

Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR

Anderson Adaime de Borba

EXAME DE QUALIFICAÇÃO APRESENTADO
A
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
DA
UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa de Pós graduação em Engenharia Elétrica e Computação -
PPGEEC

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Marengoni

Coorientador: Prof. Dr. Alejandro César Frery Orgambide

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 29 de outubro de 2018

Sumário

Lista de Abreviaturas	v
Lista de Símbolos	vii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Metodologia	1
1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR	1
1.1.1 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_4) e matriz de covariância lexicográfica (C_4)	2
1.1.2 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_3) e matriz de covariância lexicográfica (C_3)	3
1.2 Estatística do Ruido <i>Speckle</i>	5
1.2.1 Formação do speckle	5
1.2.2 Modelo de Rayleigh para o <i>speckle</i>	6
1.2.3 Estatística <i>speckle</i> no processo de múltiplas visadas	7
1.2.4 Matriz de covariância segundo Goodman (1963)	7
1.3 Funções de densidade	10
1.3.1 Função de densidade Wishart para os canais de intensidade	10
1.3.2 Função de densidade para cada canal complexo	10
1.3.3 distribuição conjunta para $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$	12
1.4 Modelos para dados dados	14
1.5 Metodologia	18
1.6 Número Equivalente de Visadas	18
1.7 Modelos de Densidades de Probabilidades Marginais	19
1.7.1 Função Densidade de Probabilidade Univariada Gamma	19
1.7.2 Função Densidade de Probabilidade Univariada produto de magnitudes das intensidades	21
1.7.3 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada razão de intensidades múltiplas visadas	23
1.7.4 Distribuição bivariada produto de intensidades - Lee	27
1.7.5 Distribuição univariada para o span	31

2 Resultado Numéricos	35
2.1 Aplicação em imagem simulada	35
2.2 Aplicação em imagem de sensores PolSAR	36
2.2.1 Imagem de Flevoland	36
2.2.2 Imagem da Baía de São Francisco	39
Referências Bibliográficas	59

Listas de Abreviaturas

SAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética
PolSAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética polarimétrica
p.d.f	Função densidade de probabilidade
LoG	Detector de borda usando o laplaciano da gaussiana
MMQ	Método dos quadrados mínimos
MLE	Método de estimativa de máxima verossimilhança
GenSA	Método Simulated annealing
ROI	Método Simulated annealing

Listas de Símbolos

L	Número de visadas em uma imagem PolSAR
Σ	Matriz de covariância hermitiana e definida positiva
$E[\cdot]$	Valor esperado
Γ	Função Gamma
Γ_m	Função Gamma multivariada
$W(\Gamma, L)$	Distribuição Wishart

Listas de Figuras

1.1	Distribuição intensidade multiplas visadas com $\sigma = 0.01$	12
2.1	Decomposição de Pauli	36
2.2	Funções log-verossimilhanças para a radial 150	37
2.3	Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado.	38
2.4	Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado (media). .	39
2.5	Distribuição produto de intensidades para diferentes L fixos e radial 35	40
2.6	Funções log-verossimilhanças para a radial 150	40
2.7	Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado.	41
2.8	Evidências de bordas para o span	42
2.9	Evidências de bordas para o span (media estimada)	43
2.10	Imagen da região de Flevoland	44
2.11	Imagen da região de Flevoland com radiais	44
2.12	Decomposição de Pauli para a imagem, e <i>ground truth</i> de referência para a (ROI-I)	45
2.13	Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland .	45
2.14	Resultados da apliação dos seis métodos de fusão	46
2.15	Imagen da baía de São Francisco	47
2.16	Decomposição de Pauli para imagem de São Francisco, e a ground truth	47
2.17	Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de São Francisco	47
2.18	Resultado da aplicação dos seis método de fusão para a imagem de São Francisco .	48
2.19	Decomposição de Pauli para a ROI-II da imagem de Flevoland, e a <i>ground truth</i> .	49
2.20	Evidências de bordas para os três canais de intensidades para ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 14 pixel	49
2.21	Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a ROI-II de flevoland com 14 pixeis de folga	50
2.22	Evidências de bordas para os três canais de intensidades para ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 25 pixel	51
2.23	Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a ROI-II de flevoland com 25 pixeis de folga	52
2.24	Probability of detecting in fusion methods.	53
2.25	Probability of detecting in fusion methods. Região III - FLEV	54
2.26	Probability of detecting in fusion methods. Região I - SF	55
2.27	Edges evidences from the three intensity channels to ROI II - cuidado	55
2.28	Edges evidences from the three intensity channels to ROI II - cuidado 2	56

2.29 Edges evidences from the three intensity channels to San Francisco	56
2.30 Results of applying the six fusion methods to ROI II	57
2.31 Results of applying the six fusion methods to San Francisco	58

Listas de Tabelas

1.1	Coeficientes de variação.	7
1.2	Tabela	11

Capítulo 1

Metodologia

1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR

Os sistemas SAR totalmente polarimétricos transmitem pulsos de micro-ondas polarizados ortogonalmente e medem componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel, a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem no sistema SAR a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikd}}{d} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix},$$

onde k denota o número de onda, \hat{i} é um número complexo e d é a distância entre o radar e o alvo. No campo eletromagnético com componentes E_i^j , o índice subscrito denota polarização horizontal (h) ou vertical (v), e o índice sobreescrito indica a onda recebida (r) ou transmitida (t).

A matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

onde as entradas da matriz $S_{i,j}$ são os coeficientes de espalhamento complexo, tal que os índices i e j são associados ao recebimento e a transmissão das ondas, por exemplo, o coeficiente de espalhamento S_{hv} está associado a onda transmitida na direção vertical (v) e recebida na direção horizontal (h).

Definindo a diagonal principal da matriz de espalhamento por co-polarização pois relaciona a polarização das ondas transmitidas e recebidas nas mesmas direções, e a os elementos da diagonal secundária da matriz de espalhamento por polarização cruzada relacionando os estados de polarizações ortogonais.

A matriz \mathbf{S} depende da definição do sistema de coordenadas, se a antena transmissora e receptora de sinal estão localizadas na mesma posição consideramos as medidas mono estáticas e consideramos o sistema de coordenada **BSA** - *Back Scattering Alignment*, desta forma o sistema de coordenadas da transmissão e recepção de sinal são coincidentes.

A potência total espalhada no caso de um sistema de radar polarimétrico é o chamado *span*, sendo definido no caso mais geral como,

$$\text{Span}(\mathbf{S}) = \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2, \quad (1.2)$$

onde o operador $\text{tr}(\cdot)$ é o traço de uma matriz.

1.1.1 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_4) e matriz de covariância lexicográfica (C_4)

A matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser representada pela construção do vetor,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} [\text{tr}(S\Psi_1) \quad \text{tr}(S\Psi_2) \quad \text{tr}(S\Psi_3) \quad \text{tr}(S\Psi_4)]^T, \quad (1.3)$$

onde $\{\Psi_i\}_{i=1}^4$ é uma base para o espaço das matrizes hermitianas 2×2 .

Diferentes bases para o mesmo espaço matricial podem ser definidas, no presente trabalho serão consideradas duas bases chamadas respectivamente de base de Pauli e base lexicográfica, a base de Pauli é definida por,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.4)$$

e a base lexicográfica é definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.5)$$

Usando as bases (1.4), (1.5) e a definição do vetor (1.3) representamos a matriz de espalhamento pelo vetor característico de Pauli 4-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{hh} + S_{vv} \quad S_{hh} - S_{vv} \quad S_{hv} + S_{vh} \quad i(S_{hv} - S_{vh})]^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (1.6)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 4-D

$$\boldsymbol{\Omega} = [S_{hh} \quad S_{hv} \quad S_{hv} \quad S_{vv}]^T = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_4] \quad (1.7)$$

A matriz de espalhamento pode ser relacionada com os vetores (1.6) e (1.7) da seguinte maneira,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_3 - ik_4 \\ k_3 + ik_4 & k_1 - k_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (1.4) e (1.5) servem para manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 4.

Podemos assim garantir que a invariância da potência total

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(SS^H) \\ &= \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \boldsymbol{\Omega}^H \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A transformação linear unitária $U_{4(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação SU(4) para designar a transformação unitária

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \\ i(S_{hv} - S_{vh}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

desta maneira definimos a matriz unitária,

$$U_{4(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Para o caso biestático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1\bar{k}_2 & k_1\bar{k}_3 & k_1\bar{k}_4 \\ k_2\bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2\bar{k}_3 & k_2\bar{k}_4 \\ k_3\bar{k}_1 & k_3\bar{k}_2 & |k_3|^2 & k_3\bar{k}_4 \\ k_4\bar{k}_1 & k_4\bar{k}_2 & k_4\bar{k}_3 & |k_4|^2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_4 = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1\bar{\Omega}_2 & \Omega_1\bar{\Omega}_3 & \Omega_1\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_2\bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2\bar{\Omega}_3 & \omega_2\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_3\bar{\Omega}_1 & \Omega_3\bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 & \Omega_3\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_4\bar{\Omega}_1 & \Omega_4\bar{\Omega}_2 & \Omega_4\bar{\Omega}_3 & |\Omega_4|^2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_4 &= \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega})^H \\ &= \mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^H\mathbf{U}_4^H \\ &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^H = \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \\ \mathbf{T}_4 &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr}(\mathbf{T}_4) = \text{tr}(\mathbf{C}_4) = \text{Span}(\mathbf{S}). \quad (1.15)$$

1.1.2 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_3) e matriz de covariância lexicográfica (C_3)

Podemos entender as interações da ondas eletromagnéticas em alvos naturais sob a ótica do teorema da reciprocidade que considera o meio reciproco, de uma maneira geral as propriedades de transmissão e recebimento de uma antena são idênticos. Então podemos definir a igualdade dos termos complexos (polarização cruzada) $S_{hv} = S_{vh}$. Veja [Lee e Pottier \(2009\)](#).

O entendimento para extrair informação da matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser alcançado com a construção de um sistema de vetores. A matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser representada pela construção do vetor,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} [\text{tr}(S\Psi_1) \quad \text{tr}(S\Psi_2) \quad \text{tr}(S\Psi_3)]^T, \quad (1.16)$$

onde $\{\Psi_i\}_{i=1}^3$ é uma base para o espaço das matrizes hermitianas 2×2 .

Neste trabalho serão consideradas duas bases para os espaço das matrizes nomeadas como base de Pauli e base lexicográfica.

A base de Pauli pode ser definida como,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.17)$$

A base lexicográfica pode ser definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.18)$$

Usando as bases (1.17), (1.18) e a equação (1.16) geramos os seguintes vetores de espalhamento que pode ser representada pelo vetor característico de Pauli 3-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} & S_{hh} - S_{vv} & 2S_{hv} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1 \ k_2 \ k_3], \quad (1.19)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 3-D

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]. \quad (1.20)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (1.17) e (1.18) servem para manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 3.

Podemos assim garantir que a invariância da potencia total,

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(SS^H) \\ &= \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \boldsymbol{\Omega}^H \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

A transformação linear unitária $U_{3(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação SU(3) para designar a transformação unitária.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2S_{hv} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

desta maneira definimos a matriz unitária,

$$U_{3(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Para o caso mono estático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{k} \mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1 \bar{k}_2 & k_1 \bar{k}_3 \\ k_2 \bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2 \bar{k}_3 \\ k_3 \bar{k}_1 & k_3 \bar{k}_2 & |k_3|^2 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_3 = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1 \bar{\Omega}_2 & \Omega_1 \bar{\Omega}_3 \\ \Omega_2 \bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2 \bar{\Omega}_3 \\ \Omega_3 \bar{\Omega}_1 & \Omega_3 \bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \mathbf{k} \mathbf{k}^H = \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega})^H \\ &= \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^H \mathbf{U}_3^H \\ &= \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^H = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1}, \quad (1.26)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr}(\mathbf{T}_3) = \text{tr}(\mathbf{C}_3) = \text{Span}(\mathbf{S}). \quad (1.27)$$

Podemos concluir, se

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \sqrt{2}S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

a potência total espalhada no caso de um sistema de radar polarimétrico em meio recíproco pode ser definido por

$$\text{Span} = \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2. \quad (1.29)$$

1.2 Estatística do Ruido *Speckle*

O ruído *speckle* causa uma variação de intensidade pixel a pixel imprimindo um aspecto granular nas imagens SAR / PolSAR.

O *speckle* dificulta a interpretação e análise das imagens reduzindo a efetividade da segmentação, classificação, ou detecção de mudanças de características das imagens SAR / PolSAR. O entendimento do comportamento estatístico do *speckle* é essencial para extrair boas informações das imagens e propor algoritmos efetivos para tratar o *speckle*. Assim, podemos propor tarefas de criação de filtros para as imagens, estimativas de parâmetros geofísicos, classificação e segmentação de regiões, detectar bordas, entre outras.

[Lee e Pottier \(2009\)](#) realizaram um estudo sistemático do speckle com o objetivo de entender os seus efeitos nas imagens SAR e PolSAR, o estudo usou os dados com simples visada ou com múltiplas visadas.

No presente trabalho usaremos as características do ruído speckle para auxiliar na detecção de borda, em oposição a trabalhos que tentam mitigar o efeito do *speckle*.

1.2.1 Formação do speckle

A formação do speckle surge quando o radar ilumina uma superfície rugosa com escala do comprimento de onda do radar, o sinal de retorno consiste em ondas refletidas de muitos elementos de espalhamentos.

Os elementos de espalhamento têm geometrias complexas e distribuições aleatórias, tornando a modelagem estatística uma tarefa indispensável e desafiadora. Podemos considerar três tipos de processos de espalhamento da onda em alvos (elementos de espalhamento). A dispersão de superfície, a dispersão de volume e o espalhamento de volume-superfície. O primeiro é o espalhamento que acontece quando a onda eletromagnética atravessa uma mudança de meio de propagação. Segundo, consiste no espalhamento que acontece na profundidade de um meio, por exemplo, o espalhamento no interior de uma floresta. E por último, o espalhamento volume-superfície, que consiste em a onda atingir outra troca de meio de propagação, por exemplo o solo de uma floresta.

As distâncias entre os elementos de espalhamento e o recebimento no radar varia devido a natureza randômica da disposição desse elemento. A onda recebida de cada elemento espalhador embora coerente em frequência não são coerentes em fase. O sinal é forte se as ondas são construtivas, ou seja em fase, e fraco se as ondas não estão em fase.

Podemos escrever um sinal complexo da seguinte forma.

$$\sum_{i=1}^M (x_i + jy_i) = \sum_{i=1}^M x_i + j \sum_{i=1}^M y_i = x + jy = r \exp(j\theta), \quad (1.30)$$

onde, $x_i + jy_i$ é o retorno do espalhamento para cada elemento i , $x + jy$ é o retorno dos M espalhadores somados, e $r \exp(j\theta)$ é a decomposição de Euler para o número complexo $x + jy$.

1.2.2 Modelo de Rayleigh para o *speckle*

Podemos determinar as seguintes condições para a modelagem,

- 1) um número grande de espalhadores na resolução de célula para um meio homogêneo,
- 2) a distância de alcance é muito maior que o comprimento de onda do radar,
- 3) A superfície tem rugosidade na escala do comprimento de onda de um radar.

O vetor soma (1.30) de ondas refletidas de alvos podem ser definidas de forma que a sua fase seja distribuída uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$. O *speckle* possuindo esta propriedade são chamados de *speckle* totalmente desenvolvido.

O teorema do limite central para o *speckle* completamente desenvolvido garante que as componentes x e y são independentemente e identicamente distribuídas gaussianas com média zero e variância $\frac{\sigma^2}{2}$. Podemos representar a sua probabilidade conjunta por,

$$f_{XY}(x, y; \sigma^2) = f_X(x; \sigma^2) f_Y(y; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right). \quad (1.31)$$

sendo $x = A \cos(\theta)$ e $y = A \sin(\theta)$ teremos,

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{\sigma^2}\right) = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right), \quad (1.32)$$

Integrando na variável θ no intervalo de $[-\pi, \pi]$ teremos a distribuição para a amplitude.

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) d\theta = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta,$$

definida como a distribuição Rayleigh com PDF

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \frac{2z_A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right).$$

Podemos encontrar o valor esperado

$$E[A] = \int_0^\infty z_A f(z_A) dA = \int_0^\infty \frac{2z_A^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) dA = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2},$$

e a variância $var = E[X^2] - E[X]^2$, sendo

$$E[A^2] = \int_0^\infty z_A^2 f(z_A) dA = \int_0^\infty \frac{2z_A^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) dA = \sigma^2.$$

Então

$$var = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2 - \left(\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}\right)^2 = \sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}.$$

O coeficiente de variação $CV(Z_A) = \frac{\sqrt{var}}{E[A]} = \frac{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}{\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}{\frac{\pi\sigma^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = 0,5227$.

Definindo $I = A^2$ a pdf para intensidade é

$$f_I(z_I; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_I}{\sigma^2}\right),$$

desta forma podemos calcular $E[I] = \sigma^2$, e $E[I^2] = 2\sigma^2$ então $var = \sigma^4$, então o $CV(Z_I) = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sigma^2} = 1$.

Comparando os valores $CV(Z_A)$ e $CV(Z_I)$ podemos afirmar que o valor do *speckle* é mais pronunciado nas imagens de intensidade em relação com as imagens de amplitude.

1.2.3 Estatística *speckle* no processo de múltiplas visadas

O processo de redução do ruído *speckle* consiste em realizar a média aritmética de vários sinais de retorno e chamamos de múltiplas visadas. O método pode ser descrito como adquirir N imagens e realizar sua a média aritmética. As N imagens podem ser tomadas com a característica de serem estatisticamente independentes.

