

Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR

Anderson Adaime de Borba

EXAME DE QUALIFICAÇÃO APRESENTADO
A
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
DA
UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa de Pós graduação em Engenharia Elétrica e Computação -
PPGEEC

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Marengoni

Coorientador: Prof. Dr. Alejandro César Frery Orgambide

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 29 de outubro de 2018

Sumário

Listas de Abreviaturas

SAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética
PolSAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética polarimétrica
p.d.f	Função densidade de probabilidade
LoG	Detector de borda usando o laplaciano da gaussiana
MMQ	Método dos quadrados mínimos
MLE	Método de estimativa de máxima verossimilhança
GenSA	Método Simulated annealing
ROI	Método Simulated annealing

Listas de Símbolos

L	Número de visadas em uma imagem PolSAR
Σ	Matriz de covariância hermitiana e definida positiva
$E[\cdot]$	Valor esperado
Γ	Função Gamma
Γ_m	Função Gamma multivariada
$W(\Gamma, L)$	Distribuição Wishart

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos gerais

Neste trabalho estudaremos as imagens de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* – SAR) e as imagens de radar polarimétrico de abertura sintética (*Polarimetric Synthetic Aperture Radar* – PolSAR). Ambas requerem modelos e algoritmos adequados para o tratamento das suas características especiais. Em particular, trabalharemos com técnicas de detecção de bordas.

No estudo de imagens PolSAR podemos citar diferentes técnicas, por exemplo, no trabalho de ? é usado modelagem eletromagnética para propor uma abordagem de detecção de bordas nas simulações de imagens PolSAR. Nos trabalhos de ???? podemos encontrar técnicas de detecção de bordas baseadas em métodos que estimam o gradiente, que funcionam usando uma janela deslizante, destacando através do cálculo do gradiente as bordas das imagens. Em ? foi proposto o método de máxima verossimilhança para detectar a presença de bordas, em uma janela pré-definida de pixels com a tarefa de encontrar bordas acuradas. O estudo de detecção de bordas, usando propriedades físicas das áreas estudadas, pode ser encontrado no trabalho de ?, as quais utilizam cadeias de Markov. Em (?) é descrita a comparação entre vários detectores de bordas que seguem a ideia deste trabalho. Técnicas baseadas nas modelagens estatísticas têm sido usadas na detecção de bordas em imagens SAR, podemos citar os trabalhos de ????.

Atualmente as pesquisas em *Deep Learning* são muito importantes na área de sensoriamento remoto, aplicações são encontradas nas referências (????). As técnicas de *Deep Learning* são usadas para segmentar ou classificar imagens, podendo auxiliar no processo de detecção de bordas.

A área de fusão de imagens também é explorada neste trabalho. Um recente e interessante artigo, cujo autores são ?, usa ideias do método *random forest* aplicado em fusão de imagens PolSAR, adicionalmente, o artigo de ? mostra outras técnicas de fusão de informação.

O presente trabalho seguirá a abordagem de modelagem estatística, principalmente as técnicas descritas em (??) usando a distribuição Wishart. Para realizar a fusão de informações temos como base as referências (??).

O objetivo deste trabalho é detectar bordas em cada polarização (canal) de uma imagem PolSAR e realizar a fusão das evidências de bordas, com a tarefa de melhorar a acurácia em relação a borda detectada, em cada polarização. A sequência de procedimentos pode ser descrita por:

- (i) em cada polarização;
- (ii) especificar manualmente ou automaticamente a região de interesse (**ROI**);
- (iii) em cada (**ROI**) calcular o centro de massa e a partir desse ponto traçar retas na direção radial de forma que garanta a existência de uma borda em cada reta;
- (iv) para todas as retas devemos analisar a variação das amostras, usando o método da máxima verossimilhança com o intuito de descobrir uma evidência de borda ou ponto de transição;

- (v) obtendo as evidências de bordas em todas as reta impostas, e repetindo o método em cada polarização, é realizado a média aritmética ou ponderada das evidências de bordas, para obter a fusão das mesmas;
- (vi) realizado a fusão das evidências de borda, teremos uma nuvem de pontos onde podemos aplicar métodos de regressão, usando para isso, o método dos quadrados mínimos para obter os resultados numéricos do presente trabalho.

Os itens (i) até (iv) tratam da detecção de borda que foram propostos nas seguintes referências bibliográficas (???), esses artigos usam a distribuição G^0 proposta por ?. Neste trabalho usaremos a distribuição Wishart como na referência (?).

No item (v) a principal referência usada para fusão de evidências foi ?, no item (vi) para o método dos quadrados mínimos foi usado a referência (?).

No presente trabalho o procedimento acima foi testado em imagens simuladas ou *Phantons*. O resultado comparativo em relação as detecções de bordas nas polarizações nos mostrou uma estratégia de detecção de borda mais acurada. Os resultados alcançados devem ser testados em imagens PolSAR reais para verificar o desempenho e acurácia.

1.2 Formação das imagens SAR

O radar de abertura sintética (SAR) é o desenvolvimento tecnológico do radar de abertura real (RAR), o qual, de maneira geral trabalha com sensores ativos que transmitem micro-ondas e depois registram os ecos recebidos. Os radares usam plataformas tanto móveis como satélites, balões, veículos aéreos tripulados ou não quanto fixas, por exemplo, radares em aeroportos. Esses radares viajam em uma rota conhecida, transmitindo micro-ondas em direção ao alvo e recebendo micro-ondas ou ecos depois da interação com o alvo.

Podemos afirmar que os radares têm fontes próprias de energia, ou seja, as micro-ondas são emitidas no próprio radar, por esse motivo são definidos como radares ativos, e adicionalmente, se possuirem uma antena para transmitir e receber os impulsos, são denominadas mono-estáticas. Importantes informações sobre radares podem ser encontradas na referência (?), seus desenvolvimentos são norteados pelos princípios definidos a seguir:

- (i) possibilidade de uma antena transmitir um certo impulso eletromagnético (micro-ondas) em uma direção precisa;
- (ii) possibilidade de detectar com grande precisão o eco, depois da interação com o alvo, é atenuando com um processo que podemos chamar de espalhamento, onde a onda encontra o material do alvo induzindo uma corrente que gera uma energia eletromagnética irradiada em todas as direções, a maior parte dessa energia irradiada distancia-se do radar causando o espalhamento, não sendo possível detectar;
- (iii) capacidade de medir o tempo entre a transmissão e a recepção do impulso eletromagnético e, consequentemente, a distância entre o alvo e a antena;
- (iv) habilidade de detectar vários alvos em grandes áreas a serem varridas.

A onda eletromagnética pode variar em comprimento e amplitude, dependendo da construção dos sensores para o radar em operação, uma característica importante dessas ondas é a capacidade de penetração no material analisado, dependendo do comprimento de onda, por exemplo, quanto maior o comprimento de onda, maior será a penetração no material analisado.

Os radares podem produzir imagens bidimensionais (2D) com resoluções distintas, dependendo do tipo de radar e da tecnologia empregada. As dimensões das imagens dependem respectivamente da resoluções nas direções de azimute e distância (*range*). A direção de azimute é a mesma direção da rota do radar sendo perpendicular à direção da distância. A resolução na direção de azimute depende do comprimento l da abertura antena de radar.

Os radares que dependem diretamente dos comprimentos l são os radares de abertura real (RAR), os quais têm uma grande restrição de uso em sensoriamento remoto, pois o comprimento da antena limita a resolução na direção de azimute, ou seja, para aumentar a resolução nesta direção, precisamos aumentar o comprimento da antena, o que pode ser inviável em satélites ou até mesmo em aviões, configurando-se em grande problema para essa área de pesquisa até os anos 50.

Nos anos 50, pesquisadores fizeram avanços significativos para resolver a limitação tecnológica e desenvolveram uma técnica apta a sintetizar o efeito de uma antena muito longa, em uma antena de tamanho real. Para esse fim utilizaram o conhecimento na área de processamentos de sinais em uma antena real para tornar possível a simulação de uma antena muito longa e, portanto, aumentar a resolução na direção do azimute. Essa descoberta é atribuída a Carl Wiley por volta de 1951.

O tipo de radar que utiliza a técnica, na qual uma antena real sintetiza uma antena longa, tornou-se conhecida como radar de abertura sintética (SAR), em 1954, Wiley registrou a patente do sistema SAR. O principal conceito físico para gerar a tecnologia dos sistemas SAR, foi o efeito Doppler aplicados aos ecos dos radares. Devido ao avanço tecnológico no início da década de 50, um sistema SAR foi operacionalizado em torno de 1958. Consequentemente esse fato impulsionou fortemente a área de pesquisa relacionada com os sistemas SAR.

Os dados provenientes do método de sintetização da antena real (SAR) são gravados de maneira única como uma faixa de posições para cada tempo avançado na direção da rota (azimute). No início do desenvolvimento dos sistemas SAR o armazenamento de dados foi um grande problema, para contorná-lo foi acoplado um sistema ótico nos radares para armazenar dados em filmes fotográficos. Atualmente devido ao desenvolvimento da eletrônica, o armazenamento de dados deixou de ser um problema nos sistemas SAR.

Nos sistemas SAR as ondas eletromagnéticas são representadas como imagens, que chamaremos de imagens SAR, geradas de forma que em cada ponto da direção azimute, o radar envia um impulso e recebe o sinal (eco), com o devido espalhamento. Esse sinal é armazenado ao longo da distância. Portanto, para cada tempo na direção do azimute geramos informações que serão armazenadas em uma linha de dados, tendo como resultado um mapeamento azimute *versus* distância da energia recebida pelo radar, durante o tempo de aquisição de dados. Essas informações são típicas de armazenamentos em matrizes com as dimensões dependente da resolução inerente do radar.

Uma imagem SAR é visualizada em tons de cinza dependendo de como o alvo espalha a onda eletromagnética, sendo assim um alvo mais rugoso dá origem a pixéis mais claros, enquanto um alvo menos rugoso dá origem a pixéis mais escuros.

Uma importante propriedade das imagens SAR é a transmissão e o recebimento de ondas eletromagnéticas em única direção, isto é, a onda pode ser transmitida e recebida tanto na direção horizontal como na vertical, configurando a polarização em uma das direções.

A generalização do processo SAR é conhecido como sistema polarimétrico SAR (PolSAR) definido como sendo a ciência de adquirir, processar e analisar o estado da polarização nas imagens de radar de abertura sintética, podemos dizer que é um sistema SAR capaz de medir mais de um estado de polarização. Em sistemas PolSAR as imagens de radares são formadas por ondas eletromagnéticas com várias combinações para as polarizações, tanto na transmissão como no recebimento das ondas, revelando uma melhor descrição do alvo em relação as imagens SAR. As imagens PolSAR têm o intuito de melhorar o entendimento do efeito do espalhamento de ondas pelos alvos levando, em conta as diferentes polarizações.

Os radares são usados de forma massiva desde os anos 40, principalmente para uso militar. Nos anos 50 houve a descoberta da tecnologia SAR, o que impulsionou um grande desenvolvimento na área levando a construção do primeiro radar de abertura sintética (SAR) comercial. O SEASAT foi o primeiro satélite orbital, operacional e comercial projetado, seu lançamento foi em junho de 1978, a tabela (??) mostra algumas características do SEASAT.

O projeto do SEASAT foi muito bem sucedido e estabeleceu definitivamente os sistemas SAR como área de pesquisa. Outros projetos de sistema SAR e PolSAR foram lançados e podem ser vistos na tabela (??).

Tabela 1.1: Características do satélite SEASAT (SAR).

Características específicas	Valores operacionais
Frequência	1.275 GHz
Altitude	780 km
Peso	2300 kg
Ângulo de inclinação	~23°
Distância <i>range</i>	100 km
Largura de banda	19 MHz
Banda - <i>L</i>	23.5 cm de comprimento de onda
Polarização	<i>HH</i> , onda emitida e recebida na direção horizontal
Resolução	25 × 25

Os símbolos *HH*, *HV* e *VV* representam as polarizações disponíveis nos radares, onde a primeira letra é a maneira como a onda é emitida e, a segunda letra é a maneira como a onda é recebida. Desta forma, quando aparece todas as combinações juntas temos um satélite com tecnologia PolSAR.

Os radares SAR e PolSAR possuem algumas características operacionais que podem ser resumidas nos seguintes itens:

- podem estar em plataformas elevadas, aeronaves tripuladas ou não, satélites orbitando a terra ou outros planetas;
- é uma técnica de produção de imagem viável e prática;
- possui alta resolução;
- sintetiza longas aberturas de antenas;
- os radares produzem imagens dia e noite;
- o clima não interfere na captação de imagens;
- os sistemas de imagem SAR operam na região de micro-ondas do espectro eletromagnético, usualmente entre a banda *P*– e a banda *K*–, a tabela (??) mostra o espectro eletromagnético usado nas imagens SAR.

As aplicações das imagens SAR e PolSAR são intensas na área militar, porém existe um espectro de aplicações amplo, principalmente na iniciativa privada. Devido à consolidação do satélite SEASAT podemos usar as imagens para o estudo de diversas áreas, como:

- sensoriamento remoto;
- topografia;
- oceanografia;
- glaciologia;
- agricultura;
- geologia;
- florestas;
- alvos fixos ou em movimento;
- monitoramento ambiental;

Tabela 1.2: Características operacionais dos satélites SAR ou PolSAR.

Satélites	SEASAT	AIRSAR	SIR-C	Almaz	ERS-2	JERS-1	RADSAT-1	RADSAT-2
Nacionalidade	EUA	EUA	Alamalha-Itália	Rússia	Europa	Japão	Canadá	Canadá
Lançamento	1978	1988	1990	1992	1995	1998	1995	2003
C. de onda (cm) (Banda)	23.5 (L)	67 (P)/23.5 (L)/5.7 (C)	23.5 (L)/5.7 (C)/3.2 (X)	10 (S)	5.7 (C)	23.5 (L)	5.6 (C)	5.6 (C)
Polarização	HH	HH/HV/VV	HH/HV/VV	HH	VV	HH	HH	HH/HV/VV
Ângulo de incidência	23	20-60	15-55	30-60	23	35	20-59	20-60
Distância (km)	100	10-17	15-90	350	100	75	50-500	10-500
Resolução (m)	25	2-8	10-60	10-30	30	18	10-100	3-100

- controle de derramamento de petróleo;
- e no auxílio de sistemas óticos.

Tabela 1.3: Espectro eletromagnético para a faixa de micro-ondas.

banda	Frequência f (Ghz)	Freq. \times C. de onda λ (cm).
P	($< 0.39, 0.39$)	0.3×100.0
L	($0.39 - 1.55$)	1.0×30.0
S	($1.55 - 3.90$)	3.0×10.0
C	($3.90 - 5.75$)	$\sim (4.0 \times 7.0)$
X	($5.75 - 10.9$)	10.0×3.0
K	($10.9 - 36.0$)	30.0×1.0
Q	($36.0 - 46.0$)	$\sim (40.0 \times 0.8)$
V	($46.0 - 56.0$)	$\sim (50.0 \times 0.6)$
W	($56.0 - > 56.0$)	100.0×0.3

Uma imagem PolSAR pode ser gerada considerando a existência de uma matriz de covariância $\Sigma_{3 \times 3}$ hermitiana, proveniente do processo de modelagem do sistema PolSAR. A matriz de covariância tem nas entradas da diagonal principal, valores reais adquiridos respectivamente nas polarizações HH , HV e VV , as outras entradas são números complexos dispostos de maneira que respeite o fato da matriz ser hermitiana. A maneira como a matriz hermitiana é distribuída pode ser analisada na tabela (??).

Tabela 1.4: Parâmetros estatísticos da matriz de variância.

Polarização	HH	HV	VV
HH	σ_{hh}	$\sigma_{hhhv} + \bar{\sigma}_{hhhv}\vec{J}$	$\sigma_{hhvv} + \bar{\sigma}_{hhvv}\vec{J}$
HV		σ_{HV}	$\sigma_{hvvv} + \bar{\sigma}_{hvvv}\vec{J}$
VV			σ_{VV}

Para gerar a imagem PolSAR é usado uma matriz tridimensional, onde as primeiras duas indexações da matriz armazenam os valores para o azimute e a distância, de acordo com a resolução do sistema PolSAR. Na terceira indexação, a qual podemos chamar de canal, é armazenado os valores aproximados da matriz de variância, fixando arbitrariamente um pixel. Os canais estão dispostos conforme tabela (??),

Tabela 1.5: Ordem de armazenamento para os canais com um pixel fixo.

HH	HV	VV	$HHHV(\text{Re})$	$HHHV(\text{Im})$	$HHVV(\text{Re})$	$HHVV(\text{Im})$	$HVVV(\text{Re})$	$HVVV(\text{Im})$
$\overline{\sigma_{hh}}$	$\overline{\sigma_{hv}}$	$\overline{\sigma_{vv}}$	$\overline{\sigma_{hhhv}}$	$\overline{\sigma_{hhvv}}$	$\overline{\sigma_{hvvv}}$	$\overline{\sigma_{hvvv}}$	$\overline{\sigma_{hvvv}}$	$\overline{\sigma_{hvvv}}$

Em imagens sintéticas podemos encontrar a aproximação $\overline{\sigma_{ij}}$, com $i, j \in \{HH, HV, VV\}$ usando o método de monte carlo com o auxílio da matriz de covariância Σ . Em imagens reais teremos que analisar $\overline{\sigma_{ij}}$, dependendo da técnica utilizada para definição dos parâmetros estatísticos nas regiões de interesse, podemos citar os artigos (?) e (?) para analisar os diferentes métodos, reforçando que a descrição do método proposto no segundo artigo será aplicado ao longo deste trabalho.

Um exemplo clássico de imagem PolSAR é da baía de São Francisco (EUA), com suas respectivas polarizações em tons de cinza, mostradas na figura (??),

A visualização usando a decomposição RBG é mostrado na figura (??), sendo a maneira clássica como é conhecida a imagem da baía de São Francisco. As figuras (??), (??) e (??) são respectivamente a decomposição RBG para cada canal HH (azul), HV (verde) e VV (vermelho) das imagens PolSAR.

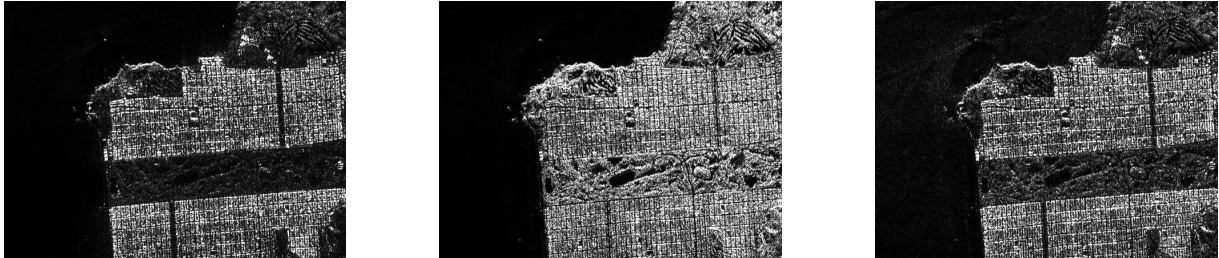


Figura 1.1: Imagem PolSAR com polarizações HH , HV e VV .



Figura 1.2: Baía de São Francisco.



Figura 1.3: Polarização HH .

Atualmente, podemos indicar tendências de aplicações de imagens SAR e PolSAR. Existe interesse em desenvolver um sistema tipo SAR, com comprimentos de ondas óticos que podem ter uma resolução de 10×10 centímetros quadrados, um exemplo é o sistema Lynx projetado pelo laboratório nacional Sandia, o qual alcança resoluções de 10 a 30 centímetros quadrados. Existe ainda o mini-SAR para uso em veículos aéreos não tripulados que focam na evolução da micro-eletrônica para aumentar a eficiência e diminuir o peso.

As imagens SAR podem ser captadas por satélites orbitando outros planetas como o projeto Magellan SAR orbitando Vênus. Outra tecnologia usada para a captação imagens SAR, chamada de interferométrica SAR (InSAR), que usa dois ou mais radares de abertura sintética para obter imagens.

Os sistemas SAR e PolSAR apresentam algumas características inerentes do processo teórico e tecnológico que poderíamos destacar como desvantagens:

- requer o conhecimento da rota do radar;
- o sistema SAR é sensível ao movimento do alvo;
- o processamento para a geração de uma imagem é complexo.

Entretanto essas desvantagens nos sistemas SAR e PolSAR não evitam as mesmas de serem largamente empregadas, tornando a área do conhecimento muito ativa, gerando um grande interesse, tanto em nível de aplicação como em pesquisa científica.

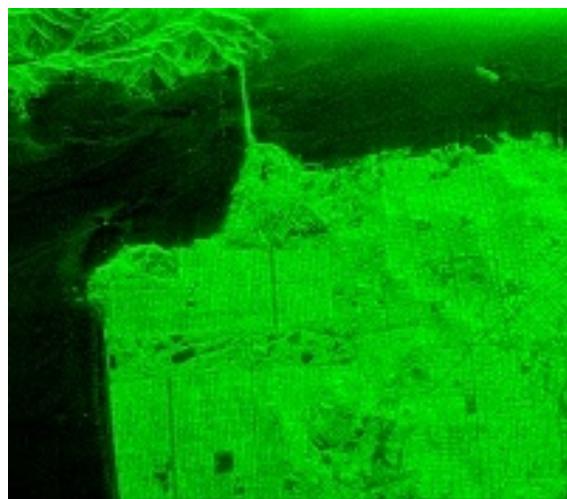


Figura 1.4: Polarização HV .

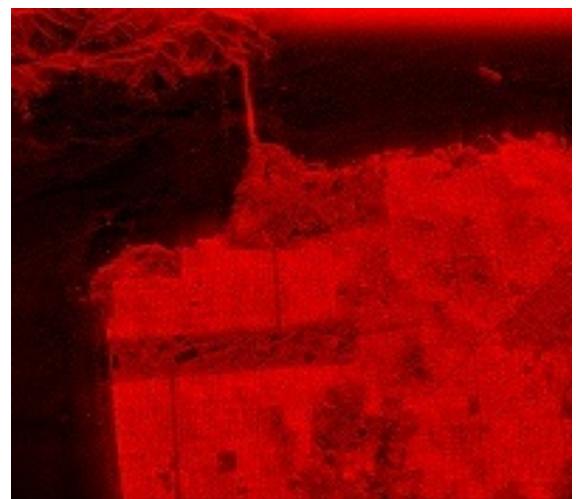


Figura 1.5: Polarização VV .

Capítulo 2

Detecção de bordas em imagens PolSAR

Na literatura encontramos uma grande oferta de métodos clássicos para detectar bordas, por exemplo Sobel, Canny, Laplaciano da gaussiana(LoG) e LoG piramidal. Os métodos clássicos de detecção de bordas são construídos assumindo que o ruído é aditivo, tornando esses métodos ineficientes para aplicação em imagens PolSAR, entretanto, nas imagens PolSAR o ruído é multiplicativo.

Na corrente seção conceitos baseados nos artigos ?? serão introduzidos e proporemos modificações para os métodos de detecção de borda em imagens PolSAR com multiplas visadas. A ideia principal é detectar o ponto de transição em uma faixa tão fina quanto possível entre duas regiões da imagem. O ponto de transição é definido como uma evidência de borda. Os ruídos nesse tipo de imagens são do tipo *speckle*, os mesmos têm natureza multiplicativa, tornando a detecção de bordas em imagens SAR uma tarefa desafiadora.

Podemos indicar que o problema de detecção de bordas, pode ser resumido em três importantes aspectos:

1. o procedimento para detecção;
2. a determinação de uma posição mais acurada da posição da borda;
3. a especificação de tamanho para uma janela (pode ser uma janela quadrada ou em uma faixa de dados).

O tamanho da janela pode influenciar em alguns aspectos como por exemplo, em uma janela pequena pode não conter informações para identificar a presença de bordas, ou em janelas maiores podem obter informações para mais de uma borda. Assim o tamanho de janela ideal é aquele que contém as informações para detecção de uma borda. Vamos assumir que há uma borda na janela fornecida pela seleção inicial, quando forem realizados os testes computacionais.

Em linhas gerais seguiremos as seguintes afirmações:

1. tentar encontrar faixas finas de dados, idealmente do tamanho de um pixel;
2. será usado o método de máxima verossimilhança;
3. de que maneira a detecção trabalha em diferentes canais da imagem PolSAR.

De uma maneira geral, a ideia se baseia em encontrar um ponto de transição em uma faixa de dados, o qual é considerado uma estimativa de posicionamento da borda, isto é, uma evidência de borda. A evidência de borda é encontrada em um processo de otimização.

As metodologias de detecção de bordas ocorrem em diversos estágios, abaixo enumeramos os estágios:

1. identificar o centroide de uma região de interesse (ROI) de maneira automática, semiautomática ou manual;

2. construir raios do centroide para fora da área de interesse;
3. coletar dados em uma vizinhança em torno dos raios;
4. detectar pontos na faixa de dados os quais fornecem evidências de mudanças de propriedades estatística, ou seja, uma transição que define uma evidência de borda;
5. definir o contorno usando um método de interpolação entre os pontos de transição, por exemplo, as B-Splines, ou o método dos quadrados mínimos **MMQ**.

Inicialmente, escolhemos uma região de interesse (ROI) **R** com centroide **C** e traçamos raios iniciando em **C** e indo até um ponto de controle **P**_i, com $i = 1, 2, \dots, S$, estes pontos de controle estão fora da região **R**. Teremos **S** raios resultantes representados por $\mathbf{s}^{(i)} = \overline{\mathbf{CP}_i}$ com ângulos $\epsilon_i = \angle(\mathbf{s}_{(i)}, \mathbf{s}_{(i+1)})$.

Os raios serão convertidos sobre pixels usando o algoritmo *Bresenham's midpoint line algorithm*, esse algoritmo fornece uma fina representação digital para os raios. Portanto, em cada raio vamos assumir que os dados seguem uma distribuição complexa Wishart com sua respectiva função de distribuição dada por (??) e denotada por $W(\Sigma, L)$.

A faixa de dados coletada no i -ésimo raio $\mathbf{s}^{(i)}$, com i variando em $i = 1, 2, \dots, S$, contém $N^{(i)}$ pixels. Para cada pixel k em uma dada faixa i , a mesma pode ser descrita pelo resultado da matriz $Z_k^{(i)}$ sendo esta uma distribuição de Wishart, portanto podemos representar cada pixel como uma distribuição,

$$\begin{cases} Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_A^{(i)}, L_A^{(i)}), & \text{para } k = 1, \dots, j^{(i)}, \\ Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_B^{(i)}, L_B^{(i)}), & \text{para } k = j^{(i)} + 1, \dots, N^{(i)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Podemos definir cada faixa composta de dois tipos de amostras, e, cada tipo obedece uma lei de Wishart complexa com diferentes parâmetros. Vamos assumir que o número de visadas é constante para todas as faixas. A ideia principal é encontrar uma evidência de borda $j^{(i)}$ em cada faixa, ao longo do raio $\mathbf{s}^{(i)}$, a evidência de borda ou ponto de transição representa um pixel de transição entre as duas amostras. O modelo proposto em (??) assume que existir uma transição ocorrendo ao longo da faixa $\mathbf{s}^{(i)}$. Sem perda de generalidade na continuidade do trabalho será omitido o índice (i) focando nossa análise em uma única faixa.

2.1 Estimativa por Máxima verossimilhança (MLE)

O conceito de verossimilhança é importante em estatística, pois descreve de maneira precisa as informações sobre os parâmetros do modelo estatístico que representa os dados observados. De maneira geral, a estimativa por máxima verossimilhança (**MLE**) é um método que, tendo um conjunto de dados e um modelo estatístico, estima os valores dos parâmetros do modelo estatísticos com intuito de maximizar uma função de probabilidade dos dados.

2.2 Função de verossimilhança

Suponha $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade $f(\mathbf{x}, \theta)$ com parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^T$ no espaço dos parâmetros Θ . Definimos a **função de verossimilhança** cuja amostra é

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad (2.2)$$

e a função logarítmica de verossimilhança a qual podemos chamar de **função de log-verossimilhança** é a soma

$$l(\theta; \mathbf{X}) = \ln(L(\theta; \mathbf{X})) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \theta)). \quad (2.3)$$

Podemos definir o método da **estimativa de máxima verossimilhança (MLE)** de θ como sendo o vetor $\hat{\theta}$ tal que $L(\hat{\theta}; \mathbf{x}) \geq L(\theta; \mathbf{x})$ para todo θ no espaço dos parâmetros Θ . De maneira simplificada a **estimativa de máxima verossimilhança** pode ser escrita por

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

ou de maneira similar

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta; \mathbf{x}). \quad (2.5)$$

2.3 Estimativa de máxima verossimilhança aplicada a distribuição Wishart

Nesta seção vamos usar o método de máxima verossimilhança aplicado na distribuição Wishart. Suponha $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_N)^T$ um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade (??) com parâmetros $\Sigma = \{\Sigma_A, \Sigma_B\}$ e L .

A **função de verossimilhança** da amostra descrita por (??) é dada pela equação produtório das funções de densidade respectivamente associadas a cada amostra

$$L(j) = \prod_{k=1}^j f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) \prod_{k=j+1}^N f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L), \quad (2.6)$$

onde \mathbf{Z}'_k é uma possível aproximação da matriz randômica descrita em (??).

Usando a equação (??) e propriedades de logaritmos natural teremos para cada termo do produtório (??) uma **função de log-verossimilhança**. Assim, encontramos uma função dependente de j

$$l(j) = \ln L(j) = \sum_{k=1}^j \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) + \sum_{k=j+1}^N \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L). \quad (2.7)$$

Nesse momento, podemos realizar manipulações algébricas na função distribuição em cada termo do somatório conforme (??) e substituir nas duas parcelas da equação (??) levando em consideração que as duas amostras são diferentes, desta forma

$$\begin{aligned} l(j) &= \sum_{k=1}^j \left[mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_A|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \left[mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_B|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= \sum_{k=1}^N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - \sum_{k=1}^j \left[L \ln(|\Sigma_A|) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[(L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) \right] - \sum_{k=j+1}^N \left[L \ln(|\Sigma_B|) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[(N-j) \ln(|\Sigma_B|) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\ &+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right]. \end{aligned}$$

A matriz Σ pode ser encontrada usando o estimador de máxima verossimilhança denotado por $\hat{\Sigma}$ de acordo com a referência (?). A equação (??) representa duas estimativas para a matriz de covariância Σ que dependem da posição j

$$\widehat{\Sigma}_I(j) = \begin{cases} j^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}_k & \text{se } I = A, \\ (N-j)^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}_k & \text{se } I = B. \end{cases} \quad (2.8)$$

Usando a equação (??) podemos substituir na equação acima e continuar a manipulação

algébrica

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\sum_{k=j+1}^N \Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\Sigma_A^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\Sigma_B^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L[mj + (N-j)m], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - LN m, \\
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|)], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln \left(|\widehat{\Sigma}_A(j)| \right) + (N-j) \ln \left(|\widehat{\Sigma}_B(j)| \right) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln \left(|\mathbf{Z}'_k| \right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

O estimador de máxima verossimilhança \widehat{j}_{ML} é uma evidência de borda por representar uma aproximação da transição de região e pode ser calculado pelo método de maximização

$$\widehat{j}_{ML} = \arg \max_j l(j). \tag{2.10}$$

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Modelagem estatística para dados PolSAR

Os sistemas SAR totalmente polarimétricos transmitem pulsos de micro-ondas polarizados ortogonalmente e medem componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel, a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem no sistema SAR a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikd}}{d} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix},$$

onde k denota o número de onda, i é um número complexo e d é a distância entre o radar e o alvo. No campo eletromagnético com componentes E_i^j , o índice subscrito denota polarização horizontal (h) ou vertical (v), e o índice sobreescrito indica a onda recebida (r) ou transmitida (t).

A matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde as entradas da matriz $S_{i,j}$ são os coeficientes de espalhamento complexo, tal que os índices i e j são associados ao recebimento e a transmissão das ondas, por exemplo, o coeficiente de espalhamento S_{hv} está associado a onda transmitida na direção vertical (v) e recebida na direção horizontal (h).

Definindo a diagonal principal da matriz de espalhamento por co-polarização pois relaciona a polarização das ondas transmitidas e recebidas nas mesmas direções, e a os elementos da diagonal secundária da matriz de espalhamento por polarização cruzada relacionando os estados de polarizações ortogonais.

A matriz \mathbf{S} depende da definição do sistema de coordenadas, se a antena transmissora e receptora de sinal estão localizadas na mesma posição consideramos as medidas mono estáticas e consideramos o sistema de coordenada **BSA** - /Back Scattering Alignment, desta forma o sistema de coordenadas da transmissão e recepção de sinal são coincidentes.

A potência total espalhada no caso de um sistema de radar polarimétrico é o chamado *span*, sendo definido no caso mais geral como,

$$\text{Span}(\mathbf{S}) = \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2, \quad (3.2)$$

onde o operador $\text{tr}(\cdot)$ é o traço de uma matriz.

3.1.1 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_4) e matriz de covariância lexicográfica (C_4)

A matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser representada pela construção do vetor,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} [\text{tr}(S\Psi_1) \quad \text{tr}(S\Psi_2) \quad \text{tr}(S\Psi_3) \quad \text{tr}(S\Psi_4)]^T, \quad (3.3)$$

onde $\{\Psi_i\}_{i=1}^4$ é uma base para o espaço das matrizes hermitianas 2×2 .

Diferentes bases para o mesmo espaço matricial podem ser definidas, no presente trabalho serão consideradas duas bases chamadas respectivamente de base de Pauli e base lexicográfica, a base de Pauli é definida por,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.4)$$

e a base lexicográfica é definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.5)$$

Usando as bases (??), (??) e a definição do vetor (??) representamos a matriz de espalhamento pelo vetor característico de Pauli 4-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{hh} + S_{vv} \quad S_{hh} - S_{vv} \quad S_{hv} + S_{vh} \quad i(S_{hv} - S_{vh})]^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (3.6)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 4-D

$$\boldsymbol{\Omega} = [S_{hh} \quad S_{hv} \quad S_{vh} \quad S_{vv}]^T = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_4] \quad (3.7)$$

A matriz de espalhamento pode ser relacionada com os vetores (??) e (??) da seguinte maneira,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_3 - ik_4 \\ k_3 + ik_4 & k_1 - k_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (??) e (??) servem para manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 4.

Podemos assim garantir que a invariância da potência total

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(SS^H) \\ &= \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \boldsymbol{\Omega}^H \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A transformação linear unitária $U_{4(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação SU(4) para designar a transformação unitária

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \\ i(S_{hv} - S_{vh}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

desta maneira definimos a matriz unitária,

$$U_{4(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para o caso biestático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1\bar{k}_2 & k_1\bar{k}_3 & k_1\bar{k}_4 \\ k_2\bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2\bar{k}_3 & k_2\bar{k}_4 \\ k_3\bar{k}_1 & k_3\bar{k}_2 & |k_3|^2 & k_3\bar{k}_4 \\ k_4\bar{k}_1 & k_4\bar{k}_2 & k_4\bar{k}_3 & |k_4|^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_4 = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1\bar{\Omega}_2 & \Omega_1\bar{\Omega}_3 & \Omega_1\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_2\bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2\bar{\Omega}_3 & \omega_2\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_3\bar{\Omega}_1 & \Omega_3\bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 & \Omega_3\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_4\bar{\Omega}_1 & \Omega_4\bar{\Omega}_2 & \Omega_4\bar{\Omega}_3 & |\Omega_4|^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_4 &= \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega})^H \\ &= \mathbf{U}_4\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^H\mathbf{U}_4^H \\ &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^H = \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \\ \mathbf{T}_4 &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr}(\mathbf{T}_4) = \text{tr}(\mathbf{C}_4) = \text{Span}(\mathbf{S}). \quad (3.15)$$

3.1.2 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_3) e matriz de covariância lexicográfica (C_3)

Podemos entender as interações da ondas eletromagnéticas em alvos naturais sob a ótica do teorema da reciprocidade que considera o meio reciproco, de uma maneira geral as propriedades de transmissão e recebimento de uma antena são idênticos. Então podemos definir a igualdade dos termos complexos (polarização cruzada) $S_{hv} = S_{vh}$. Veja ?.

O entendimento para extrair informação da matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser alcançado com a construção de um sistema de vetores. A matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser representada pela construção do vetor,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} [\text{tr}(S\Psi_1) \quad \text{tr}(S\Psi_2) \quad \text{tr}(S\Psi_3)]^T, \quad (3.16)$$

onde $\{\Psi_i\}_{i=1}^3$ é uma base para o espaço das matrizes hermitianas 2×2 .

Neste trabalho serão consideradas duas bases para os espaço das matrizes nomeadas como base de Pauli e base lexicográfica.

A base de Pauli pode ser definida como,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.17)$$

A base lexicográfica pode ser definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.18)$$

Usando as bases (??), (??) e a equação (??) geramos os seguintes vetores de espalhamento que pode ser representada pelo vetor característico de Pauli 3-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} & S_{hh} - S_{vv} & 2S_{hv} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1 \ k_2 \ k_3], \quad (3.19)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 3-D

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]. \quad (3.20)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (??) e (??) servem para manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 3.

Podemos assim garantir que a invariância da potencia total,

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(SS^H) \\ &= \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \boldsymbol{\Omega}^H \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

A transformação linear unitária $U_{3(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação SU(3) para designar a transformação unitária.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2S_{hv} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

desta maneira definimos a matriz unitária,

$$U_{3(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Para o caso mono estático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1\bar{k}_2 & k_1\bar{k}_3 \\ k_2\bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2\bar{k}_3 \\ k_3\bar{k}_1 & k_3\bar{k}_2 & |k_3|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_3 = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1\bar{\Omega}_2 & \Omega_1\bar{\Omega}_3 \\ \Omega_2\bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2\bar{\Omega}_3 \\ \Omega_3\bar{\Omega}_1 & \Omega_3\bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega})^H \\ &= \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^H \mathbf{U}_3^H \\ &= \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^H = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1}, \quad (3.26)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr}(\mathbf{T}_3) = \text{tr}(\mathbf{C}_3) = \text{Span}(\mathbf{S}). \quad (3.27)$$

Podemos concluir, se

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \sqrt{2}S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

a potência total espalhada no caso de um sistema de radar polarimétrico em meio recíproco pode ser definido por

$$\text{Span} = \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2. \quad (3.29)$$

3.2 Estatística do Ruido *Speckle*

O ruído *speckle* causa uma variação de intensidade pixel a pixel imprimindo um aspecto granular nas imagens SAR / PolSAR.

O *speckle* dificulta a interpretação e analise das imagens reduzindo a efetividade da segmentação, classificação, ou detecção de mudanças de características das imagens SAR / PolSAR. O entendimento do comportamento estatístico do *speckle* é essencial para extrair boas informações das imagens e propor algoritmos efetivos para tratar o *speckle*. Assim, podemos propor tarefas de criação de filtros para as imagens, estimativas de parâmetros geofísicos, classificação e segmentação de regiões, detectar bordas, entre outras.

? realizaram um estudo sistemático do speckle com o objetivo de entender os seus efeitos nas imagens SAR e PolSAR, o estudo usou os dados com simples visada ou com múltiplas visadas.

No presente trabalho usaremos as características do ruído speckle para auxiliar na detecção de borda, em oposição a trabalhos que tentam mitigar o efeito do *speckle*.

3.2.1 Formação do speckle

A formação do speckle surge quando o radar ilumina uma superfície rugosa com escala do comprimento de onda do radar, o sinal de retorno consiste em ondas refletidas de muitos elementos de espalhamentos.

Os elementos de espalhamento têm geometrias complexas e distribuições aleatórias, tornando a modelagem estatística uma tarefa indispensável e desafiadora. Podemos considerar três tipos de processos de espalhamento da onda em alvos (elementos de espalhamento). A dispersão de superfície, a dispersão de volume e o espalhamento de volume-superfície. O primeiro é o espalhamento que acontece quando a onda eletromagnética atravessa uma mudança de meio de propagação. Segundo, consiste no espalhamento que acontece na profundidade de um meio, por exemplo, o espalhamento no interior de uma floresta. E por último, o espalhamento volume-superfície, que consiste em a onda atingir outra troca de meio de propagação, por exemplo o solo de uma floresta.

As distâncias entre os elementos de espalhamento e o recebimento no radar varia devido a natureza randômica da disposição desse elemento. A onda recebida de cada elemento espalhador embora coerente em frequência não são coerentes em fase. O sinal é forte se as ondas são construtivas, ou seja em fase, e fraco se as ondas não estão em fase.

Podemos escrever um sinal complexo da seguinte forma.

$$\sum_{i=1}^M (x_i + jy_i) = \sum_{i=1}^M x_i + j \sum_{i=1}^M y_i = x + jy = r \exp(j\theta), \quad (3.30)$$

onde, $x_i + jy_i$ é o retorno do espalhamento para cada elemento i , $x + jy$ é o retorno dos M espalhadores somados, e $r \exp(j\theta)$ é a decomposição de Euler para o número complexo $x + jy$.

3.2.2 Modelo de Rayleigh para o *speckle*

Podemos determinar as seguintes condições para a modelagem,

- 1) um número grande de espalhadores na resolução de célula para um meio homogêneo,
- 2) a distância de alcance é muito maior que o comprimento de onda do radar,
- 3) A superfície tem rugosidade na escala do comprimento de onda de um radar.

O vetor soma (??) de ondas refletidas de alvos podem ser definidas de forma que a sua fase seja distribuída uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$. O *speckle* possuindo esta propriedade são chamados de *speckle* totalmente desenvolvido.

O teorema do limite central para o *speckle* completamente desenvolvido garante que as componentes x e y são independentemente e identicamente distribuídas gaussianas com média zero e variância $\frac{\sigma^2}{2}$. Podemos representar a sua probabilidade conjunta por,

$$f_{XY}(x, y; \sigma^2) = f_X(x; \sigma^2) f_Y(y; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.31)$$

sendo $x = A \cos(\theta)$ e $y = A \sin(\theta)$ teremos,

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{\sigma^2}\right) = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.32)$$

Integrando na variável θ no intervalo de $[-\pi, \pi]$ teremos a distribuição para a amplitude.

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) d\theta = \frac{z_A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta,$$

definida como a distribuição Rayleigh com PDF

$$f_A(z_A; \sigma^2) = \frac{2z_A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right).$$

Podemos encontrar o valor esperado

$$E[A] = \int_0^\infty z_A f(z_A) dA = \int_0^\infty \frac{2z_A^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) dA = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2},$$

e a variância $var = E[X^2] - E[X]^2$, sendo

$$E[A^2] = \int_0^\infty z_A^2 f(z_A) dA = \int_0^\infty \frac{2z_A^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_A^2}{\sigma^2}\right) dA = \sigma^2.$$

Então

$$var = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2 - \left(\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}\right)^2 = \sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}.$$

$$\text{O coeficiente de variação } CV(Z_A) = \frac{\sqrt{var}}{E[A]} = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}}{\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}{\frac{\pi\sigma^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = 0,5227.$$

Definindo $I = A^2$ a pdf para intensidade é

$$f_I(z_I; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_I}{\sigma^2}\right),$$

desta forma podemos calcular $E[I] = \sigma^2$, e $E[I^2] = 2\sigma^2$ então $var = \sigma^4$, então o $CV(Z_I) = \frac{\sqrt{\sigma^4}}{\sigma^2} = 1$.

Comparando os valores $CV(Z_A)$ e $CV(Z_I)$ podemos afirmar que o valor do *speckle* é mais pronunciado nas imagens de intensidade em relação com as imagens de amplitude.

3.2.3 Estatística *speckle* no processo de múltiplas visadas

O processo de redução do ruído *speckle* consiste em realizar a média aritmética de vários sinais de retorno e chamamos de múltiplas visadas. O método pode ser descrito como adquirir N imagens e realizar sua a média aritmética. As N imagens podem ser tomadas com a característica de serem estatisticamente independente.

Definimos a função densidade de probabilidade para os canais de intensidade com múltiplas visadas,

$$f_I(z_I; L, \sigma^2) = \frac{L^L z_I^{L-1}}{(L-1)! \sigma^{2L}} \exp\left(-L \frac{z_I}{\sigma^2}\right), z_I \geq 0. \quad (3.33)$$

A média e a variância são $M_L(z_I) = \sigma^2$, $Var_L(z_I) = \frac{\sigma^4}{L}$ implicando que o desvio padrão será $SD_L(z_I) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{L}}$. O coeficiente de variação é calculado como sendo a razão entre o desvio padrão e a média resultando em $CV_L(z_I) = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Podemos observar que o desvio padrão é reduzido por \sqrt{N} em relação ao processo de visada simples.

Definimos a função densidade de probabilidade para os canais de amplitude com múltiplas visadas,

$$f_A(z_A; L, \sigma^2) = \frac{2L^L z_A^{2L-1}}{(L-1)! \sigma^{2L}} \exp\left(-L \frac{z_A^2}{\sigma^2}\right), z_A \geq 0. \quad (3.34)$$

A média e a variância são $M_L(z_A) = \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\Gamma} \sqrt{\frac{\sigma^2}{L}}$ e $Var_L(z_A) = \left(L - \frac{\Gamma^2(L+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(L)}\right) \frac{\sigma^2}{L}$. O coeficiente de variação $CV_L(z_A) = \sqrt{\frac{L\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L+\frac{1}{2})} - 1}$, onde Γ denota a função gamma

Tabela 3.1: Coeficientes de variação.

Número de visadas	N-visadas(intensidade)	N- visadas(amplitude)
1	1	0.522723200877063
2	0.707106781186547	0.362999289543428
3	0.577350269189626	0.294104989486191
4	0.5000000000000000	0.253622399398351
5	0.447213595499958	0.226239950138330
6	0.408248290463863	0.206148101392413
7	0.377964473009227	0.190600152599532
8	0.353553390593274	0.178108152789829

3.2.4 Matriz de covariância segundo ?

O vetor \mathbf{S} pode ser rearranjado usando as partes reais e complexas de suas entradas em um vetor de dimensão 6 onde cada entrada é representado por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R_{hh} \\ I_{hh} \\ R_{hv} \\ I_{hv} \\ R_{vv} \\ I_{vv} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e cujo produto,

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^H = \begin{bmatrix} R_{hh}R_{hh} & R_{hh}I_{hh} & R_{hh}R_{hv} & R_{hh}I_{hv} & R_{hh}R_{vv} & R_{hh}I_{vv} \\ I_{hh}R_{hh} & I_{hh}I_{hh} & I_{hh}R_{hv} & I_{hh}I_{hv} & I_{hh}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{hv}R_{hh} & R_{hv}I_{hh} & R_{hv}R_{hv} & R_{hv}I_{hv} & R_{hv}R_{vv} & R_{hv}I_{vv} \\ I_{hv}R_{hh} & I_{hv}I_{hh} & I_{hv}R_{hv} & I_{hv}I_{hv} & I_{hv}R_{vv} & I_{hv}I_{vv} \\ R_{vv}R_{hh} & R_{vv}I_{hh} & R_{vv}R_{hv} & R_{vv}I_{hv} & R_{vv}R_{vv} & R_{vv}I_{vv} \\ I_{vv}R_{hh} & I_{vv}I_{hh} & I_{vv}R_{hv} & I_{vv}I_{hv} & I_{vv}R_{vv} & I_{vv}I_{vv} \end{bmatrix}.$$

A distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero pode ser definida de acordo com ?. Sendo $\mathbf{S} = R_j + iI_j$ definimos R_j e I_j com $j = 1, 2, 3$ tenham distribuições conjuntas gaussianas e satisfaçam as seguintes condições

Na referência ? foi descrito a hipótese da distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero. sendo $\mathbf{S}_j = R_j + iI_j$ definimos R_j e I_j com $j = 1, 2, 3$ tenham distribuições conjuntas gaussianas e satisfaçam as seguintes condições

I- $E[R_j] = E[I_j] = 0$,

II- $E[R_j^2] = E[I_j^2]$,

III- $E[R_j I_j] = 0$,

IV- $E[R_j R_i] = E[I_j I_i]$, e

V- $E[I_j R_i] = -E[R_j I_i]$.

onde, $E[\cdot]$ denota o valor esperado.

A hipótese da distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero assumindo, resulta na matriz simétrica,

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^H = \begin{bmatrix} R_{hh}^2 & 0 & R_{hh}R_{hv} & -R_{hh}I_{hv} & R_{hh}R_{vv} & -R_{hh}I_{vv} \\ 0 & I_{hh}^2 & I_{hh}R_{hv} & I_{hh}I_{hv} & I_{hh}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{hv}R_{hh} & R_{hv}I_{hh} & R_{hv}^2 & 0 & R_{hv}R_{vv} & -R_{hv}I_{vv} \\ -I_{hv}R_{hh} & I_{hv}I_{hh} & 0 & I_{hv}^2 & I_{hv}R_{vv} & I_{hv}I_{vv} \\ R_{vv}R_{hh} & R_{vv}I_{hh} & R_{vv}R_{hv} & R_{vv}I_{hv} & R_{vv}^2 & 0 \\ -I_{vv}R_{hh} & I_{vv}I_{hh} & -I_{vv}R_{hv} & I_{vv}I_{hv} & 0 & I_{vv}^2 \end{bmatrix}.$$

De acordo com ? a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de S . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{hv}, S_{vv}]^H$.

Dados polarimétricos são usualmente submetidos a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme ??

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^H, \quad (3.36)$$

onde \mathbf{s}_l com $l = 1, \dots, L$ são L vetores complexos distribuídos como \mathbf{S} .

De acordo com (?)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E(X_i X_j) & E(X_i Y_j) \\ E(Y_i X_j) & E(Y_i Y_j) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Tal que

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_j^2 & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & -\beta_{ij} \\ \beta_{ij} & \alpha_{ij} \end{bmatrix} \sigma_j \sigma_k & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.38)$$

pode ser escrito por

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_j^2 & \text{se } i = j, \\ (\alpha_{ij} + i\beta_{ij})\sigma_i \sigma_j & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.39)$$

Exemplo 1 - Seja a distribuição gaussian complexa univariada ($p = 1$). Sendo $\xi^T = z_1 = x_1 + iy_1$. E a "matriz" de covariância $\Sigma_\xi = \sigma_1^2$ com determinante $|\Sigma_\xi| = \sigma_1^2$ e "matriz inversa" $\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}$, Assim,

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 + iy_1) \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1)(x_1 + iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2}\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi \Sigma_\xi^2} \exp \left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (3.41)$$

Exemplo 2 - Seja a distribuição gaussian complexa bivariada ($p = 2$). Sendo $\xi^T = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$. E a matriz de covariância

$$\Sigma_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

com determinante $|\Sigma_\xi| = (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ e matriz inversa

$$\begin{aligned}\Sigma_\xi^{-1} &= \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix}. \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= [z_1, z_2]^H \Sigma_\xi^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.42)\end{aligned}$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = [z_1, z_2]^H \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k z_1 + \sigma_1^2 z_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} (\sigma_2^2 \bar{z}_1 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2 - (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_2 z_1 + \sigma_1^2 \bar{z}_2 z_2) \quad (3.46)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} (\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2) \quad (3.47)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \quad (3.48)$$

Assim, a função densidade de probabilidade (pdf)

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp \left(-\frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right) \quad (3.49)$$

Distribuição complexa de Wishart

A distribuição complexa de Wishart descrita no artigo ?, define agora uma amostra de n vetores com valores complexos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ então a matriz hermitiana de covariância é

$$\hat{\Sigma}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\xi}_j^T. \quad (3.50)$$

A matriz $\hat{\Sigma}_\xi$ é uma "maximum likelihood" para Σ_ξ sendo uma estatística suficiente para a matriz hermitiana de covariância.

Considerando $A = ||A_{jkR} + iA_{jkI}I|| = n\hat{\Sigma}_\xi$ chamaremos a matriz A de distribuição complexa de Wishart. A função densidade de probabilidade de A é

$$p_W(A) = \frac{|A|^{n-p}}{I(\Sigma_\xi)} \exp(-\text{tr}(\Sigma_\xi^{-1} A)), \quad (3.51)$$

onde

$$I(\Sigma_\xi) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \cdots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_\xi|^n, \quad (3.52)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

3.3 Funções de densidade

3.3.1 Função de densidade Wishart para os canais de intensidade

Para os canais (hh) , (hv) e (vv) vamos usar a distribuição Wishart (PDF) descrita por

$$f_Z(\mathbf{Z}; \Sigma_s, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\Sigma_s|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\Sigma_s^{-1} \mathbf{Z})), \quad (3.53)$$

onde, $\text{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (3.54)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\Sigma_s, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \Sigma_s$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o símbolo Σ em detrimento a Σ_s para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{S} .

3.3.2 Função de densidade para cada canal complexo

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

A pdf para esta distribuição normal é:

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp\left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right). \quad (3.56)$$

Sendo $(I_{ii}, I_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

Tabela 3.2: Tabela

R_{hh}	I_{hh}	R_{hv}	I_{hv}	R_{vv}	I_{vv}
R_{hh}	σ_{hh}^2	0	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
I_{hh}	0	σ_{hh}^2	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
R_{hv}	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	σ_{hv}^2	0	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
I_{hv}	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	0	$-\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
R_{vv}	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	σ_{vv}^2	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	0
I_{vv}	$\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	0	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	σ_{vv}^2

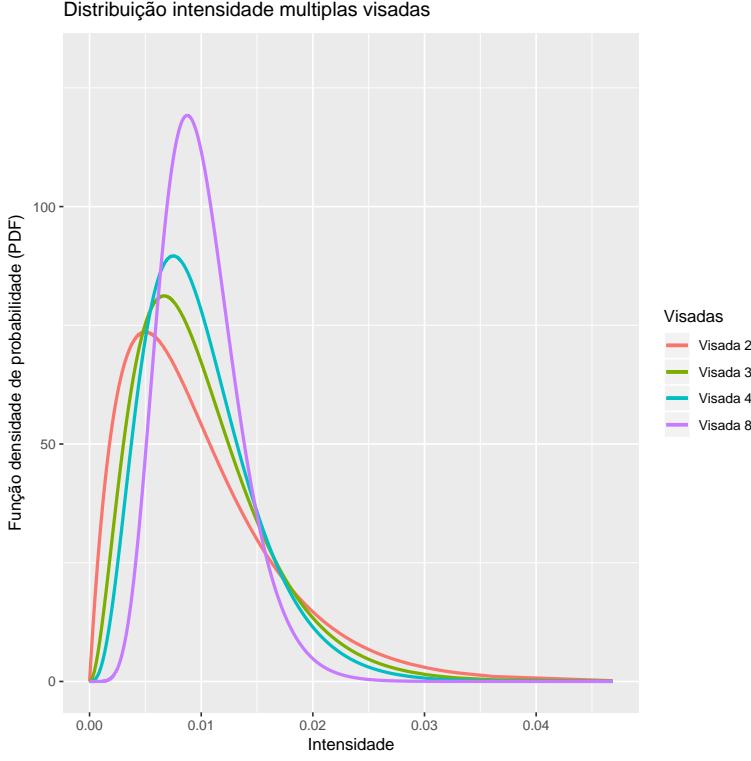


Figura 3.1: Distribuição intensidade multiplas visadas com $\sigma = 0.01$.

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp\left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij})^2}\right). \quad (3.58)$$

Definindo o funcional $\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma)$

$$\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma) = \frac{1}{\pi\sigma_p\sigma_q\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left(\frac{\gamma z}{\sigma_p\sigma_q(1-\gamma)^2}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_p\sigma_q(1-\gamma)^2}\right). \quad (3.59)$$

onde, $\sigma_p, \sigma_q, \gamma$ são parâmetros da função.

3.3.3 distribuição conjunta para $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}, I_{ii}, I_{ij}) \sim N4(0, C_{ii,ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ii,ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 & \eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 & -\eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 \\ 0 & -\eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \eta_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & 0 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

Realizar a transformação

$$\begin{bmatrix} Z = R_{ii}R_{ij} + I_{ii}I_{ij} \\ U_1 = R_{ii} \\ U_2 = R_{ij} \\ U_3 = I_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

De acordo com ? e ? esta distribuição pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de s. A hipótese de ser gaussiana e circular foi comprovada para dados SAR polarimétricos no artigo ?.

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa m -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^m |\boldsymbol{\Sigma}_s|} \exp(-\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{s}), \quad (3.62)$$

sendo $|\cdot|$ o determinante de uma matriz ou o valor absoluto de um escalar, e $\boldsymbol{\Sigma}_s$ é a matriz de covariância associada a \mathbf{s} definida por

$$\boldsymbol{\Sigma}_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_1\overline{S}_1] & E[S_1\overline{S}_2] & \dots & E[S_1\overline{S}_m] \\ E[S_2\overline{S}_1] & E[S_2\overline{S}_2] & \dots & E[S_2\overline{S}_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[S_m\overline{S}_1] & E[S_m\overline{S}_2] & \dots & E[S_m\overline{S}_m] \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

talque, $E[\cdot]$ denota o valor esperado e $\overline{\cdot}$ denota o conjugado complexo. A matriz de covariância é hermitiana positiva definida e contém todas as informações necessárias para caracterizar o retroespalhamento, podemos consultar mais informações em (?).

Nas imagens PolSAR serão consideradas três componentes para o vetor $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$ e a multiplicação de $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$ pelo seu conjugado transposto $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$, isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} S_{hh}\overline{S}_{hh} & S_{hh}\overline{S}_{vh} & S_{hh}\overline{S}_{vv} \\ S_{vh}\overline{S}_{hh} & S_{vh}\overline{S}_{vh} & S_{vh}\overline{S}_{vv} \\ S_{vv}\overline{S}_{hh} & S_{vv}\overline{S}_{vh} & S_{vv}\overline{S}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

A matriz $\boldsymbol{\Sigma}_s$ tem dimensão 3×3 , e pode ser definida como sendo a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

$$\boldsymbol{\Sigma}_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_{hh}\overline{S}_{hh}] & E[S_{hh}\overline{S}_{vh}] & E[S_{hh}\overline{S}_{vv}] \\ E[S_{vh}\overline{S}_{hh}] & E[S_{vh}\overline{S}_{vh}] & E[S_{vh}\overline{S}_{vv}] \\ E[S_{vv}\overline{S}_{hh}] & E[S_{vv}\overline{S}_{vh}] & E[S_{vv}\overline{S}_{vv}] \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme (??)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \quad (3.66)$$

onde \mathbf{s}_i com $i = 1, \dots, L$ é uma amostra de L vetores complexos distribuídos como \mathbf{s} , assim a matriz de covariância amostral associada a \mathbf{s}_i , com $i = 1, \dots, L$ denotam o espalhamento para cada visada L seguindo uma distribuição complexa de Wishart.

Sendo agora $\boldsymbol{\Sigma}_s$ e L parâmetros conhecidos a função densidade de probabilidade da distribuição Wishart por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}_s, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_s|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{Z})), \quad (3.67)$$

onde, $\text{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (3.68)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\boldsymbol{\Sigma}_s, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \boldsymbol{\Sigma}_s$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o simbolo $\boldsymbol{\Sigma}$ em detrimento a $\boldsymbol{\Sigma}_s$ para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

Seja a função densidade de probabilidade da distribuição complexa Wishart (??) na qual vamos aplicar o logaritmo natural e suas propriedades com o intuito de reescrever a função na forma adequada para aplicar o método de estimativa de máxima verossimilhança. Assim,

$$\begin{aligned} \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L) &= \ln \left(\frac{L^m | \mathbf{Z} |^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= \ln \left(\frac{L^m | \mathbf{Z} |^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \right) + \ln \left(\exp(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= \ln(L^m | \mathbf{Z} |^{L-m}) - \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|^L) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (3.69)$$

lembrando que a função Gamma multivariada é definida na equação (??) então, podemos rescrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\ &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\ &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \right) - \ln \left(\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}|) \\ &\quad - \frac{1}{2}m(m-1) \ln(\pi) - \sum_{i=0}^{m-1} \ln(\Gamma(L-i)) - L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (3.70)$$

equação equivalente pode ser encontrada em (?).

3.4 Modelos para dados dados

A matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Usaremos o caso do meio de propagação ser recíproco, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$ tornando a matriz de espalhamento simétrica. Podemos facilitar a notação representando a matriz de espalhamento por um vetor da seguinte forma

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com ? a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de S . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_p]^T$.

A função densidade de probabilidade (pdf) da distribuição gaussiana complexa p -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^p |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|} \exp(-\bar{\mathbf{s}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}). \quad (3.71)$$

O parâmetro que indexa a distribuição é a matriz de covariância, que é definida por:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_p^H) \\ E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_p^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_p^H) \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

onde $E(\cdot)$ e $(\cdot)^H$ denotam o valor esperado e o conjugado transposto.

