Alejandro C. Frery <sup>2,†</sup>  and Maurício Marengoni <sup>3,†\*</sup> 

<sup>1</sup> IBMEC-SP, São Paulo, Brazil; anderson.borba@ibmec.edu.br

<sup>2</sup> Laboratório de Computação Científica e Análise Numérica, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brazil; acfrery@laccan.ufal.br

<sup>3</sup> Dept. Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brazil; mmarengoni@mackenzie.br

\* Correspondence: mmarengoni@mackenzie.br

† These authors contributed equally to this work.

Version January 1, 2020 submitted to Remote Sens.

**Abstract:** This work studies cost-effective techniques for edge detection using intensity SAR data. The approach consists in using statistical models for obtaining evidences, and then fusing such evidences. We quantify the amount of information each combination of bands brings, and compute the computational cost of using each model.

**Keywords:** Synthetic Aperture Radar (SAR); Edge Detection; Information Fusion; Statistical Models.

## 0. How to Use this Template

### 1. Introduction

### 2. Results

#### 2.1. Razão de intensidades univariada

A razão de intensidade e amplitude entre  $S_{hh}$  e  $S_{vv}$  são importantes no estudo de radares polarimétricos. A *PDF*'s razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{C_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{C_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (1)$$

Onde  $\tau = \frac{C_{11}}{C_{22}}$ .

A *PDF* razão intensidade *multlook* normalizada é mostrada no apêndice (C) do artigo [? ]

$$p^{(L)}(\mu) = \frac{\Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L) [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (2)$$

$$\ln p^{(L)}(\mu) = \ln \left( \frac{\Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L) [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln (\Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}) \\ &- \ln \left( \Gamma(L)\Gamma(L) [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \Gamma(2L) + \ln(1 - |\rho_c|^2)^L + \ln(1 + \mu) + \ln \mu^{L-1} \\ &- \left( \ln \Gamma(L) + \ln \Gamma(L) + \ln [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2 \mu]^{\frac{2L+1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \ln(1 + \mu) + (L - 1) \ln \mu \\ &- 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2 \mu] \end{aligned} \quad (6)$$

## 14 2.2. Distribuição univariada da magnitude do produto

15 A magnitude do produto  $\mathbf{S}_i$  e  $\mathbf{S}_j$  é uma importante medida para as imagem SAR polarimétrica.  
16 Definimos a magnitude normalizada por

$$\xi = \frac{\left| \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{S}_i(k) \mathbf{S}_j^H(k) \right|}{\sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2]E[|\mathbf{S}_j|^2]}} = \frac{g}{h}. \quad (7)$$

onde é definido por  $g = |\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H|$  e  $h = \sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2]E[|\mathbf{S}_j|^2]}$ .

$$f(\xi) = \frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (8)$$

$$\ln f(\xi) = \ln \left( \frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right) \right). \quad (9)$$

$$\ln f(\xi) = \ln \left( \frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} \right) + \ln I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (10)$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4L^{L+1}\xi^L) - \ln(\Gamma(L)(1 - |\rho|^2)) + \ln I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (11)$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4) + \ln L^{L+1} + \ln \xi^L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) + \ln I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (12)$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4) + (L + 1) \ln L + L \ln \xi - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) + \ln I_0 \left( \frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left( \frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (13)$$

## 17 2.3. Distribuição bivariada produto de intensidades - Lee

18 O *PDF* conjunto retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e  
19 interferométricos são importantes. As *PDF's* conjuntas conduzem a derivação da intensidade e  
20 amplitude razão *PDF's*. Da equação (??) temos que as intensidades *multilook* sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 C_{11}}{n} \\ R_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 C_{22}}{n} \end{aligned} \quad (14)$$

21 Integrando a equação (??) em relação a  $\eta$  e  $\psi$ . A *PDF* é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left( -\frac{B_1 + B_2}{1 - |\rho_c|^2} \right)}{\Gamma(n)(1 - |\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1} \left( 2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|^2} \right) \quad (15)$$

Sendo

$$I_\mu(Z) = \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} F_1^0 \left[ -; \mu + 1; \frac{Z^2}{4} \right] \quad (16)$$

$$p(B_1, B_2) = \frac{n^{n+1} (R_1 R_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{n(\frac{R_1}{C_{11}} + \frac{R_2}{C_{22}})}{1 - |\rho_c|^2}\right)}{(C_{11} C_{22})^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n) (1 - |\rho_c|^2) |\rho_c|^{n-1}} I_{n-1} \left(2n \sqrt{\frac{R_1 R_2}{C_{11} C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|^2}\right) \quad (17)$$