Definimos a função densidade de probabilidade para os canais de intensidade com múltiplas visadas,

$$f_I(z_I; L, \sigma^2) = \frac{L^L z_I^{L-1}}{(L-1)! \sigma^{2L}} \exp\left(-L \frac{z_I}{\sigma^2}\right), z_I \geq 0. \quad (1.33)$$

A média e a variância são $M_L(z_I) = \sigma^2$, $Var_L(z_I) = \frac{\sigma^4}{L}$ implicando que o desvio padrão será $SD_L(z_I) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{L}}$. O coeficiente de variação é calculado como sendo a razão entre o desvio padrão e a média resultando em $CV_L(z_I) = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Podemos observar que o desvio padrão é reduzido por \sqrt{N} em relação ao processo de visada simples.

Definimos a função densidade de probabilidade para os canais de amplitude com múltiplas visadas,

$$f_A(z_A; L, \sigma^2) = \frac{2L^L z_A^{2L-1}}{(L-1)! \sigma^{2L}} \exp\left(-L \frac{z_A^2}{\sigma^2}\right), z_A \geq 0. \quad (1.34)$$

A média e a variância são $M_L(z_A) = \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\Gamma} \sqrt{\frac{\sigma^2}{L}}$ e $Var_L(z_A) = \left(L - \frac{\Gamma^2(L+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(L)}\right) \frac{\sigma^2}{L}$. O coeficiente de variação $CV_L(z_A) = \sqrt{\frac{L\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L+\frac{1}{2})}} - 1$, onde Γ denota a função gamma

Tabela 1.1: Coeficientes de variação.

Número de visadas	N-visadas(intensidade)	N- visadas(amplitude)
1	1	0.522723200877063
2	0.707106781186547	0.362999289543428
3	0.577350269189626	0.294104989486191
4	0.5000000000000000	0.253622399398351
5	0.447213595499958	0.226239950138330
6	0.408248290463863	0.206148101392413
7	0.377964473009227	0.190600152599532
8	0.353553390593274	0.178108152789829

1.2.4 Matriz de covariância segundo Goodman (1963)

O vetor \mathbf{S} pode ser rearranjado usando as partes reais e complexas de suas entradas em um vetor de dimensão 6 onde cada entrada é representado por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R_{hh} \\ I_{hh} \\ R_{hv} \\ I_{hv} \\ R_{vv} \\ I_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

e cujo produto,

$$\mathbf{SS}^H = \begin{bmatrix} R_{hh}R_{hh} & R_{hh}I_{hh} & R_{hh}R_{hv} & R_{hh}I_{hv} & R_{hh}R_{vv} & R_{hh}I_{vv} \\ I_{hh}R_{hh} & I_{hh}I_{hh} & I_{hh}R_{hv} & I_{hh}I_{hv} & I_{hh}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{hv}R_{hh} & R_{hv}I_{hh} & R_{hv}R_{hv} & R_{hv}I_{hv} & R_{hv}R_{vv} & R_{hv}I_{vv} \\ I_{hv}R_{hh} & I_{hv}I_{hh} & I_{hv}R_{hv} & I_{hv}I_{hv} & I_{hv}R_{vv} & I_{hv}I_{vv} \\ R_{vv}R_{hh} & R_{vv}I_{hh} & R_{vv}R_{hv} & R_{vv}I_{hv} & R_{vv}R_{vv} & R_{vv}I_{vv} \\ I_{vv}R_{hh} & I_{vv}I_{hh} & I_{vv}R_{hv} & I_{vv}I_{hv} & I_{vv}R_{vv} & I_{vv}I_{vv} \end{bmatrix}.$$

A distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero pode ser definida de acordo com [Goodman \(1985\)](#). Sendo $\mathbf{S} = R_j + iI_j$ definimos R_j e I_j com $j = 1, 2, 3$ tenham distribuições conjuntas gaussianas e satisfaçam as seguintes condições

Na referência [Goodman \(1963\)](#) foi descrito a hipótese da distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero. sendo $\mathbf{S}_j = R_j + iI_j$ definimos R_j e I_j com $j = 1, 2, 3$ tenham distribuições conjuntas gaussianas e satisfaçam as seguintes condições

I- $E[R_j] = E[I_j] = 0$,

II- $E[R_j^2] = E[I_j^2]$,

III- $E[R_j I_j] = 0$,

IV- $E[R_j R_i] = E[I_j I_i]$, e

V- $E[I_j R_i] = -E[R_j I_i]$.

onde, $E[\cdot]$ denota o valor esperado.

A hipótese da distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero assumindo, resulta na matriz simétrica,

$$\mathbf{SS}^H = \begin{bmatrix} R_{hh}^2 & 0 & R_{hh}R_{hv} & -R_{hh}I_{hv} & R_{hh}R_{vv} & -R_{hh}I_{vv} \\ 0 & I_{hh}^2 & I_{hh}R_{hv} & I_{hh}I_{hv} & I_{hh}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{hv}R_{hh} & R_{hv}I_{hh} & R_{hv}^2 & 0 & R_{hv}R_{vv} & -R_{hv}I_{vv} \\ -I_{hv}R_{hh} & I_{hv}I_{hh} & 0 & I_{hv}^2 & I_{hv}R_{vv} & I_{hv}I_{vv} \\ R_{vv}R_{hh} & R_{vv}I_{hh} & R_{vv}R_{hv} & R_{vv}I_{hv} & R_{vv}^2 & 0 \\ -I_{vv}R_{hh} & I_{vv}I_{hh} & -I_{vv}R_{hv} & I_{vv}I_{hv} & 0 & I_{vv}^2 \end{bmatrix}.$$

De acordo com [Goodman \(1963\)](#) a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de S . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{hv}, S_{vv}]^H$.

Dados polarimétricos são usualmente submetidos a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme [Anfinsen et al. \(2009\)](#); [Goodman \(1963\)](#)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^H, \quad (1.36)$$

onde \mathbf{s}_l com $l = 1, \dots, L$ são L vetores complexos distribuídos como \mathbf{S} .

De acordo com ([Goodman \(1963\)](#))

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E(X_i X_j) & E(X_i Y_j) \\ E(Y_i X_j) & E(Y_i Y_j) \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Tal que

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_j^2 & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & -\beta_{ij} \\ \beta_{ij} & \alpha_{ij} \end{bmatrix} \sigma_j \sigma_k & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1.38)$$

pode ser escrito por

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_j^2 & \text{se } i = j, \\ (\alpha_{ij} + i\beta_{ij})\sigma_i\sigma_j & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1.39)$$

Exemplo 1 - Seja a distribuição gaussian complexa univariada ($p = 1$). Sendo $\xi^T = z_1 = x_1 + iy_1$. E a "matriz" de covariância $\Sigma_\xi = \sigma_1^2$ com determinante $|\Sigma_\xi| = \sigma_1^2$ e "matriz inversa" $\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}$, Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 + iy_1) \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1)(x_1 + iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2} \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi \Sigma_\xi^2} \exp \left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (1.41)$$

Exemplo 2 - Seja a distribuição gaussian complexa bivariada ($p = 2$). Sendo $\xi^T = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$. E a matriz de covariância

$$\Sigma_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

com determinante $|\Sigma_\xi| = (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ e matriz inversa

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^{-1} &= \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix}. \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= [z_1, z_2]^H \Sigma_\xi^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = [z_1, z_2]^H \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_1 + \sigma_1^2 z_2 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} (\sigma_2^2 \bar{z}_1 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2 - (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_2 z_1 + \sigma_1^2 \bar{z}_2 z_2) \quad (1.46)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} (\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2) \quad (1.47)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \quad (1.48)$$

Assim, a função densidade de probabilidade (pdf)

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp \left(-\frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right) \quad (1.49)$$

Distribuição complexa de Wishart

A distribuição complexa de Wishart descrita no artigo Goodman (1963), define agora uma

amostra de n vetores com valores complexos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ então a matriz hermitiana de covariância é

$$\hat{\Sigma}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\xi}_j^T. \quad (1.50)$$

A matriz $\hat{\Sigma}_\xi$ é uma "maximum likelihood" para Σ_ξ sendo uma estatística suficiente para a matriz hermitiana de covariância.

Considerando $A = ||A_{jkR} + iA_{jkI}|| = n\hat{\Sigma}_\xi$ chamaremos a matriz A de distribuição complexa de Wishart. A função densidade de probabilidade de A é

$$p_W(A) = \frac{|A|^{n-p}}{I(\Sigma_\xi)} \exp(-\text{tr}(\Sigma_\xi^{-1} A)), \quad (1.51)$$

onde

$$I(\Sigma_\xi) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \cdots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_\xi|^n, \quad (1.52)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

1.3 Funções de densidade

1.3.1 Função de densidade Wishart para os canais de intensidade

Para os canais (hh) , (hv) e (vv) vamos usar a distribuição Wishart (PDF) descrita por

$$f_Z(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}_s, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_s|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{Z})), \quad (1.53)$$

onde, $\text{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (1.54)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\boldsymbol{\Sigma}_s, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \boldsymbol{\Sigma}_s$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o símbolo $\boldsymbol{\Sigma}$ em detrimento a $\boldsymbol{\Sigma}_s$ para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{S} .

1.3.2 Função de densidade para cada canal complexo

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

A pdf para esta distribuição normal é:

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp\left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right). \quad (1.56)$$

Sendo $(I_{ii}, I_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.57)$$

Tabela 1.2: Tabela

	R_{hh}	I_{hh}	R_{hv}	I_{hv}	R_{vv}	I_{vv}
R_{hh}	σ_{hh}^2	0	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
I_{hh}	0	σ_{hh}^2	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
R_{hv}	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	σ_{hv}^2	0	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
I_{hv}	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	0	σ_{hv}^2	$-\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
R_{vv}	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$-\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	σ_{vv}^2	0
I_{vv}	$\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	0	σ_{vv}^2

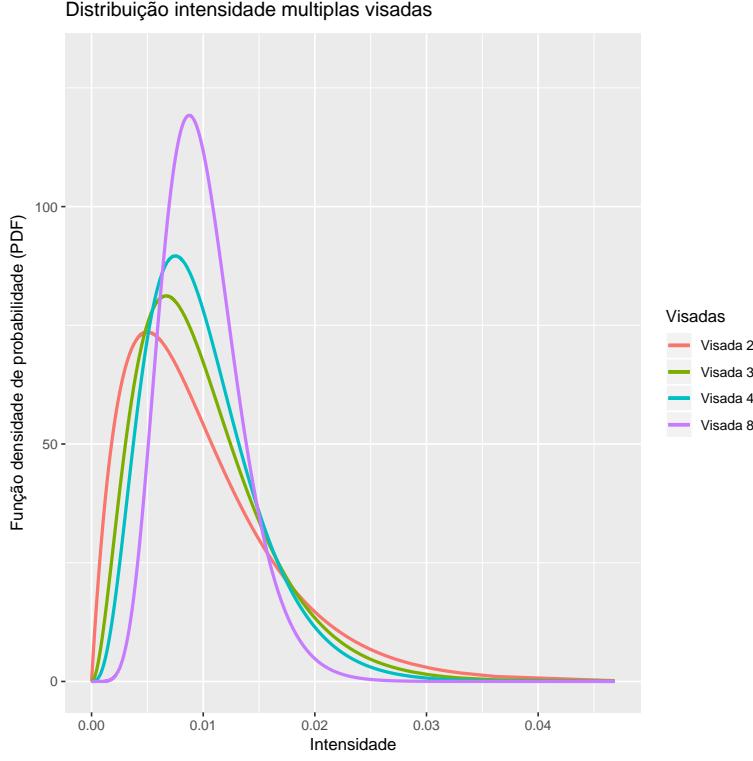


Figura 1.1: Distribuição intensidade multiplas visadas com $\sigma = 0.01$.

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp\left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right). \quad (1.58)$$

Definindo o funcional $\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma)$

$$\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma) = \frac{1}{\pi\sigma_p\sigma_q\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left(\frac{\gamma z}{\sigma_p\sigma_q(1-\gamma)^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_p\sigma_q(1-\gamma)^2}\right). \quad (1.59)$$

onde, $\sigma_p, \sigma_q, \gamma$ são parâmetros da função.

1.3.3 distribuição conjunta para $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}, I_{ii}, I_{ij}) \sim N4(0, C_{ii,ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ii,ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 & \eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 & -\eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 \\ 0 & -\eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.60)$$

Realizar a transformação

$$\begin{bmatrix} Z = R_{ii}R_{ij} + I_{ii}I_{ij} \\ U_1 = R_{ii} \\ U_2 = R_{ij} \\ U_3 = I_{ii} \end{bmatrix}, \quad (1.61)$$

De acordo com Goodman (1963) e Lee *et al.* (1994a) esta distribuição pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de s . A hipótese de ser gaussiana e circular foi comprovada para dados SAR polarimétricos no artigo Sarabandi (1992).

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa m -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^m |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|} \exp(-\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}), \quad (1.62)$$

sendo $|\cdot|$ o determinante de uma matriz ou o valor absoluto de um escalar, e $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ é a matriz de covariância associada a \mathbf{s} definida por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_1\overline{S}_1] & E[S_1\overline{S}_2] & \dots & E[S_1\overline{S}_m] \\ E[S_2\overline{S}_1] & E[S_2\overline{S}_2] & \dots & E[S_2\overline{S}_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[S_m\overline{S}_1] & E[S_m\overline{S}_2] & \dots & E[S_m\overline{S}_m] \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

talque, $E[\cdot]$ denota o valor esperado e $\overline{\cdot}$ denota o conjugado complexo. A matriz de covariância é hermitiana positiva definida e contém todas as informações necessárias para caracterizar o retroespalhamento, podemos consultar mais informações em (López-Martínez *et al.*, 2005).

Nas imagens PolSAR serão consideradas três componentes para o vetor $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$ e a multiplicação de $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$ pelo seu conjugado transposto $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$, isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} S_{hh}\overline{S}_{hh} & S_{hh}\overline{S}_{vh} & S_{hh}\overline{S}_{vv} \\ S_{vh}\overline{S}_{hh} & S_{vh}\overline{S}_{vh} & S_{vh}\overline{S}_{vv} \\ S_{vv}\overline{S}_{hh} & S_{vv}\overline{S}_{vh} & S_{vv}\overline{S}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

A matriz $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ tem dimensão 3×3 , e pode ser definida como sendo a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_{hh}\overline{S}_{hh}] & E[S_{hh}\overline{S}_{vh}] & E[S_{hh}\overline{S}_{vv}] \\ E[S_{vh}\overline{S}_{hh}] & E[S_{vh}\overline{S}_{vh}] & E[S_{vh}\overline{S}_{vv}] \\ E[S_{vv}\overline{S}_{hh}] & E[S_{vv}\overline{S}_{vh}] & E[S_{vv}\overline{S}_{vv}] \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme (Anfinsen *et al.*, 2009; Goodman, 1963)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \quad (1.66)$$

onde \mathbf{s}_i com $i = 1, \dots, L$ é uma amostra de L vetores complexos distribuídos como \mathbf{s} , assim a matriz de covariância amostral associada a \mathbf{s}_i , com $i = 1, \dots, L$ denotam o espalhamento para cada visada L seguindo uma distribuição complexas de Wishart.

Sendo agora $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ e L parâmetros conhecidos a função densidade de probabilidade da distribuição Wishart por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{Z})), \quad (1.67)$$

onde, $\text{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (1.68)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o simbolo $\boldsymbol{\Sigma}$ em detrimento a $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

Seja a função densidade de probabilidade da distribuição complexa Wishart (1.67) na qual

vamos aplicar o logaritmo natural e suas propriedades com o intuito de reescrever a função na forma adequada para aplicar o método de estimativa de máxima verossimilhança. Assim,

$$\begin{aligned}
 \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L) &= \ln \left(\frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= \ln \left(\frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \right) + \ln \left(\exp(-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= \ln(L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}) - \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|^L) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}),
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

lembrando que a função Gamma multivariada é definida na equação (1.68) então, podemos rescrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\
 &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\
 &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \right) - \ln \left(\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\
 &\quad - \frac{1}{2}m(m-1) \ln(\pi) - \sum_{i=0}^{m-1} \ln(\Gamma(L-i)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}),
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

equação equivalente pode ser encontrada em (Frery *et al.*, 2011).

1.4 Modelos para dados dados

A matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Usaremos o caso do meio de propagação ser recíproco, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$ tornando a matriz de espalhamento simétrica. Podemos facilitar a notação representando a matriz de espalhamento por um vetor da seguinte forma

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com Goodman (1963) a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de \mathbf{S} . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_p]^T$.

A função densidade de probabilidade (pdf) da distribuição gaussiana complexa p -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^p |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|} \exp(-\bar{\mathbf{s}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}). \tag{1.71}$$

O parâmetro que indexa a distribuição é a matriz de covariância, que é definida por:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_p^H) \\ E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_p^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_p^H) \end{bmatrix}. \tag{1.72}$$

onde $E(\cdot)$ e $(\cdot)^H$ denotam o valor esperado e o conjugado transposto.