A matriz Σ_s é hermitiana pois se $\mathbf{S}_j = x_j + iy_j$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j) \overline{(x_j + iy_j)} \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(x_j - iy_j) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= x_j^2 + y_j^2\end{aligned}\quad (3.73)$$

considerando $j \neq k$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j) \overline{(x_k + iy_k)} \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j x_k + y_j y_k) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (3.74)$$

ainda,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j + iy_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j - iy_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k x_j + y_k y_j) + i(x_j y_k - x_k y_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) - i(x_j y_k - x_k y_j) \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (3.75)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= \overline{\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j} \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j}\end{aligned}\quad (3.76)$$

Assim com j e k varrendo toda a matriz podemos afirmar que $\Sigma_s = \Sigma_s^H$ portanto hermitiana.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo *multilook* com o intuito de melhorar a razão sinal-ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas são obtidas computando a médias de L visadas independentes de uma mesma cena. Isto resulta na matriz de covariância Z dada por:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H. \quad (3.77)$$

3.4.0.1 Coeficiente de correlação Multilook

O coeficiente de correlação complexo é um importante parâmetro para descrever a função de densidade de probabilidade. Podemos defini-lo como

$$\rho_c = \frac{E[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j^H]}{\sqrt{E[|\mathbf{s}_i|^2] E[|\mathbf{s}_j|^2]}} = |\rho_c| e^{i\theta}. \quad (3.78)$$

em que \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j são duas componentes da matriz de espalhamento ou dois retorno do radar polarimétrico ou interferométrico SAR. Para dados de radar polarimétricos representado pela matriz de Mueller, ρ_c pode ser calculado encontrando a média da vizinhança de um pixel de uma matriz Mueller. A magnitude de ρ_c pode também ser estimada usando duas intensidade *multilook* Z_{ii} e Z_{jj} . O coeficiente de correlação de dados L looks intensidade é definida como

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(Z_{ii} - \bar{Z}_{ii})(Z_{jj} - \bar{Z}_{jj})]}{\sqrt{E[(Z_{ii} - \bar{Z}_{ii})^2][(Z_{jj} - \bar{Z}_{jj})^2]}}. \quad (3.79)$$

No apêndice do artigo ? foi mostrado que

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2 \quad (3.80)$$

Sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i &= a_R + ia_I \\ \mathbf{S}_j &= b_R + ib_I\end{aligned}\quad (3.81)$$

Assim a equação (??) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{E[(a_R+ia_I)(\overline{b_R}+ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]E[b_R^2+b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[(a_R+ia_I)(b_R-ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]E[b_R^2+b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]\sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sqrt{E[a_R^2+a_I^2]\sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}}}.\end{aligned}\quad (3.82)$$

Definindo os desvios padrões,

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \sqrt{E[a_R^2+a_I^2]} \\ \sigma_b &= \sqrt{E[b_R^2+b_I^2]}\end{aligned}\quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+ia_Ib_R-ia_Rb_I+a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R+a_Ib_I+i(a_Ib_R-a_Rb_I)]}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R]+E[a_Ib_I]+i(E[a_Ib_R]-E[a_Rb_I])}{\sigma_a\sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_Rb_R]}{\sigma_a\sigma_b} + \frac{E[a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b} + i\left(\frac{E[a_Ib_R]}{\sigma_a\sigma_b} - \frac{E[a_Rb_I]}{\sigma_a\sigma_b}\right).\end{aligned}\quad (3.84)$$

Definindo

$$\rho_{RR} = \frac{E[a_Rb_R]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{II} = \frac{E[a_Ib_I]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{IR} = \frac{E[a_Ib_R]}{\sigma_a\sigma_b}, \quad \rho_{RI} = \frac{E[a_Rb_I]}{\sigma_a\sigma_b}. \quad (3.85)$$

Portanto,

$$\rho_c = \frac{(\rho_{RR} + \rho_{II}) + i(\rho_{IR} - \rho_{RI})}{2}. \quad (3.86)$$

obs: Explicar melhor o fator 2

Devido a condição de ser gaussiana circular

$$\rho_{RR} = \rho_{II}, \quad \rho_{IR} = -\rho_{RI}. \quad (3.87)$$

podemos escrever ρ_c

$$\rho_c = \rho_{RR} + i\rho_{IR}. \quad (3.88)$$

Portanto

$$|\rho_c|^2 = \rho_{RR}^2 + \rho_{IR}^2. \quad (3.89)$$

O processo de **Multilook** produz

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [a_R^2(k) + a_I^2(k)] \\ B_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b_R^2(k) + b_I^2(k)].\end{aligned}\quad (3.90)$$

Assumindo a independência estatística entre amostras, a média e o desvio padrão podem ser definidos por

$$\begin{aligned}\overline{A_n} &= E[A_n] = 2E[a_R^2(k)] = 2\sigma_a^2, \quad SD[A_n] = \frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}}. \\ \overline{B_n} &= E[B_n] = 2E[b_R^2(k)] = 2\sigma_b^2, \quad SD[B_n] = \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}\quad (3.91)$$

O coeficiente de correlação *Multilook* para intensidade (equação ??)) pode ser escrito por:

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})]}{SD[A_n]SD[B_n]}. \quad (3.92)$$

Assumindo a independência entre as amostras e depois de algumas manipulações algébricas

para o numerador da equação (??).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [E[(a_R^2(k) + a_I^2(k))(b_R^2(k) + b_I^2(k))] - 4\sigma_a^2\sigma_b^2] \quad (3.93)$$

OBS: Entender melhor a equação (??) e (??).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2 \quad (3.94)$$

Agora substituindo em (??)

$$\begin{aligned} \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{SD[A_n]SD[B_n]}. \\ \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{\frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}} \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

completando as simplificações

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2. \quad (3.96)$$

OBS: Esta relação mostra que o coeficiente de correlação da intensidade não depende dos *nlooks*.

3.4.0.2 Distribuição conjunta do *Multilook* $|S_i|^2$ e $|S_j|^2$

O PDF conjunto retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e interferométricos são importantes. As PDF's conjuntas conduzem a derivação da intensidade e amplitude razão PDF's. Da equação (??) temos que as intensidades *multilook* sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 C_{11}}{B_2 C_{22}} \\ R_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 C_{22}}{B_1 C_{11}} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Integrando a equação (??) em relação a η e ψ . A PDF é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho_c|^2}\right)}{\Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (3.98)$$

Sendo

$$I_\mu(Z) = \frac{(\frac{z}{2})^\mu}{\Gamma(\mu+1)} F_1^0[-; \mu+1; \frac{z^2}{4}] \quad (3.99)$$

OBS: As integrações na equação (??) não foram realizadas neste estudo.

$$p(B_1, B_2) = \frac{n^{n+1} (R_1 R_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{n(\frac{R_1}{C_{11}} + \frac{R_2}{C_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(C_{11} C_{22})^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2n\sqrt{\frac{R_1 R_2}{C_{11} C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (3.100)$$

OBS: Verificar o surgimento de um fator $\frac{n^2}{C_{11} C_{22}}$ na equação (??) - Mudança de variável!!!!.

3.4.0.3 Distribuição razão intensidade e amplitude para *multilook*

A razão de intensidade e amplitude entre S_{hh} e S_{vv} são importantes no estudo de radares polarimétricos. A PDF's razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{C_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{C_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (3.101)$$

Onde $\tau = \frac{C_{11}}{C_{22}}$.

A *PDF* razão intensidade *multilook* normalizada é mostrada no apêndice (*C*) do artigo ?

$$p^{(n)}(\mu) = \frac{\Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(1 + \mu)\mu^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (3.102)$$

OBS: Não realizei as contas do apêndice (*C*).

Realizando a troca de variável $\nu = \sqrt{\mu}$ a equação (??) pode ser rescrita por

$$p^{(n)}(\nu) = \frac{2\Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(1 + \nu^2)\nu^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1 + \nu^2)^2 - 4|\rho_c|^2\nu^2]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (3.103)$$

As *PDF's* razão de intensidade e amplitude entre os *multilook* **S₁** e **S₂** podem ser facilmente deduzidas das seguintes definições e posterior aplicação nas equações (??) e (??). definindo

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2} &= \tau\mu \\ z &= \sqrt{w} &= \sqrt{\tau}\nu \end{aligned} \quad (3.104)$$

Portanto a distribuição da razão w de intensidade *multilook* é

$$p^{(n)}(w) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + w)w^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (3.105)$$

Portanto a distribuição da razão z de amplitude *multilook* é

$$p^{(n)}(z) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + z^2)z^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + z^2)^2 - 4\tau|\rho_c|^2z^2]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (3.106)$$

A discussão será limitada para estatística da razão ν amplitude normalizada. A figura (??) mostra a distribuição razão amplitude apresentada na equação (??). Notadamente a medida que n aumenta tendemos a ter uma aproximação da "função" delta de Dirac e uma concentração em torno da abscissa $\nu = 1$.

OBS: Processos de *multilook* reduzem a variância.

Os modelos marginais são derivados dos modelos mariados Gamma como a distribuição complexa Wishart. Nesta seção serão apresentados os modelos marginais usados no trabalho.

3.5 Número Equivalente de Visadas

O coeficiente de variação definido como a razão do desvio padrãoem uma imagem com a média para as intensidades na imagem PolSAR $CV = \frac{\sqrt{\text{Var}(I)}}{\text{E}(I)}$ é um bom indicador para no nível de ruído *Speckle*. O coeficiente de variação (CV) será usado para definir o número equivalente de visadas para a intensidade ($ENL(I)$),

$$ENL(I) = \frac{1}{CV^2}, \quad (3.107)$$

para mais detalhes podemos consultar ?.

3.6 Metodologia

3.7 Detecção das evidências de bordas

3.8 Modelos estatísticos para os dados SAR/PolSAR

3.8.1 Estimativa de parâmetros usando o método da máxima verossimilhança

3.8.2 Função densidade de probabilidade univariada

3.8.2.1 Função densidade de probabilidade Γ para os canais de intensidades

Na função distribuição de densidade univariada gaussiana

$$f_Z(z; \mu, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} z^{L-1} \exp\left\{-\frac{L}{\mu}z\right\}, \quad (3.108)$$

onde, $\mu > 0$ e $L > 0$, aplicamos o logaritmo natural e suas propriedades

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z; \mu, L) &= \ln\left(\frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} z^{L-1} \exp\left\{-\frac{L}{\mu}z\right\}\right), \\ &= \ln\left(\frac{L}{\mu}\right)^L - \ln\Gamma(L) + \ln z^{L-1} + \ln\exp\left\{-L\frac{z}{\mu}\right\}, \end{aligned}$$

obtendo a função,

$$\ln f_Z(z; \mu, L) = L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) + (L-1) \ln z - \frac{L}{\mu}z. \quad (3.109)$$

Dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ extraída dos canais de intensidades hh, hv, e vv, deduzimos a função log-verossimilhança,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f_Z(z_k; \mu, L) \\ \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L), \end{aligned}$$

com o uso da função logarítmica (??), teremos

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) + (L-1) \ln z_k - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L \ln \frac{L}{\mu} - \sum_{k=1}^n \ln\Gamma(L) + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n 1 - \ln\Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} n - \ln\Gamma(L) n + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \end{aligned}$$

Definimos a função log-verossimilhança para a PDF univariada (??)

$$\ell(\mathbf{z}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln\Gamma(L) \right] + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k,$$

e a sua forma reduzida chamada de função log-verossimilhança reduzida,

$$\ell(\mathbf{z}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \quad (3.110)$$

Obtemos os parâmetros $(\hat{\mu}, \hat{L})$ com o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (μ, L) baseado na amostra \mathbf{z} maximizando a função (??) usando o método BFGS implementado no pacote maxLik (?). Preferimos realizar o processo de otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com objetivo de melhorar a estabilidade numérica.

Extraindo de cada canal de intensidade da imagem PolSAR uma faixa de dados $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de forma que seja particionada em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}),$$

assumimos dois diferentes modelos para cada partição: $\mathbf{Z}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $\mathbf{Z}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$.

As funções log-verossimilhança reduzidas aplicadas nas amostras internas \mathbf{z}_I e externas \mathbf{z}_E são usadas para estimar (μ_I, L_I) e (μ_E, L_E) maximizando (??), e obtendo $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança total é definida no ponto j como a seguinte função

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E) = & \\ & j [\hat{L}_I \ln(\hat{L}_I/\hat{\mu}_I) - \ln \Gamma(\hat{L}_I)] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln z_k - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_k + \\ & (n-j) [\hat{L}_E \ln(\hat{L}_E/\hat{\mu}_E) - \ln \Gamma(\hat{L}_E)] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln z_k - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n z_k, \end{aligned} \quad (3.111)$$

e aplicando o método GenSA (?) encontramos a evidência de borda

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é uma folga mínima definida empiricamente para as extremidades da amostra, a escolha do número de pixéis da amostra pode variar com região de interesse da imagem ou com tipo de sensor para aquisição de imagem.

Destacamos que podemos usar o método de otimização BFGS para obter uma estimativa dos parâmetros (μ, L) simultaneamente, isto é, otimizamos funções com duas variáveis, ou, alternativamente, podemos estimar, ou fixar, o número de visadas L a priori e otimizar uma função de uma variável em μ . Derivando a equação (??) com relação a variável μ e igualando a zero, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{z}; \mu)}{\partial \mu} &= 0 \\ n \left[-\frac{L}{\mu} \right] + \frac{L}{\mu^2} \sum_{k=1}^n z_k &= 0 \\ \frac{L}{\mu} &= \frac{L}{n\mu^2} \sum_{k=1}^n z_k \end{aligned}$$

uma aproximação para

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k, \quad (3.112)$$

a qual podemos usar como estimativa inicial para obter os parâmetros $(\hat{\mu}, \hat{L})$ no processo de otimização.

mização com duas variáveis, ou como aproximação para o parâmetro μ quando L fixo ou estimado a priori.

$$\ell(\mathbf{z}; \mu) = n \left[\ln \frac{L}{\mu} \right] - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k, \quad (3.113)$$

para o método BFGS.

Quando optamos por usar o L estimado a priori e a média (??) como estimativa de μ usamos o seguinte procedimento. Considerando a faixa de dados extraída da imagem e a partição da mesma em $\mathbf{Z}_I \sim \Gamma(\mu_I, L)$, e $\mathbf{Z}_E \sim \Gamma(\mu_E, L)$. Podemos estimar μ_I e μ_E com as amostras \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E calculando a média (??) para cada amostra. Desta forma teremos os parâmetros $(\hat{\mu}_I, L)$ e $(\hat{\mu}_E, L)$ conhecidos resultando na função log-verossimilhança no ponto j ,

$$\ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E, L) = -j \ln \hat{\mu}_I - \frac{L}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_k - (n-j) \ln \hat{\mu}_E - \frac{L}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n z_k. \quad (3.114)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E, L),$$

onde \min_s é uma folga mínima definida empiricamente para as extremidades da amostra, a escolha do número de pixels da amostra pode variar com região de interesse da imagem ou com tipo de sensor para aquisição de imagem.

3.8.2.2 Função densidade de probabilidade produto de magnitudes das intensidades

A função densidade de probabilidade univariada produto de magnitudes das intensidades é definida por

$$f(z; \rho, L) = \frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right), \quad (3.115)$$

onde I_0 e K_{L-1} são funções de Bessel modificadas, e onde, $\rho > 0$ e $L > 0$.

Aplicando o logaritmo natural na equação (??), teremos

$$\begin{aligned} \ln f(z; \rho, L) &= \ln \left(\frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right) \right), \\ &= \ln \left(\frac{4L^{L+1}z^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} \right) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right), \\ &= \ln(4L^{L+1}z^L) - \ln(\Gamma(L)(1-|\rho|^2)) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right), \\ &= \ln(4) + \ln L^{L+1} + \ln z^L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right), \\ &= \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right), \end{aligned}$$

então definimos a função logarítmica

$$\begin{aligned} \ell(z; \rho, L) &= \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) \\ &\quad + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz}{1-|\rho|^2} \right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida sendo dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ obtidas

das imagens SAR/PolSAR

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f(z_k; \rho, L) \\ \ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L),\end{aligned}$$

usando a função logarítmica (??), teremos

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln z_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right. \\ &\quad \left. + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) \right], \\ \ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= \ln(4) \sum_{k=1}^n 1 + (L+1) \ln L \sum_{k=1}^n 1 + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \ln(1 - |\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) \\ &= n \ln(4) + n(L+1) \ln L + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - n \ln \Gamma(L) - n \ln(1 - |\rho|^2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) \\ &= n \left[\ln(4) + (L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right).\end{aligned}$$

Definimos a função log-verossimilhança para a PDF (??)

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= n \left[\ln(4) + (L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right),\end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L) &= n \left[(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2Lz_k}{1 - |\rho|^2} \right).\end{aligned}\tag{3.117}$$

Podemos obter $(\hat{\rho}, \hat{L})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (ρ, L) baseado em uma amostra \mathbf{z} , maximizando (??) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (?).

Preferimos otimizar resolvendo $\nabla\ell = \mathbf{0}$ com objetivo de melhorar a estabilidade numérica do método.

Considerando a faixa de dados extraída da imagem $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ e particionada em duas amostras disjuntas na posição j , da seguinte forma

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}),$$

e otimizando a função log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E . Assim, estimamos (ρ_I, L_I) e (ρ_E, L_E) com \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E , maximizando (??), e obtendo $(\hat{\rho}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E) &= j \left[(\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) \right] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_I| \hat{L}_I z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) + \sum_{k=1}^j \ln K_{\hat{L}_I-1} \left(\frac{2\hat{L}_I z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\ &\quad + (n-j) \left[(\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) \right] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln z_k \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_E| \hat{L}_E z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) + \sum_{k=j+1}^n \ln K_{\hat{L}_E-1} \left(\frac{2\hat{L}_E z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right). \end{aligned} \tag{3.118}$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

Alternativamente podemos resolver o problema da seguinte forma, considerando o número de visadas L conhecido ou estimado a priori podemos reescrever a equação (??) por

$$\ell(\mathbf{z}; \rho) = -n \ln(1 - |\rho|^2) + \sum_{k=1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\rho| L z_k}{1 - |\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L z_k}{1 - |\rho|^2} \right), \tag{3.119}$$

assumindo que vamos estimar ρ_I e ρ_E nas amostras \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E através da maximização de (??) obteremos $(\hat{\rho}_I)$ e $(\hat{\rho}_E)$.

A função log-verossimilhança no ponto j com $L_I = L_E = L$ definidas a priori é

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E) &= -j \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) + \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_I| L z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) + \sum_{k=1}^j \ln K_{L-1} \left(\frac{2L z_k}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\ &\quad - (n-j) \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) + \sum_{k=j+1}^n \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_E| L z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) + \sum_{k=j+1}^n \ln K_{L-1} \left(\frac{2L z_k}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right), \end{aligned} \tag{3.120}$$

e aplicando o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

3.8.2.3 Função densidade de probabilidade razão de intensidades

A razão de intensidades ou amplitudes entre \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j são importantes no estudo de radares polarimétricos.

Seja a razão de intensidade normalizada,

$$\mu = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_i(k)|^2}{\Sigma_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_j(k)|^2}{\Sigma_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_j(k)|^2}, \quad (3.121)$$

onde $\tau = \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}}$, e a função densidade de probabilidade razão de intensidades,

$$f(\mu; \rho, L) = \frac{\Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(1 + \mu)^2 - 4|\rho|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (3.122)$$

onde, $\rho > 0$ e $L > 0$. Definindo

$$z = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_i(k)|^2}{\Sigma_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|\mathbf{S}_j(k)|^2}{\Sigma_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |\mathbf{S}_j(k)|^2} = \tau\mu, \quad (3.123)$$

realizando a mudança de variável na PDF, (??) teremos,

$$f(z; \rho, L, \tau) = \frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + z)z^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]^{\frac{2L+1}{2}}}. \quad (3.124)$$

Aplicando o logaritmo natural na equação (??) e realizando manipulações algébricas teremos

$$\begin{aligned} \ln f(z; \rho, L, \tau) &= \ln \left(\frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + z)z^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]^{\frac{2L+1}{2}}} \right), \\ &= \ln (\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho|^2)^L(\tau + z)z^{L-1}) \\ &\quad - \ln \left(\Gamma(L)\Gamma(L)[(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ &= \ln \tau^L + \ln \Gamma(2L) + \ln(1 - |\rho|^2)^L + \ln(\tau + z) + \ln z^{L-1} \\ &\quad - \left(\ln \Gamma(L) + \ln \Gamma(L) + \ln [(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + z) + (L - 1) \ln z \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L + 1}{2} \ln [(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]. \end{aligned}$$

Definimos a função logarítmica para a PDF razão de intensidades,

$$\begin{aligned} \ln f(z; \rho, L, \tau) &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + z) + (L - 1) \ln z \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L + 1}{2} \ln [(\tau + z)^2 - 4\tau|\rho|^2z]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ obtida das imagens SAR/PolSAR, deduzimos a função log-verossimilhança

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= \ln \prod_{k=1}^n f(z_k; \rho, L, \tau) \\ \ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L, \tau), \end{aligned}$$

usando a função (??), teremos,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k; \rho, L, \tau) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) + \ln(\tau + z_k) + (L - 1) \ln z_k \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L + 1}{2} \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k] \right], \\ \ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= L \ln \tau \sum_{k=1}^n 1 + \ln \Gamma(2L) \sum_{k=1}^n 1 + L \ln(1 - |\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + z_k) + (L - 1) \sum_{k=1}^n \ln z_k \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k] \\ &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + z_k) \\ &\quad + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k].\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (??).

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + z_k) \\ &\quad + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k]\end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{z}; \rho, L, \tau) &= n \left(L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho|^2) - 2 \ln \Gamma(L) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + z_k) + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k]\end{aligned}\tag{3.126}$$

Vamos obter $(\hat{\rho}, \hat{L}, \hat{\tau})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (ρ, L, τ) baseado na amostra \mathbf{z} maximizando (??) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (?). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

A função log-verossimilhança reduzida é aplicada na faixa de dados $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ particionada em duas amostras disjuntas na posição j , denotadas respectivamente como \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E ,

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}).$$

Para cada amostra estimamos os parâmetros (ρ_I, L_I, τ_I) e (ρ_E, L_E, τ_E) maximizando (??), obtendo $(\hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E)$. Usando as estimativas para cada pixel podemos definir a função

log-verossimilhança total no ponto j ,

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E) = & n \left(\hat{L}_I \ln \hat{\tau}_I + \ln \Gamma(2\hat{L}_I) + \hat{L}_I \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_I) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_I + z_k) + \hat{L}_I \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{2\hat{L}_I + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_I + z_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_I|^2 z_k] \\ & + n \left(\hat{L}_E \ln \hat{\tau}_E + \ln \Gamma(2\hat{L}_E) + \hat{L}_E \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_E) \right) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_E + z_k) + \hat{L}_E \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{2\hat{L}_E + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_E + z_k)^2 - 4\hat{\tau}_E|\hat{\rho}_E|^2 z_k] \end{aligned} \quad (3.127)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\tau}_E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

Alternativamente, sendo o número de visadas L conhecido ou estimado a priori, podemos re-definir a função log-verossimilhança reduzida por

$$\begin{aligned} \ell(z; \rho, \tau) = & n (L \ln \tau + L \ln(1 - |\rho|^2)) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\tau + z_k) - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\tau + z_k)^2 - 4\tau|\rho|^2 z_k]. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Maximizando a função $\ell(z; \rho, \tau)$ com o objetivo de estimar (ρ_I, τ_I) e (ρ_E, τ_E) para as amostras z_I e z_E , obtemos $(\hat{\rho}_I, \hat{\tau}_I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{\tau}_E)$. O método de otimização BFGS implementado no pacote `maxLik` (?) é usado para estimar os parâmetros.

Estimados os parâmetros definimos a log-verossimilhança total no ponto j

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{\tau}_E) = & n (L \ln \hat{\tau}_I + L \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2)) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_I + z_k) - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_I + z_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_I|^2 z_k] \\ & + n (L \ln \hat{\tau}_E + L \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2)) \\ & + \sum_{k=1}^n \ln(\hat{\tau}_E + z_k) - \frac{2L + 1}{2} \sum_{k=1}^n \ln [(\hat{\tau}_E + z_k)^2 - 4\hat{\tau}_E|\hat{\rho}_E|^2 z_k]. \end{aligned} \quad (3.129)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\tau}_I, \hat{\rho}_E, \hat{\tau}_E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

3.8.2.4 Função distribuição de densidade para o span em meio recíproco

A referência ? mostra que podemos usar uma distribuição gaussiana para modelar o *span*, equação (??), considerando a função distribuição de densidade univariada gaussiana

$$f_S(s; \mu, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} s^{L-1} \exp \left\{ -\frac{L}{\mu} s \right\}, \quad (3.130)$$

onde, $\mu > 0$, $L > 0$, e s é elemento do $\text{span}(S)$.

Aplicando o logaritmo natural na equação (??) e realizando operações algébricas teremos:

$$\begin{aligned}\ln f_S(s; \mu, L) &= \ln \left(\frac{L^L}{\Gamma(L)\mu^L} s^{L-1} \exp \left\{ -\frac{L}{\mu}s \right\} \right), \\ &= \ln \left(\frac{L}{\mu} \right)^L - \ln \Gamma(L) + \ln s^{L-1} + \ln \exp \left\{ -\frac{L}{\mu}s \right\},\end{aligned}$$

resultante na função,

$$\ln f_S(s; \mu, L) = L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln s - \frac{L}{\mu} s. \quad (3.131)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ obtida das imagens SAR/PolSAR,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f_S(s_k; \mu, L) \\ \ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_S(s_k; \mu, L),\end{aligned}$$

usando a função (??) teremos,

$$\begin{aligned}\ell(\mathbf{s}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_S(s_k; \mu, L) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln s_k - \frac{L}{\mu} s_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L \ln \frac{L}{\mu} - \sum_{k=1}^n \ln \Gamma(L) + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n 1 - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k \\ &= L \ln \frac{L}{\mu} n - \ln \Gamma(L) n + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k.\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (??)

$$\ell(\mathbf{s}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k,$$

e a forma reduzida,

$$\ell(\mathbf{s}; \mu, L) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln s_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k. \quad (3.132)$$

Vamos obter $(\hat{L}, \hat{\mu})$, o estimador de máxima verossimilhança (MLE) de (L, μ) baseado na amostra \mathbf{s} , por maximizar (??) com o método BFGS implementado no pacote maxLik (?). Vamos preferir otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

O função é a log-verossimilhança reduzida é aplicada para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{s}_I e \mathbf{s}_E . Cada faixa de dados $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$

é particionada em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{s} = (\underbrace{s_1, s_2, \dots, s_j}_{\mathbf{s}_I}, \underbrace{s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_n}_{\mathbf{s}_E})$$

assumimos dois diferentes modelos para cada partição: $\mathbf{S}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, e $\mathbf{S}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. Vamos estimar (μ_I, L_I) e (μ_E, L_E) com \mathbf{s}_I e \mathbf{s}_E , respectivamente, maximizando (??), e obtendo $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$.

A log-verossimilhança no ponto j é, então

$$\begin{aligned} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E) = & \\ & j [\hat{L}_I \ln(\hat{L}_I/\hat{\mu}_I) - \ln \Gamma(\hat{L}_I)] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln s_k - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j s_k + \\ & (n-j) [\hat{L}_E \ln(\hat{L}_E/\hat{\mu}_E) - \ln \Gamma(\hat{L}_E)] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln s_k - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n s_k. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E),$$

onde \min_s é o coeficiente de folga definido empiricamente.

Alternativamente, podemos assumir o número de visadas L fixo, ou estimado a priori, e otimizar a função

$$\ell(\mathbf{s}; \mu) = -n \ln \mu - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n s_k \quad (3.134)$$

na variável μ , assumindo dois modelos diferentes para cada partição, $\mathbf{S}_I \sim \Gamma(\mu_I)$, e $\mathbf{S}_E \sim \Gamma(\mu_E)$. Assim, encontramos estimativas $\hat{\mu}_I$ e $\hat{\mu}_E$ para os parâmetros μ_I e μ_E com as amostras \mathbf{S}_I e \mathbf{S}_E usando as médias para a mostra de acordo com a equação (??).

Usando as estimativas $\hat{\mu}_I$ e $\hat{\mu}_E$, a log-verossimilhança total no ponto j é, então

$$\ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E) = -j \ln(\hat{\mu}_I) - \frac{1}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j s_k - (n-j) \ln(\hat{\mu}_E) - \frac{1}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n s_k. \quad (3.135)$$

O método GenSA é aplicado para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{\mu}_E),$$

onde \min_s é a folga definida empiricamente.

3.8.3 Função densidade de probabilidade bivariada

3.8.3.1 Função densidade de probabilidade produto de intensidades

Seja a função distribuição de probabilidade bivariada produto de intensidades, a qual pode ser encontrada em ?

$$f(z_1, z_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = \frac{L^{L+1} (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L\left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}}\right)}{1-|\rho|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho|^2)|\rho|^{L-1}} I_{L-1}\left(2L\sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2}\right). \quad (3.136)$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados na equação (??)

$$\begin{aligned}
 \ln f(z_1, z_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp \left(-\frac{L \left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1-|\rho|^2} \right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho|^2) |\rho_c|^{L-1}} I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right) \right), \\
 \ln f(z_1, z_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp \left(-\frac{L \left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1-|\rho|^2} \right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho|^2) |\rho|^{L-1}} \right) \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right), \\
 &= \ln \left(L^{L+1} (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp \left(-\frac{L \left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1-|\rho|^2} \right) \right) \\
 &\quad - \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho|^2) |\rho|^{L-1} \right) \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right), \\
 \ln f(z_1, z_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \ln L^{L+1} + \ln (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} \\
 &\quad + \ln \exp \left(-\frac{L \left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1-|\rho|^2} \right) - \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho|^2) |\rho|^{L-1} \right) \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right), \\
 &= \ln L^{L+1} + \ln (z_1 z_2)^{\frac{L-1}{2}} - \frac{L \left(\frac{z_1}{\Sigma_{11}} + \frac{z_2}{\Sigma_{22}} \right)}{1-|\rho|^2} - \ln (\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \\
 &\quad - \ln \Gamma(L) - \ln (1-|\rho|^2) - \ln |\rho|^{L-1} \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right), \\
 &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln (z_1 z_2) - \frac{L z_1}{\Sigma_{11} (1-|\rho|^2)} - \frac{L z_2}{\Sigma_{22} (1-|\rho|^2)} \\
 &\quad - \frac{L+1}{2} \ln (\Sigma_{11} \Sigma_{22}) - \ln \Gamma(L) - \ln (1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right),
 \end{aligned}$$

resultando na função logarítmica

$$\begin{aligned}
 \ln f(z_1, z_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln z_1 + \frac{L-1}{2} \ln z_2 - \frac{L z_1}{\Sigma_{11} (1-|\rho|^2)} - \frac{L z_2}{\Sigma_{22} (1-|\rho|^2)} \\
 &\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln (1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \\
 &\quad + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, sendo dado as amostras $\mathbf{z}_1 = (z_1^1, \dots, z_n^1)$ e $\mathbf{z}_2 = (z_1^2, \dots, z_n^2)$ obtidas das imagens SAR/PolSAR,

$$\ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = \ln \prod_{k=1}^n f(z_k^1, z_k^2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}),$$

$$\ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = \sum_{k=1}^n \ln f(z_k^1, z_k^2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}),$$

usando a função (??) teremos,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= \sum_{k=1}^n \ln f(z_k^1, z_k^2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln z_k^1 + \frac{L-1}{2} \ln z_k^2 - \frac{Lz_k^1}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} - \frac{Lz_k^2}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right. \\ &\quad \left. + \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right) \right], \\ \ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= (L+1) \ln L \sum_{k=1}^n 1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^2 \\ &\quad - \frac{L}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\ &\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} \sum_{k=1}^n 1 \\ &\quad - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 - \ln(1-|\rho|^2) \sum_{k=1}^n 1 - (L-1) \ln |\rho| \sum_{k=1}^n 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right). \end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF bivariada (??)

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= n \left[(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} \right] \\ &\quad + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^2 \\ &\quad - \frac{L}{\Sigma_{11}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1-|\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1-|\rho|^2} \right), \end{aligned}$$

e a forma reduzida,

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = & n \left[(L+1) \ln L - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) - (L-1) \ln |\rho| \right. \\
& - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} \Big] \\
& + \frac{L}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^1 + \frac{L}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^2 \\
& - \frac{L}{\Sigma_{11}(1 - |\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1 - |\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Vamos obter $(\hat{\rho}, \hat{L}, \hat{\Sigma}_{11}, \hat{\Sigma}_{22})$, a estimativa de máxima verossimilhança (MLE) para $(\rho, L, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ baseado em \mathbf{z}_1 , e \mathbf{z}_2 por maximizar (??) com o método BFGS implementado no pacote `maxLik` (?). Usamos a otimização resolvendo $\nabla \ell = \mathbf{0}$ com intuito de melhorar a estabilidade numérica.