#### 2.4. Distribuição $\Gamma$ trivariada - Hagedorn

$$p(I_1, I_2, I_3) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 I_3))}{8(n-1)|C|^{\frac{n}{2}} (d_1 d_2 d_3)^{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} k(-1)^{k-n+1} C_{k-n+1}^{n-1} (\cos(\gamma)) \quad (18)$$

$$I_k(d_1 \sqrt{I_1 I_2}) I_k(d_2 \sqrt{I_2 I_3}) I_k(d_3 \sqrt{I_1 I_3})$$

#### 2.5. Função densidade de probabilidade univariada $\Gamma$ e o método da máxima verossimilhança.

$$f_Z(z_i; \mu, L) = \frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right). \quad (19)$$

Aplicando o logaritmo natural na função de probabilidade univariada  $\Gamma$  (19),

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z_i; \mu, L) &= \ln \left( \frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right) \right), \\ &= \ln \left( \frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \right) + \ln \left( \exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right) \right), \\ &= \ln \left( L^L z_i^{L-1} \right) - \ln \left( \mu^L \Gamma(L) \right) - \frac{L}{\mu} z_i \end{aligned}$$

encontramos a função

$$\ln f_Z(z_i; \mu, L) = L \ln L + (L-1) \ln z_i - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_i. \quad (20)$$

As derivadas da função (20) com relação a  $L$  e  $\mu$  podem ser calculadas, iniciamos pela derivada em relação a  $\mu$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln f_{Z_i}(z_i; \mu, L) = -\frac{L}{\mu} + \frac{L}{\mu^2} z_i. \quad (21)$$

e a derivada em relação a  $L$

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln f_{Z_i}(z_i; \mu, L) = 1 + \ln L + \ln z_i - \ln \mu - \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L) - \frac{1}{\mu} z_i. \quad (22)$$

As equações podem ser resolvidas da seguinte forma, seja (21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln f_{Z_i}(z_i; \mu, L) &= 0. \\ -\frac{L}{\mu} + \frac{L}{\mu^2} z_i &= 0. \\ \mu &= z_i \end{aligned} \quad (23)$$

e, usando a equação (22),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \ln f_{Z_i}(z_i; \mu, L) &= 0. \\ 1 + \ln L + \ln z_i - \ln \mu - \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L) - \frac{1}{\mu} z_i &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Considerando  $\mu = z_i$  teremos

$$\begin{aligned} 1 + \ln L + \ln z_i - \ln z_i - \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L) - \frac{1}{z_i} z_i &= 0. \\ 1 + \ln L + \ln z_i - \ln z_i - \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

portanto,

$$\ln L - \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L) = 0. \quad (25)$$

definindo,

$$\psi^0(L) = \frac{\partial}{\partial L} \ln \Gamma(L). \quad (26)$$

desta maneira podemos reescrever a equação (25)

$$\ln L - \psi^0(L) = 0. \quad (27)$$

Tais equações podem estimar os parâmetros  $L$  e  $\mu$  de uma região em uma imagem PolSAR. Uma região da imagem PolSAR pode ser dividida na parte interna ( $I$ ) e externa ( $E$ ). Construímos uma faixa de dados que temos certeza da presença das regiões internas e externas. Definimos a faixa de dados  $(z_1, \dots, z_j) = z_I$  e  $(z_{j+1}, \dots, z_N) = z_E$ . Para cada  $j$  que faz a indexação da faixa de dados vamos,

Estimar  $(\mu_j, L_j)$  por  $(\hat{\mu}_j, \hat{L}_j)(z_I)$  na parte interna da faixa de dados.

Estimar  $(\mu_j, L_j)$  por  $(\hat{\mu}_j, \hat{L}_j)(z_E)$  na parte externa da faixa de dados.

Assim

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= \ln \left( \prod_{k=1}^j f_Z(z_k; \mu, L) \prod_{k=j+1}^N f_Z(z_k; \mu, L) \right) \\ \ell(\mu, L) &= \sum_{k=1}^j \ln(f_Z(z_k; \mu, L)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(f_Z(z_k; \mu, L)) \end{aligned} \quad (28)$$