A matriz $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ é hermitiana pois se $\mathbf{S}_j = x_j + iy_j$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(\overline{x_j + iy_j}) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(x_j - iy_j) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= x_j^2 + y_j^2\end{aligned}\quad (1.73)$$

considerando $j \neq k$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(\overline{x_k + iy_k}) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j x_k + y_j y_k) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (1.74)$$

ainda,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j + iy_j)} \\ \underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j - iy_j)} \\ \underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k x_j + y_k y_j) + i(x_j y_k - x_k y_j)} \\ \underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) - i(x_j y_k - x_k y_j) \\ \underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (1.75)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= \underline{\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j} \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= \underline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j}\end{aligned}\quad (1.76)$$

Assim com j e k varrendo toda a matriz podemos afirmar que $\Sigma_s = \Sigma_s^H$ portanto hermitiana.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo *multilook* com o intuito de melhorar a razão sinal-ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas são obtidas computando a médias de L visadas independentes de uma mesma cena. Isto resulta na matriz de covariância Z dada por:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H. \quad (1.77)$$

Coeficiente de correlação Multilook

O coeficiente de correlação complexo é um importante parâmetro para descrever a função de densidade de probabilidade. Podemos defini-lo como

$$\rho_c = \frac{E[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j^H]}{\sqrt{E[|\mathbf{s}_i|^2] E[|\mathbf{s}_j|^2]}} = |\rho_c| e^{i\theta}. \quad (1.78)$$

em que \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j são duas componentes da matriz de espalhamento ou dois retorno do radar polarimétrico ou interferométrico SAR. Para dados de radar polarimétricos representado pela matriz de Mueller, ρ_c pode ser calculado encontrando a média da vizinhança de um pixel de uma matriz Mueller. A magnitude de ρ_c pode também ser estimada usando duas intensidade *multilook* Z_{ii} e Z_{jj} . O coeficiente de correlação de dados L looks intensidade é definida como

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(Z_{ii} - \overline{Z_{ii}})(Z_{jj} - \overline{Z_{jj}})]}{\sqrt{E[(Z_{ii} - \overline{Z_{ii}})^2][(Z_{jj} - \overline{Z_{jj}})^2]}}. \quad (1.79)$$

No apêndice do artigo [Lee et al. \(1994a\)](#) foi mostrado que

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2 \quad (1.80)$$

Sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i &= a_R + ia_I \\ \mathbf{S}_j &= b_R + ib_I\end{aligned}\quad (1.81)$$

Assim a equação (1.78) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{E[(a_R+ia_I)(\overline{b_R}+ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]E[b_R^2+b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[(a_R+ia_I)(b_R-ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]E[b_R^2+b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]\sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]\sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}}}.\end{aligned}\quad (1.82)$$

Definindo os desvios padrões,

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \sqrt{E[a_R^2+a_I^2]} \\ \sigma_b &= \sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}\end{aligned}\quad (1.83)$$

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+a_Ib_I+i(a_Ib_R-a_Rb_I)]}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R]+E[a_Ib_I]+i(E[a_Ib_R]-E[a_Rb_I])}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R]}{\sigma_a\sigma_b} + \frac{E[a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b} + i\left(\frac{E[a_Ib_R]}{\sigma_a\sigma_b} - \frac{E[a_Rb_I]}{\sigma_a\sigma_b}\right).\end{aligned}\quad (1.84)$$

Definindo

$$\rho_{RR} = \frac{E[a_Rb_R]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{II} = \frac{E[a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{IR} = \frac{E[a_Ib_R]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{RI} = \frac{E[a_Rb_I]}{\sigma_a\sigma_b}. \quad (1.85)$$

Portanto,

$$\rho_c = \frac{(\rho_{RR} + \rho_{II}) + i(\rho_{IR} - \rho_{RI})}{2}. \quad (1.86)$$

obs: Explicar melhor o fator 2

Devido a condição de ser gaussiana circular

$$\rho_{RR} = \rho_{II}, \quad \rho_{IR} = -\rho_{RI}. \quad (1.87)$$

podemos escrever ρ_c

$$\rho_c = \rho_{RR} + i\rho_{IR}. \quad (1.88)$$

Portanto

$$|\rho_c|^2 = \rho_{RR}^2 + \rho_{IR}^2. \quad (1.89)$$

O processo de **Multilook** produz

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [a_R^2(k) + a_I^2(k)] \\ B_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b_R^2(k) + b_I^2(k)].\end{aligned}\quad (1.90)$$

Assumindo a independência estatística entre amostras, a média e o desvio padrão podem ser definidos por

$$\begin{aligned}\overline{A_n} &= E[A_n] = 2E[a_R^2(k)] = 2\sigma_a^2, \quad SD[A_n] = \frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}}. \\ \overline{B_n} &= E[B_n] = 2E[b_R^2(k)] = 2\sigma_b^2, \quad SD[B_n] = \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}\quad (1.91)$$

O coeficiente de correlação *Multilook* para intensidade (equação (1.79)) pode ser escrito por:

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})]}{SD[A_n]SD[B_n]}. \quad (1.92)$$

Assumindo a independência entre as amostras e depois de algumas manipulações algébricas

para o numerador da equação (1.92).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [E[(a_R^2(k) + a_I^2(k))(b_R^2(k) + b_I^2(k))] - 4\sigma_a^2\sigma_b^2] \quad (1.93)$$

OBS: Entender melhor a equação (1.93) e (1.94).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2 \quad (1.94)$$

Agora substituindo em (1.92)

$$\begin{aligned} \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{SD[A_n]SD[B_n]}. \\ \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{\frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}} \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

completando as simplificações

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2. \quad (1.96)$$

OBS: Esta relação mostra que o coeficiente de correlação da intensidade não depende dos *nlooks*.

Distribuição conjunta do *Multilook* $|S_i|^2$ e $|S_j|^2$

O PDF conjunto retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e interferométricos são importantes. As PDF's conjuntas conduzem a derivação da intensidade e amplitude razão PDF's. Da equação (??) temos que as intensidades *multilook* sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 C_{11}}{B_2 C_{22}} \\ R_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 C_{22}}{B_1 C_{11}} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Integrando a equação (??) em relação a η e ψ . A PDF é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho_c|^2}\right)}{\Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (1.98)$$

Sendo

$$I_\mu(Z) = \frac{(\frac{z}{2})^\mu}{\Gamma(\mu+1)} F_1^0[-; \mu+1; \frac{z^2}{4}] \quad (1.99)$$

OBS: As integrações na equação (??) não foram realizadas neste estudo.

$$p(B_1, B_2) = \frac{n^{n+1} (R_1 R_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{n(\frac{R_1}{C_{11}} + \frac{R_2}{C_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(C_{11} C_{22})^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2n\sqrt{\frac{R_1 R_2}{C_{11} C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (1.100)$$

OBS: Verificar o surgimento de um fator $\frac{n^2}{C_{11} C_{22}}$ na equação (1.100) - Mudança de variável!!!!.

Distribuição razão intensidade e amplitude para *multilook*

A razão de intensidade e amplitude entre S_{hh} e S_{vv} são importantes no estudo de radares polarimétricos. A PDF's razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{C_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{C_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (1.101)$$

Onde $\tau = \frac{C_{11}}{C_{22}}$.

A *PDF* razão intensidade *multlook* normalizada é mostrada no apêndice (*C*) do artigo Lee *et al.* (1994a)

$$p^{(n)}(\mu) = \frac{\Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(1 + \mu)\mu^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (1.102)$$

OBS: Não realizei as contas do apêndice (*C*).

Realizando a troca de variável $\nu = \sqrt{\mu}$ a equação (1.102) pode ser rescrita por

$$p^{(n)}(\nu) = \frac{2\Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(1 + \nu^2)\nu^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1 + \nu^2)^2 - 4|\rho_c|^2\nu^2]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (1.103)$$

As *PDF's* razão de intensidade e amplitude entre os *multilook* **S₁** e **S₂** podem ser facilmente deduzidas das seguintes definições e posterior aplicação nas equações (1.102) e (1.103), definindo

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2} &= \tau\mu \\ z &= \sqrt{w} &= \sqrt{\tau}\nu \end{aligned} \quad (1.104)$$

Portanto a distribuição da razão w de intensidade *multilook* é

$$p^{(n)}(w) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + w)w^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (1.105)$$

Portanto a distribuição da razão z de amplitude *multilook* é

$$p^{(n)}(z) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + z^2)z^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + z^2)^2 - 4\tau|\rho_c|^2z^2]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (1.106)$$

A discussão será limitada para estatística da razão ν amplitude normalizada. A figura (1.1) mostra a distribuição razão amplitude apresentada na equação (1.103). Notadamente a medida que n aumenta tendemos a ter uma aproximação da "função" delta de Dirac e uma concentração em torno da abscissa $\nu = 1$.

OBS: Processos de *multilook* reduzem a variância.

1.5 Metodologia

Os modelos marginais são derivados dos modelos mariados Gamma como a distribuição complexa Wishart. Nesta seção serão apresentados os modelos marginais usados no trabalho.

1.6 Número Equivalente de Visadas

O coeficiente de variação definido como a razão do desvio padrãoem uma imagem com a média para as intensidades na imagem PolSAR $CV = \frac{\sqrt{\text{Var}(I)}}{\text{E}(I)}$ é um bom indicador para no nível de ruído *Speckle*. O coeficiente de variação (CV) será usado para definir o número equivalente de visadas para a intensidade (ENL(I)),

$$\text{ENL}(I) = \frac{1}{CV^2}, \quad (1.107)$$

para mais detalhes codemos consultar Lee *et al.* (1994b).

1.7 Modelos de Densidades de Probabilidades Marginais

1.7.1 Função Densidade de Probabilidade Univariada Gamma

Considerando a função distribuição de densidade univariada gaussiana

$$f_Z(z; \mu, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} z^{L-1} \exp\left\{-L\frac{z}{\mu}\right\}, \quad (1.108)$$

onde, $\mu > 0$ e $L > 0$. Aplicando o logaritmo natural na equação (1.137) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z; \mu, L) &= \ln\left(\frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} z^{L-1} \exp\left\{-L\frac{z}{\mu}\right\}\right), \\ &= \ln\left(\frac{L}{\mu}\right)^L - \ln\Gamma(L) + \ln z^{L-1} + \ln\exp\left\{-L\frac{z}{\mu}\right\}, \end{aligned}$$

resultante na função,

$$\ln f_Z(z; \mu, L) = L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) + (L-1) \ln z - \frac{L}{\mu} z. \quad (1.109)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f_Z(z_k; \mu, L) \\ \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L), \end{aligned}$$

usando a função (1.138) teremos,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) + (L-1) \ln z_k - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L \ln \frac{L}{\mu} - \sum_{k=1}^n \ln\Gamma(L) + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n 1 - \ln\Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} n - \ln\Gamma(L) n + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.138).

$$\ell(\mathbf{z}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) \right] + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k,$$

e a forma reduzida,

$$\ell(\mathbf{z}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \quad (1.110)$$

Considerando o número de visadas L fixo podemos reduzir a equação para a seguinte forma

$$\ell(\mathbf{z}; \mu) = -n \ln \mu - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \quad (1.111)$$

Vamos obter $(\hat{L}, \hat{\mu})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (L, μ) baseado \mathbf{z} , por maximizar (1.139) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (Henningsen e Toomet, 2011). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

O função é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E . Cada faixa de dados $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ é particionada em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}).$$

assumimos dois diferentes modelos para cada partição: $\mathbf{Z}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $\mathbf{Z}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. Vamos estimar (μ_I, L_I) e (μ_E, L_E) com \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E , respectivamente, maximizando (1.139), e obtendo $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E) = \\ j [\hat{L}_I \ln(\hat{L}_I/\hat{\mu}_I) - \ln \Gamma(\hat{L}_I)] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln z_k - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_k + \\ (n-j) [\hat{L}_E \ln(\hat{L}_E/\hat{\mu}_E) - \ln \Gamma(\hat{L}_E)] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln z_k - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n z_k. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14. Observe que foi estimado a função usando dois parâmetros.

Desta maneira, vamos obter uma estimativa para a borda em cada canal de intensidade. Note que esse método pode ser estendido e/ou modificado para lidar com qualquer tipo de dados.

Podemos assumir o número de visadas L conhecido a priori e otimizar a função $\ell(\mathbf{z}; \mu, L)$ na variável μ , assumindo dois modelos diferentes para cada partição: $\mathbf{Z}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $\mathbf{Z}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. Estimando μ_I e μ_E com as amostras \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E maximizando (1.139) para cada elemento das amostras. Desta forma teremos os parâmetros $(\hat{\mu}_I, L_I)$ e $(\hat{\mu}_E, L_E)$ conhecidos.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E) = -j \ln(\hat{\mu}_I) - \frac{1}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_k - (n-j) \ln(\hat{\mu}_E) - \frac{1}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n z_k. \quad (1.113)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14. Observe que foi estimado a função usando um parâmetro.

1.7.2 Função Densidade de Probabilidade Univariada produto de magnitudes das intensidades

A função densidade de probabilidade univariada produto de magnitudes das intensidades z é definida por

$$f(z; \rho, L) = \frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right), \quad (1.114)$$

onde I_0 e K_{L-1} são funções de Bessel modificadas, e onde, $\rho > 0$ e $L > 0$.

APLICANDO o logaritmo natural na equação (1.114) com o objetivo de construir o método de máxima verossimilhança, teremos

$$\begin{aligned} \ln f(z; \rho, L) &= \ln\left(\frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right)\right), \\ &= \ln\left(\frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)}\right) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right), \\ &= \ln(4L^{L+1}z^L) - \ln(\Gamma(L)(1-|\rho|^2)) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right), \\ &= \ln(4) + \ln L^{L+1} + \ln z^L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right), \\ &= \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right). \end{aligned}$$

Definimos a função logarítmica para a densidade de probabilidade univariada produto de magnitudes das intensidades

$$\begin{aligned} \ell(z; \rho, L) &= \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2}\right). \end{aligned} \quad (1.115)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida sendo dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f(z_k; \rho, L) \\ \ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L), \end{aligned}$$

usando a função (1.115) teremos,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \right. \\ &\quad \left. + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2Lz_k}{1-|\rho|^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\xi}; \rho, L) &= \ln(4) \sum_{k=1}^n 1 + (L+1) \ln L \sum_{k=1}^n 1 + L \sum_{k=1}^n \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \ln(1 - |\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right) \\
&= n \ln(4) + n(L+1) \ln L + L \sum_{k=1}^n \ln \xi_k - n \ln \Gamma(L) - n \ln(1 - |\rho|^2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right) \\
&= n [\ln(4) + (L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2)] + L \sum_{k=1}^n \ln \xi_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1 - |\rho|^2} \right).
\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.114).

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= n [\ln(4) + (L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2)] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right),
\end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= n [(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2)] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right). \tag{1.116}
\end{aligned}$$

Considerando o número de visadas L fixo, podemos reescrever a equação (1.117) por

$$\ell(\mathbf{z}; \rho) = -n \ln(1 - |\rho|^2) + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right). \tag{1.117}$$

Vamos obter $(\hat{\rho}, \hat{L})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (ρ, L) baseado $\boldsymbol{\xi}$, por maximizar (1.117) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (Henningsen e Toomet, 2011). Preferimos otimizar resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com objetivo de melhorar a estabilidade numérica do método.

A função otimizada é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E . Cada faixa de dados $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ é particionada em duas amostras disjuntas na posição j ,

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}).$$

Vamos estimar (ρ_I, L_I) e (ρ_E, L_E) com \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E , maximizando (1.117), e obtendo $(\hat{\rho}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E) &= j \left[(\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) \right] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_I| \hat{L}_I z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) + \sum_{k=1}^j \ln K_{\hat{L}_I-1} \left(\frac{2\hat{L}_I z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\ &\quad + (n-j) \left[(\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) \right] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_E| \hat{L}_E z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) + \sum_{k=j+1}^n \ln K_{\hat{L}_E-1} \left(\frac{2\hat{L}_E z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right). \end{aligned} \quad (1.118)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido de maneira empírica por 14.

Podemos concluir que o uso da função densidade magnitude do produtos não é adequado para gerar a função log-verossimilhança. Essas funções resultantes tem características de serem planas dificultando o cálculo do valor máximo. O cálculo inadequado dos coeficientes L e ρ geram uma função (1.119) com muita oscilação degenerando o ponto onde o argumento é máximo.

Sendo o número de visadas L conhecido a priori e otimizando da função $\ell(\mathbf{z}; \rho, L)$ na variável ρ . Assumindo que vamos estimar ρ_I e ρ_E nas amostras \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E através da aximização (1.117) obtemos $(\hat{\rho}_I, L_I)$ e $(\hat{\rho}_E, L_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j com $L_I = L_E = L$ definidas a priori é

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E) &= -j \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) + \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_I| L z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) + \sum_{k=1}^j \ln K_{L-1} \left(\frac{2L z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\ &\quad - (n-j) \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) + \sum_{k=j+1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_E| L z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) + \sum_{k=j+1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right). \end{aligned} \quad (1.119)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido empíricamente por 14.

1.7.3 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada razão de intensidades múltiplas visadas

A razão de intensidades ou amplitudes entre \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j são importantes no estudo de radares polarimétricos. Seja a razão de intensidade normalizada,

$$\mu = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_i(k)|^2}{\Sigma_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_j(k)|^2}{\Sigma_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_j(k)|^2}, \quad (1.120)$$

onde $\tau = \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}}$.

Considerando a função densidade de probabilidade univariada razão de intensidades múltiplas

visadas,

$$f(\mu; \rho, L) = \frac{\Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(1 + \mu)^2 - 4|\rho|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (1.121)$$

onde, $\rho > 0$ e $L > 0$. Podemos definir

$$w = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_i(k)|^2}{\Sigma_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_j(k)|^2}{\Sigma_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_j(k)|^2} = \tau\mu, \quad (1.122)$$

realizando a mudança de variável na PDF, (1.121) teremos,

$$f(w; \rho, L, \tau) = \frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + w)w^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (1.123)$$

Aplicando o logaritmo natural na equação (1.123) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} \ln f(w; \rho, L, \tau) &= \ln \left(\frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + w)w^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]^{\frac{2L+1}{2}}} \right), \\ &= \ln (\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + w)w^{L-1}) \\ &\quad - \ln \left(\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ &= \ln \tau^L + \ln \Gamma(2L) + \ln(1 - |\rho|^2)^L + \ln(\tau + w) + \ln w^{L-1} \\ &\quad - \left(\ln \Gamma(L) + \ln \Gamma(L) + \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + w) + (L - 1) \ln w \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]. \end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada razão de intensidades múltiplas visadas,

$$\begin{aligned} \ln f(w; \rho, L, \tau) &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + w) + (L - 1) \ln w \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2w]. \end{aligned} \quad (1.124)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{w}; \rho, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f(w_k; \rho, L) \\ \ell(\mathbf{w}; \rho, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f(w_k; \rho, L), \end{aligned}$$

usando a função (1.124) teremos,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{w}; \rho, L, \tau) &= \sum_{k=1}^n \ln f(\mu_k; \rho, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + w) + (L - 1) \ln w \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L + 1}{2} \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho|^2 w] \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{w}; \rho, L, \tau) &= L \ln \tau \sum_{k=1}^n 1 + \ln \Gamma(2L) \sum_{k=1}^n 1 + L \ln(1 - |\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + w_k) + (L - 1) \sum_{k=1}^n \ln w_k \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 w_k] \\ &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + w_k) \\ &\quad + L \sum_{k=1}^n \ln w_k - \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 w_k].\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.124).