O função usada é a log-verossimilhança reduzida para as amostras internas e externas da faixa de dados denotadas respectivamente como \mathbf{z}_I e \mathbf{z}_E . As faixas de dados $\mathbf{z}_1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)$ e $\mathbf{z}_2 = (z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2)$ são particionadas em duas amostras disjuntas na posição j :

$$\mathbf{z}_1 = (\underbrace{z_1^1, z_2^1, \dots, z_j^1}_{\mathbf{z}_I^1}, \underbrace{z_{j+1}^1, z_{j+2}^1, \dots, z_n^1}_{\mathbf{z}_E^1}).$$

e

$$\mathbf{z}_2 = (\underbrace{z_1^2, z_2^2, \dots, z_j^2}_{\mathbf{z}_I^2}, \underbrace{z_{j+1}^2, z_{j+2}^2, \dots, z_n^2}_{\mathbf{z}_E^2}).$$

Vamos estimar $(\rho_I, L_I, \Sigma_{11}^I, \Sigma_{22}^I)$ e $(\rho_E, L_E, \Sigma_{11}^E, \Sigma_{22}^E)$ para as amostras \mathbf{z}_I^1 , \mathbf{z}_E^1 e \mathbf{z}_I^2 , \mathbf{z}_E^2 , e maximizando (??), obtendo $(\hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\Sigma}_{22}^I)$ e $(\hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\Sigma}_{11}^E, \hat{\Sigma}_{22}^E)$.

A log-verossimilhança no ponto j usando os parâmetros estimados é, então

$$\begin{aligned}
\ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\Sigma}_{22}^I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\Sigma}_{11}^E, \hat{\Sigma}_{22}^E) = & n \left[(\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - (\hat{L}_I - 1) \ln |\hat{\rho}_I| \right. \\
& - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{11}^I - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{22}^I \Big] \\
& + \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^1 + \frac{\hat{L}_I}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^2 \\
& - \frac{\hat{L}_I}{\Sigma_{11}^I(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{\hat{L}_I}{\Sigma_{22}^I(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_I-1} \left(2\hat{L}_I \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11}^I \Sigma_{22}^I}} \frac{|\hat{\rho}_I|}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\
& + n \left[(\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - (\hat{L}_E - 1) \ln |\hat{\rho}_E| \right. \\
& - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{11}^E - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{22}^E \Big] \\
& + \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^1 + \frac{\hat{L}_E}{2} \sum_{k=1}^n \ln z_k^2 \\
& - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\Sigma}_{11}^E(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\Sigma}_{22}^E(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_E-1} \left(2\hat{L}_E \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11}^E \Sigma_{22}^E}} \frac{|\hat{\rho}_E|}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Vamos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{L}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\Sigma}_{22}^I, \hat{\rho}_E, \hat{L}_E, \hat{\Sigma}_{11}^E, \hat{\Sigma}_{22}^E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

Alternativamente, sendo o número de visadas L conhecido ou estimado a priori, reescrevemos a função logarítmica (??)

$$\begin{aligned}
\ell(z_1, z_2; \rho, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = & n \left[-\ln(1 - |\rho|^2) - (L - 1) \ln |\rho| \right. \\
& - \frac{L + 1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L + 1}{2} \ln \Sigma_{22} \Big] \\
& - \frac{L}{\Sigma_{11}(1 - |\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1 - |\rho|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
& + \sum_{k=1}^n \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.140}$$

A log-verossimilhança no ponto j usando os parâmetros estimados é

$$\begin{aligned}
 \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\Sigma}_{22}^I, \hat{\rho}_E, \hat{\Sigma}_{11}^E, \hat{\Sigma}_{22}^E) = & n \left[-\ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - (\hat{L}_I - 1) \ln |\hat{\rho}_I| \right. \\
 & - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{11}^I - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{22}^I \Big] \\
 & - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\Sigma}_{11}^I(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\Sigma}_{22}^I(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
 & + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_I-1} \left(2\hat{L}_I \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\hat{\Sigma}_{11}^I \hat{\Sigma}_{22}^I}} \frac{|\hat{\rho}_I|}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \\
 & + n \left[-\ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - (\hat{L}_E - 1) \ln |\hat{\rho}_E| \right. \\
 & \left. - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{11}^E - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \hat{\Sigma}_{22}^E \right] \\
 & - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\Sigma}_{11}^E(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^1 - \frac{\hat{L}_E}{\hat{\Sigma}_{22}^E(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^n z_k^2 \\
 & + \sum_{k=1}^n \ln I_{\hat{L}_E-1} \left(2\hat{L}_E \sqrt{\frac{z_k^1 z_k^2}{\hat{\Sigma}_{11}^E \hat{\Sigma}_{22}^E}} \frac{|\hat{\rho}_E|}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right), \tag{3.141}
 \end{aligned}$$

onde podemos aplicar o método GenSA para encontrar

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\rho}_I, \hat{\Sigma}_{11}^I, \hat{\Sigma}_{22}^I, \hat{\rho}_E, \hat{\Sigma}_{11}^E, \hat{\Sigma}_{22}^E),$$

onde \min_s é o tamanho da folga em cada extremidade da amostra definida empiricamente.

3.9 Métodos de fusão para as evidências de bordas

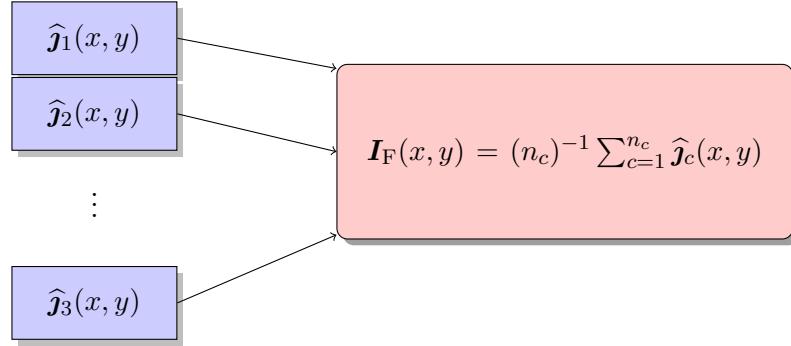
As evidências de bordas estão armazenadas em n_c imagens binárias $\{\hat{J}_c\}_{1 \leq c \leq n_c}$ em que o pixel de valor 1 denota uma estimativa de borda e o pixel de valor 0 denota um elemento onde não foi detectado borda. As imagens (matrizes) têm tamanho $m \times n$; onde podemos definir $\ell = mn$. Estas imagens serão usadas para a fusão resultando na imagem binária I_F .

Comparamos os resultados de seis técnicas de fusão:

- média simples,
- transformada wavelet discreta multi-resolução (MR-DWT),
- transformada wavelet estacionária multi-resolução (MR-SWT),
- análise de componentes principais (PCA),
- estatísticas ROC, e
- decomposição em valores singulares com multi-resolução (MR-SVD).

3.9.1 Fusão por média simples

A fusão por média simples realiza a média aritmética das evidências de bordas para cada canal, $I_F(x, y) = (n_c)^{-1} \sum_{c=1}^{n_c} \hat{J}_c(x, y)$, onde n_c é o número de canais a serem utilizados na fusão. A figura (??) apresenta o fluxograma para a fusão por média simples, podemos obter mais detalhes na referência ?.

**Figura 3.2:** Fusão por média simples.

3.9.2 Fusão usando o método wavelet discreta Multi-Resolução – MR-DWT

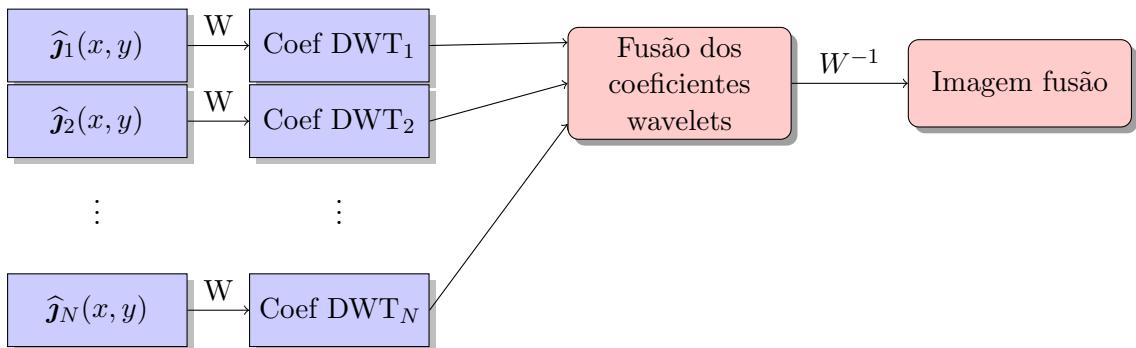
Esta seção é baseada em ?. Vamos aplicar os filtros DWT em cada imagem binária \hat{j}_c : um filtro de passa baixa \mathbf{L} na direção vertical, e um filtro de passa alta \mathbf{H} na direção horizontal, então ambos são *down-sampled* para formar as matrizes de coeficientes \hat{j}_{cL} e \hat{j}_{cH} .

As operações são repetidas nas matrizes de coeficientes \hat{j}_{cL} e \hat{j}_{cH} resultando em \hat{j}_{cLL} , \hat{j}_{cLH} , \hat{j}_{cHL} , e \hat{j}_{cHH} .

A fusão de evidências de bordas tem os seguintes passos para cada nível de resolução:

1. Calculate a decomposição DWT \hat{j}_{cLL} , \hat{j}_{cLH} , \hat{j}_{cHL} , and \hat{j}_{cHH} , para cada canal.
2. Compute \bar{j}_{cHH} , a média pixel a pixel para todas as \hat{j}_{cHH} decomposições.
3. Encontrar o máximo pixel a pixel de \hat{j}_{cLL} , \hat{j}_{cLH} , \hat{j}_{cHL} resultando em \bar{j}_{cLL} , \bar{j}_{cLH} , e \bar{j}_{cHL} .
4. O resultado da fusão I_F é a transformação inversa DWT para os coeficientes das matrizes \bar{j}_{cHH} , \bar{j}_{cLL} , \bar{j}_{cLH} , e \bar{j}_{cHL} .

O fluxograma para o método de fusão MR-DWT pode ser visto na figura (??). Na figura W e W^{-1} representam a transformação para obter a decomposição wavelet e a transformação inversa respectivamente,

**Figura 3.3:** Fusão MR-DWT.

3.9.3 Fusão usando o método wavelet discreta Multi-Resolução – MR-SWT

Esta seção é baseada em ?. A diferença entre os métodos MR-DWT e MR-SWT é a substituição do operador transformada discrete wavelet (DWT) por operador transformada estacionária wavelet (SWT).

O fluxograma para o método de fusão MR-SWT pode ser visto na figura (??). Na figura W e W^{-1} representam a transformação para obter a decomposição wavelet e a transformação inversa respectivamente

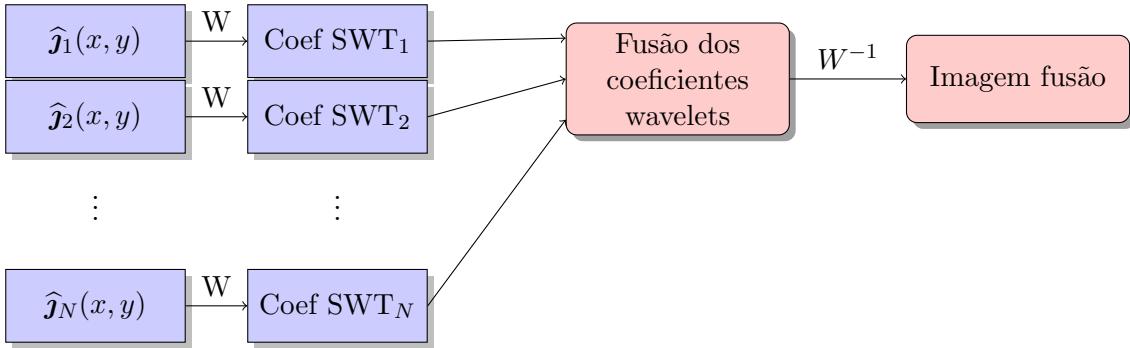


Figura 3.4: Fusão MR-SWT.

3.9.4 Fusão usando o método análise das componentes principais – PCA

Esta seção é baseada em ???. O método pode ser resumido nos seguinte passos:

1. Armazene as imagens binárias \hat{J}_c em colunas para obter am matriz $\mathbf{X}_{\ell \times n_c}$.
2. Calcule a matriz de covariância $\mathbf{C}_{n_c \times n_c}$ de $\mathbf{X}_{\ell \times n_c}$.
3. Calcule as matrizes de autovalores ($\mathbf{\Lambda}$) e autovetores (\mathbf{V}) da matriz de covariância, ordene os autovalores e seus respectivos autovalores de maneira decrescente.
4. Encontre o vetor $\mathbf{P} = (P(1), \dots, P(n_c)) = (\sum_{c=1}^{n_c} V(c))^{-1} \mathbf{V}$, onde \mathbf{V}_c é o autovetor associado com o maior autovalor de \mathbf{X} ; note que $\sum_{c=1}^{n_c} \mathbf{P}_c = 1$.
5. Realize a fusão $\mathbf{I}_F(x, y) = \sum_{c=1}^{n_c} P(c) \hat{J}_c(x, y)$.

O fluxograma para a fusão usando o método PCA pode ser visto na figura (??).

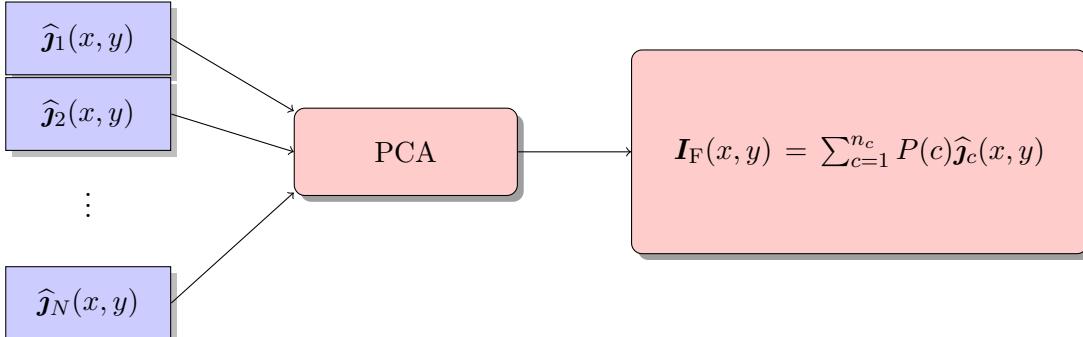


Figura 3.5: Fusão PCA.

3.9.5 Fusão usando a estatística ROC

O método ROC foi descrito em ???, de maneira geral podemos afirmar que o método baseado em estatística ROC funciona da seguinte maneira:

1. Adicione as imagens binárias \hat{J}_c para produzir a matriz de frequência (\mathbf{V}).
2. Aplique os limiares $t = 1, \dots, n_c$ em \mathbf{V} para gerar as matrizes M_t .
3. Compare cada \hat{i}_t com todos \hat{J}_c , ache a matriz de confusão para gerar a curva ROC. O limiar ótimo corresponde ao ponto da curva ROC mais perto (no sentido da distância euclidiana) da linha de diagnóstico.
4. A fusão \mathbf{I}_F é a matriz \hat{i}_t que corresponde ao limiar ótimo.

Com o objetivo de descrever o método desenvolvemos os aspectos teóricos da estatísticas ROC.

3.9.5.1 A estatística ROC

As teorias dos artigos ? e ? serão descritas baseadas nas propriedades estatísticas da curva *Receiver Operating Characteristics* (ROC) aplicadas em imagens PolSAR.

As curvas ROC são técnicas para visualizar, organizar e selecionar classificadores aplicados em aprendizado de máquina, visão computacional, inteligência artificial entre outras áreas similares demonstrando a capacidade do método para efetuar avaliações e comparações de algoritmos.

A construção da curva ROC consiste em um problema de classificação com duas classes rotuladas como instâncias do conjunto $\{p, n\}$, onde p representa a classe positiva e n representa a classe negativa. Estabelecendo as instâncias e o classificador podemos definir a matriz de confusão 2×2 .

A tabela (??) mostra a matriz de confusão, onde

1. Se a instância é positiva e classificada como positiva então é definida como positivo verdadeiro TP.
2. Se a instância é positiva e classificada como negativa então é definida como negativo falso FN.
3. Se a instância é negativa e classificada como negativa então é definida como negativo verdadeiro TN
4. Se a instância é negativa e classificada como positiva então é definida como positivo falso FP

Tabela 3.3: Matriz de confusão.

		Classes definidas como verdadeiras	
		p	n
Classes preditas	p	Positivos verdadeiros (TP)	Positivos falsos (FP)
	n	Negativos falsos (FN)	Negativos verdadeiros (TN)

Os valores da diagonal principal matriz de confusão representam as classificações realizadas corretamente, enquanto os elementos da diagonal secundária representam as classificações incorretas. A soma de todas as possibilidades de resultados em uma classificação retorna o valor $TP+FN+FP+TN=1$.

Definimos a prevalência como a soma dos positivos verdadeiros com os negativos falsos, $P=TP+FN$, portanto podemos afirmar que idealmente a prevalência deveria aproximar-se de TP. E definimos Nível-Q como a soma dos positivos verdadeiros com os positivos falsos, $Q=TP+FP$, o qual deveria aproximar-se de TP em situações ideais. De acordo com as definições acima, no detector de bordas otimizado a prevalência e o Nível-Q deveriam ser iguais, isto é, $P=Nível-Q$. Além disso, se definir $N=FP+TN$, e recorrer ao fato $TP+FN+FP+TN=1$, garantimos que $P+N=1$.

A matriz de confusão serve de base para a construção da curva ROC, definindo as seguintes métricas,

$$tp_{rate} = \frac{TP}{P}, \quad (3.142)$$

$$fp_{rate} = \frac{FP}{N}. \quad (3.143)$$

Na métrica conhecida por razão de positivos verdadeiros, taxa de acerto, *recall* ou sensibilidade, $tp_{rate} = \frac{TP}{P} = \frac{TP}{TP+FN}$, se o número de negativos falsos tendem a zero o valor da métrica aproxima-se do valor unitário. Assim como, na métrica conhecida como razão de positivos falsos, $fp_{rate} = \frac{FP}{N} = \frac{FP}{FP+TN}$, se o número de verdadeiros positivos tendem a zero o valor da métrica aproxima-se do valor unitário.

3.9.5.2 Fusão das evidências de bordas usando a estatística ROC

O método de fusão de evidências baseado na estatística ROC consiste em aplicar a estimativa de máxima verossimilhança em cada canal da imagem PolSAR, gerando imagens binárias com as evidências de bordas \hat{j}_c , sendo $c = 1, \dots, n_c$, onde n_c é o número de canais. Após, construímos a matriz de frequência V de mesmo tamanho de \hat{j}_c , tal que em cada pixel é armazenado um valor ao qual corresponde a frequência de ocorrências de evidências de bordas em cada canal \hat{j}_c . Ou seja, a matriz V é a soma pixel a pixel de todas as imagens de evidências de bordas \hat{j}_c . Podemos afirmar que quanto maior o valor de um pixel, maior sua probabilidade de ser uma borda.

Na matriz de frequência V são aplicados limiares CT_t , onde $t = 1, \dots, n_c$ gerando matrizes chamadas mapas de evidências de bordas \hat{i}_t . O objetivo do método é estimar automaticamente o limiar correspondente CT ótimo, proveniente do conjunto de limiares parciais CT_t .

O detector de bordas baseado nas estatística ROC é proposto como um método de fusão de evidências de bordas em diferentes canais da imagem PolSAR, e usado como ferramenta para detectar bordas.

Definições são propostas para desenvolver o algoritmo de detecção de bordas usando a estatística ROC. Então, de maneira similar a tabela (??) definimos $\{e, ne\}$ respectivamente como bordas e não bordas reais na imagem, e $\{E, NE\}$ respectivamente como bordas preditas e não bordas preditas pelo classificador. A tabela ?? redefini a matriz de confusão usando o método da máxima verossimilhança como classificador.

Tabela 3.4: Matriz de confusão para as evidências de bordas.

	e	ne
E	Positivos verdadeiros (TP)	Positivos falsos (FP)
NE	Negativos falsos (FN)	Negativos verdadeiros (TN)

Para construir a curva ROC aplicamos o método da estimativa de máxima verossimilhança em cada canal da imagem PolSAR, ou componentes derivados desse canais, gerando assim imagens binárias com evidências de bordas \hat{j}_c . Como descrito acima, realizando a soma de todas a matrizes \hat{j}_c resultando na matriz de frequência $V = \sum_{c=1}^{n_c} \hat{j}_c$. Na matriz V é aplicado os limiares CT_t com $t = 1, \dots, n_c$ gerando os mapas de evidências de bordas \hat{i}_t . O fluxograma do processo é mostrado na figura (??).

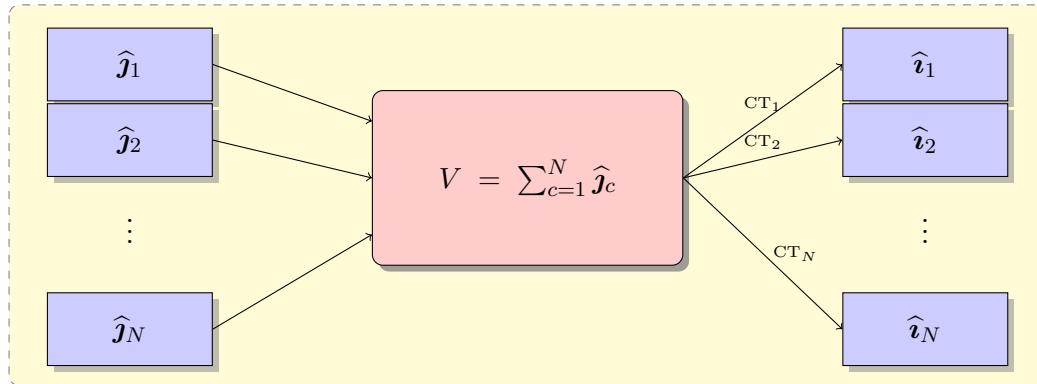


Figura 3.6: Fluxograma para a aplicação dos limiares na fusão de evidência ROC.

Definimos as entradas para cada matriz de confusão t ,

$$TP_t^c = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \hat{i}_{E_t} \cap \hat{j}_{E_c}, \quad (3.144)$$

$$\text{FP}_t^c = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \hat{\mathbf{i}}_{E_t} \cap \hat{\mathbf{j}}_{NE_c}, \quad (3.145)$$

$$\text{TN}_t^c = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \hat{\mathbf{i}}_{NE_t} \cap \hat{\mathbf{j}}_{NE_c}, \quad (3.146)$$

$$\text{FN}_t^c = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \hat{\mathbf{i}}_{NE_t} \cap \hat{\mathbf{j}}_{E_c}, \quad (3.147)$$

e construímos a matriz de confusão para cada j fixado arbitrariamente, desta forma, teremos n_c matrizes de confusão como a mostrada na tabela (??), definimos as médias para $c = 1, \dots, n_c$,

Tabela 3.5: Matriz de confusão para cada $\hat{\mathbf{i}}_t$

	$\hat{\mathbf{j}}_{E_c}$	$\hat{\mathbf{j}}_{NE_c}$
$\hat{\mathbf{i}}_{E_t}$	TP_t^c	FP_t^c
$\hat{\mathbf{i}}_{NE_t}$	FN_t^c	TN_t^c

$$\overline{\text{TP}}_t = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \text{TP}_t^c \quad (3.148)$$

$$\overline{\text{FP}}_t = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \text{FP}_t^c \quad (3.149)$$

$$\overline{\text{TN}}_t = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \text{TN}_t^c \quad (3.150)$$

$$\overline{\text{FN}}_t = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \text{FN}_t^c \quad (3.151)$$

A figura (??) mostra a comparação entre a imagem $\hat{\mathbf{i}}_t$ fixada arbitrariamente com todos as imagens $\hat{\mathbf{j}}_c$ gerando a métrica TP_t . A notação $\cap \hat{\mathbf{j}}_c$ significa que a comparação realizada é a intersecção pixel a pixel entre $\hat{\mathbf{i}}_t$ e $\hat{\mathbf{j}}_c$, fazendo a média de acordo com as equações as (??), (??) (??) e (??). A notação + refere-se a média de todos os TP_t , ou demais probabilidades FP_t , FN_t e TN_t .

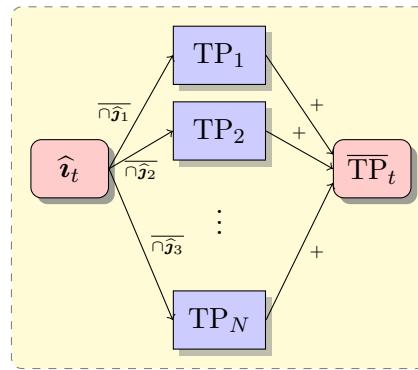


Figura 3.7: Estrutura para fusão de evidências com j escolhido arbitrariamente.

A curva ROC é encontrada calculando as razões de positivos verdadeiros, e a razão de positivos falsos para cada mapas de bordas \hat{i}_t , definidas respectivamente como:

$$\text{TP}_{rate_t} = \frac{\overline{\text{TP}}_t}{\overline{\text{TP}}_t + \overline{\text{FN}}_t}. \quad (3.152)$$

e

$$FP_{rate_t} = \frac{\overline{FP}_t}{\overline{FP}_t + \overline{TN}_t}. \quad (3.153)$$

onde $\overline{TP}_t + \overline{FN}_t$ representa o número médio de bordas verdadeiras para cada \hat{i}_t . Este número é sempre o mesmo independentemente de t e denotado por P.

O gráfico para a curva ROC é bidimensional no qual os valores das razões de positivos falsos FP_{rate_t} são medidos no eixo horizontal, e as razões de positivos verdadeiros TP_{rate_t} são medidos no eixo vertical. Assim, cada mapa de borda \hat{i}_t produz um ponto no gráfico $(FP_{rate_t}, TP_{rate_t})$ no plano ROC (eixos cartesianos) gerando a curva ROC. A referência ? mostra que o limiar ótimo ocorre na intersecção da curva ROC, ou perto da mesma, com a linha diagnóstico, linha vermelha na figura (??), formada conectando os pontos (P, P) e $(0, 1)$ no plano ROC. Escolhemos o limiar ótimo CT correspondendo ao parâmetro t que gera o ponto $(FP_{rate_t}, TP_{rate_t})$ mais próximo (métrica euclidiana) da reta diagnóstico determinando a imagem \hat{i}_t com maior acurácia de bordas detectadas.

A figura (??) mostra a fusão baseada na estatística ROC dos canais simulados hh, hv, e vv descritos no capítulo (3). O limiar ótimo aconteceu quando $t = 2$ por ser o ponto com menor distância euclidiana para a linha diagnóstico (linha vermelha) resultando na imagem com melhor acurácia \hat{i}_2 .

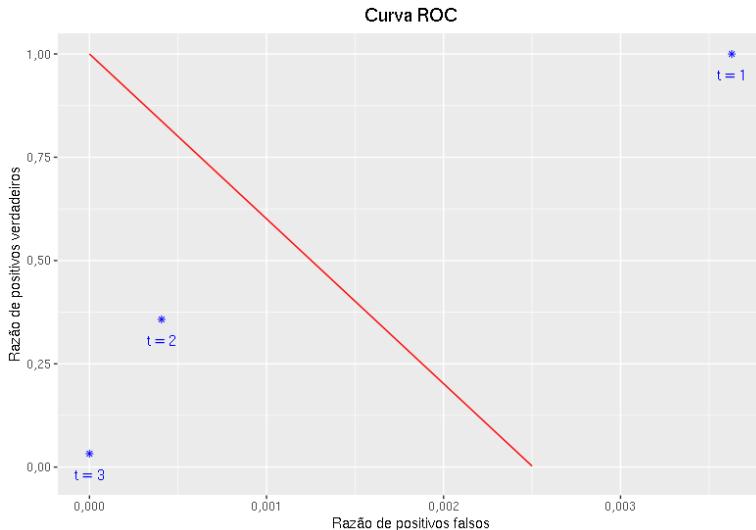


Figura 3.8: Curva ROC para a imagem simulada de duas folhas.

3.9.6 Fusão usando o método decomposição em valores singulares multi-resolução – MR-SVD

O método fusão MR-SVD, veja ?, trabalha de maneira similar ao MR-DWT. A diferença consiste em mudar os filtros DWT por filtros SVD. O método pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Organize as imagens binárias \hat{j}_c armazenando como blocos 2×2 não sobrepostos, onde cada bloco é colocado como um vetor 4×1 ordenando em colunas para formar a matriz de dados \mathbf{X}_1 com dimensão $4 \times \ell/4$.
2. Ache a decomposição SVD de $\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T$, onde \mathbf{U}_1 e \mathbf{V}_1 são unitárias e têm dimensões 4×4 e $\ell/4 \times \ell/4$ respectivamente. Os valores singulares são ordenados de maneira decrescente, e são colocados na diagonal principal da matriz \mathbf{S}_1 , as demais entradas da matriz são zeros.
3. Transforme as linhas de $\widehat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{U}_1^T \mathbf{X}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T$ sobre novas matrizes com dimensões $m/2 \times n/2$: $\{\Phi_1, \Psi_{1V}, \Psi_{1H}, \Psi_{1D}\}$.

4. Recomece o procedimento em (1) para Φ_r com $r = 2$ até o menor nível de resolução R .
5. A MR-SVD decomposição em cada canal é

$$\widehat{\mathbf{X}}_c \rightarrow \left\{ \Phi_R^c, \{\Psi_{rV}^c, \Psi_{rH}^c, \Psi_{rD}^c\}_{r=1}^R, \{\mathbf{U}_r^c\}_{r=1}^R \right\}.$$

6. Depois da decomposição ser aplicadas em todos os canais, compute a média dos Φ_R^c (Φ_R^f) no menor nível de resolução, e a média \mathbf{U}_r^c (\mathbf{U}_r^f), para cada r , onde f denota a fusão entre os canais.
7. Ache o máximo pixel a pixel de Ψ_{rV}^c , Ψ_{rH}^c e Ψ_{rD}^c : Ψ_{rV}^f , Ψ_{rV}^f , Ψ_{rH}^f e Ψ_{rD}^f .
8. A fusão \mathbf{I}_F é a transformação SVD para cada nível $r = R, \dots, 1$,

$$\mathbf{I}_F \leftarrow \left\{ \Phi_R^f, \{\Psi_{rV}^f, \Psi_{rH}^f, \Psi_{rD}^f\}_{r=R}^1, \{\mathbf{U}_r^f\}_{r=R}^1 \right\}.$$

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 Aplicação em imagem simulada

A metodologia (MLE) para a detecção será aplicada para uma imagem simulada baseada em ???. A imagem tem 400×400 pixels e foi gerada por duas amostras obedecendo a distribuição Wishart. Para cada par de matrizes de covariância Σ_{k_1} , Σ_{k_2} a imagem I_{k_1, k_2} é simulada de acordo com, amostras de $W_G(\Sigma_{k_1}, 4)$ para a metade esquerda da imagem, e amostras $W_G(\Sigma_{k_2}, 4)$ para a metade direita da imagem.