Usando a equação (20) teremos

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= \sum_{k=1}^j \left[ L \ln L + (L-1) \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \left[ L \ln L + (L-1) \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ \ell(\mu, L) &= jL \ln L + (L-1) \sum_{k=1}^j \ln z_k - jL \ln \mu - j \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^j z_k \\ &= (N-j)L \ln L + (L-1) \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - (N-j)L \ln \mu - (N-j) \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \end{aligned}$$

assim, equivalentemente

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= j \left[ L \ln L + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{j\mu} \sum_{k=1}^j z_k \right] \\ &= (N-j) \left[ L \ln L + \frac{(L-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{(N-j)\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \right] \end{aligned}$$

resultando na equação

$$\ell(\mu, L) = j\ell_1(\mu, L) + (N-j)\ell_2(\mu, L)$$

definindo

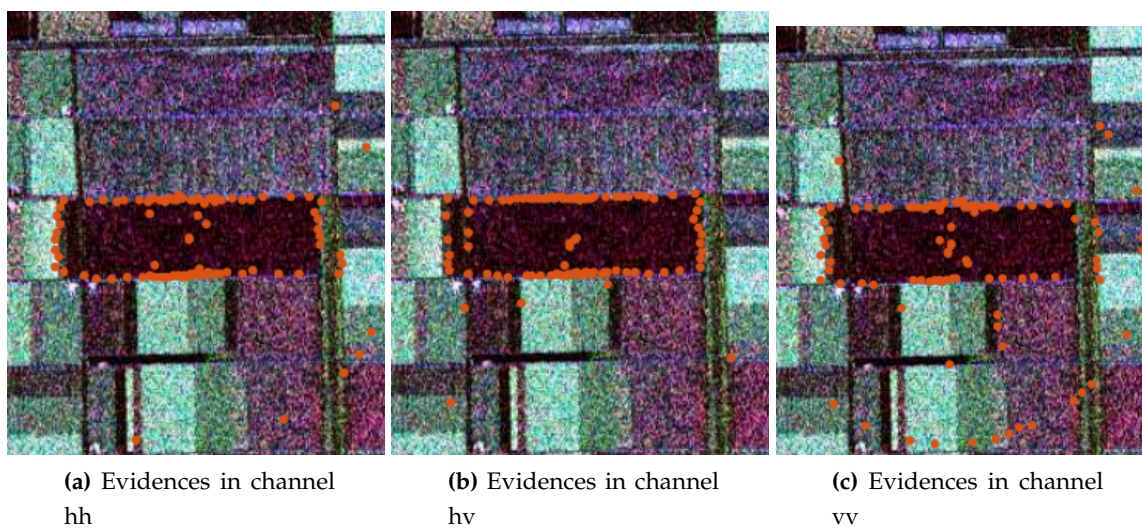
$$\begin{aligned} \ell_1(\mu, L) &= L \ln L + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{j\mu} \sum_{k=1}^j z_k \\ \ell_2(\mu, L) &= L \ln L + \frac{(L-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{(N-j)\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \end{aligned} \quad (29)$$

O método de otimização *BFGS* (Ref.[1]) foi usado para estimar os parâmetros em cada faixa de dados. O pacote *maxLik* (Ref.[2]) contém a implementação do método e foi usado na implementação.

Para cada  $j$  são estimados os parâmetros usando as equações de  $\ell_1(\mu, L)$  e  $\ell_2(\mu, L)$ . Os parâmetros  $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$  e  $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$  foram estimados usando o pacote *maxLik*, que pode ser lido com mais detalhes em [2], aplicado nas funções (29).

$$\begin{aligned} \ell(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E, j) &= j \left[ \hat{L}_I \ln \hat{L}_I - \hat{L}_I \ln \hat{\mu}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) \right. \\ &+ \frac{(\hat{L}_I-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_i - \frac{\hat{L}_I}{j\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_i \left. \right] \\ &+ (N-j) \left[ \hat{L}_E \ln \hat{L}_E - \hat{L}_E \ln \hat{\mu}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) \right. \\ &+ \frac{(\hat{L}_E-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_i - \frac{\hat{L}_E}{(N-j)\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^N z_i \left. \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Para estimar o parâmetro  $j$  foi usado o método *GenSA Generalized Simulated Annealing* (Ref.[3]).



**Figure 1.** Edges evidences

## References

1. Jorge Nocedal and Stephen J. Wright, Numerical Optimization . **Springer**, 2006, New York, NY, USA.
2. Arne Henningsen and Ott Toomet. maxLik: A package for maximum likelihood estimation in R, Computational Statistics **2011**, vol 26, 03, 443-448.
3. Yang Xiang and Sylvain Gubian and Brian Suomela and Julia Hoeng. Generalized Simulated Annealing for Efficient Global Optimization: the GenSA Package for R. The R Journal Volume 5/1, June 2013, <https://journal.r-project.org/archive/2013/RJ-2013-002/index.html>.

**Sample Availability:** Samples of the compounds ..... are available from the authors.

© 2020 by the authors. Submitted to *Remote Sens.* for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).