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{w}; \rho, L, \tau) &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + w_k) \\ &\quad + L \sum_{k=1}^n \ln w_k - \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 w_k]\end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{w}; \rho, L, \tau) &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + w_k) + L \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 w_k] \quad (1.125)\end{aligned}$$

Vamos obter $(\hat{\rho}, \hat{L}, \hat{\tau})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (ρ, L, τ) baseado em \mathbf{w} maximizando (1.125) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (Henningsen e Toomet, 2011). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

A função é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{w}_I e \mathbf{w}_E . Cada faixa de dados $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ é particionada em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{w} = (\underbrace{w_1, w_2, \dots, w_j}_{\mathbf{w}_I}, \underbrace{w_{j+1}, w_{j+2}, \dots, w_n}_{\mathbf{w}_E}).$$

Vamos estimar (ρ_I, L_I, τ_I) e (ρ_E, L_E, τ_E) com \mathbf{w}_I e \mathbf{w}_E , respectivamente, maximizando (1.117), e obtendo $(\hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E) = & n \left(\hat{L}_I \ln \hat{\tau}_I + \ln \Gamma(2\hat{L}_I) + \hat{L}_I \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_I) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_I + w_k) + \hat{L}_I \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2\hat{L}_I + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_I + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_I|^2 w_k] \\ & + n \left(\hat{L}_E \ln \hat{\tau}_E + \ln \Gamma(2\hat{L}_E) + \hat{L}_E \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_E) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_E + w_k) + \hat{L}_E \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2\hat{L}_E + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_E + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_E|\hat{\rho}_E|^2 w_k] \end{aligned} \quad (1.126)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14.

Desta maneira, vamos obter uma estimativa para a borda em cada canal de intensidade. Note que esse método pode ser estendido e/ou modificado para lidar com qualquer tipo de dados.

Sendo o número de visadas L conhecido a priori e otimizando da função $\ell(\mathbf{w}; \rho, L, \tau)$ nas variáveis ρ e τ . Estimando (ρ_I, τ_I) e (ρ_E, τ_E) nas amostras \mathbf{w}_I e \mathbf{w}_E , e maximizando (1.117), obtemos $(\hat{\rho}_I, L_I, \hat{\tau}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, L_E, \hat{\tau}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j com os parâmetros estimados é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, L_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, L_E, \hat{\tau}_E) = & n \left(L_I \ln \hat{\tau}_I + \ln \Gamma(2L_I) + L_I \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - 2 \ln \Gamma(L_I) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_I + w_k) + L_I \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2L_I + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_I + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_I|^2 w_k] \\ & + n \left(L_E \ln \hat{\tau}_E + \ln \Gamma(2L_E) + L_E \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - 2 \ln \Gamma(L_E) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_E + w_k) + L_E \sum_{k=1}^n \ln w_k - \frac{2L_E + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_E + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_E|\hat{\rho}_E|^2 w_k] \end{aligned} \quad (1.127)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, L_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, L_E, \hat{\tau}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido empiricamente por 14.

Fixando $L = 4$ podemos estimar (ρ, τ) usando a função

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{w}; \rho, \tau) = & n \left(L \ln \tau + L \ln(1 - |\rho|^2) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + w_k) - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 w_k] \end{aligned} \quad (1.128)$$

sendo estimado os parâmetros a log-verossimilhança no ponto j com os parâmetros estimados é,

então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{\tau}_E) &= n \left(L_I \ln \hat{\tau}_I + L_E \ln (1 - |\hat{\rho}_I|^2) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_I + w_k) - \frac{2L_I + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_I + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_I|^2 w_k] \\ &\quad + n \left(L_E \ln \hat{\tau}_E + L_E \ln (1 - |\hat{\rho}_E|^2) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_E + w_k) - \frac{2L_E + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_E + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_E|\hat{\rho}_E|^2 w_k] \end{aligned} \quad (1.129)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{\tau}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido empiricamente por 14.

1.7.4 Distribuição bivariada produto de intensidades - Lee

Seja a função distribuição de probabilidade

$$f(B_1, B_2; \rho, L) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho|^2}\right)}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1}} I_{L-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right) \quad (1.130)$$

Considerando as seguintes relações

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 \Sigma_{11}}{B_2 \Sigma_{22}} \\ R_2 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 \Sigma_{22}}{B_1 \Sigma_{11}} \end{aligned} \quad (1.131)$$

$$f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = \frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L\left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}}\right)}{1-|\rho|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1}} I_{L-1}\left(2L\sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right) \quad (1.132)$$

Aplicando o logaritmo natural na equação em ambos os lados da (1.132)

$$\begin{aligned} \ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L\left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}}\right)}{1-|\rho|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1}} I_{L-1}\left(2L\sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right) \right) \\ \ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L\left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}}\right)}{1-|\rho|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1}} \right) + \ln I_{L-1}\left(2L\sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right) \\ &= \ln \left(L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L\left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}}\right)}{1-|\rho|^2}\right) \right) - \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1} \right) \\ &\quad + \ln I_{L-1}\left(2L\sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \left(L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \right) + \ln \exp \left(-\frac{L \left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1 - |\rho|^2} \right) - \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1 - |\rho|^2)^{-\frac{L+1}{2}} \right) \\
&\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right) \\
&= \ln L^{L+1} + \ln (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} - \frac{L \left(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1 - |\rho|^2} - \ln (\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} - \ln \Gamma(L) - \ln (1 - |\rho|^2)^{-\frac{L+1}{2}} \\
&\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right) \\
&= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln (R_1 R_2) - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1 - |\rho|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1 - |\rho|^2)} \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln (\Sigma_{11} \Sigma_{22}) - \ln \Gamma(L) - \ln (1 - |\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \\
&\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right) \\
\ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \ln R_2 - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1 - |\rho|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1 - |\rho|^2)} \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln (1 - |\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \\
&\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.133}$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$,

$$\begin{aligned}
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \prod_{k=1}^n f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) \\
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \sum_{k=1}^n \ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}),
\end{aligned}$$

usando a função (1.133) teremos,

$$\begin{aligned}
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \sum_{k=1}^n \ln f(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \ln R_2 - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1 - |\rho|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1 - |\rho|^2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln (1 - |\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right. \\
&\quad \left. + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = & (L+1) \ln L \sum_{k=1}^n 1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\
& - L \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} - L \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \\
& - \frac{L+1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\
& - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \ln(1-|\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 - (L-1) \ln |\rho| \sum_{k=1}^n 1 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right)
\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.133).

$$\begin{aligned}
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = & n \left[(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right] \\
& + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\
& - L \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} - L \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \\
& - \frac{L+1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right)
\end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}
\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = & n \left[(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right. \\
& \left. - \frac{L}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L}{2} \ln \Sigma_{22} \right] \\
& + \frac{L}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{L}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\
& - \frac{L}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n R_1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n R_2 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right) \tag{1.134}
\end{aligned}$$

Vamos obter $(\hat{\rho}, \hat{L})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (ρ, L) baseado μ , por maximizar (??) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (Henningsen e Toomet, 2011). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

O função é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como μ_I e μ_E . Cada faixa de dados $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ é particionada

em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\boldsymbol{\mu} = (\underbrace{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j}_{\boldsymbol{\mu}_I}, \underbrace{\mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \dots, \mu_n}_{\boldsymbol{\mu}_E}).$$

Vamos estimar $(\rho_I, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ e $(\rho_E, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ com $\boldsymbol{\mu}_I$ e $\boldsymbol{\mu}_E$, e maximizando (1.134), obtemos $(\hat{\rho}_I, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ e $(\hat{\rho}_E, R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$.

A log-verossimilhança no ponto j usando os parametros estimado é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\Sigma}_{22}^E) &= n \left[(\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - (\hat{L}_I - 1) \ln |\hat{\rho}_I| \right] \\ &\quad + \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\ &\quad - \frac{\hat{L}_I}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}} - \frac{\hat{L}_I}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \\ &\quad - \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_I-1} \left(2\hat{L}_I \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_I|}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\ &\quad + n \left[(\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - (\hat{L}_E - 1) \ln |\hat{\rho}_E| \right] \\ &\quad + \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\ &\quad - \frac{\hat{L}_E}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}} - \frac{\hat{L}_E}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \\ &\quad - \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_E-1} \left(2\hat{L}_E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_E|}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) \end{aligned} \tag{1.135}$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14.

Desta maneira, vamos obter uma estimativa para a borda em cada canal de intensidade. Note que esse método pode ser estendido e/ou modificado para lidar com qualquer tipo de dados.

Sendo o número de visadas L conhecido a priori e otimizando a função $\ell(R_1, R_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ nas variáveis ρ , Σ_{11} , e Σ_{22} . Estimando (ρ_I, L_I) e (ρ_E, L_E) com $\boldsymbol{\mu}_I$ e $\boldsymbol{\mu}_E$, e maximizando (??), e obtendo $(\hat{\rho}_I, L_I)$ e $(\hat{\rho}_E, L_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\begin{aligned}
\ell(j; \hat{\rho}_I, L_I, \hat{\rho}_E, L_E) = & n \left[(L_I + 1) \ln L_I - \ln \Gamma(L_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - (L_I - 1) \ln |\hat{\rho}_I| \right] \\
& + \frac{L_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{L_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\
& - \frac{L_I}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}} - \frac{\hat{L}_I}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \\
& - \frac{L_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{L_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L_I-1} \left(2L_I \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_I|}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\
& + n \left[(L_E + 1) \ln L_E - \ln \Gamma(L_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - (L_E - 1) \ln |\hat{\rho}_E| \right] \\
& + \frac{L_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_1 + \frac{L_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln R_2 \\
& - \frac{L_E}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_1}{\Sigma_{11}} - \frac{L_E}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \sum_{k=1}^n \frac{R_2}{\Sigma_{22}} \\
& - \frac{L_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{11} - \frac{L_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln \Sigma_{22} \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L_E-1} \left(2L_E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_E|}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.136}$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14.

1.7.5 Distribuição univariada para o span

A referência Feng *et al.* (2016) mostra que podemos usar uma distribuição gaussiana para modelar o span, para isso vamos definir S como sendo o span.

Considerando a função distribuição de densidade univariada gaussiana

$$f_S(s; \mu, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} s^{L-1} \exp \left\{ -L \frac{s}{\mu} \right\}, \tag{1.137}$$

onde, $\mu > 0$ e $L > 0$. Aplicando o logaritmo natural na equação (1.137) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned}
\ln f_S(s; \mu, L) &= \ln \left(\frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} s^{L-1} \exp \left\{ -L \frac{s}{\mu} \right\} \right), \\
&= \ln \left(\frac{L}{\mu} \right)^L - \ln \Gamma(L) + \ln s^{L-1} + \ln \exp \left\{ -L \frac{s}{\mu} \right\},
\end{aligned}$$

resultante na função,

$$\ln f_S(s; \mu, L) = L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L - 1) \ln s - \frac{L}{\mu} s. \tag{1.138}$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $s =$

(s_1, \dots, s_n) ,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f_Z(s_k; \mu, L) \\ \ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(s_k; \mu, L),\end{aligned}$$

usando a função (1.138) teremos,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_S(s_k; \mu, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln s_k - \frac{L}{\mu} s_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L \ln \frac{L}{\mu} - \sum_{k=1}^n \ln \Gamma(L) + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n 1 - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} n - \ln \Gamma(L) n + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k.\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.138).

$$\ell(\mathbf{s}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k,$$

e a forma reduzida,

$$\ell(\mathbf{s}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k. \quad (1.139)$$

Considerando o número de visadas L fixo podemos reduzir a equação para a seguinte forma

$$\ell(\mathbf{s}; \mu) = -n \ln \mu - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k. \quad (1.140)$$

Vamos obter $(\hat{L}, \hat{\mu})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (L, μ) baseado \mathbf{s} , por maximizar (1.139) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (Henningsen e Toomet, 2011). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

O função é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{s}_I e \mathbf{s}_E . Cada faixa de dados $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ é particionada em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{s} = (\underbrace{s_1, s_2, \dots, s_j}_{\mathbf{s}_I}, \underbrace{s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_n}_{\mathbf{s}_E}).$$

assumimos dois diferentes modelos para cada partição: $\mathbf{S}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $\mathbf{S}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. Vamos estimar (μ_I, L_I) e (μ_E, L_E) com \mathbf{s}_I e \mathbf{s}_E , respectivamente, maximizando (1.139), e obtendo $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E) = & \\ j[\hat{L}_I \ln(\hat{L}_I/\hat{\mu}_I) - \ln \Gamma(\hat{L}_I)] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln s_k - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j s_k + & \\ (n-j)[\hat{L}_E \ln(\hat{L}_E/\hat{\mu}_E) - \ln \Gamma(\hat{L}_E)] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln s_k - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n s_k. & \end{aligned} \quad (1.141)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14. Observe que foi estimado a função usando dois parâmetros.

Desta maneira, vamos obter uma estimativa para a borda em cada canal de intensidade. Note que esse método pode ser estendido e/ou modificado para lidar com qualquer tipo de dados.

Podemos assumir o número de visadas L conhecido a priori e otimizar a função $\ell(s; \mu, L)$ na variável μ , assumindo dois modelos diferentes para cada partição: $S_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $S_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. Estimando μ_I e μ_E com as amostras s_I e s_E maximizando (1.139) para cada elemento das amostras. Desta forma teremos os parâmetros $(\hat{\mu}_I, L_I)$ e $(\hat{\mu}_E, L_E)$ conhecidos.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E) = -j \ln(\hat{\mu}_I) - \frac{1}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j s_k - (n-j) \ln(\hat{\mu}_E) - \frac{1}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n s_k. \quad (1.142)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E),$$

onde \min_s é o tamanho mínimo da amostra definido por 14. Observe que foi estimado a função usando um parâmetro.

Capítulo 2

Resultado Numéricos

2.1 Aplicação em imagem simulada

A metodologia (MLE) para a detecção será aplicada para uma imagem simulada baseada em [Gomez et al. \(2017\)](#); [Nascimento et al. \(2014\)](#). A imagem tem 400×400 pixels e foi gerada por duas amostras obedecendo a distribuição Wishart. Para cada par de matrizes de covariância Σ_{k_1} , Σ_{k_2} a imagem I_{k_1, k_2} é simulada de acordo com, amostras de $W_G(\Sigma_{k_1}, 4)$ para a metade esquerda da imagem, e amostras $W_G(\Sigma_{k_2}, 4)$ para a metade direita da imagem.

A imagem 400×400 pixels foi gerada

A decomposição de Pauli é baseada na combinação linear dos canais de intensidades,

$$(\mathbf{I}_{hh} + \mathbf{I}_{vv}, \mathbf{I}_{hh} - \mathbf{I}_{vv}, \mathbf{I}_{hv}).$$

Esta decomposição mostra a evidência de bordas em uma linha média da imagem, como apresentado na figura 2.1.

Distribuição univariada Γ com \mathbf{L} fixo

A imagem simulada usa as intensidades da matriz de covariância Σ_{k_1} e Σ_{k_2} definidas por

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 0.042811 & 0.000072 - 0.003180i & 0.010435 + 0.005022i \\ 0.000072 + 0.003180i & 0.035977 & 0.000784 + 0.004886i \\ 0.010435 - 0.005022i & 0.000784 - 0.004886i & 0.066498 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} 0.014380 & 0.001333 - 0.000076i & -0.000755 + 0.001570i \\ 0.001333 + 0.000076i & 0.002789 & -0.001044 + 0.001101i \\ -0.000755 - 0.001570i & -0.001044 - 0.001101i & 0.015387 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

as intensidades são as entradas da diagonal principal.

As funções da figura (2.6) mostram picos indicando evidência de bordas a ser encontrada, porém as funções não são suaves dificultando o uso de métodos de otimização que calculam a derivada da função. O problema foi resolvido usando o método *Simulated Annealing* generalizado (GenSA) [Xiang et al. \(2013\)](#), adequado para funções não diferenciáveis.

O método da máxima verossimilhança (1.141) foi aplicado na imagem simulada com duas amostras, e as evidências de bordas estão mostradas na figura (2.7).

Distribuição univariada produto de intensidades com \mathbf{L} fixo

A figura (2.5) mostra a distribuição univariada produto de magnitudes para radial(linha) 35 fixada e nessa radial escolhemos arbitrariamente o pixel igual a 150 para construir as funções de maxima verossimilhança. Notamos nas figuras o quanto a função é plana evidenciando a dificuldade para encontrar o ρ máximo. A dificuldade de encontrar o máximo teve consequência na construção da

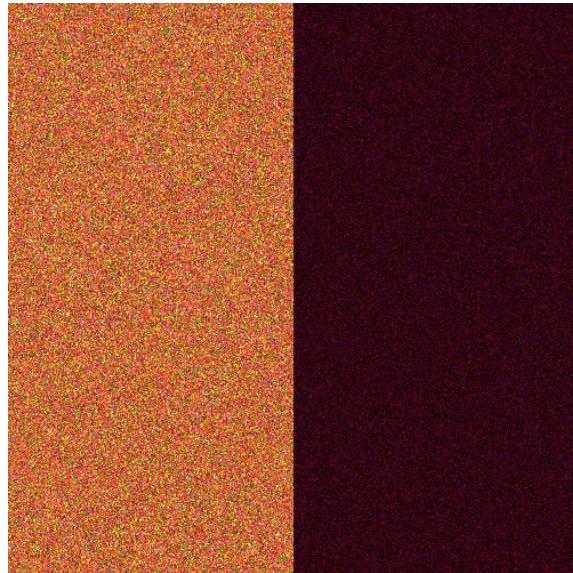


Figura 2.1: Decomposição de Pauli

função de log-verossimilhança usando as estimativas de ρ , as funções apresentaram forte oscilação não sendo possível encontrar evidência de borda para a distribuição produto de intensidades.