A imagem 400×400 pixels foi gerada

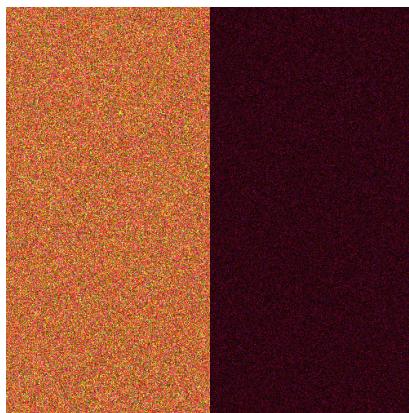


Figura 4.1: Decomposição de Pauli aplicada a imagem simulada

A decomposição de Pauli é baseada na combinação linear dos canais de intensidades,

$$(\mathbf{I}_{hh} + \mathbf{I}_{vv}, \mathbf{I}_{hh} - \mathbf{I}_{vv}, \mathbf{I}_{hv}).$$

Esta decomposição mostra a evidência de bordas em uma linha média da imagem, como apresentado na figura ??.

A imagem simulada usa as intensidades da matriz de covariância Σ_{k_1} e Σ_{k_2} definidas por

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 0.042811 & 0.000072 - 0.003180i & 0.010435 + 0.005022i \\ 0.000072 + 0.003180i & 0.035977 & 0.000784 + 0.004886i \\ 0.010435 - 0.005022i & 0.000784 - 0.004886i & 0.066498 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} 0.014380 & 0.001333 - 0.000076i & -0.000755 + 0.001570i \\ 0.001333 + 0.000076i & 0.002789 & -0.001044 + 0.001101i \\ -0.000755 - 0.001570i & -0.001044 - 0.001101i & 0.015387 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

as intensidades são as entradas da diagonal principal.

4.1.1 Função Densidade de Probabilidade Univariada Gamma

4.1.1.1 Estimativa para os parâmetros (μ, L)

As figuras (??)??, (??)??, (??)?? mostram os gráficos das funções (??) indicando as evidências de bordas nos canais considerados, os quais foram gerados com a estimativa dos parâmetros (μ, L), fixando arbitrariamente a linha 150 da imagem simulada, e definindo o coeficiente de folga para as extremidades igual a 14 pixels. A característica comum dessas funções é não ser diferenciáveis, dificultando o uso de métodos de otimização que calculam derivada. O problema foi resolvido usando o método *Simulated Annealing* generalizado (GenSA) ?, adequado para funções não diferenciáveis.

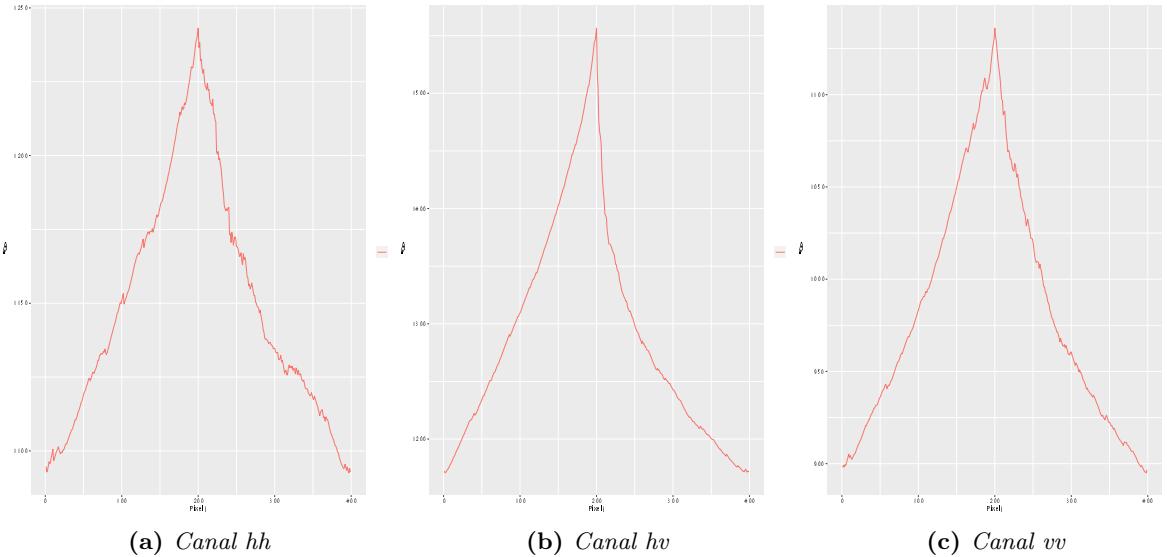


Figura 4.2: Funções log-verossimilhanças com a estimativa de parâmetros (μ, L)

O método estimativa de máxima verossimilhança (MLE) foi aplicado para cada linha da imagem simulada com duas amostras, e as evidências de bordas estão mostradas na figura (??).

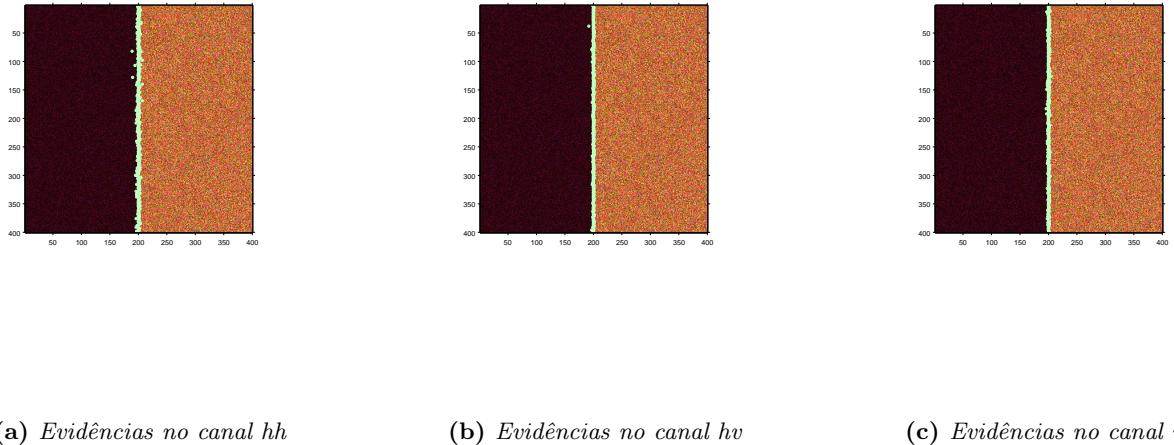


Figura 4.3: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com (μ, L) estimados.

4.1.1.2 Estimativa para o parâmetro μ com L fixo

As figuras (??)??, (??)??, (??)?? mostram os gráficos das funções (??) indicando as evidências de bordas a serem encontradas nos canais considerados, as quais foram geradas com a estimativa do parâmetro (μ) , com a definição $L = 4$, fixando arbitrariamente a linha 150 da imagem simulada, e definindo o coeficiente de folga para as extremidades igual a 14 pixels. A característica comum dessas funções é não ser diferenciáveis, dificultando o uso de métodos de otimização que calculam a derivada da função. O problema foi resolvido usando o método *Simulated Annealing* generalizado (GenSA) ?, adequado para funções não diferenciáveis.

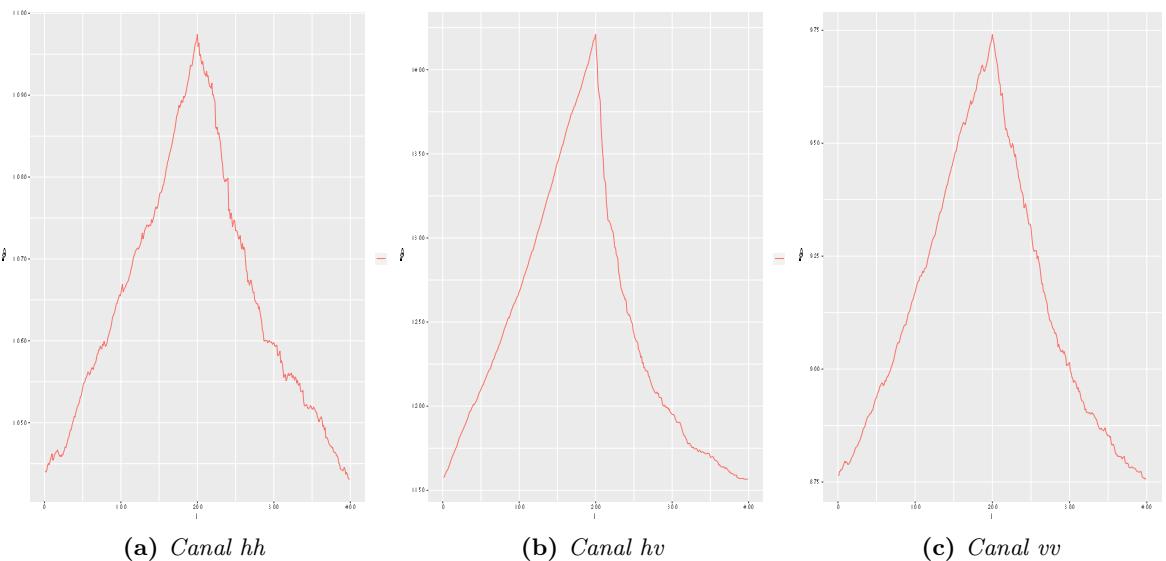
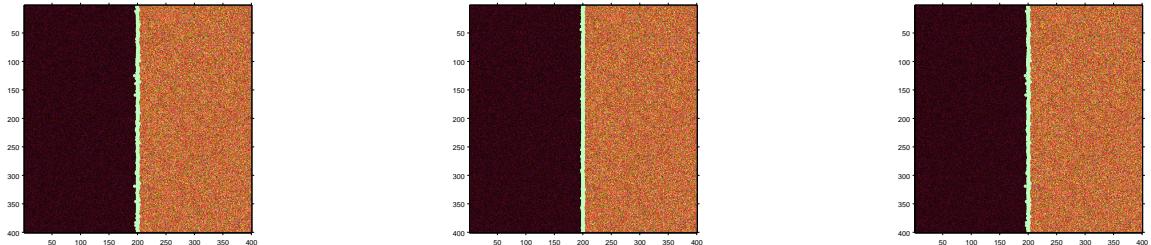


Figura 4.4: Funções log-verossimilhanças com a estimativa do parâmetro (μ) e L fixo

O método da estimativa de máxima verossimilhança (MLE) foi aplicado nas linhas da imagem simulada com duas amostras, e as evidências de bordas estão mostradas na figura (??).

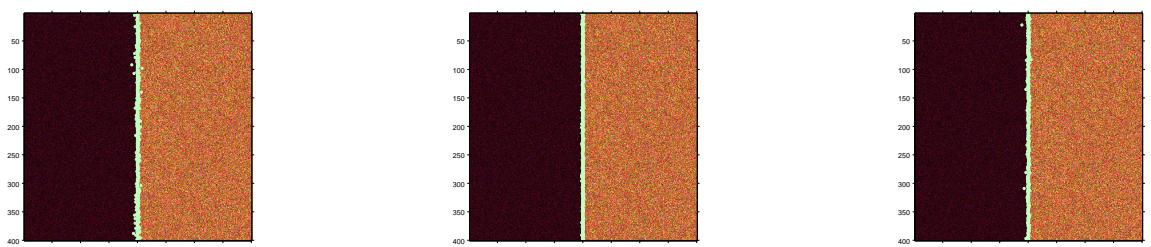


(a) Evidências no canal hh

(b) Evidências no canal hv

(c) Evidências no canal vv

Figura 4.5: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado e L fixo.



(a) Evidências no canal hh

(b) Evidências no canal hv

(c) Evidências no canal vv

Figura 4.6: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado usando a média.

4.1.2 Distribuição univariada produto de intensidades

Observamos que o uso da função densidade magnitude do produtos não é adequado para gerar a função log-verossimilhança, as mesmas tem características de serem planas dificultando o cálculo do valor máximo. O cálculo inadequado dos parâmetros geram uma função (??) com oscilação degenerando o ponto ótimo no processo de otimização.

4.1.2.1 Estimativas para os parâmetros (ρ , L)

O método estimativa de máxima verossimilhança(MLE) usa a pdf (??) para encotrar a função log-verossimilhança (??), para qual realizamos as estimativas dos parâmetros (ρ , L) usando o método de otimização BFGS.

Notamos que a forma das funções (??) dificultam encontrar o ponto de máximo, devido a suas características de serem planas. Para gerar a figura ?? escolhemos a linha 35 da imagem simulada e o pixel $j = 150$, foram realizados testes com outras linhas da imagem simulada, assim como outros pixeis j e os gráficos apresentavam o mesmo comportamento.

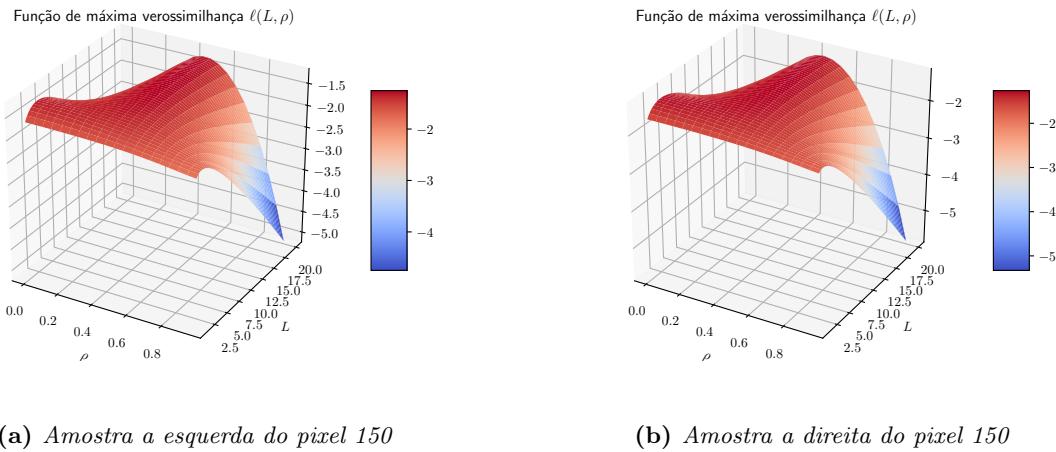


Figura 4.7: Função log-verossimilhança.

4.1.2.2 Estimativa para o parâmetros (ρ)

O mesmo comportamento é observado quando fixamos o número de visadas e estimamos o parâmetro ρ , isto é, o uso da função densidade magnitude do produtos com o número de visadas fixo não é adequado para gerar a função log-verossimilhança, as mesmas tem características de serem planas dificultando o cálculo do valor máximo. O cálculo inadequado do coeficiente ρ gera uma função (??) com muita oscilação, degenerando o ponto ótimo no processo de otimização.

O método estimativa de máxima verossimilhança(MLE) usa a pdf (??) com visadas fixas, para encotrar a função log-verossimilhança (??), para qual realizamos a estimativa do parâmetro ρ usando o método de otimização BFGS.

A figura (??) mostra a função log-verossimilhança para distribuição univariada produto de magnitudes com radial(linha) 35 fixa, na radial escolhemos arbitrariamente o pixel igual a 150, e definimos o número de visadas(L) em 1,2, 4, e 8 para construir as funções. Notamos nas figuras que a função é plana evidenciando a dificuldade para encontrar o ρ máximo. Esse fato tem consequência na construção da função de log-verossimilhança total (??) apresentando forte oscilação e dificultando encontrar evidências de bordas para a distribuição produto de intensidades.

Podemos concluir que o uso da função densidade magnitude do produtos tanto com estimativas de dois parâmetros como estimativa de um parâmetro não é adequado para gerar a função

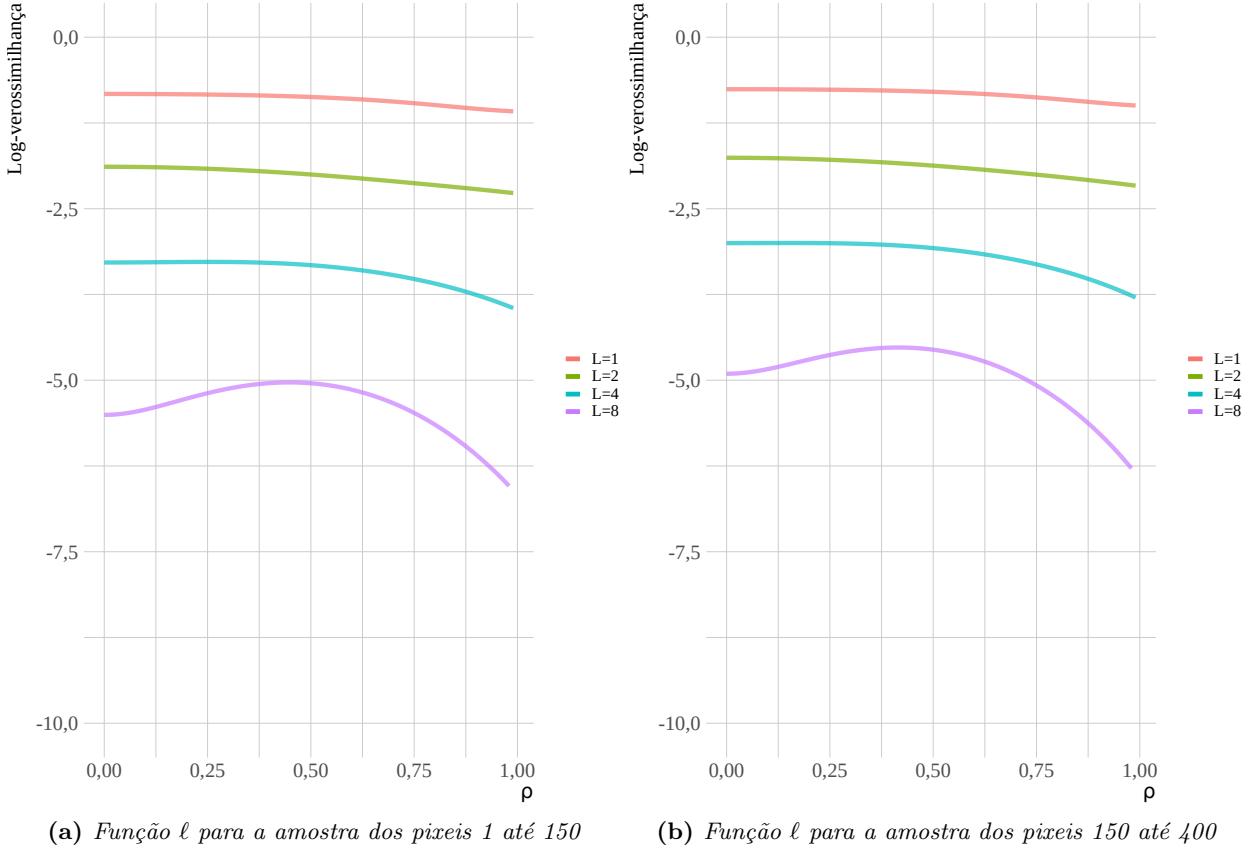


Figura 4.8: Função log-verossimilhança para distribuição produto de intensidades com diferentes L fixos

log-verossimilhança. Nesse ponto sugerimos uma melhor investigação deste tipo de funções para contornar esse problema, a referência ? relata problemas semelhantes.

4.1.3 Distribuição univariada razão de intensidades com L fixo

As figuras (??)??, (??)??, (??)?? mostram os gráficos das funções (??) indicando as evidências de bordas nos canais considerados, os quais foram gerados com a estimativa dos parâmetros (ρ, τ) , fixando arbitrariamente a linha 150 da imagem simulada, e definindo o coeficiente de folga para as extremidades igual a 14 pixels. A característica comum dessas funções é não ser diferenciáveis, dificultando o uso de métodos de otimização que calculam derivada. O problema foi resolvido usando o método *Simulated Annealing* generalizado (GenSA) ?, adequado para funções não diferenciáveis.

O método da estimativa de máxima verossimilhança (MLE) aplicado nas linhas da imagem simulada com duas amostras, e as evidências de bordas estão mostradas na figura ??).

As figuras (??)??, (??)??, (??)?? mostram os gráficos para a razão das funções (??) com

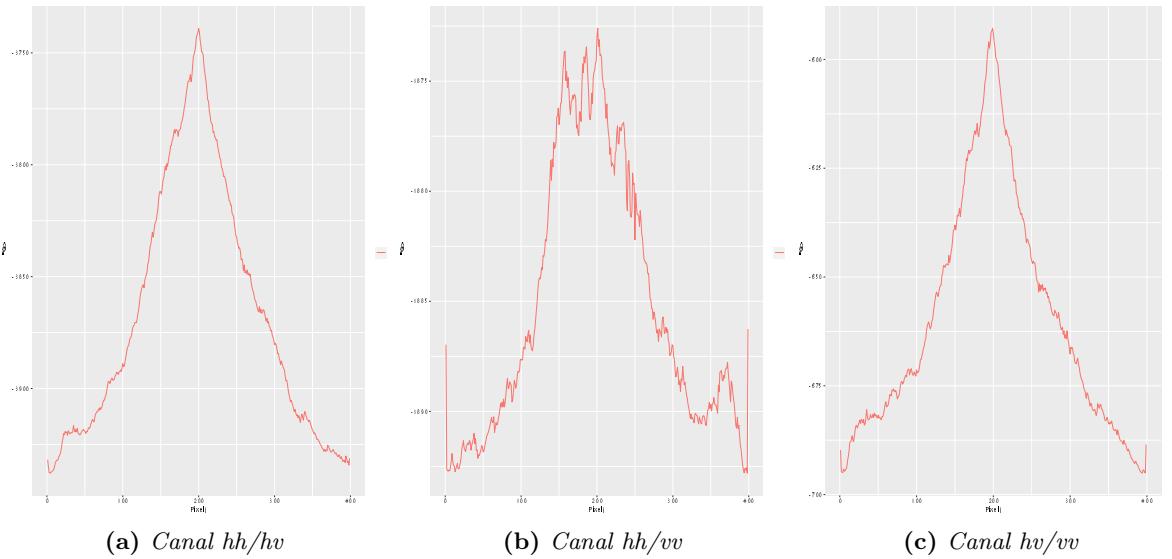


Figura 4.9: Funções log-verossimilhanças para PDF razão de intensidades

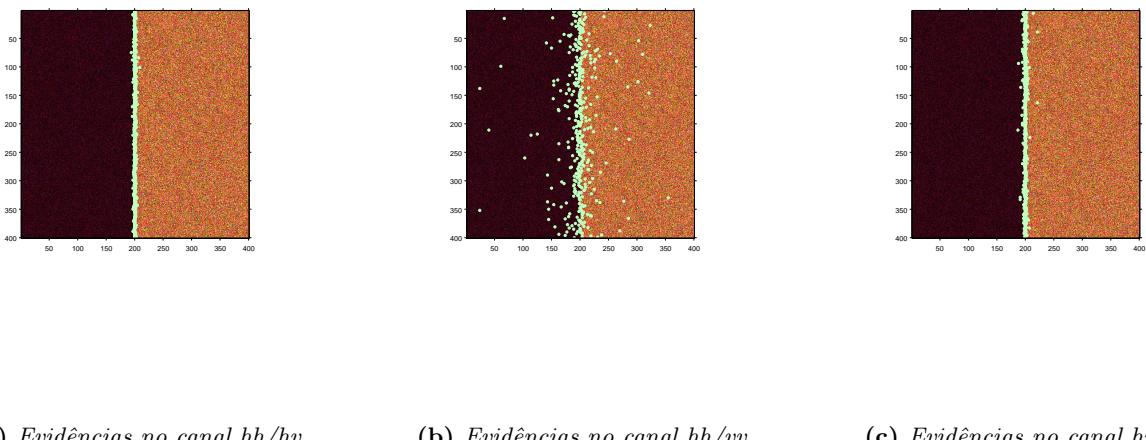


Figura 4.10: Evidências de bordas para os três canais de intensidade com μ estimado.

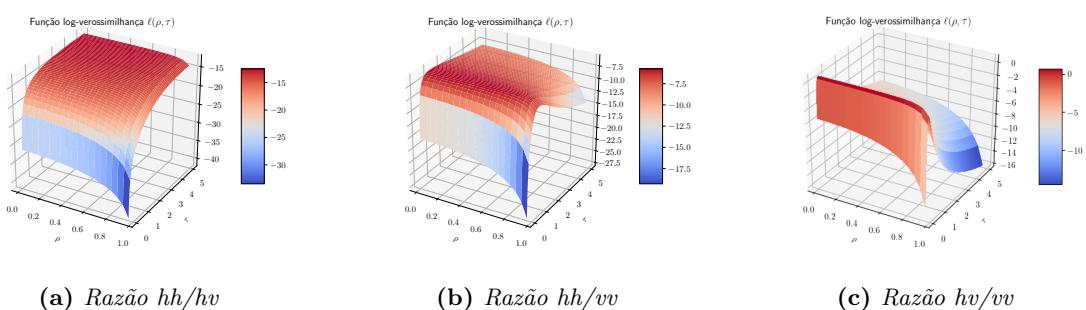


Figura 4.11: Funções log-verossimilhanças com a estimativa de parâmetros (ρ, τ) e amostra a esquerda do pixel fixado 150

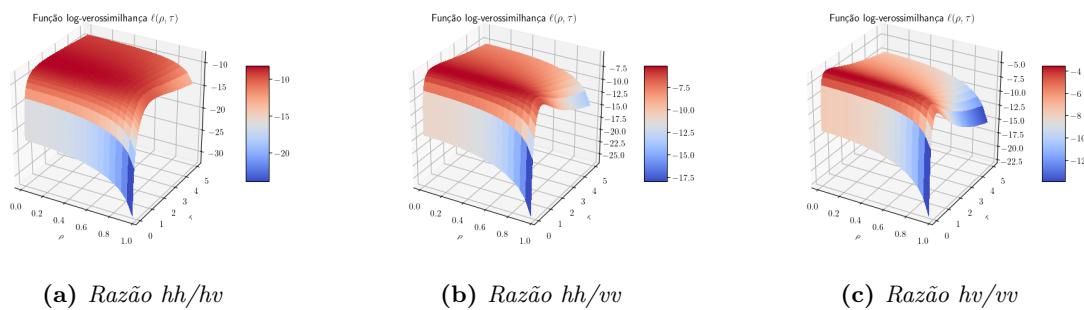


Figura 4.12: Funções log-verossimilhanças com a estimativa de parâmetros (ρ, τ) e amostra a direita do pixel fixado 150

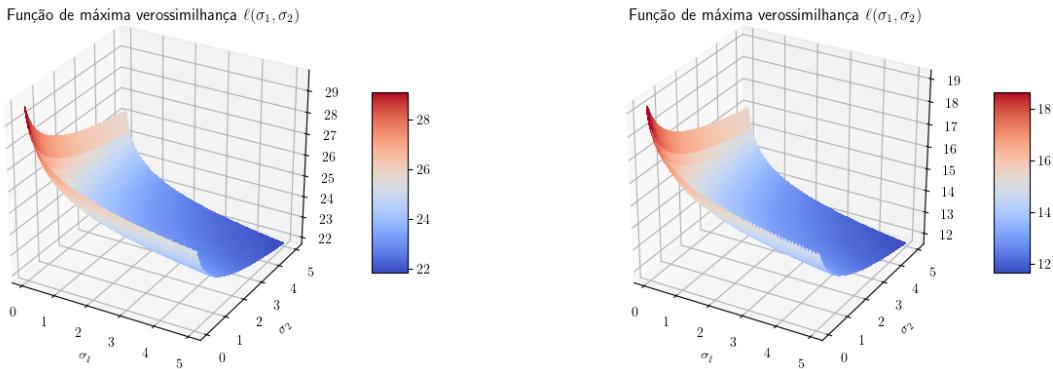
4.1.4 Distribuição bivariada produto de intensidades com L fixo

Observamos que o uso da função densidade de probabilidade bivariada para intensidades mostrou que não é adequada para gerar a função log-verossimilhança, as mesmas tem características de serem planas dificultando o cálculo do valor máximo. O cálculo inadequado dos parâmetros geram uma função (??) com oscilação degenerando o ponto ótimo no processo de otimização. Nesse processo usamos $L = 4$ fixado a priori.

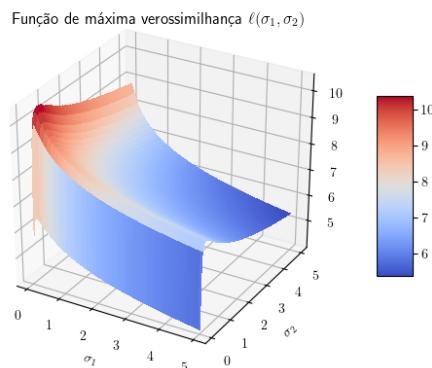
4.1.4.1 Estimativas para os parâmetros $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$

O método estimativa de máxima verossimilhança(MLE) usa a pdf (??) para encontrar a função log-verossimilhança (??), para qual realizamos as estimativas dos parâmetros $(\rho, \Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ usando o método de otimização BFGS.

Notamos que a forma das funções (??) dificultam encontrar o ponto de máximo, devido a suas características de serem planas. Para gerar a figura ?? escolhemos a linha 35 da imagem simulada e o pixel $j = 150$, foram realizados testes com outras linhas da imagem simulada, assim como outros pixeis j e os gráficos apresentavam o mesmo comportamento.



(a) Amostra a esquerda do do produto bivariada 150 para $\rho = 0.1$ **(b)** Amostra a esquerda do pixel 150 para $\rho = 0.5$



(c) Amostra a esquerda do pixel 150 para $\rho = 0.9$

Figura 4.13: Função log-verossimilhança para a pdf a bivariada produto de intensidades .

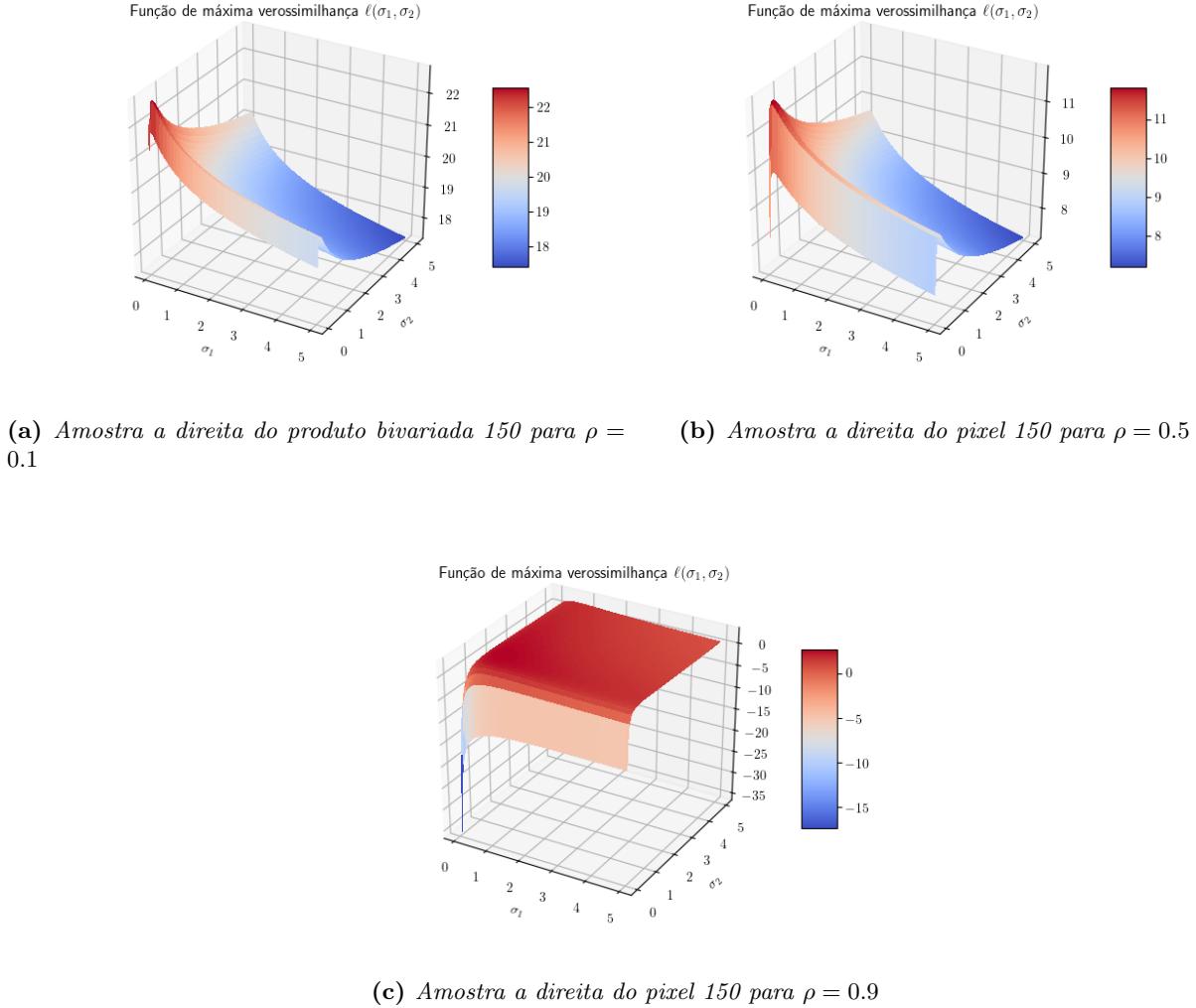


Figura 4.14: Função log-verossimilhança para a pdf a bivariada produto de intensidades .

4.1.5 Distribuição univariada span com L fixo

As figuras (??)??, (??)??, mostram os gráficos das funções (??) indicando as evidências de bordas. Para gerar o primeiro gráfico usamos a média para da amostra para estimar os parâmetros μ utilizados, para gerar o segundo gráfico usamos o programa BFGS para estimar o parâmetro μ . Fixamos arbitrariamente a linha 150 da imagem simulada, e definindo o coeficiente de folga para as extremidades igual a 14 pixels. A característica comum dessas funções é não ser diferenciáveis, dificultando o uso de métodos de otimização que calculam derivada. O problema foi resolvido usando o método *Simulated Annealing* generalizado (GenSA) ?, adequado para funções não diferenciáveis.

O método estimativa de máxima verossimilhança (MLE) foi aplicado para cada linha da imagem simulada com duas amostras, e as evidências de bordas para as duas técnicas de estimativa de parâmetros estão mostradas na figura (??).

4.2 Medida dos erros para a detecção de evidências de bordas nas imagem simuladas

O erro é medido calculando a menor distância euclidiana do pixel de referência em cada radial (linha) na imagem Ground Truth (GT) para todos os pixels detectado na mesma radial. Armaze-

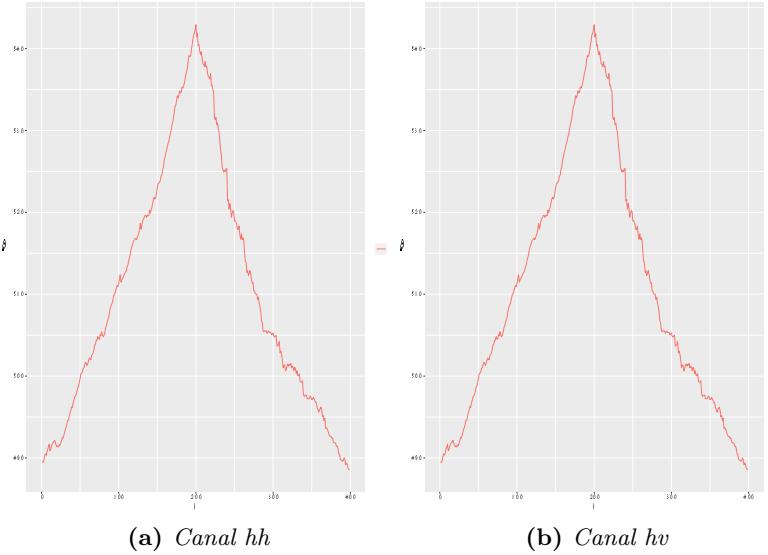


Figura 4.15: Funções log-verossimilhanças com soma e estimativa de parâmetros

namos as menores distâncias em um vetor de frequência e encontramos o vetor $H(k)$ denotando o número de replicações para qual o vetor de frequência é menor que um número de pixel fixado k_s . A estimativa de probabilidade é encontrada por $f(k) = H(k)/n_r$, onde n_r é o número de radiais, e o índice k varia entre 1 e k_s definido. O algoritmo é descrito em ? e definimos $k_s = 10$ para encontrar todas as probabilidades para o erro.

O gráfico do erro é mostrado na figura ??,

O gráfico mostra acurado desempenho do algoritmo no canal (hv), assim como a detecção deficitária para o canal formado pela distribuição razão entre as intensidades (hh) e (vv), fato que já poderíamos inferir pela inspeção visual.

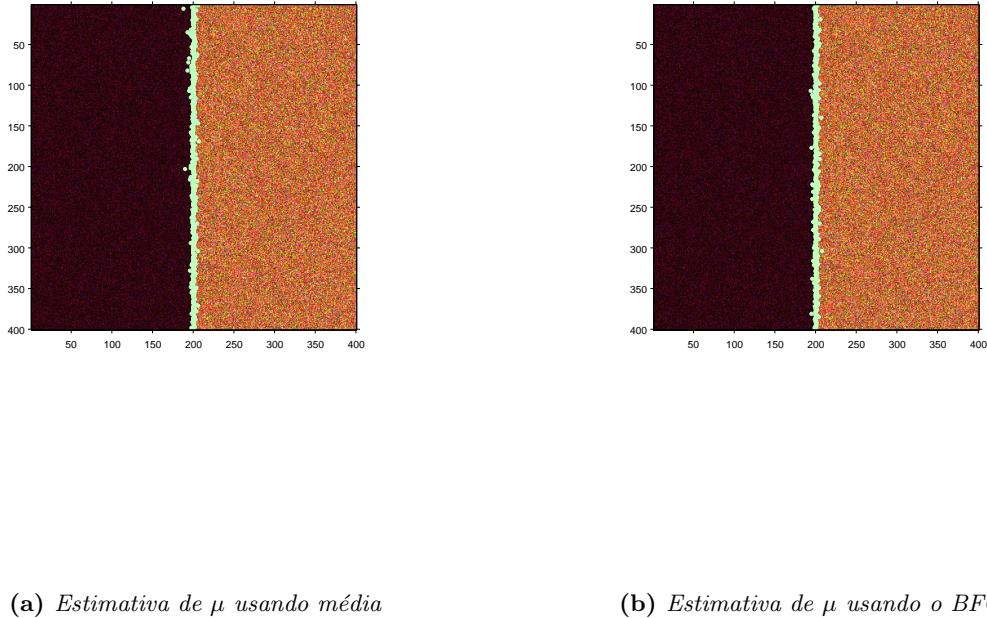


Figura 4.16: Funções log-verossimilhanças com soma e estimativa de parâmetros

4.3 Aplicação em imagem de adquiridas por sensores PolSAR

A imagem da região de Flevoland de dimensão 750×1024 pixels é uma imagem PolSAR capturada pelo sensor AIRSAR com banda-L. Usamos a imagem capturando várias sub-regiões para realizar teste numéricos. A imagem capturada no sensor é mostrada na figura ??

O primeiro teste é realizado na região destacada na figura ?? onde é mostrado as radiais usada para extrair as informações.

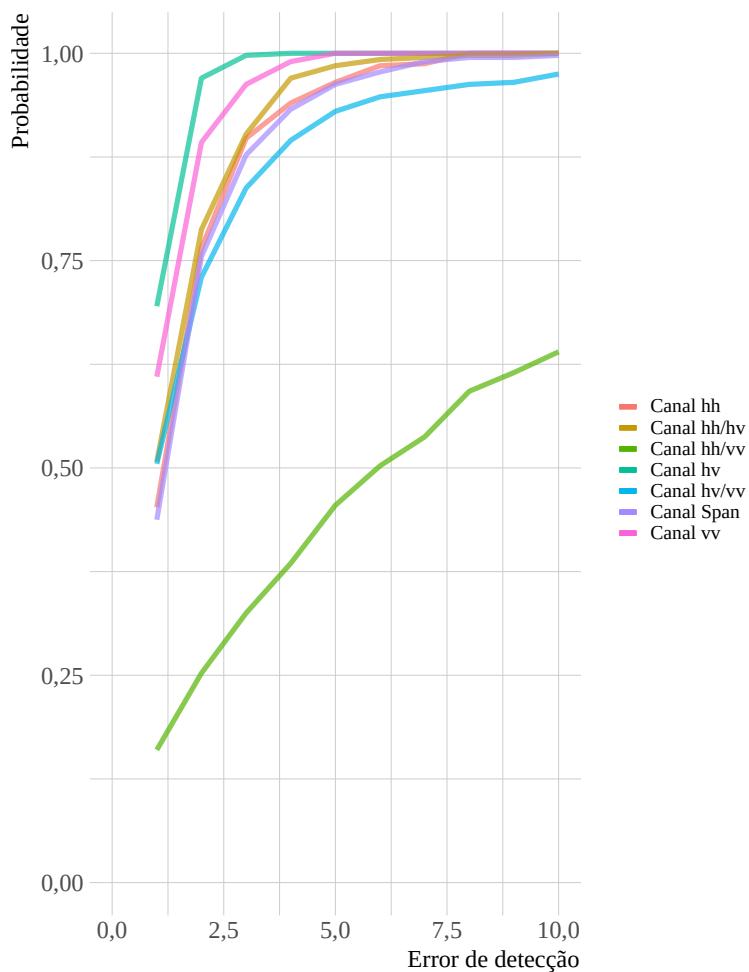


Figura 4.17: Métricas para a detecção em imagem simulada



Figura 4.18: Imagem da região de Flevoland



Figura 4.19: Imagem da região de Flevoland com radiais

Para facilitar a visualização é capturado uma região de interesse na imagem onde destacamos as radiais que podem ser vista na figura ?????. A figura ???? mostra em pixels vermelhos as bordas que usaremos de referência, a qual é conhecida por *Ground Truth* (GT). Chamaremos de região de interesse I (ROI-I)

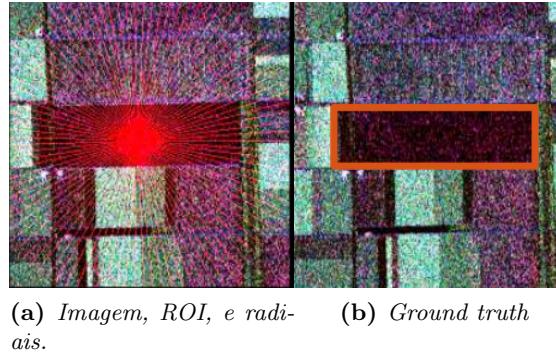


Figura 4.20: Decomposição de Pauli para a imagem, e ground truth de referência para a (ROI-I)

As Figuras. ????, ????, e ??? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI-I estabelecemos 100 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels das extremidades das radiais. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região selecionada da imagem, canal, sensor e imagem. Na ROI-I os 14 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

É digno de nota, o esquema proposto no qual a estimativa de parâmetros é realizada pelo programa MaxLik aplicado nas equações reduzidas, e posterior uso das estimativas nas funções de máxima verossimilhança total onde encontramos seu máximo usando o programa GenSA obteve as evidências de bordas acuradamente.

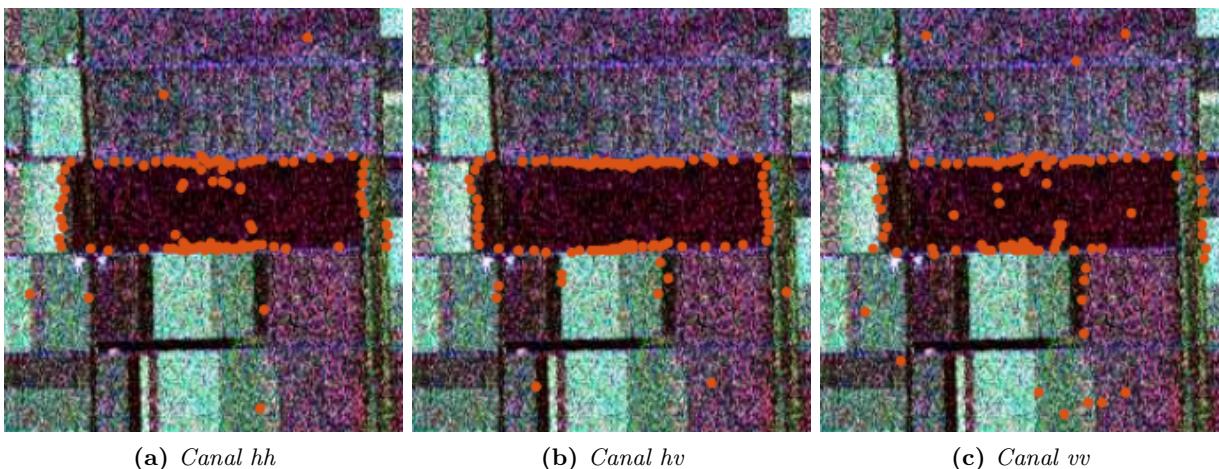


Figura 4.21: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

Figuras ????, ??, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

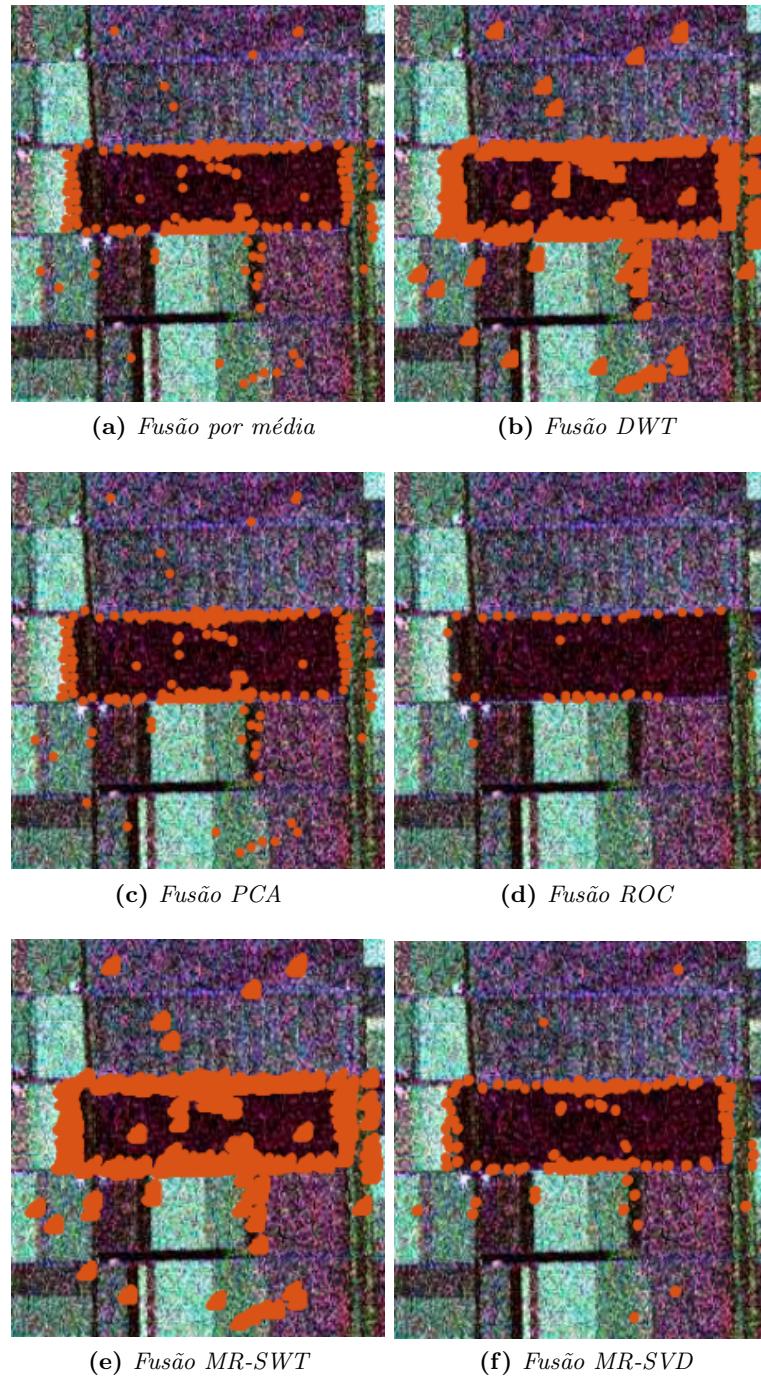


Figura 4.22: Resultados da aplicação dos seis métodos de fusão

Os métodos de fusão por média e fusão PCA produzem resultados similares. MR-SVD produz uma considerável vantagem em descartar os outliers, porém o tempo de processamento é maior em comparação com os demais métodos. O método usando a estatística ROC produz bordas acuradas, com poucos outliers, porém de forma esparsa. O autor acredita que é um método com potencial quando consideramos mais canais, ou outras funções de densidades de probabilidades para obter evidências de bordas. Ambos métodos baseados em *wavelets* produzem densas bordas e muitos outliers, destacamos que podemos melhorar a detecção com o uso de pós-processamento, ver na referência ?. Observamos que o pós-processamento pode ser usado em todos em métodos.

A imagem da baía de São Francisco de dimensão 450×600 pixels é uma imagem PolSAR capturada pelo sensor AIRSAR com banda-L. Usamos a imagem para realizar teste numéricos. A imagem capturada pelo sensor é mostrada na figura ??

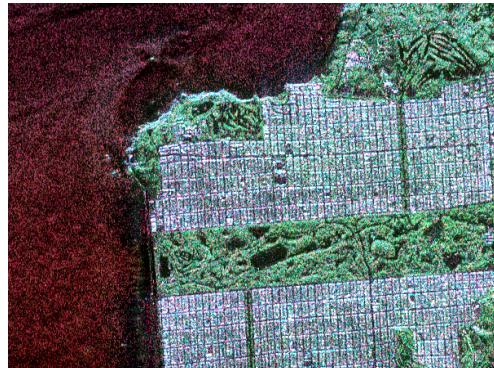


Figura 4.23: Imagem da baía de São Francisco

Na figura ??? é destacado a região de interesse (ROI) escolhida com 25 radiais. Em cada radial vamos extrair os dados para obter as informações sobre as localizações das evidências de bordas. A figura ??? mostra a imagem *Ground Truth* (GT) que foi gerada para realizar os resultados numéricos.



(a) Imagem, ROI e radiais. (b) Ground Truth

Figura 4.24: Decomposição de Pauli para imagem de São Francisco, e a ground truth

As Figuras. ???, ???, e ??? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidos pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a ROI estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 25 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidades. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na ROI os 25 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

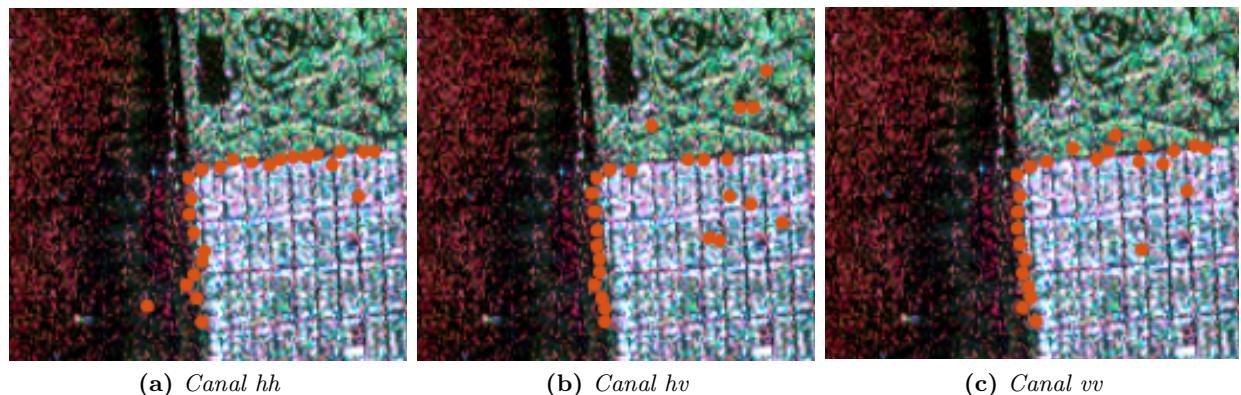


Figura 4.25: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de São Francisco

Figuras ????, ??, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

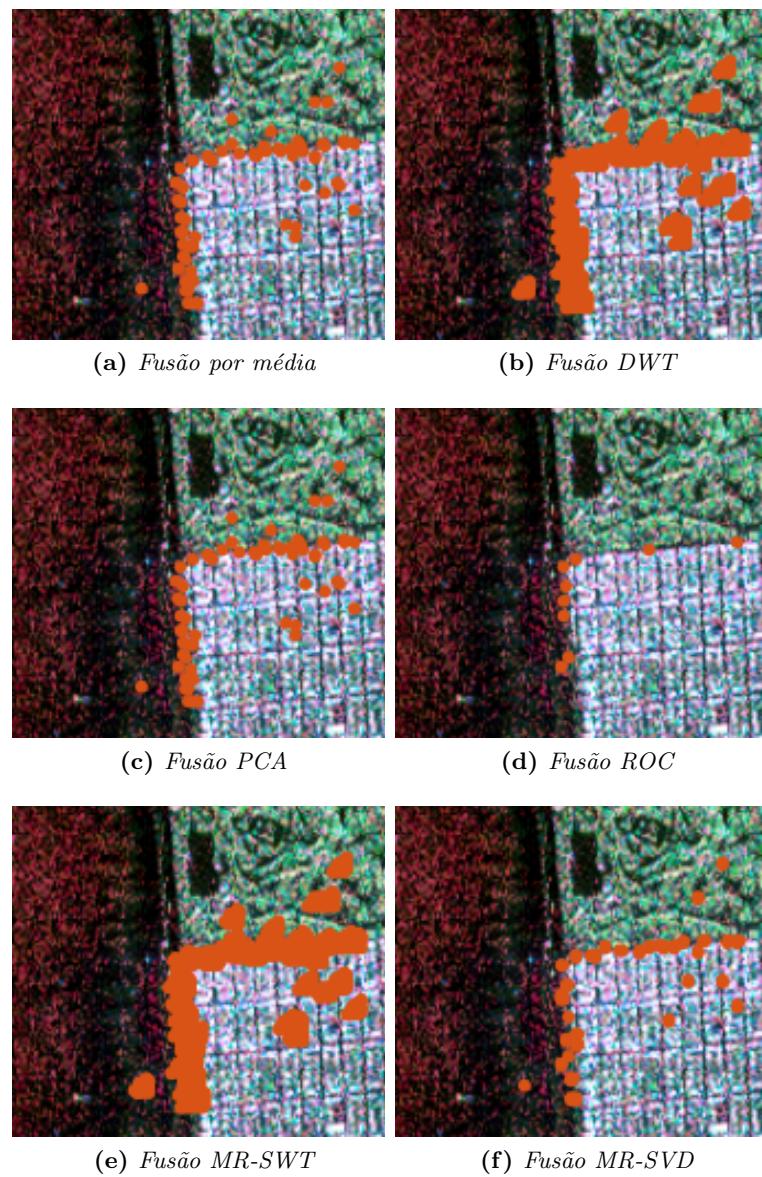
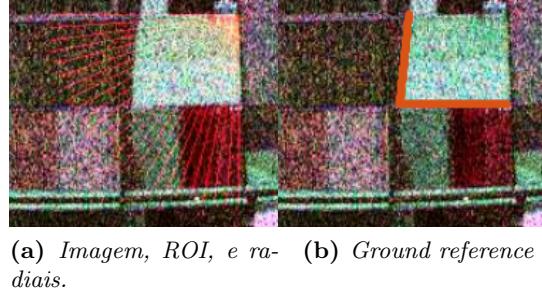


Figura 4.26: Resultado da aplicação dos seis método de fusão para a imagem de São Francisco

Uma segunda região na imagem de Flevoland é capturado para os testes e chamaremos de região de interesse II (FLEV-ROI-II). A imagem com as radiais é mostrada na figura ??. A figura ?? mostra as bordas em pixels vermelhos que usaremos de referência a qual chamaremos de *Ground Truth* (GT).



(a) *Imagen, ROI, e radiais.* (b) *Ground reference*.

Figura 4.27: Decomposição de Pauli para a FLEV-ROI-II da imagem de Flevoland, e a ground truth

As Figuras. ??, ??, ??, e ?? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidas pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a FLEV-ROI-II estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidade. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na FLEV-ROI-II os 14 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

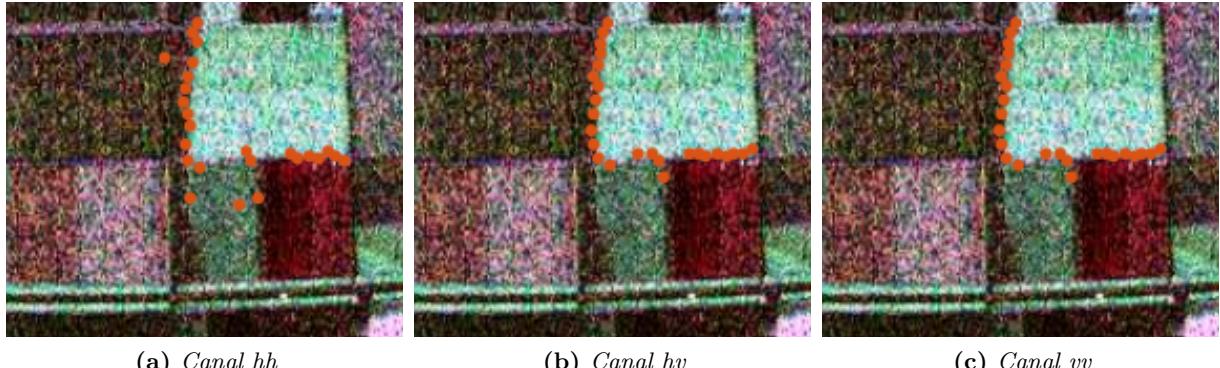


Figura 4.28: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para FLEV-ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 14 pixel

Figuras ??, ??, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos com fusão de evidência de bordas propostos.

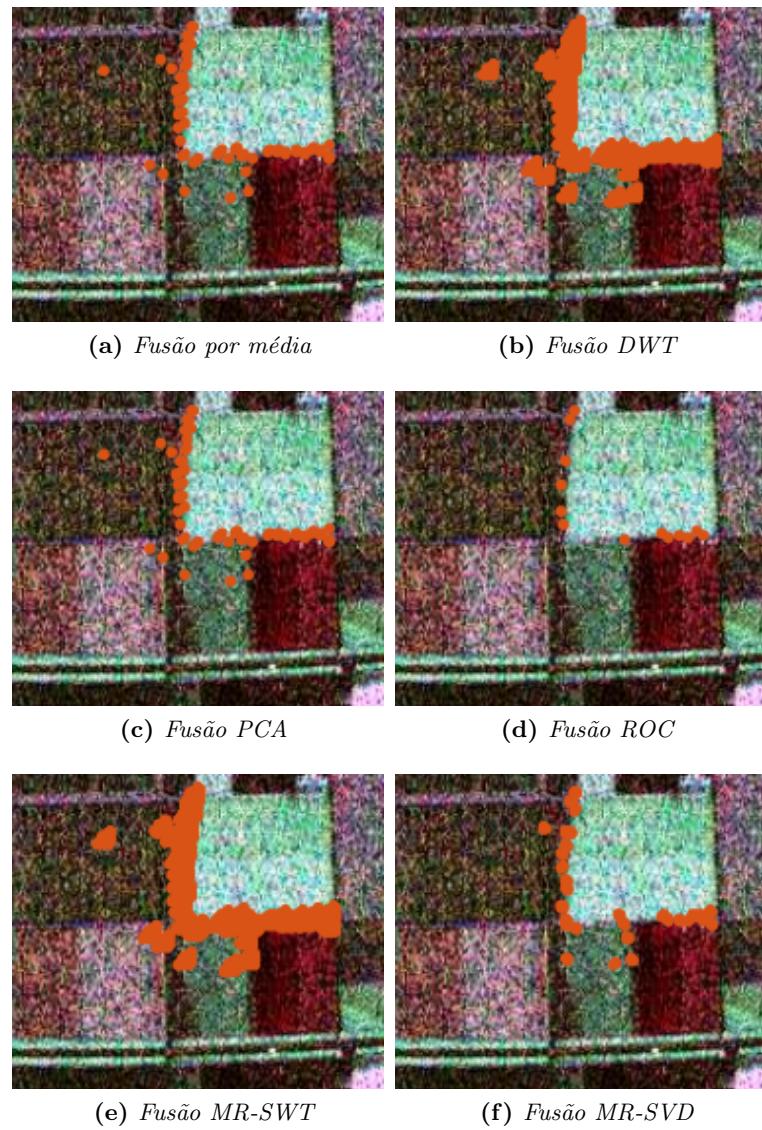


Figura 4.29: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a FLEV-ROI-II de flevoland com 14 pixels de folga

As Figuras. ???, ???, e ??? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidas pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a FLEV-ROI-II estabelecemos 25 radiais com comprimento de 120 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 25 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidades. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na FLEV-ROI-II os 25 pixels escolhidos em cada extremidade foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

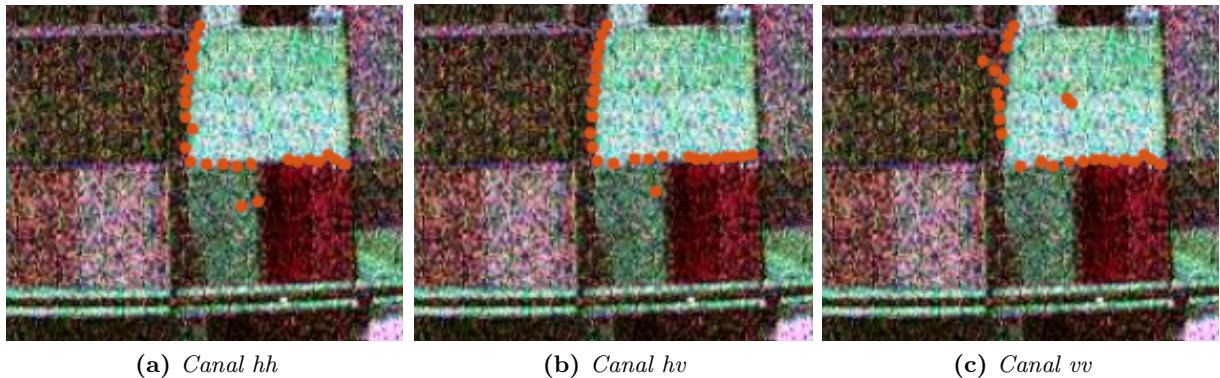


Figura 4.30: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para FLEV-ROI-II na imagem de Flevoland com folga de 25 pixel

Figuras ???, ??, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

4.3.1 Mais pdfs

Tabela 4.1: Processing times (fusion method).