Distribuição univariada razão de intensidades com L fixo

Distribuição bivariada produto de intensidades com L fixo

Distribuição univariada span com L fixo

2.2 Aplicação em imagem de sensores PolSAR

2.2.1 Imagem de Flevoland

A imagem da região de Flevoland de dimensão 750×1024 pixels é uma imagem PolSAR capturada pelo sensor AIRSAR com banda-L. Usamos a imagem capturando várias sub-regiões para realizar teste numéricos. A imagem capturada no sensor é mostrada na figura 2.10

O primeiro teste é realizado com a figura 2.11 onde é mostrado as radiais usada para extrair as informações.

Para facilitar a visualização é capturado uma região de interesse (ROI) na imagem com as radiais que mostramos na figura 2.16(a). A figura 2.16(b) mostra as bordas em pixels vermelhos

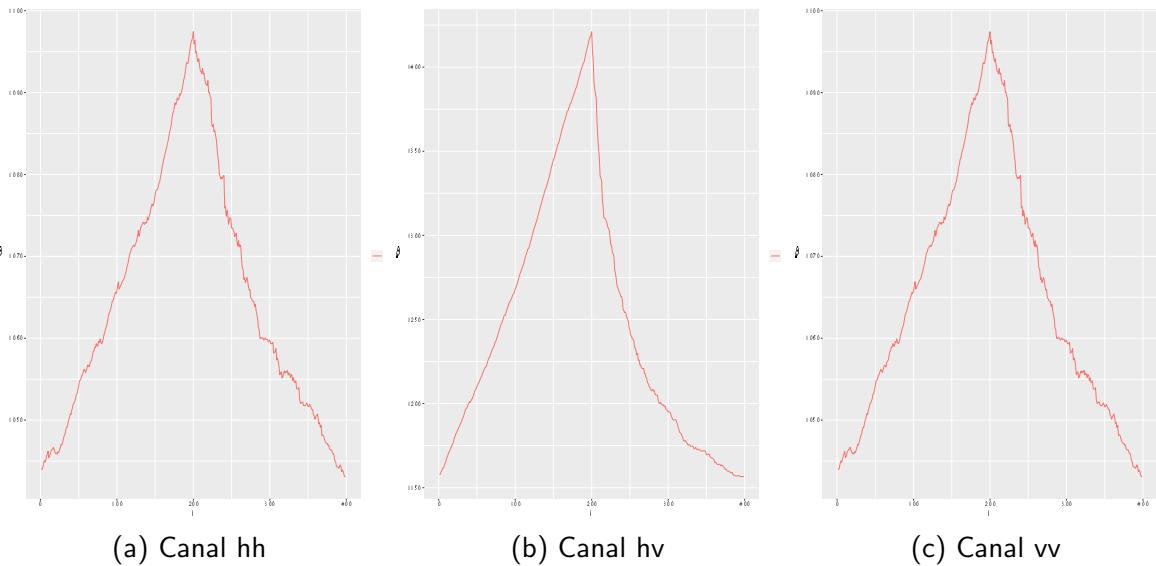


Figura 2.2: Funções log-verossimilhanças para a radial 150

que usaremos de referência a qual chamaremos de *Ground Truth* (GT). Chamaremos de região de interesse I, (ROI-I)

As Figuras. 2.13(a), 2.13(b), e 2.13(c) mostrem, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI-I estabelecemos 100 radiais com comprimento de 120 pixéis. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixéis, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixéis. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na ROI-I os 14 pixéis escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

É digno de nota que o esquema proposto com a estimativa de parâmetros sendo realizada pelo programa MaxLik aplicado nas equações reduzidas e aplicação para gerar as funções de máxima verossimilhança total, encontrando seu máximo usando o programa GenSA obteve as evidências de bordas acuradamente.

Figuras 2.14(a), (b), (c), (d), (e), and (f) mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

Os métodos de fusão por média e fusão PCA produzem resultados similares. MR-SVD produz uma considerável perda de outliers em relação ao outro métodos, porém o tempo de processamento é maior relativamente aos outros métodos. O método usando a estatística ROC produz bordas acuradas, com poucos outliers, porém de forma esparsa. O autor acredita que é um método com ótimo potencial quando consideramos mais canais ou outras funções de densidades de probabilidades para obter evidências de bordas. Ambos métodos baseados em *wavelets* produzem densas bordas e muitos outliers, o autor destaca nesse momento o uso de pós-processamento que podemos ver na referência Frery *et al.* (2010). O pós-processamento pode ser usado em todos os métodos.

A imagem da baía de São Francisco de dimensão 450×600 pixéis é uma imagem PolSAR capturada pelo sensor AIRSAR com banda-L. Usamos a imagem para realizar teste numéricos. A imagem capturada pelo sensor é mostrada na figura 2.15

A figura 2.16(a) a região de interesse (ROI) escolhida com 25 radiais, para cada radial vamos extraídos os dados para obter a informação da localização da evidência de borda. A figura 2.16?? mostra a imagem *Ground Truth* (GT) que geramos para mostrar os resultados quantitativos.

As Figuras. 2.29(a), 2.29(b), e 2.29(c) mostrem, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixéis. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 25 pixéis, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de

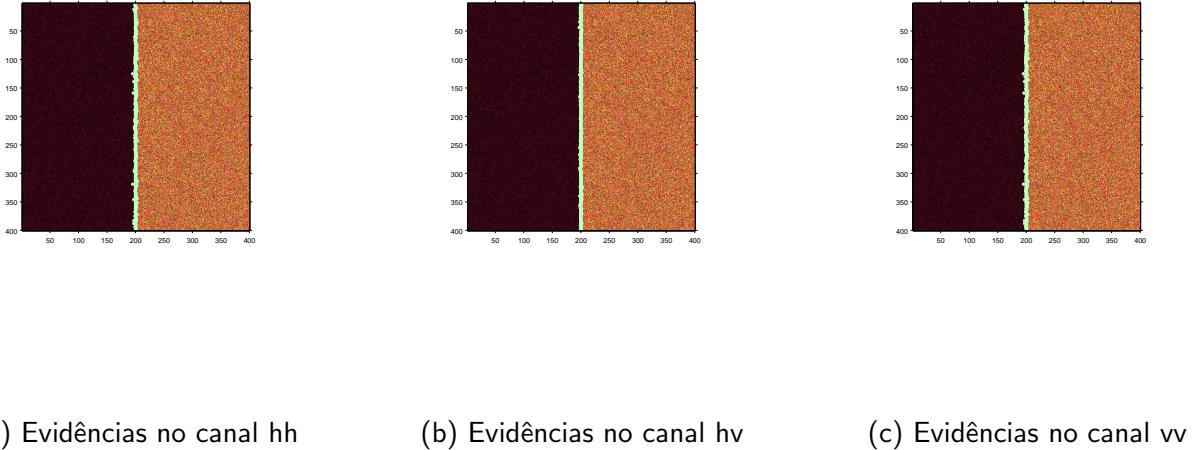


Figura 2.3: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado.

máxima verossimilhança nos pixels. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na ROI os 25 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

Figuras 2.31(a), (b), (c), (d), (e), and (f) mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

Uma segunda região na imagem de Flevoland é capturado para os testes e chamaremos de região de interesse II (ROI - II). A imagem com as radiais é mostrada na figura 2.19(a). A figura 2.19?? mostra as bordas em pixels vermelhos que usaremos de referência a qual chamaremos de *Ground Truth* (GT).

As Figuras. 2.20(a), 2.20(b), e 2.20(c) mostrem, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI-II estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na ROI-II os 14 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

Figuras ??(a), (b), (c), (d), (e), and (f) mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos. As Figuras. 2.22(a), 2.22(b), e 2.22(c) mostrem, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI-II estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 25 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na ROI-II os 25 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

Figuras ??(a), (b), (c), (d), (e), and (f) mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

Figure 2.26 shows the error of \hat{j} in finding the true edge, as measured on 100 radial lines: the minimum Euclidean distance among the ground truth pixel and the several pixels detected in the fusion methods. We use relative frequencies to estimate the probability of having an error smaller than a number of pixels. Denoting $H(k)$ the number of replications for which the error is less than k pixels, an estimate of this probability is $f(k) = H(k)/n_r$, where n_r is number of radii. In our analysis, k varies between 1 and 10, and $n_r = 100$. The algorithm is described in Ref. Frery *et al.*

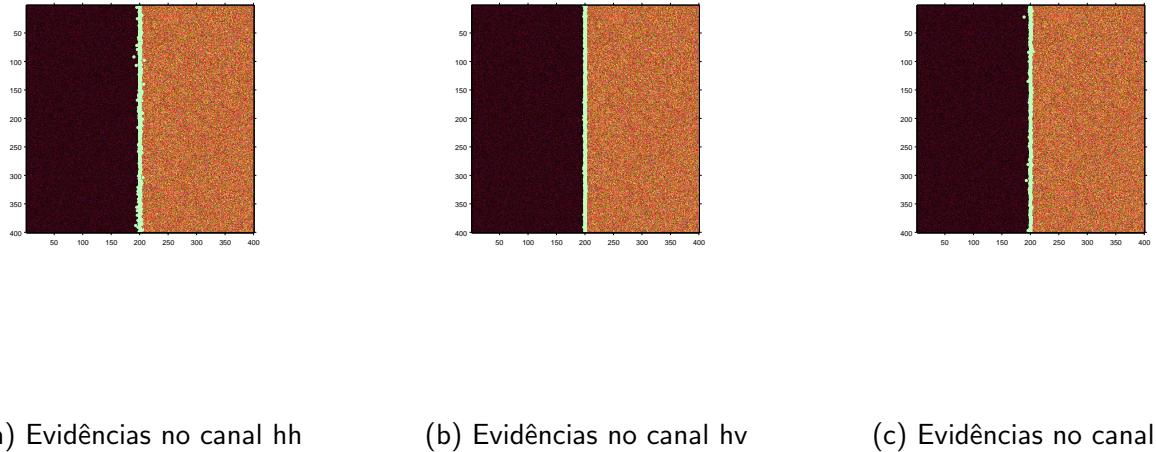


Figura 2.4: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado (média).

(2010).

2.2.2 Imagem da Baía de São Francisco

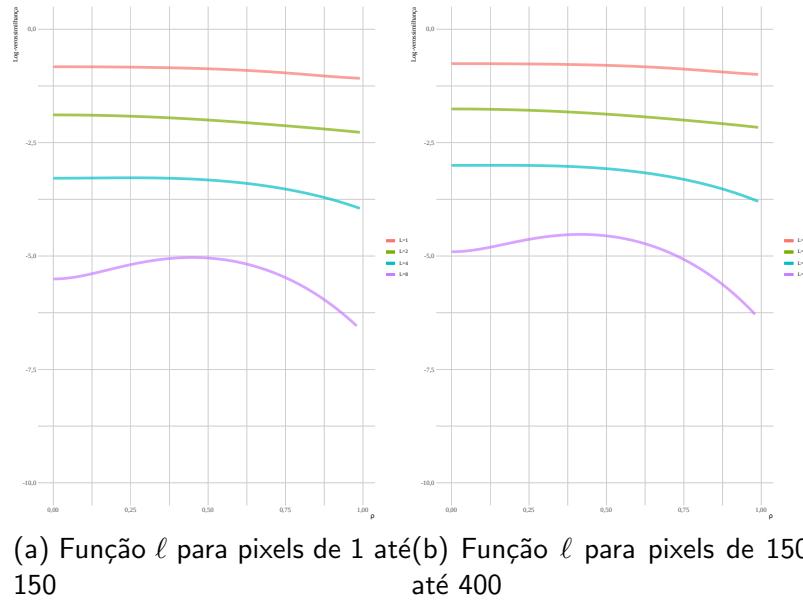


Figura 2.5: Distribuição produto de intensidades para diferentes L fixos e radial 35

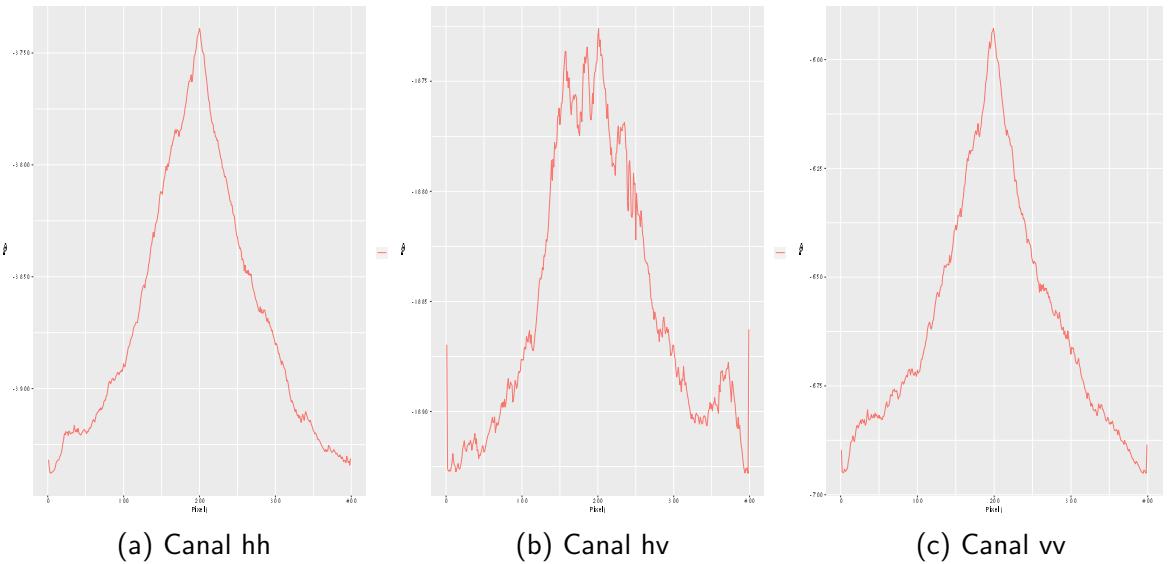


Figura 2.6: Funções log-verossimilhanças para a radial 150

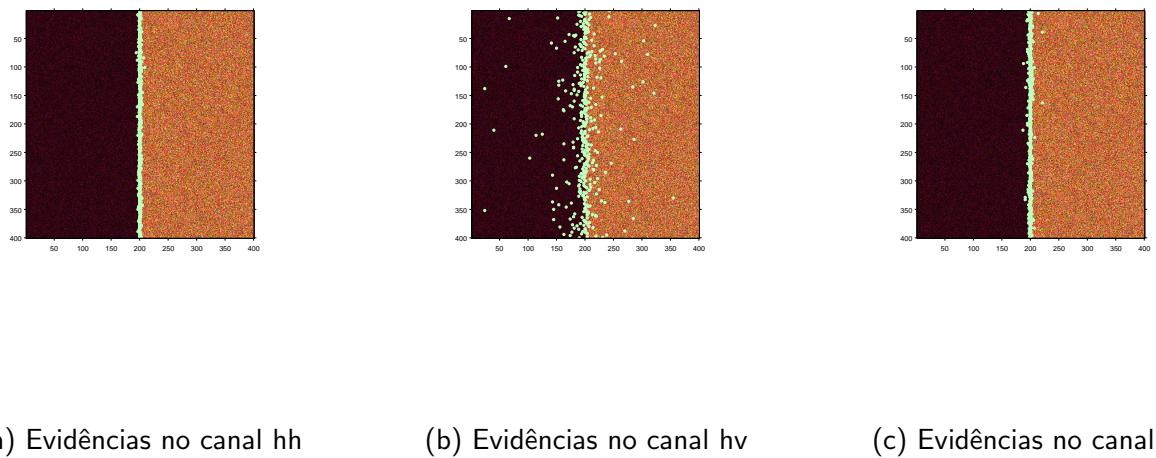


Figura 2.7: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado.