Method	Aver.	PCA	MR-DWT	MR-SWT	ROC	MR-SVD
Time (s)	0.01797480	0.054634950	0.06949015	0.17152435	2.1889033	1.14976175
Rel. time	1.00					

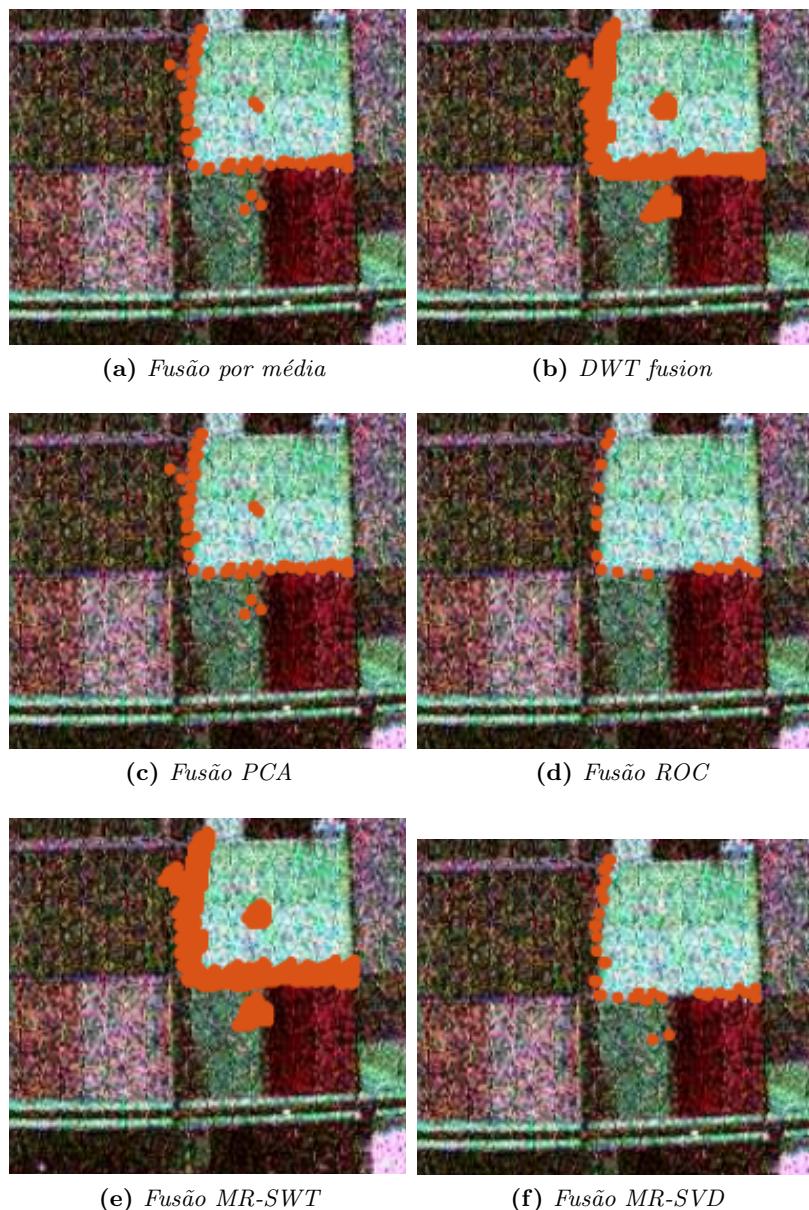


Figura 4.31: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a FLEV-ROI-II de flevoland com 25 pixels de folga

4.4 Flevoland região 2 - mais pdfs

Região 2 Flevoland com mais pdfs

4.5 San Francisco

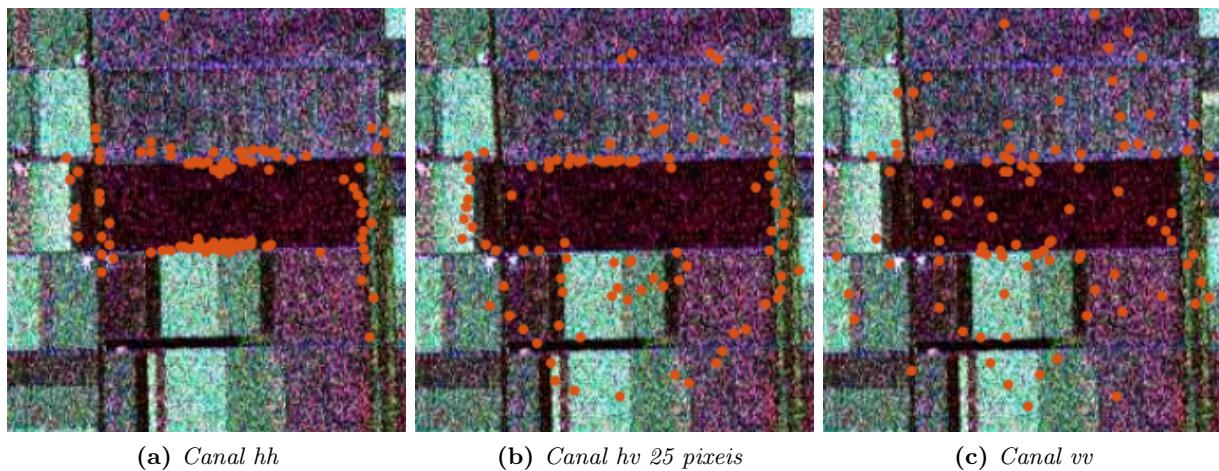


Figura 4.32: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

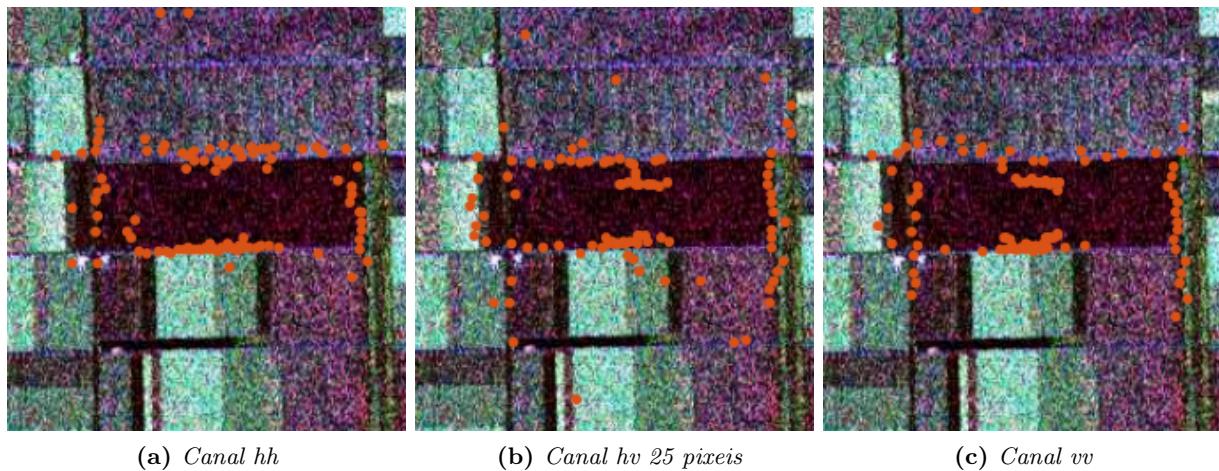


Figura 4.33: Evidências de bordas para os três canais razão de intensidades na imagem de Flevoland

Tabela 4.2: Processing times 4 canais (fusion method).

Method	A	ROC	MR-SVD
Time (s)	0.0108	9132	1.21855195
Rel. time			

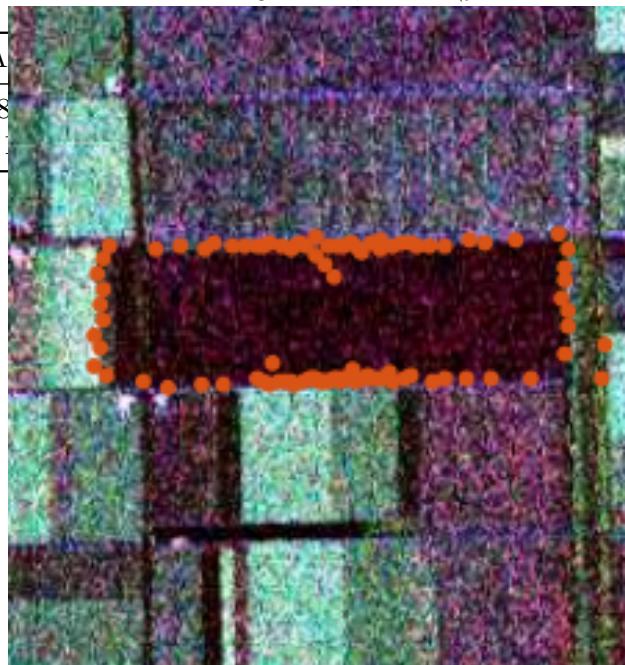


Figura 4.34: Span

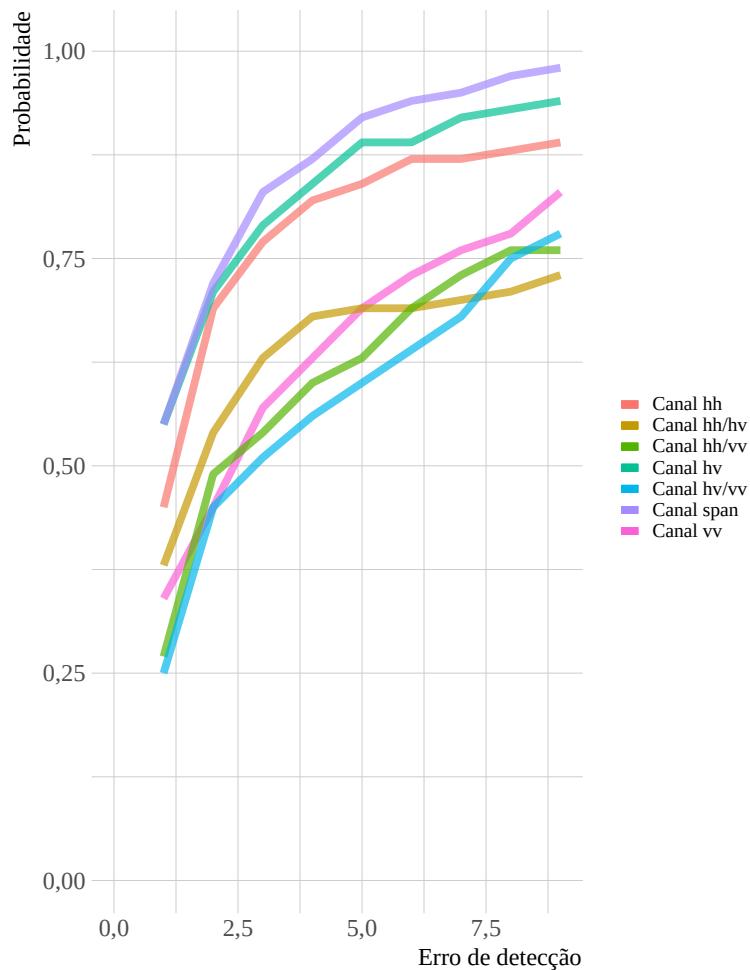


Figura 4.35: Métricas para a detecção de evidências em imagem flevoland

Tabela 4.3: Processing times 7 canais sf (fusion method).

Method	Aver.	PCA	MR-DWT	MR-SWT	ROC	MR-SVD
Time (s)	0.0062478	0.03716775	0.0318234	0.07701785	0.6952072	0.4433903
Rel. time	1.00					

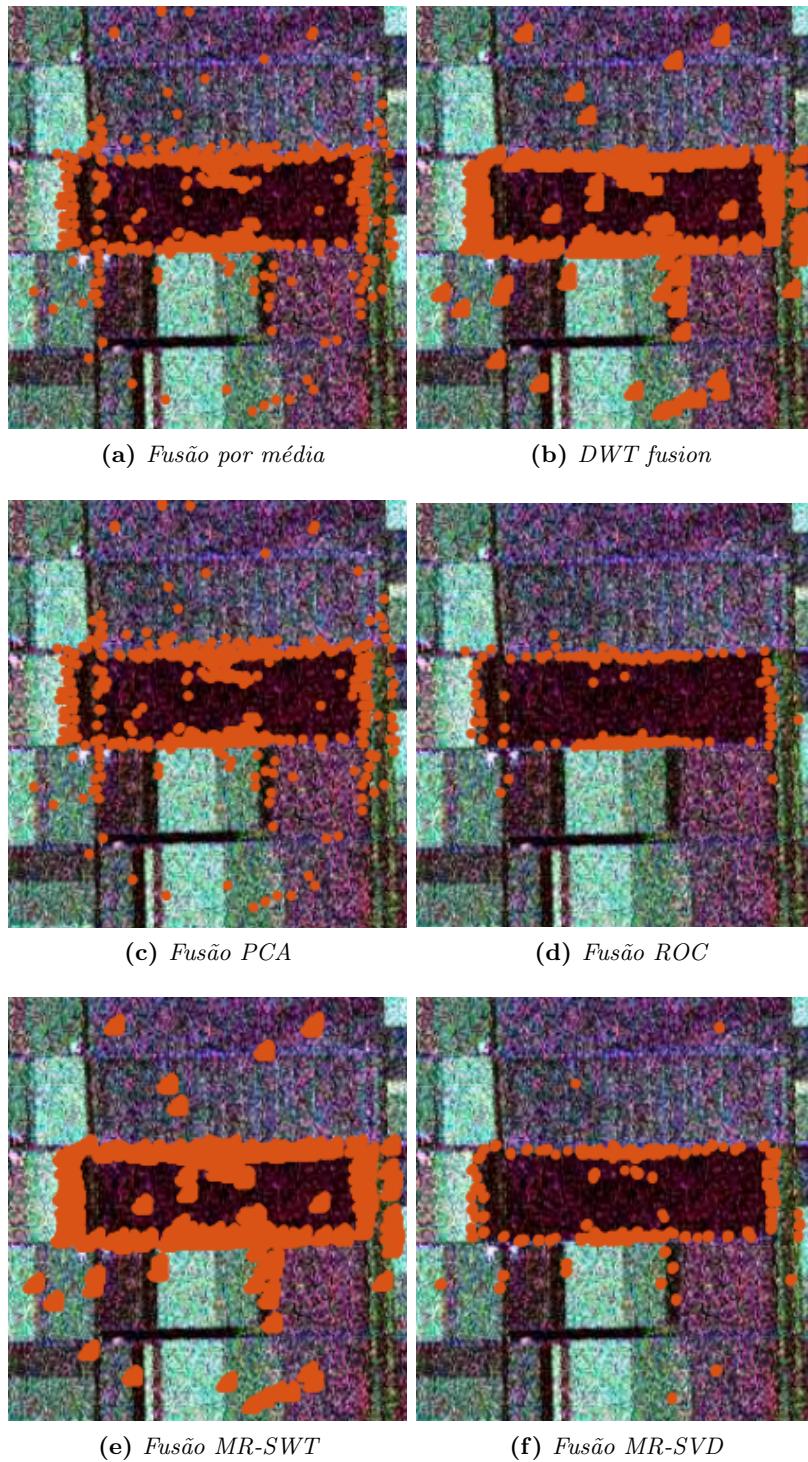


Figura 4.36: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para os 7 canais de flevoland com 14 pixels de folga

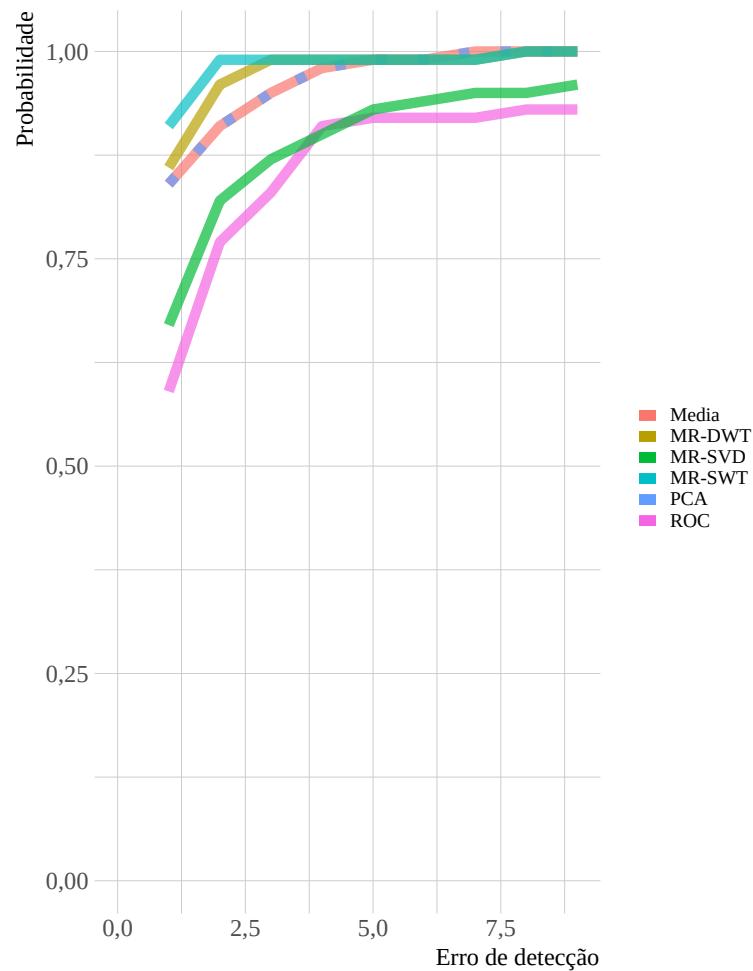


Figura 4.37: Métricas para fusão de evidências de bordas em imagem flevoland

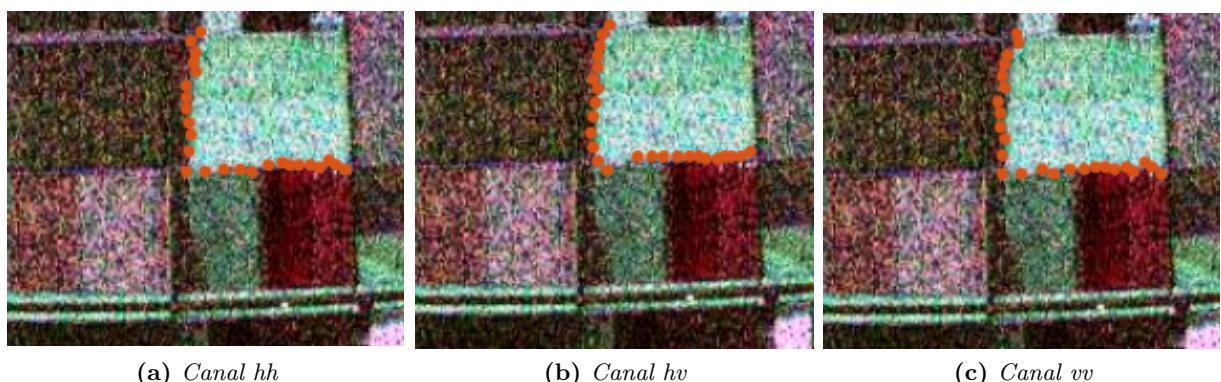


Figura 4.38: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

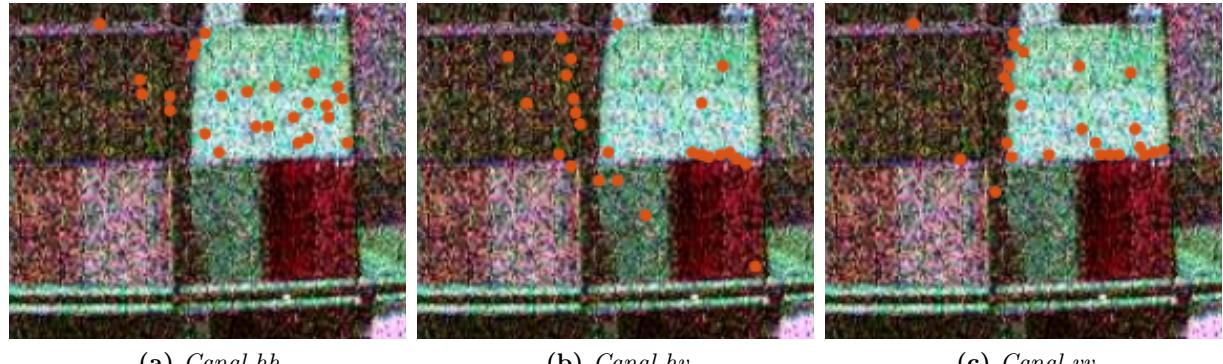


Figura 4.39: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

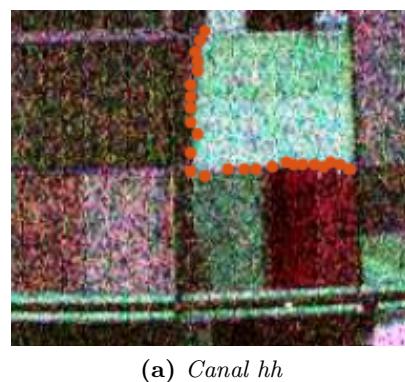


Figura 4.40: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

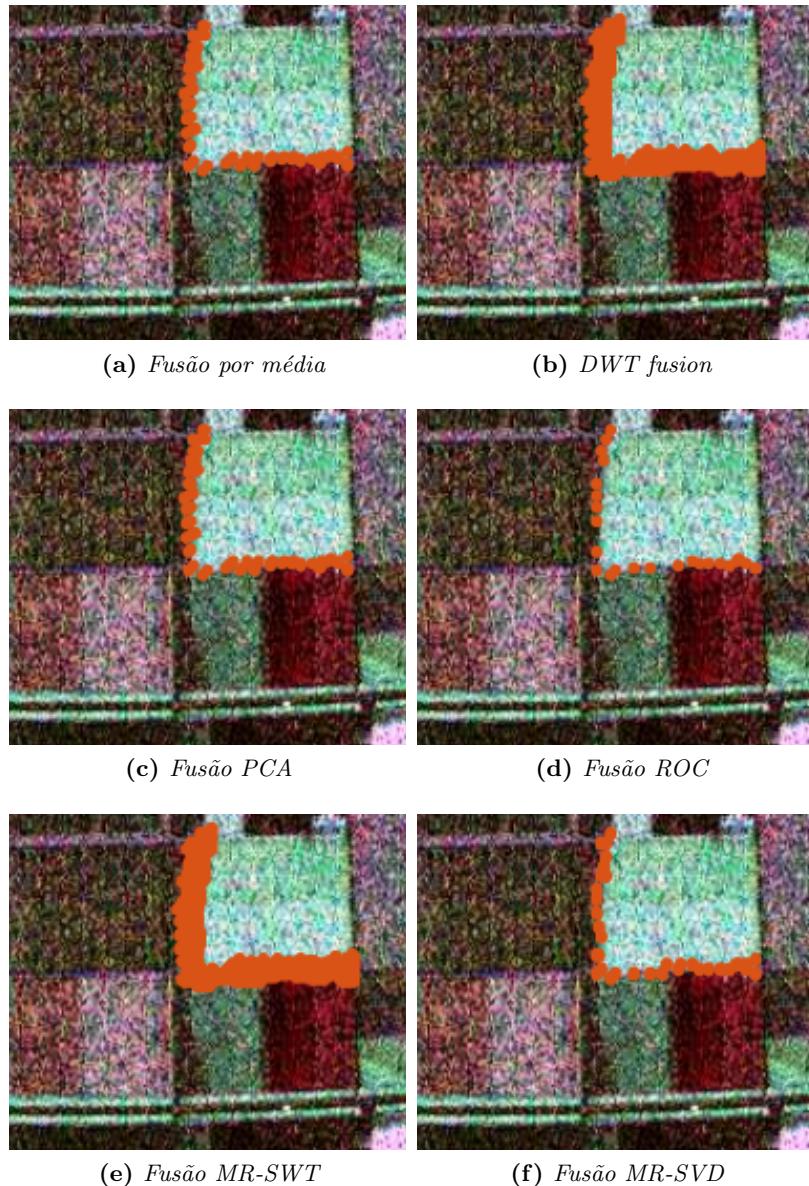


Figura 4.41: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para os 4 canais de flevoland região 2 com 14 pixels de folga

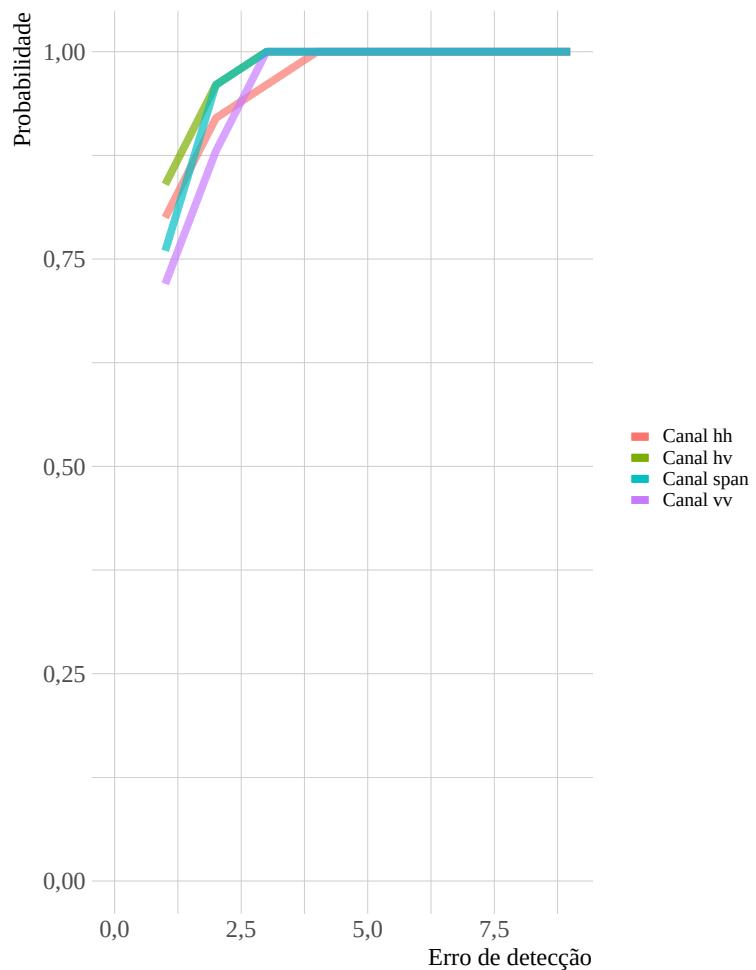


Figura 4.42: Métricas das evidências de bordas em imagem flevoland região 2

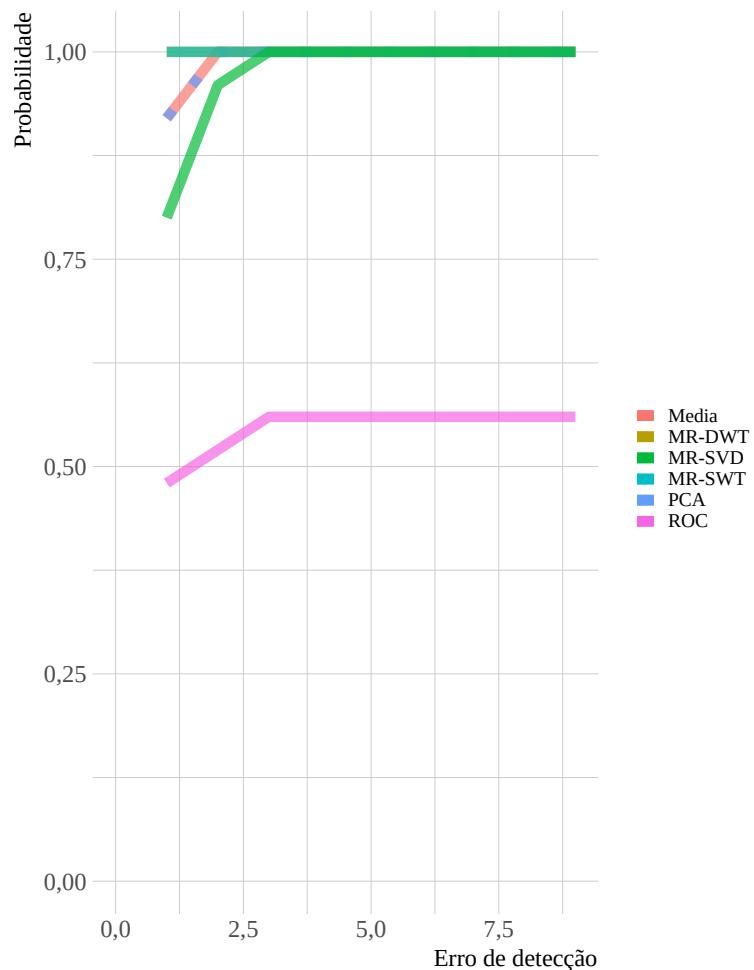


Figura 4.43: Métricas para fusão de evidências de bordas em imagem flevoland região 2 4 canais