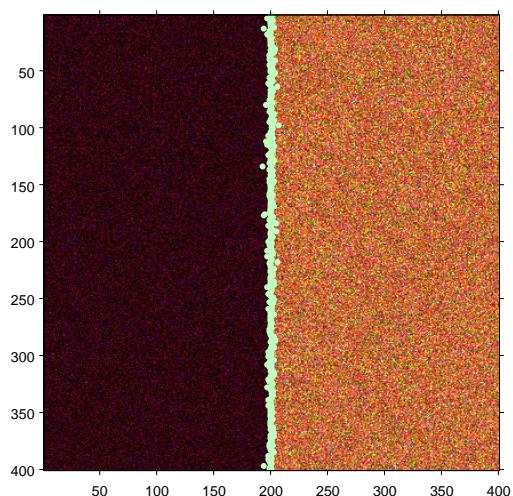


Figura 2.8: Evidências de bordas para o *span*

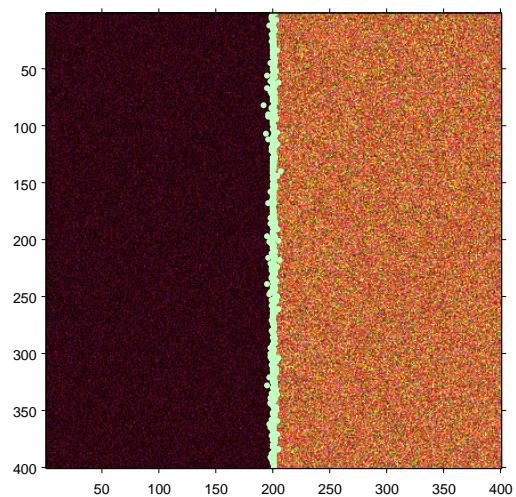


Figura 2.9: Evidências de bordas para o span (media estimada)

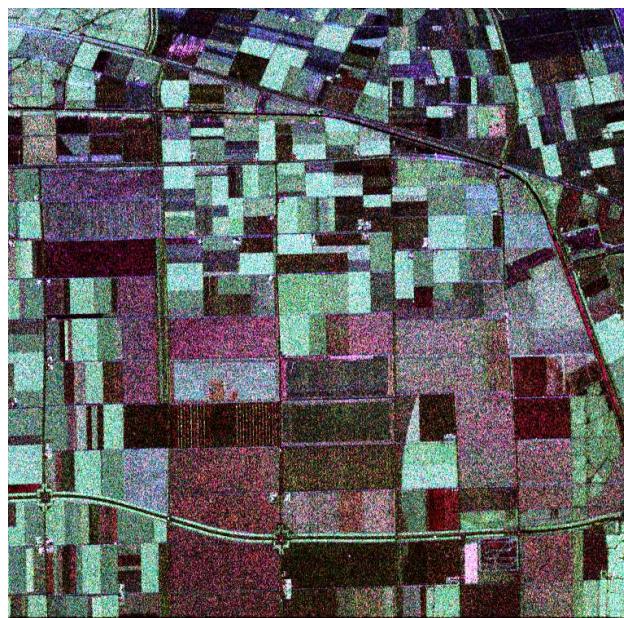


Figura 2.10: Imagem da região de Flevoland

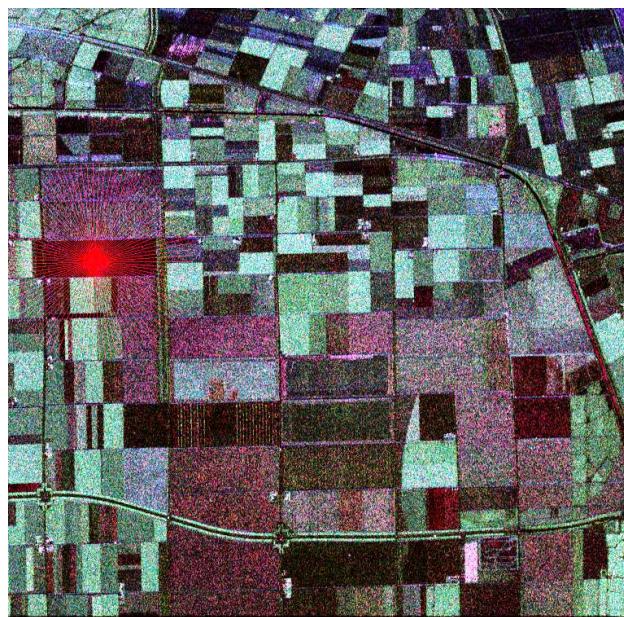
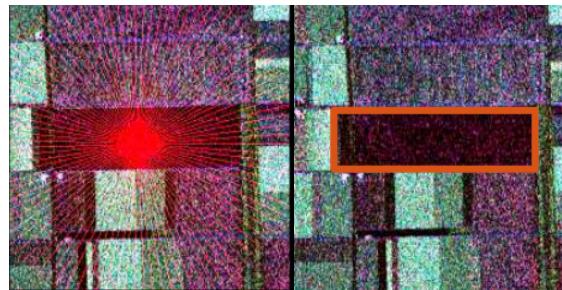


Figura 2.11: Imagem da região de Flevoland com radiais



(a) Imagem, ROI, e rádios.
(b) Ground truth

Figura 2.12: Decomposição de Pauli para a imagem, e ground truth de referência para a (ROI-I)

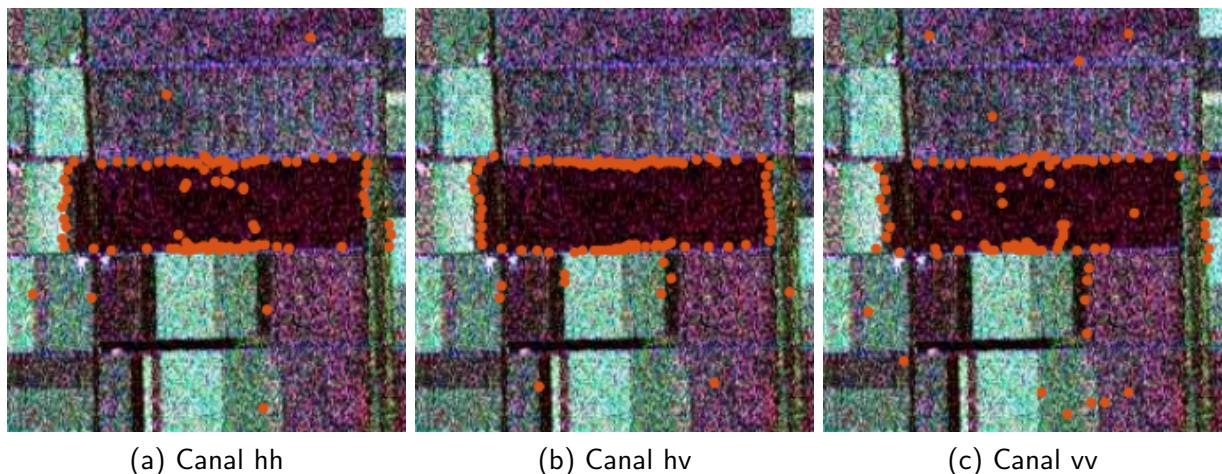


Figura 2.13: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

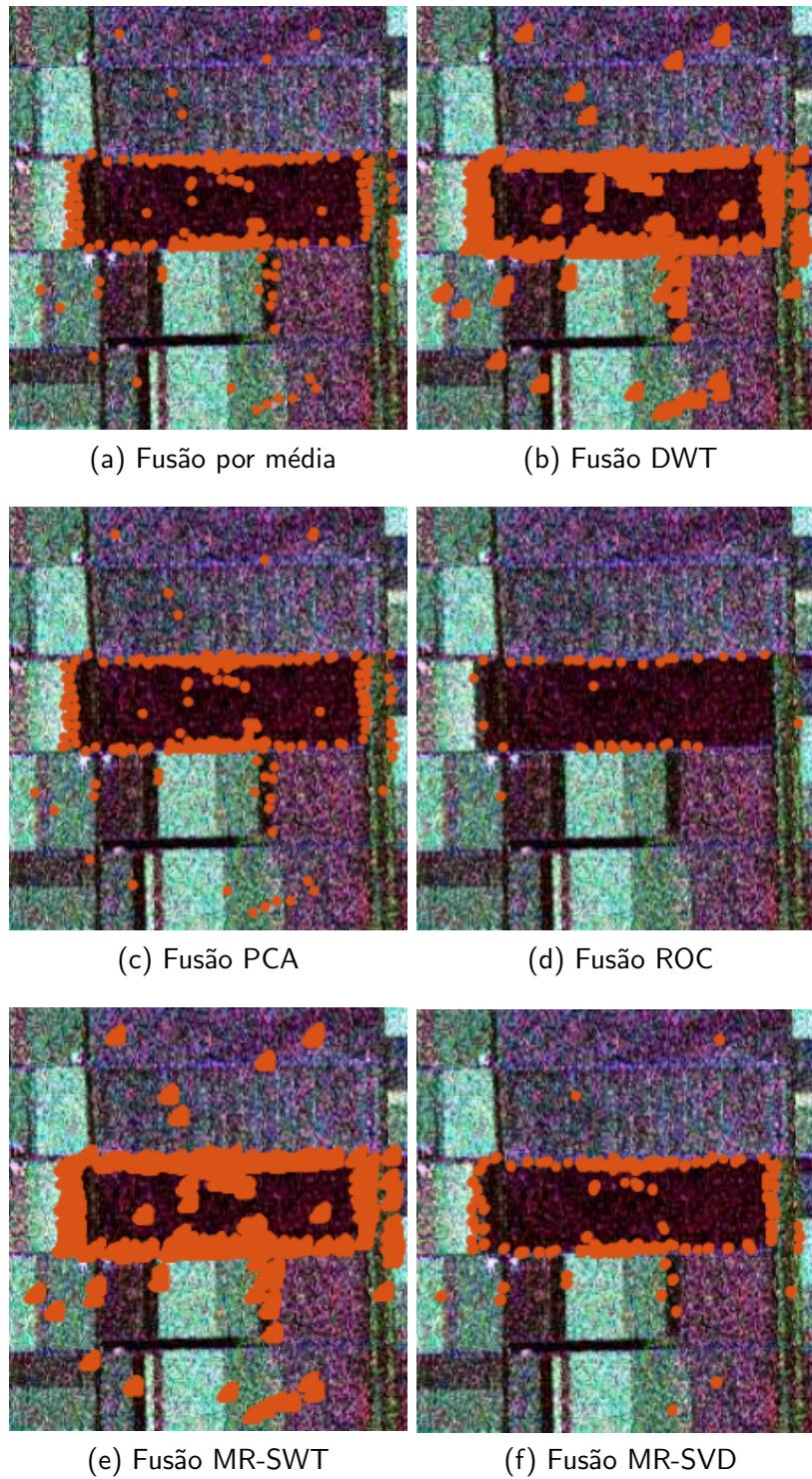


Figura 2.14: Resultados da aplicação dos seis métodos de fusão

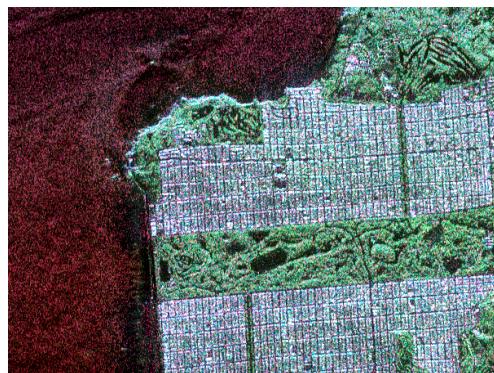


Figura 2.15: Imagem da baía de São Francisco



(a) Imagem, ROI e ra-
diais. (b) Ground Truth

Figura 2.16: Decomposição de Pauli para imagem de São Francisco, e a ground truth

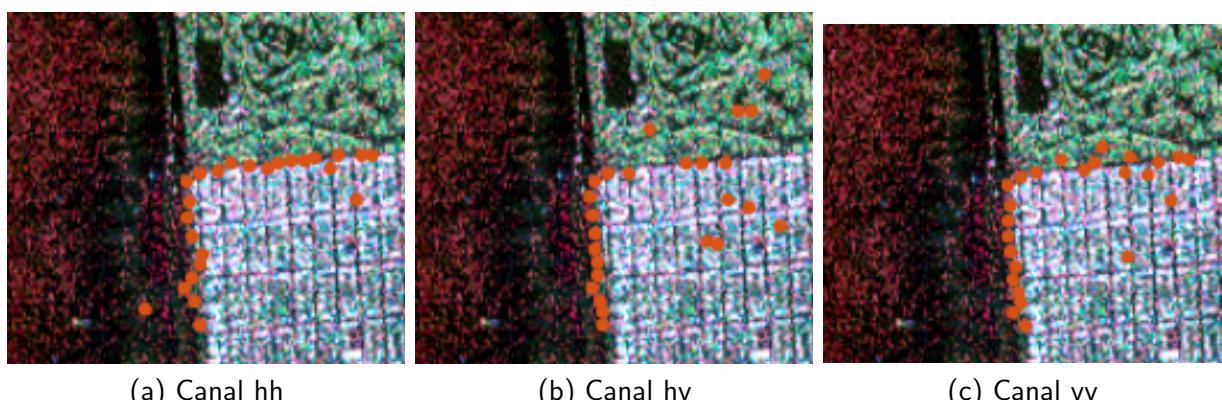


Figura 2.17: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de São Francisco

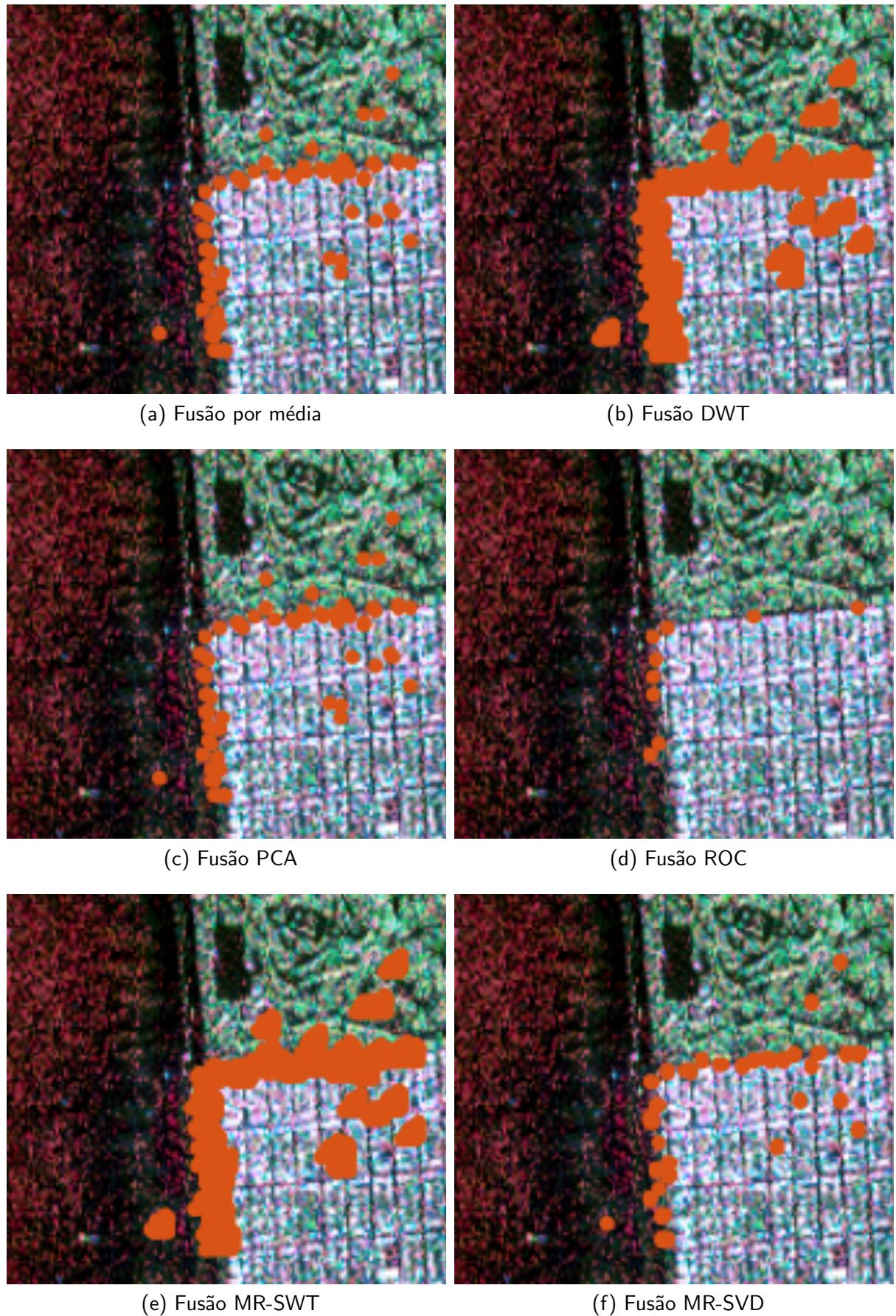
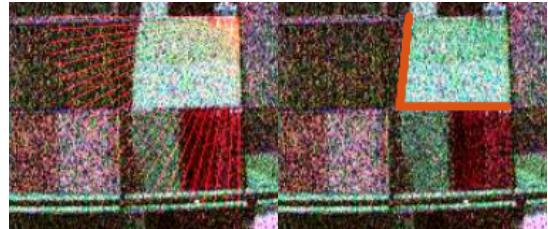


Figura 2.18: Resultado da aplicação dos seis método de fusão para a imagem de São Francisco



(a) Imagem, ROI, e (b) Ground reference radiais.

Figura 2.19: Decomposição de Pauli para a ROI-II da imagem de Flevoland, e a ground truth

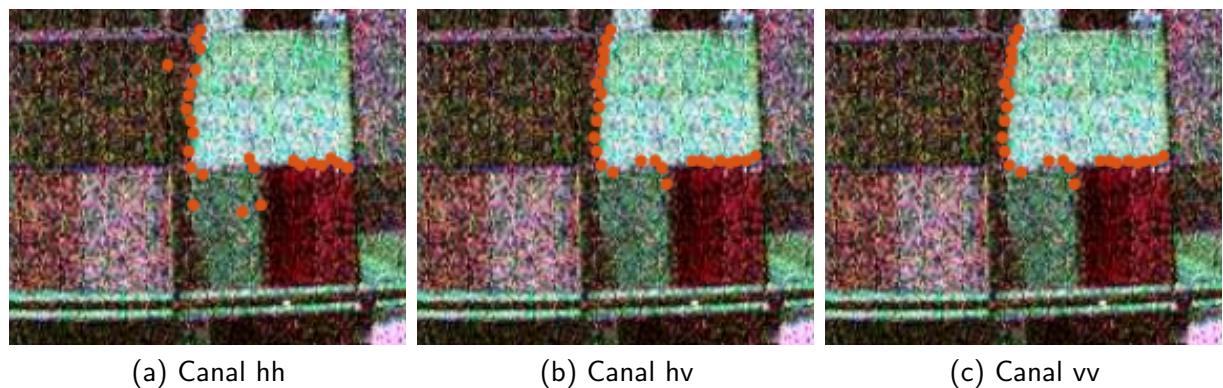


Figura 2.20: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 14 pixel

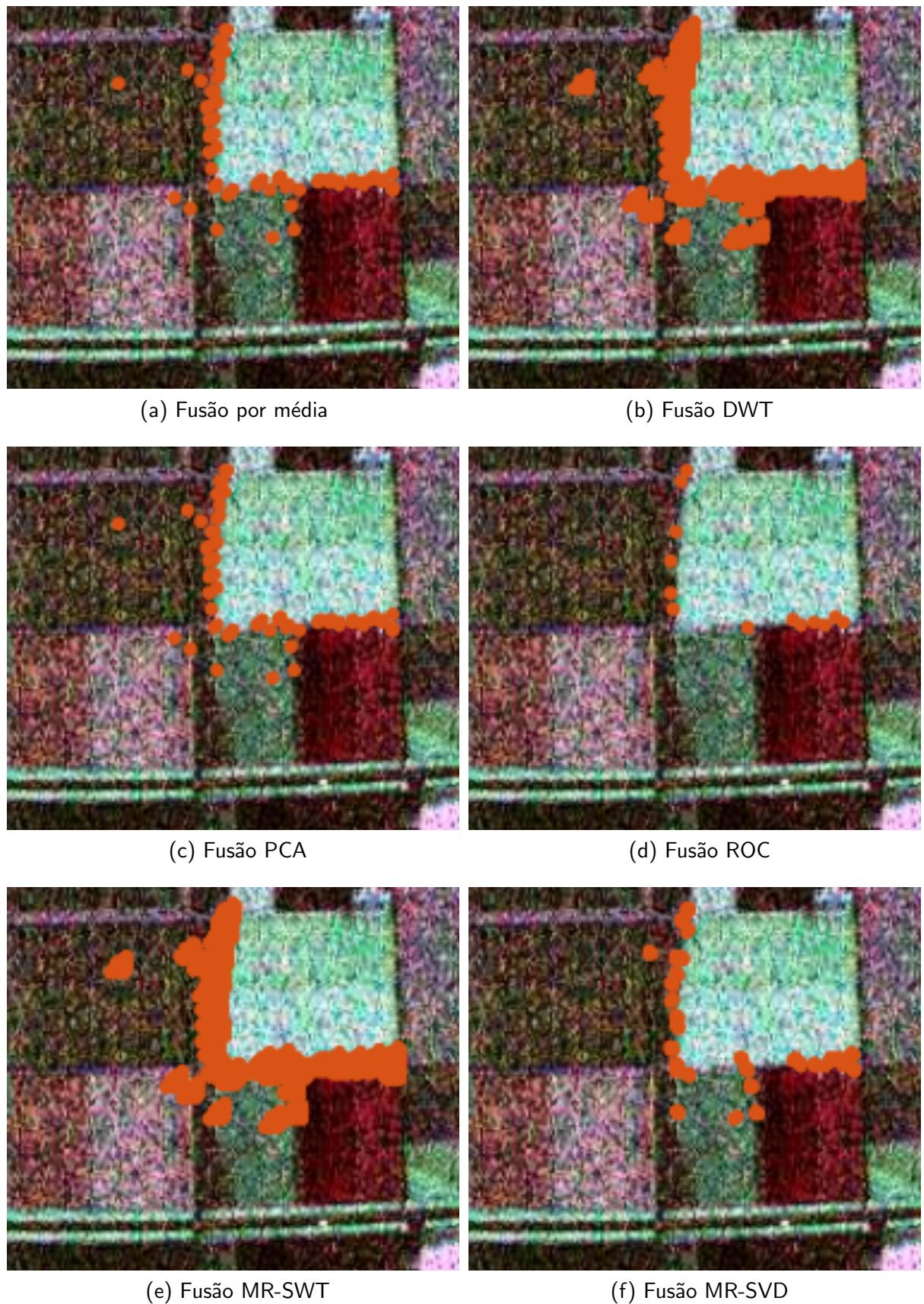


Figura 2.21: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a ROI-II de flevoland com 14 pixels de folga

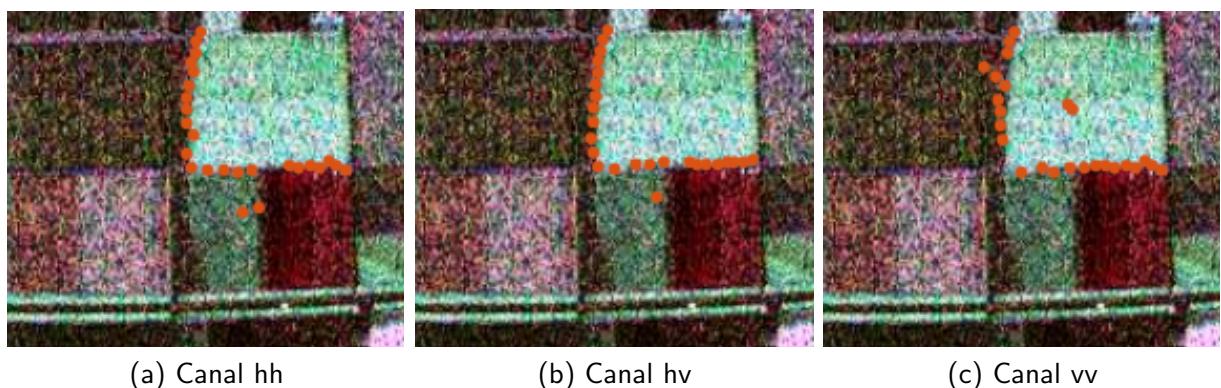


Figura 2.22: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 25 pixel

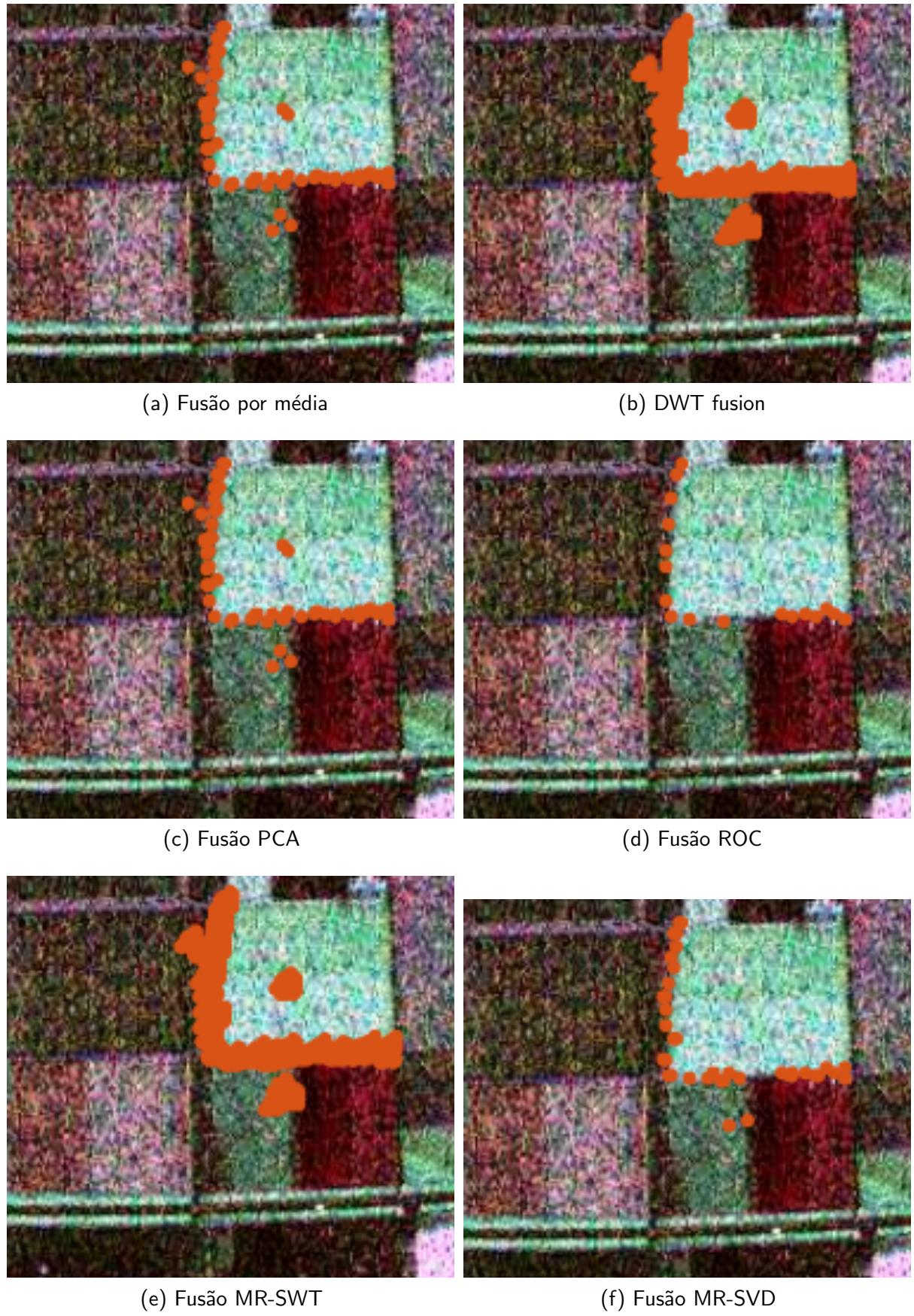


Figura 2.23: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a ROI-II de flevoland com 25 pixels de folga

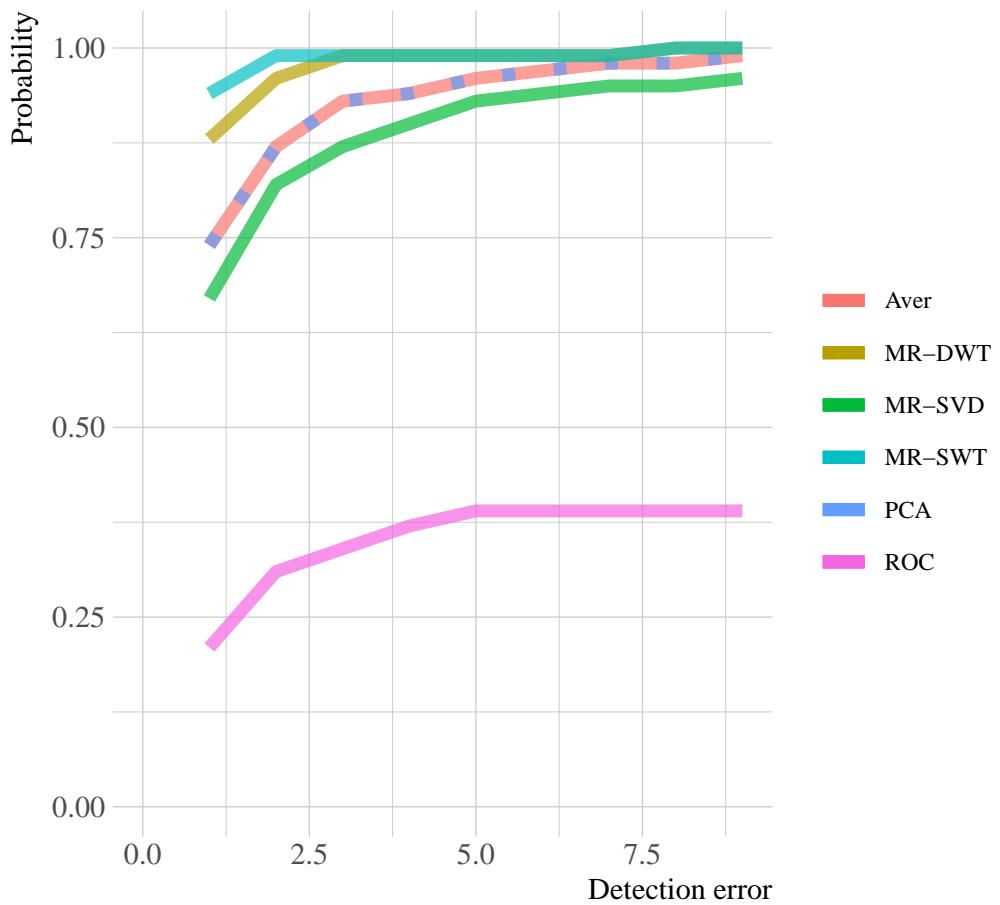


Figura 2.24: Probability of detecting in fusion methods.