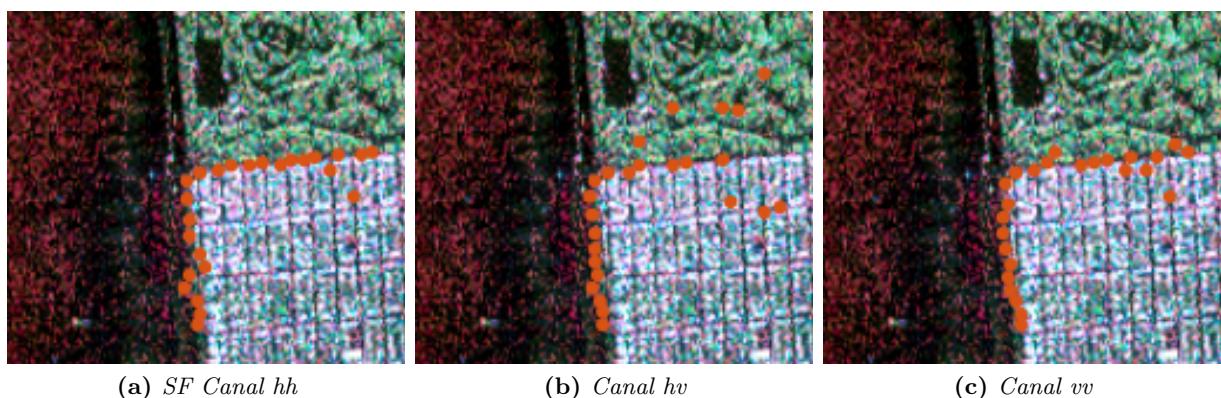


Figura 4.44: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

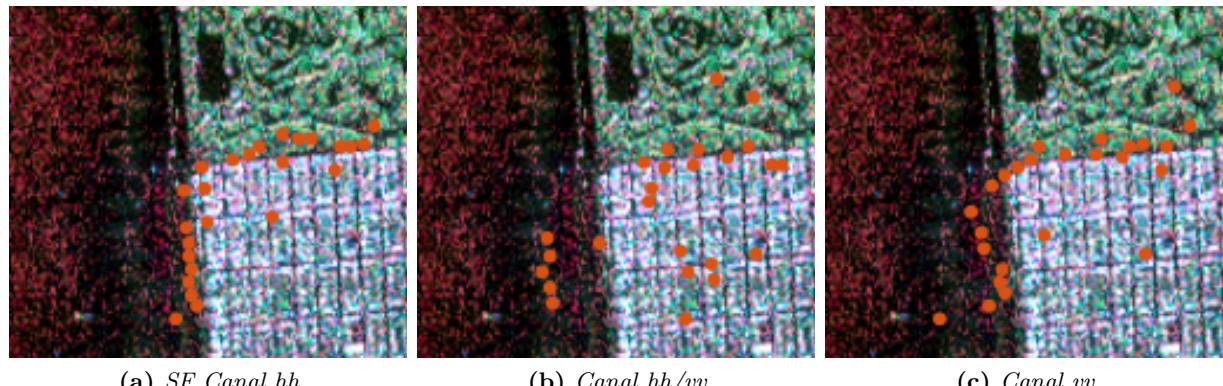
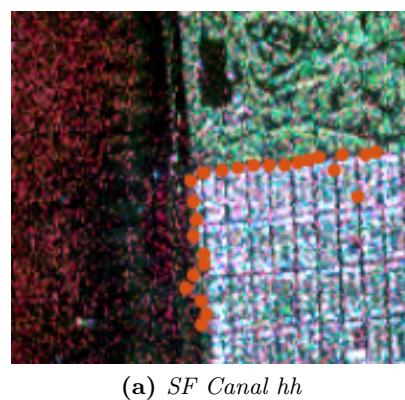


Figura 4.45: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland



(a) SF Canal hh

Figura 4.46: Evidências de bordas para os três canais de intensidades na imagem de Flevoland

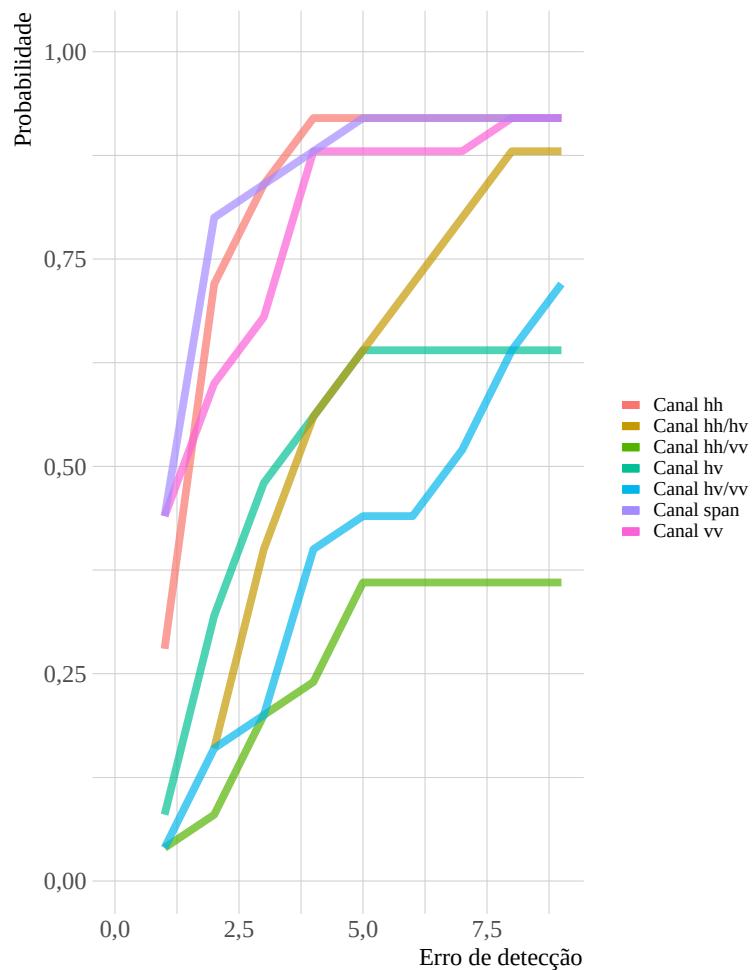


Figura 4.47: Métricas das evidências de bordas em imagem San Francisco

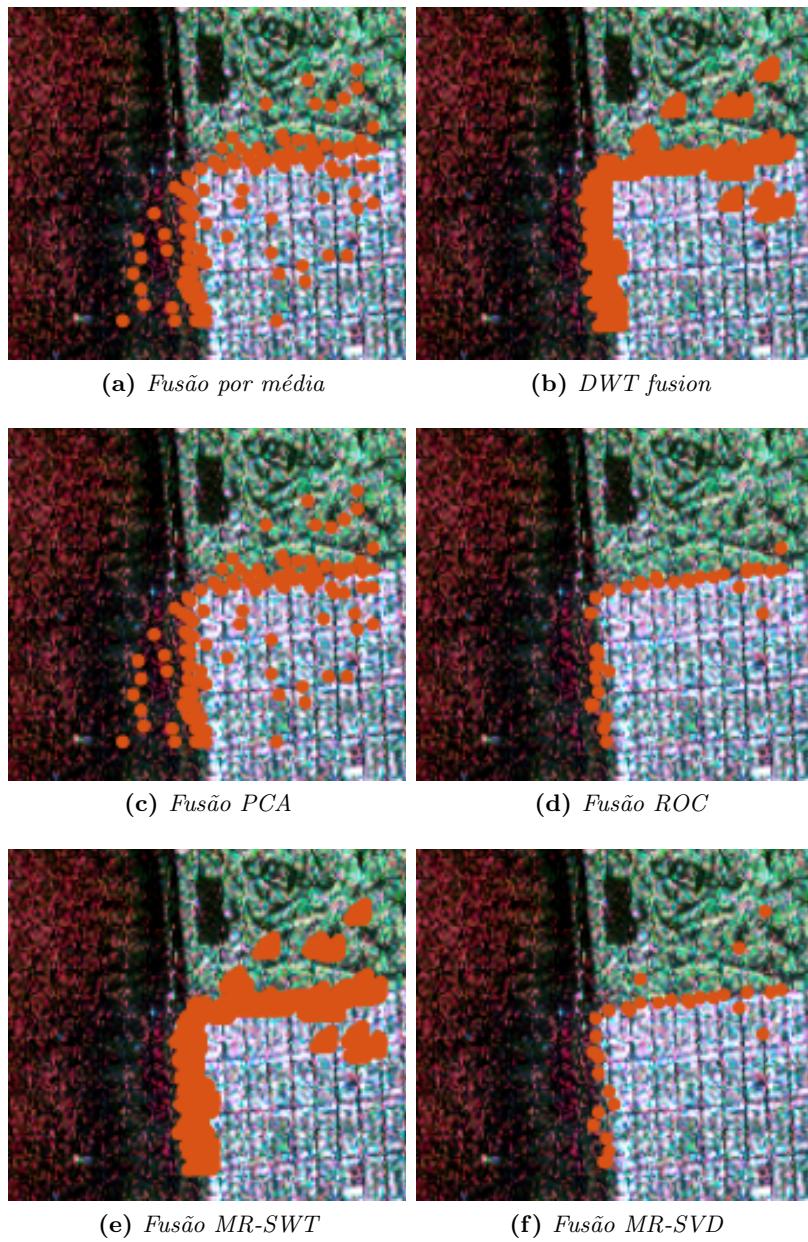


Figura 4.48: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para os 7 canais de sf com 25 pixels de folga

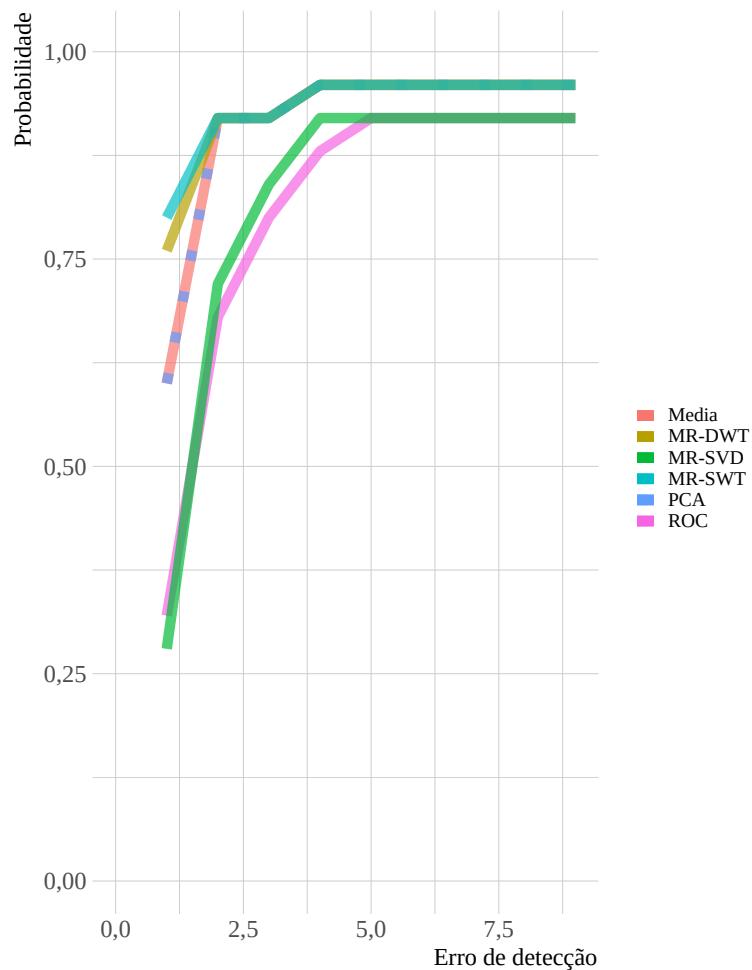


Figura 4.49: Métricas para a fusão das evidências de bordas em imagem San Francisco

4.5.1 Probabilidade erro de detecção

O erro é medido calculando a menor distância euclidiana do pixel de referência em cada radial na imagem Ground Truth (GT) para todos os pixels detectado na mesma radial. Armazenamos as menores distâncias em um vetor de frequência e calcular o vetor $H(k)$ denotando o número de replicações para qual o vetor de frequência é menor que um número de pixel fixado k_s . A estimativa de probabilidade é encontrada por $f(k) = H(k)/n_r$, onde n_r é o número de radiais, e o índice k varia entre 1 e k_s definido. O algoritmo pode ser descrito em ? e definimos $k_s = 10$ para encontrar todas as probabilidades para o erro.

A figura ?? mostra o erro para a FLEV-ROI-I com o número de radiais igual a 100.

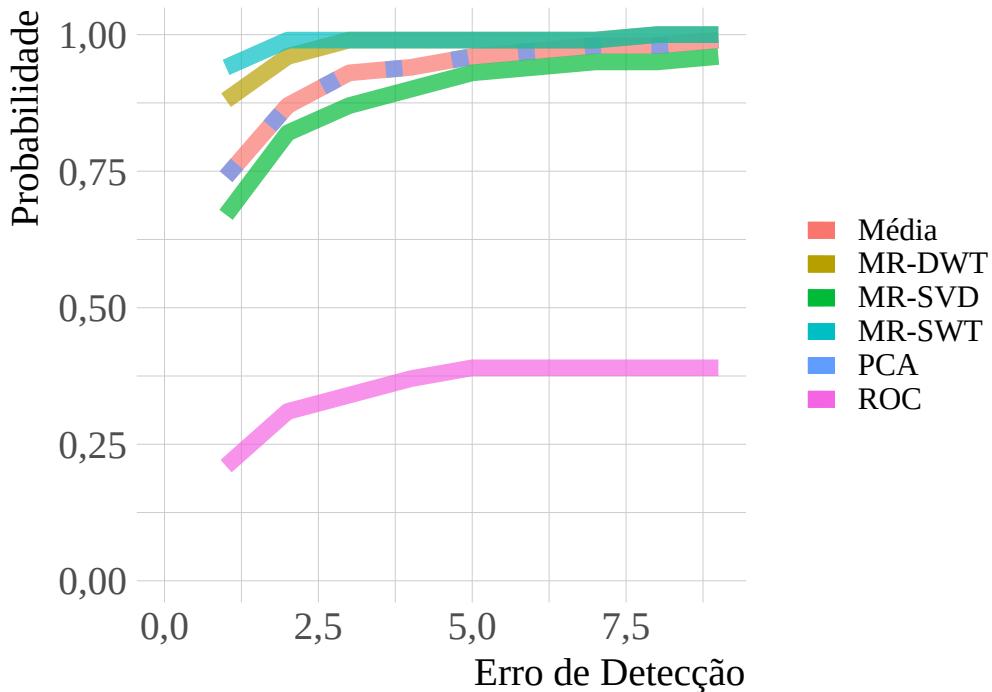


Figura 4.50: Probabilidade de detecção dos métodos de fusão para a FLEV-ROI-I

A figura ?? mostra o erro para a FLEV-ROI-I com o número de radiais igual a 25.

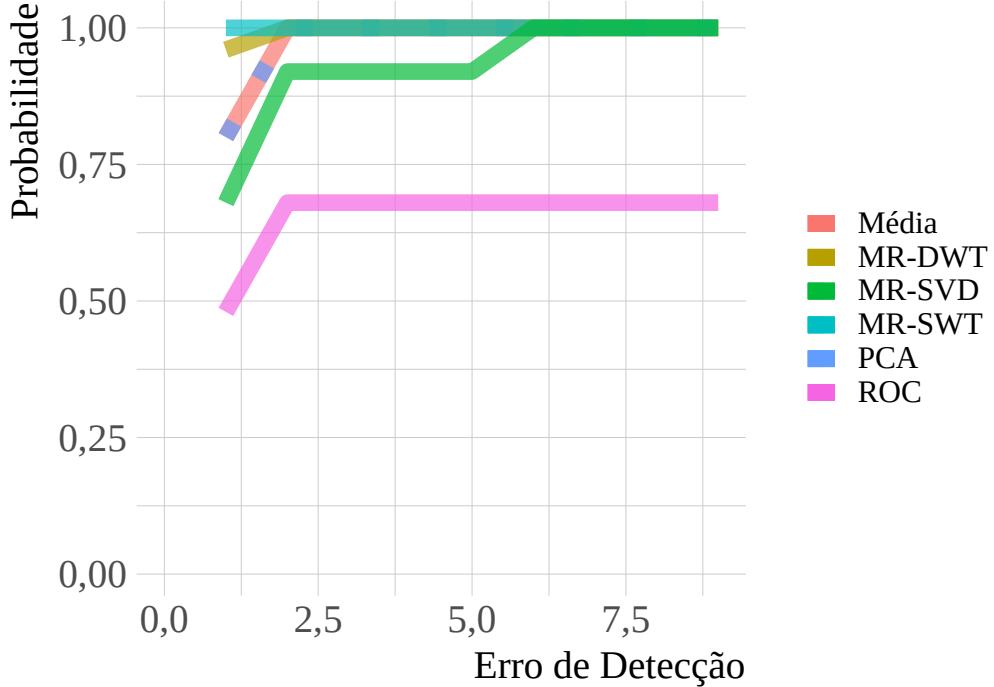


Figura 4.51: Probabilidade de detecção dos métodos de fusão para a FLEV-ROI-II

A figura ?? mostra o erro para a SF-ROI-II com o número de radiais igual a 25.

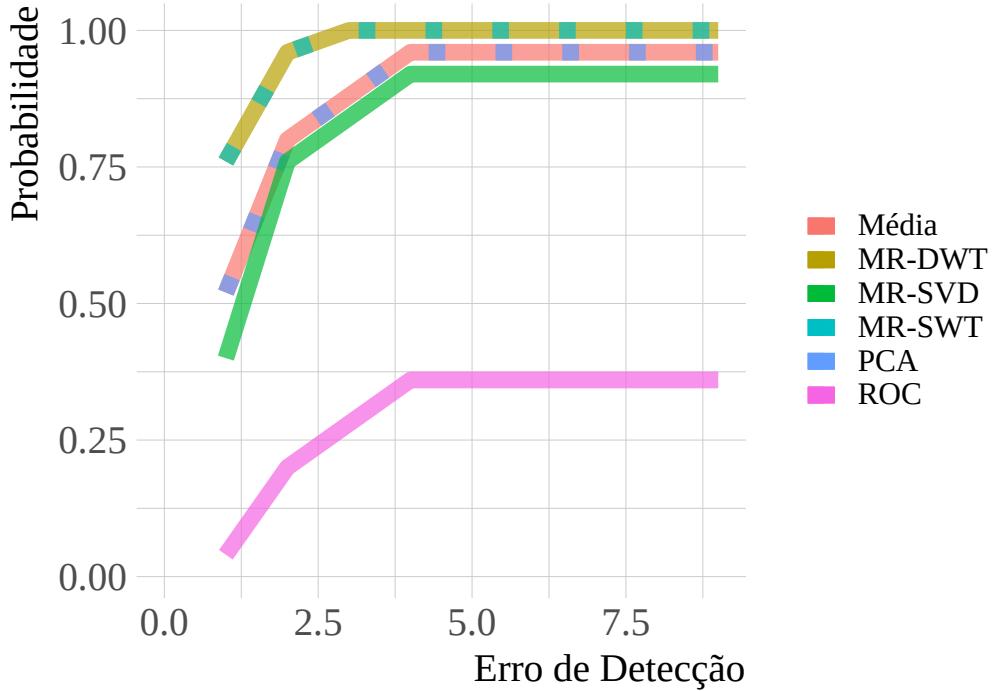


Figura 4.52: Probabilidade de detecção dos métodos de fusão para a SF-ROI-I

As Figuras. ????, ????, e ??? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidas pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a FLEV-ROI-III-Teste 1 estabelecemos 100 radiais e variação de comprimento de raios diferentes, para as radiais 1 até a 64 usamos 80 pixels de comprimento, para as radiais 65 até 80 usamos 60 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidades. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na FLEV-ROI-III-Teste

1 os 14 pixels escolhidos em cada extremidade não foram suficientes para contornar o problema da oscilação, ocorrendo o aparecimento de muitos *outliers* na imagens, principalmente no canal vv.

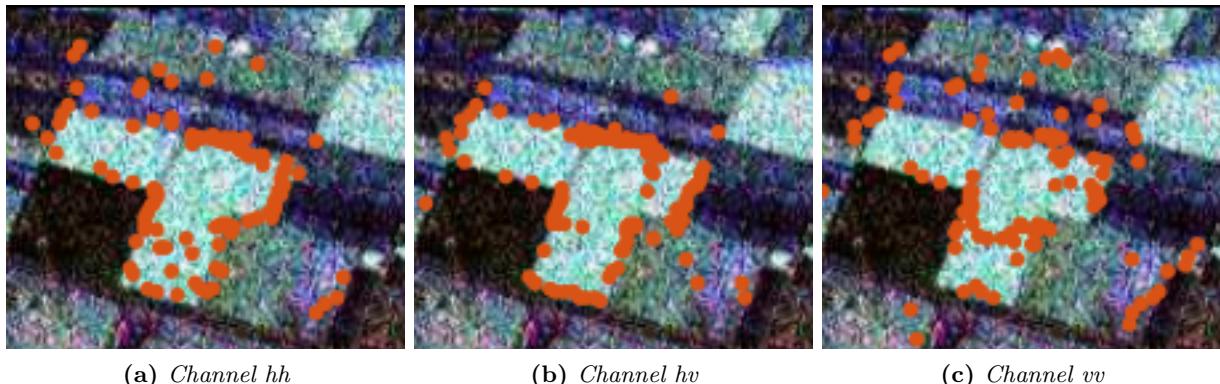


Figura 4.53: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para FLEV-ROI-III-teste 1 na imagem de Flevoland com folga de 14 pixel

As Figuras. ??, ????, e ???? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidas pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a FLEV-ROI-III-teste 2 estabelecemos 100 radiais e variação de comprimento de raios diferentes, para as radiais 51 até a 64 usamos 80 pixels de comprimento, para as outras radiais usamos 60 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 14 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidades. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na FLEV-ROI-III- teste 2 os 14 pixels escolhidos em cada extremidade não foram suficientes para contornar o problema da oscilação, ocorrendo o aparecimento de muitos *outliers* na imagens, principalmente no canal vv. Na Figuras. ?? diminuímos o tamanho do pixel usado para representar a evidências de borda.

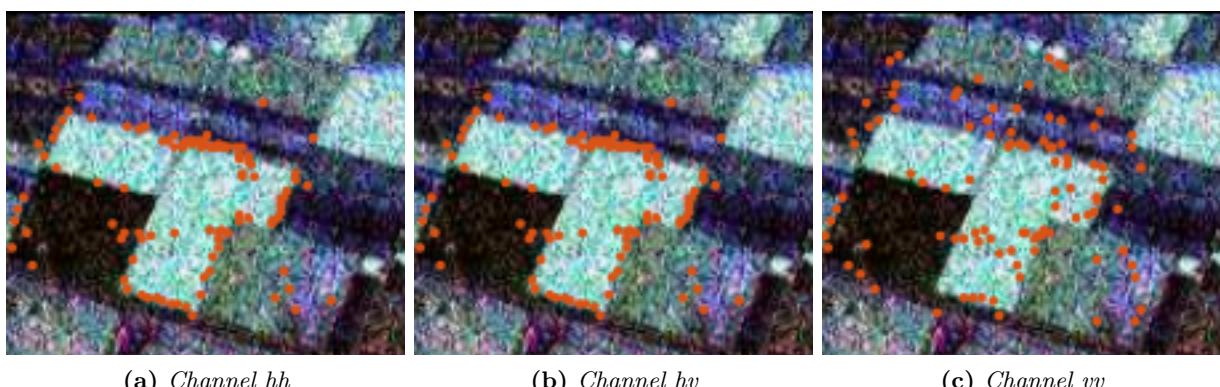


Figura 4.54: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para FLEV-ROI-III-teste 2 na imagem de Flevoland com folga de 14 pixel

Figuras ????, ??, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

As Figuras. ???, ???, e ??? mostram, respectivamente, as evidências de bordas no canais hh, hv e vv obtidas pelo método estimativa de máxima verossimilhança MLE. Para a SF-ROI-II estabelecemos 100 radiais com comprimento de 40 pixels. Utilizamos em cada radial uma folga nas extremidades de 8 pixels, a folga é usada pois constatamos uma forte oscilação da função de máxima verossimilhança nos pixels de extremidades. Escolhemos esse valor empiricamente e pode variar de acordo com a região, canal e figura. Na SF-ROI-II os 8 pixels escolhidos em cada extremidade não foram suficientes para contornar o problema da oscilação.

Figuras ???, ??, ??, ??, and ?? mostram os resultados numéricos para os métodos de fusão para evidência de bordas propostos.

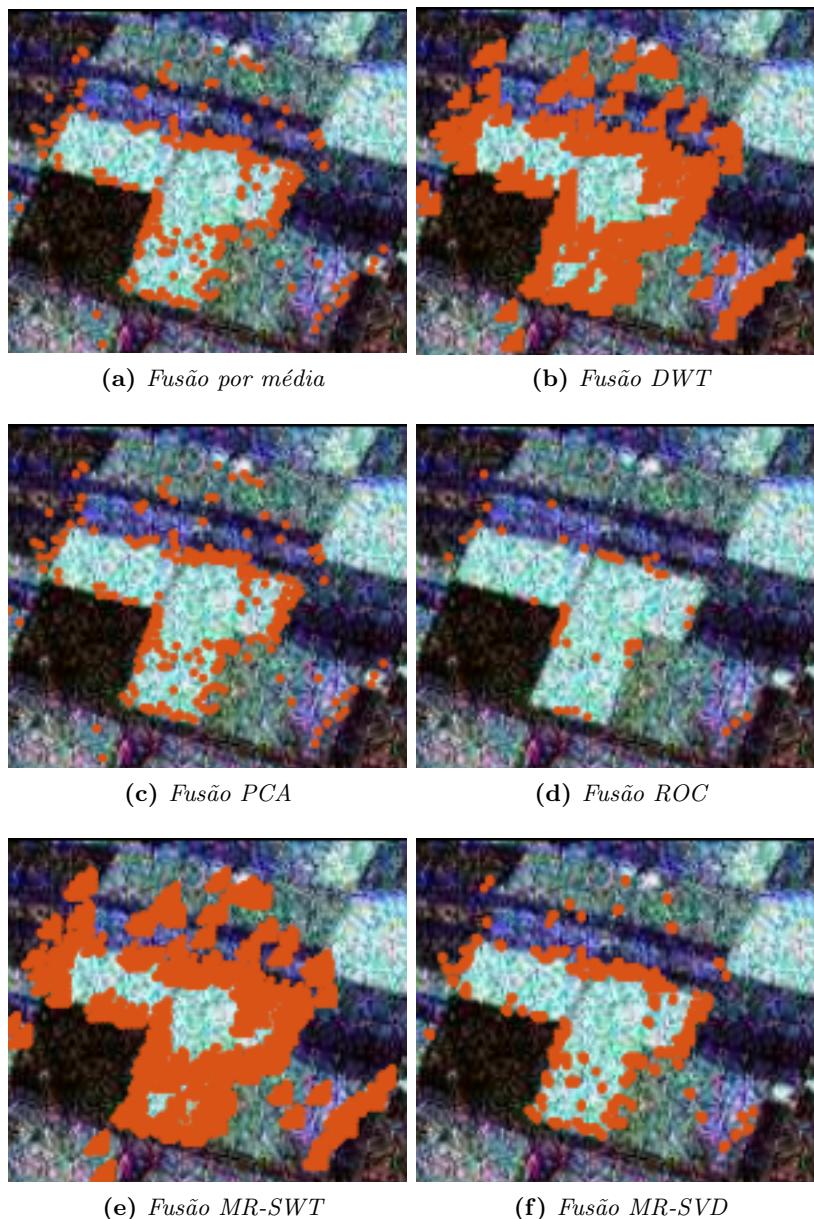


Figura 4.55: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a FLEV-ROI-III-teste 1 de flevoland com 14 pixeis de folga

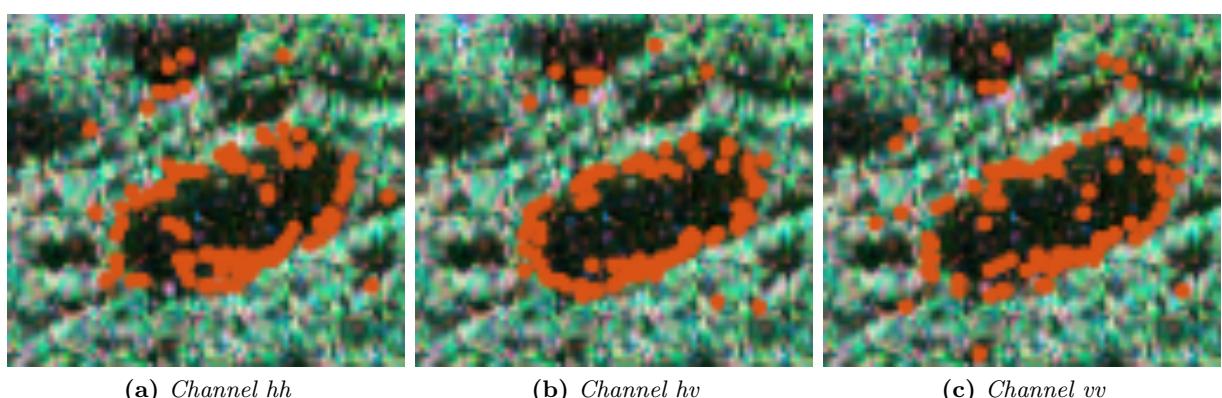


Figura 4.56: Evidências de bordas para os três canais de intensidades para SF-ROI-II com folga de 8 pixel

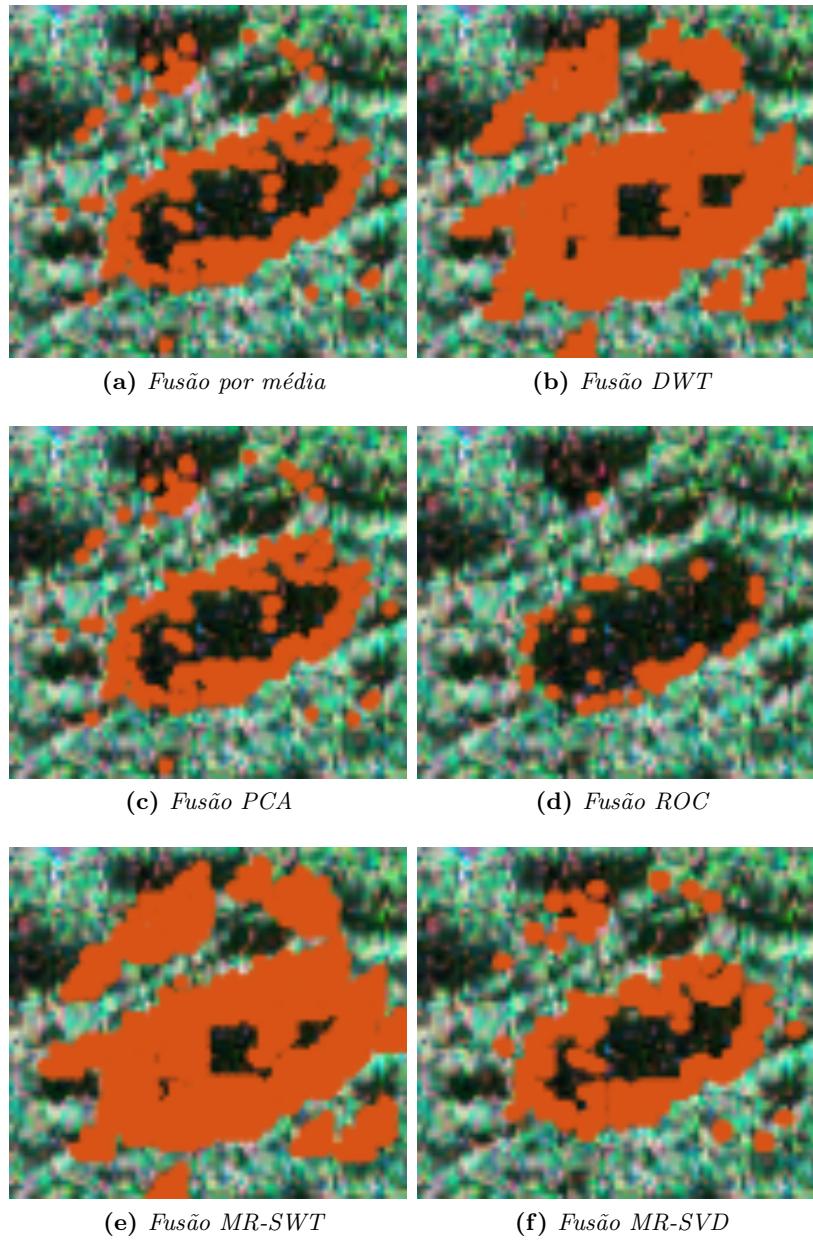


Figura 4.57: Resultado da aplicação dos seis métodos de fusão para a SF-ROI-II com 8 pixels de folga