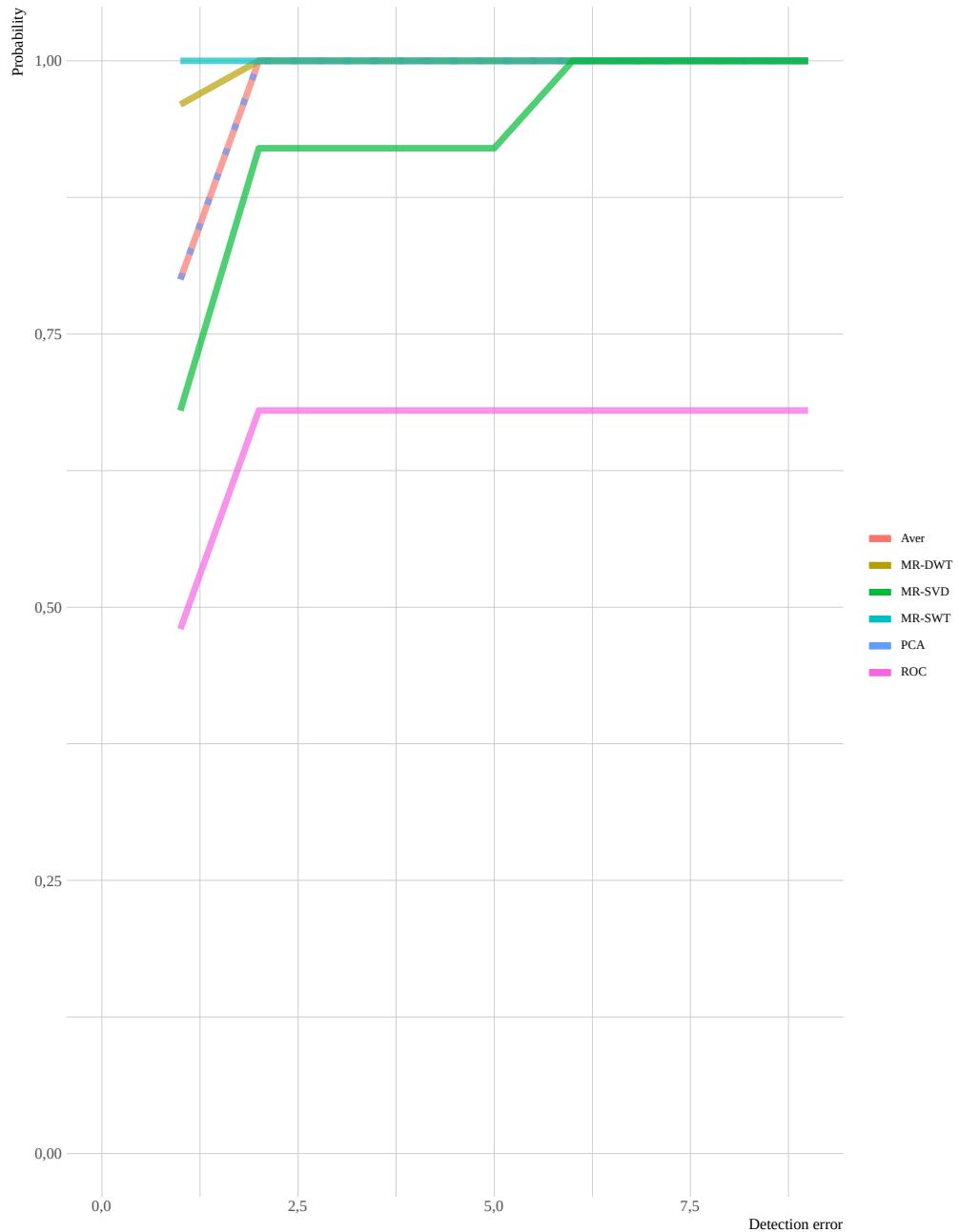


Figura 2.25: Probability of detecting in fusion methods. Região III - FLEV

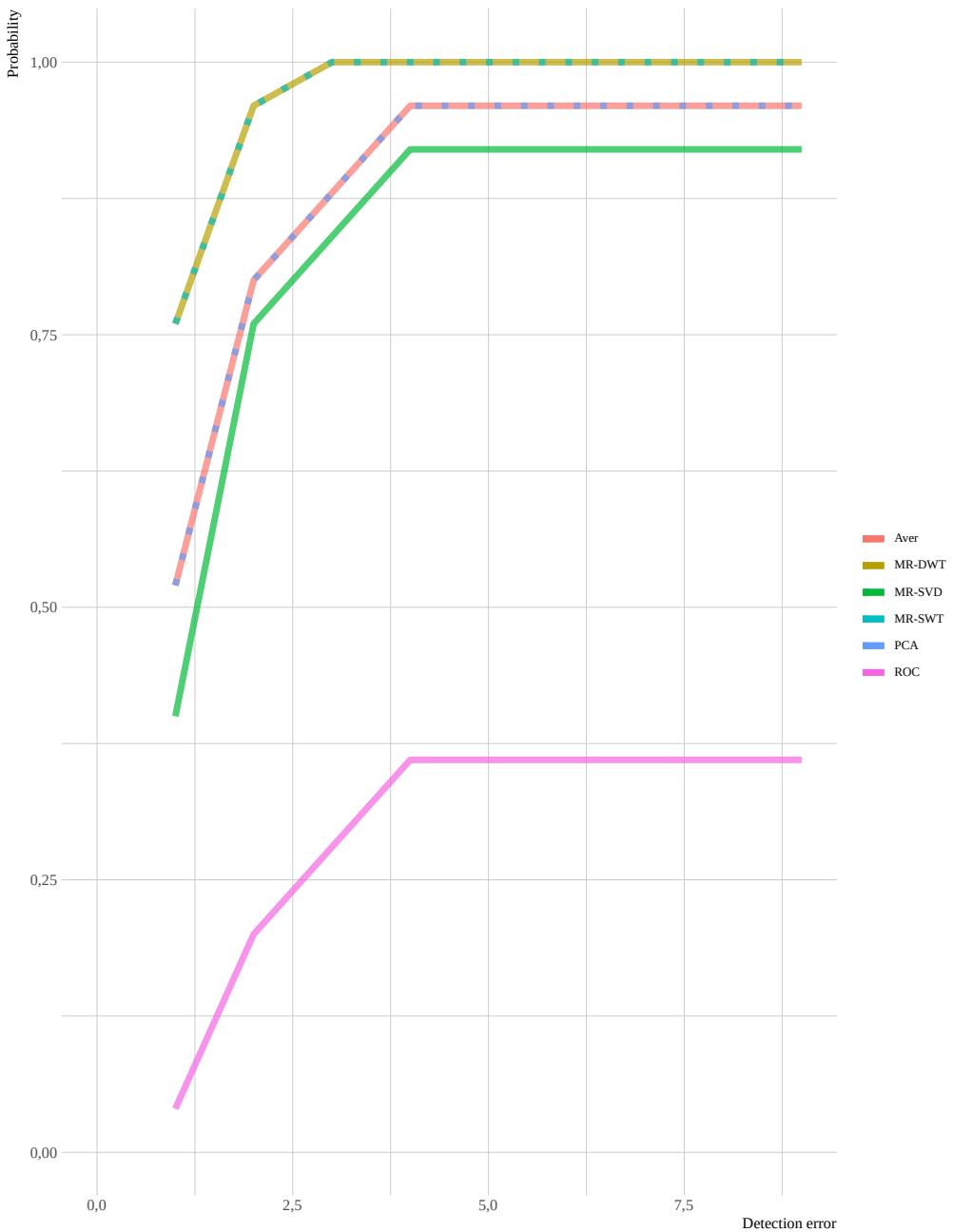


Figura 2.26: Probability of detecting in fusion methods. Região I - SF

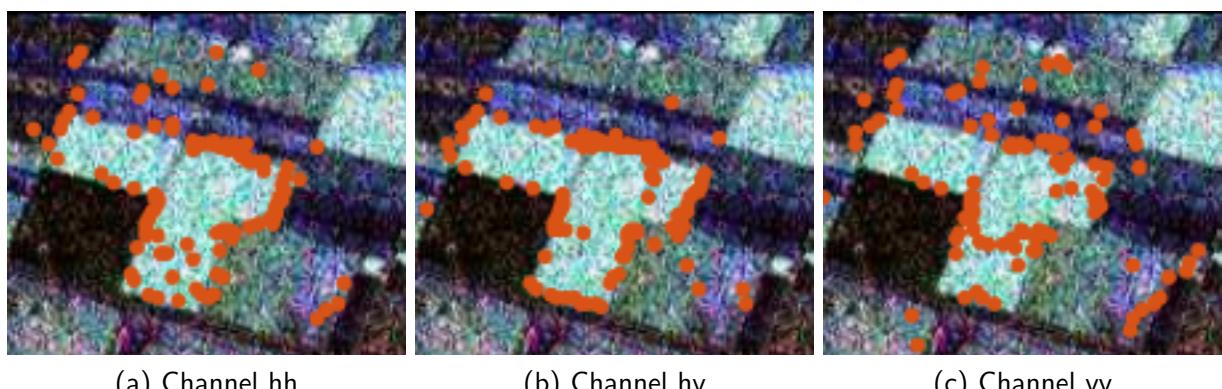
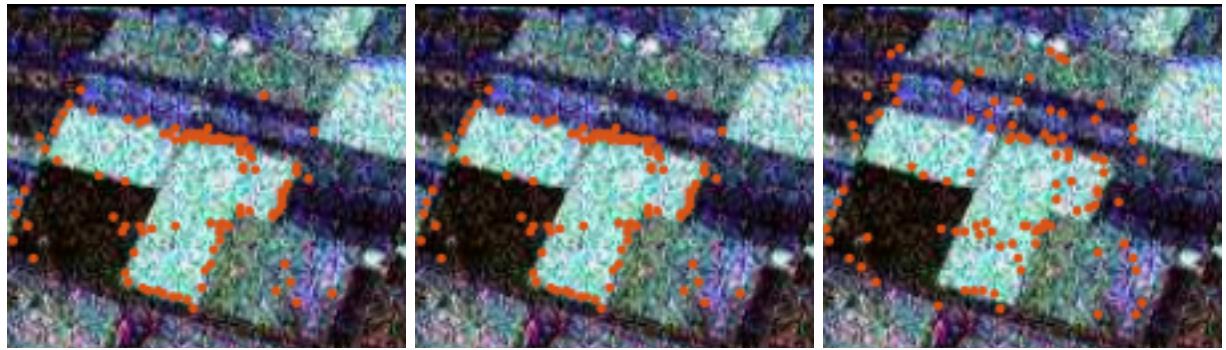
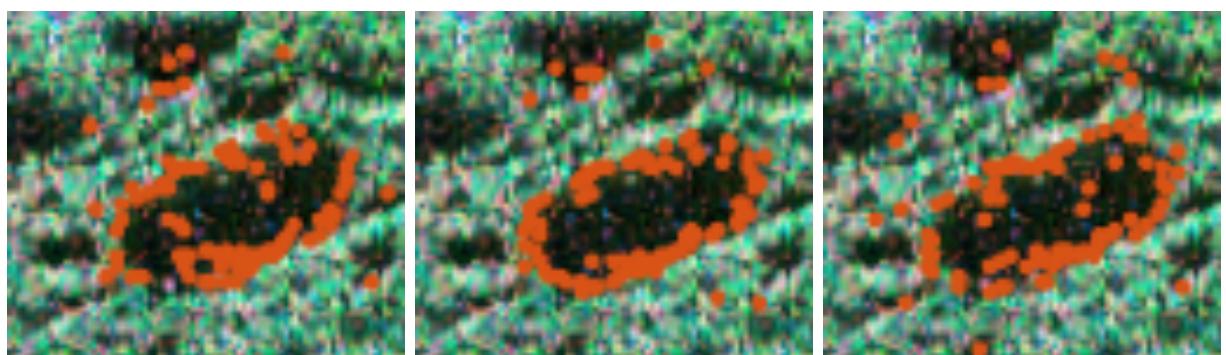


Figura 2.27: Edges evidences from the three intensity channels to ROI II - cuidado



(a) Channel hh (b) Channel hv (c) Channel vv

Figura 2.28: Edges evidences from the three intensity channels to ROI II - cuidado 2



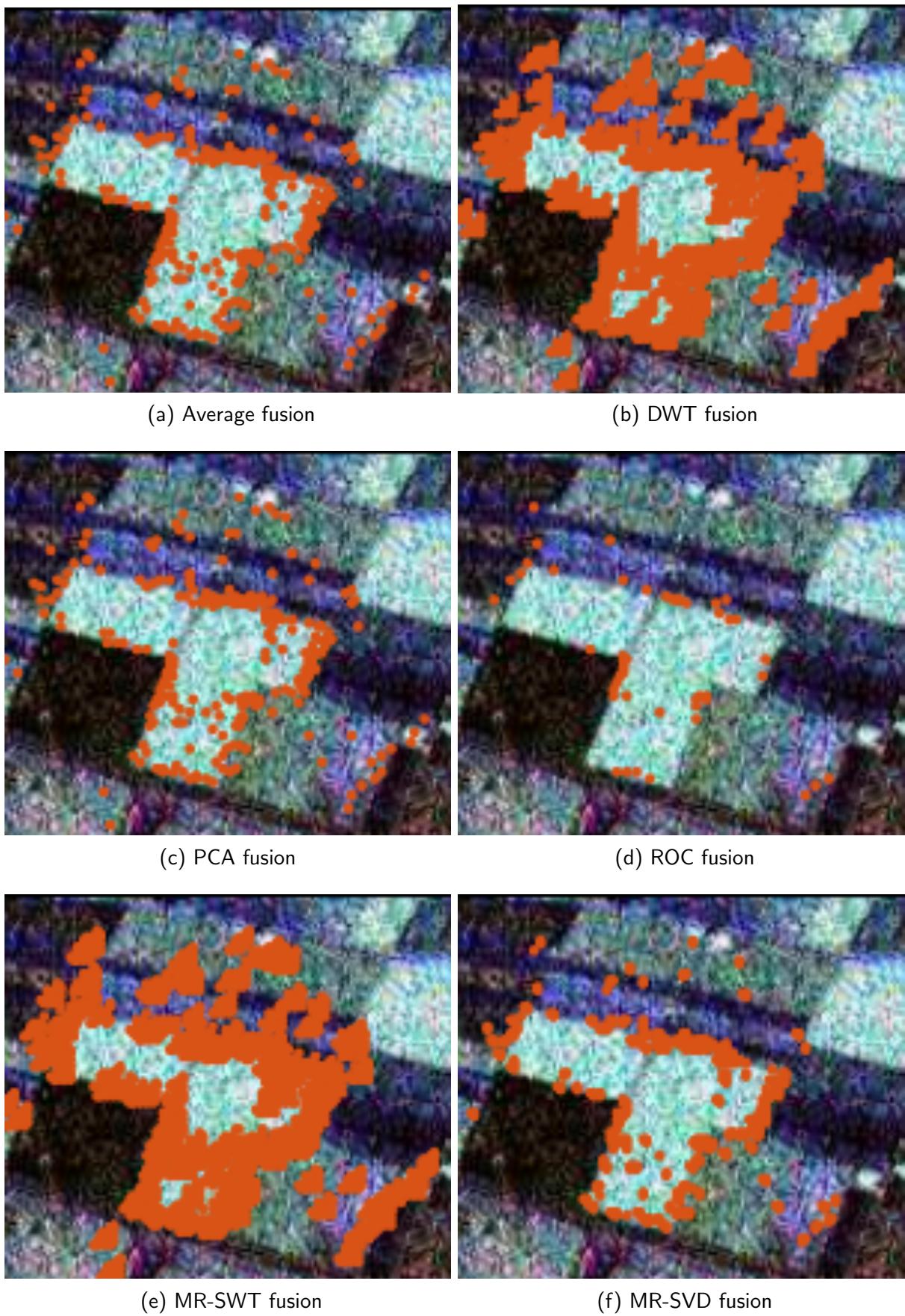


Figura 2.30: Results of applying the six fusion methods to ROI II

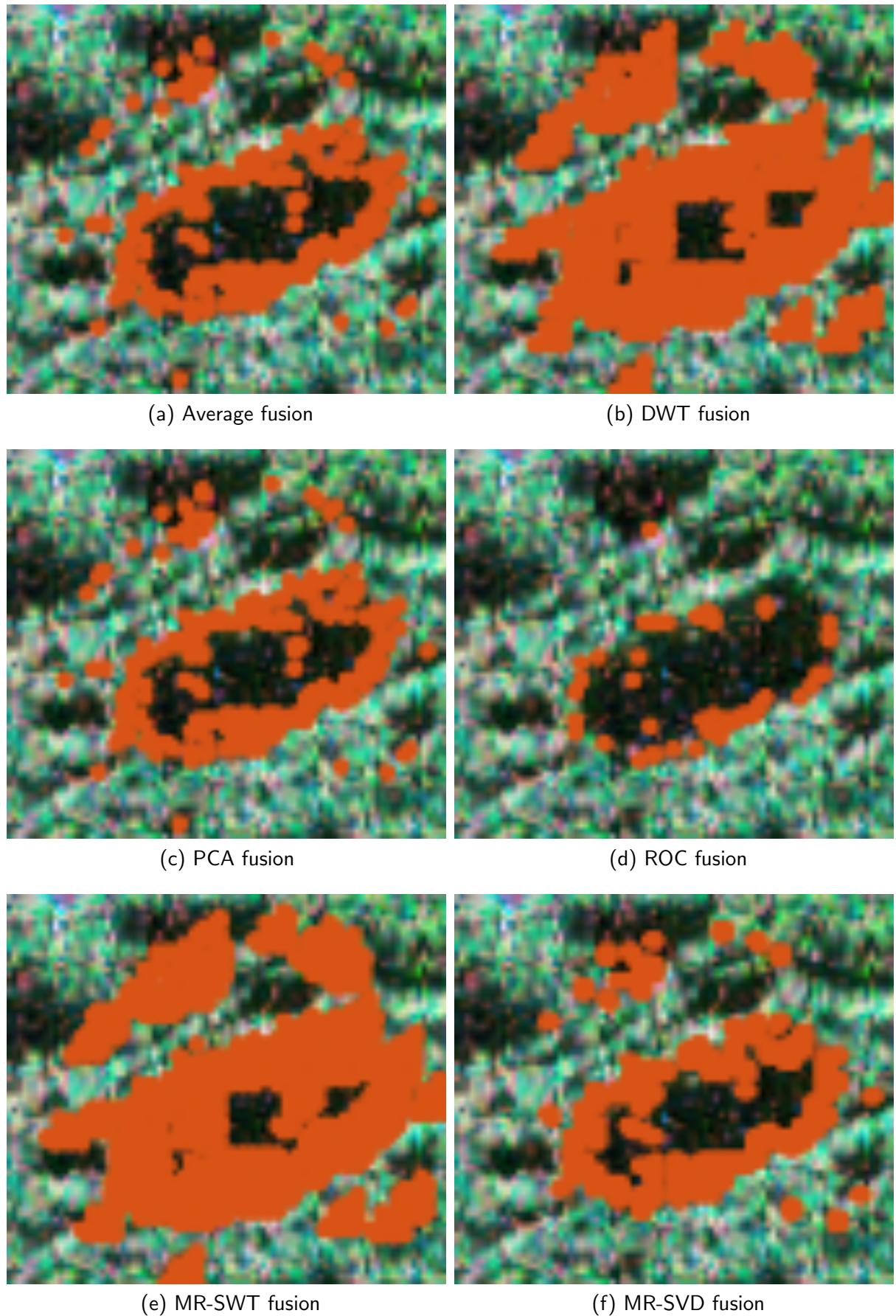


Figura 2.31: Results of applying the six fusion methods to San Francisco

Referências Bibliográficas

- Anfinsen *et al.*(2009)** Stian Normann Anfinsen, Anthony P Doulgeris e Torbjón Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(11):3795–3809. Citado na pág. 8, 13
- Feng *et al.*(2016)** Y. Feng, M. Wen, J. Zhang, F. Ji e G. Ning. Sum of arbitrarily correlated gamma random variables with unequal parameters and its application in wireless communications. Em *2016 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC)*, páginas 1–5. Citado na pág. 31
- Frery *et al.*(2010)** A. C. Frery, J. Jacobo-Berlles, J. Gambini e M. Mejail. Polarimetric SAR image segmentation with B-Splines and a new statistical model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 21:319–342. doi: 10.1007/s11045-010-0113-4. Citado na pág. 37, 38
- Frery *et al.*(2011)** Alejandro C Frery, Abraao DC Nascimento e Renato J Cintra. Information theory and image understanding: An application to polarimetric SAR imagery. *Chilean Journal of Statistics*, 2(2):81–100. Citado na pág. 14
- Gomez *et al.*(2017)** Luis Gomez, Luis Alvarez, Luis Mazorra e Alejandro C Frery. Fully PolSAR image classification using machine learning techniques and reaction-diffusion systems. *Neurocomputing*, 255:52–60. Citado na pág. 35
- Goodman(1985)** J.W. Goodman. *Statistical Optics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley. ISBN 9780471015024. URL <https://books.google.com.br/books?id=2VTwAAAAMAAJ>. Citado na pág. 8
- Goodman(1963)** N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180. doi: 10.1214/aoms/1177704251. URL <http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177704251>. Citado na pág. iii, 7, 8, 9, 12, 13, 14
- Henningsen e Toomet(2011)** Arne Henningsen e Ott Toomet. maxlik: A package for maximum likelihood estimation in R. *Computational Statistics*, 26(3):443–458. doi: 10.1007/s00180-010-0217-1. Citado na pág. 20, 22, 25, 29, 32
- Lee *et al.*(1994a)** J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango e A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028. doi: 10.1109/36.312890. Citado na pág. 12, 15, 18
- Lee *et al.*(1994b)** J. S. Lee, L. Jurkevich, P. Dewaele, P. Wambacq e A. Oosterlinck. Speckle filtering of synthetic aperture radar images: A review. *Remote Sensing Reviews*, 8(4):313–340. doi: 10.1080/02757259409532206. URL <https://doi.org/10.1080/02757259409532206>. Citado na pág. 18
- Lee e Pottier(2009)** Jong-Sen Lee e Eric Pottier. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. CRC press. Citado na pág. 3, 5

López-Martínez et al.(2005) Carlos López-Martínez, Xavier Fàbregas e Eric Pottier. Multidimensional speckle noise model. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(20): 180956. ISSN 1687-6180. doi: 10.1155/ASP.2005.3259. URL <https://doi.org/10.1155/ASP.2005.3259>. Citado na pág. 13

Nascimento et al.(2014) Abraão Nascimento, Michelle Horta, Alejandro Frery e Renato Cintra. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery. *Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(2): 648–663. Citado na pág. 35

Sarabandi(1992) K Sarabandi. Derivation of phase statistics from the mueller matrix. *Radio Science*, 27. doi: 10.1029/92RS00195. Citado na pág. 12

Xiang et al.(2013) Y. Xiang, S. Gubian, B. Suomela e J. Hoeng. Generalized Simulated Annealing for Global Optimization: The GenSA Package. *The R Journal*, 5(1):13–28. Citado na pág. 35