

1 Estudo da bibliografia

Este arquivo serve para fazer apontamentos acerca da bibliografia indicada/pesquisada.

1.1 Estudo do artigo [1]

A matriz de espalhamento complexa S é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Usaremos o caso do meio de propagação ser recíproco, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$ tornando a matriz de espalhamento simétrica. Podemos facilitar a notação representando a matriz de espalhamento por um vetor da seguinte forma

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com [2] a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de S . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_p]^T$.

A função densidade de probabilidade (pdf) da distribuição gaussiana complexa p -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_{\mathbf{s}}|} \exp(-\bar{\mathbf{s}}^T \Sigma_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}). \quad (1)$$

O parâmetro que indexa a distribuição é a matriz de covariância, que é definida por:

$$\Sigma_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_p^H) \\ E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_p^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_p^H) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

onde $E(\cdot)$ e $(\cdot)^H$ denotam o valor esperado e o conjugado transposto.

A matriz $\Sigma_{\mathbf{s}}$ é hermitiana pois se $\mathbf{S}_j = x_j + iy_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(\overline{x_j + iy_j}) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(x_j - iy_j) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= x_j^2 + y_j^2 \end{aligned} \quad (3)$$

considerando $j \neq k$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(\overline{x_k + iy_k}) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j x_k + y_j y_k) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (4)$$

ainda,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_k + iy_k)(\overline{x_j + iy_j}) \\ \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_k + iy_k)(x_j - iy_j) \\ \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_k x_j + y_k y_j) + i(x_j y_k - x_k y_j) \\ \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_k x_j + y_k y_j) - i(x_j y_k - x_k y_j) \\ \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_k x_j + y_k y_j) + i(x_k y_j - x_j y_k)\end{aligned}\quad (5)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= \bar{\mathbf{S}}_j \bar{\mathbf{S}}_j \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_j\end{aligned}\quad (6)$$

Assim com j e k varrendo toda a matriz podemos afirmar que $\Sigma_s = \Sigma_s^H$ portanto hermitiana.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo *multilook* com o intuito de melhorar a razão sinal-ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas são obtidas computando a médias de L visadas independentes de uma mesma cena. Isto resulta na matriz de covariância Z dada por:

$$Z = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H. \quad (7)$$

1.1.1 Coeficiente de correlação *Multilook*

O coeficiente de correlação complexo é um importante parâmetro para descrever a função de densidade de probabilidade. Podemos defini-lo como

$$\rho_c = \frac{E[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j^H]}{\sqrt{E[|\mathbf{s}_i|^2] E[|\mathbf{s}_j|^2]}} = |\rho_c| e^{i\theta}. \quad (8)$$

em que \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j são duas componentes da matriz de espalhamento ou dois retorno do radar polarimétrico ou interferométrico SAR. Para dados de radar polarimétricos representado pela matriz de Mueller, ρ_c pode ser calculado encontrando a média da vizinhança de um pixel de uma matriz Mueller. A magnitude de ρ_c pode também ser estimada usando duas intensidade *multilook* Z_{ii} e Z_{jj} . O coeficiente de correlação de dados L looks intensidade é

definida como

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(Z_{ii} - \bar{Z}_{ii})(Z_{jj} - \bar{Z}_{jj})]}{\sqrt{E[(Z_{ii} - \bar{Z}_{ii})^2][(Z_{jj} - \bar{Z}_{jj})^2]}}. \quad (9)$$

No apêndice do artigo [1] foi mostrado que

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2 \quad (10)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= a_R + ia_I \\ \mathbf{S}_j &= b_R + ib_I \end{aligned} \quad (11)$$

Assim a equação (8) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{E[(a_R + ia_I)(\bar{b}_R + ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]E[b_R^2 + b_I^2]}}. \\ \rho_c &= \frac{E[(a_R + ia_I)(b_R - ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]E[b_R^2 + b_I^2]}}. \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]\sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]}}}. \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]\sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Definindo os desvios padrões,

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]} \\ \sigma_b &= \sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + a_I b_I + i(a_I b_R - a_R b_I)]}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R] + E[a_I b_I] + i(E[a_I b_R] - E[a_R b_I])}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R]}{\sigma_a \sigma_b} + \frac{E[a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b} + i \left(\frac{E[a_I b_R]}{\sigma_a \sigma_b} - \frac{E[a_R b_I]}{\sigma_a \sigma_b} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Definindo

$$\rho_{RR} = \frac{E[a_R b_R]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{II} = \frac{E[a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{IR} = \frac{E[a_I b_R]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{RI} = \frac{E[a_R b_I]}{\sigma_a \sigma_b}. \quad (15)$$

Portanto,

$$\rho_c = \frac{(\rho_{RR} + \rho_{II}) + i(\rho_{IR} - \rho_{RI})}{2}. \quad (16)$$

obs: Explicar melhor o fator 2

Devido a condição de ser gaussiana circular

$$\rho_{RR} = \rho_{II}, \quad \rho_{IR} = -\rho_{RI}. \quad (17)$$

podemos escrever ρ_c

$$\rho_c = \rho_{RR} + i\rho_{IR}. \quad (18)$$

Portanto

$$|\rho_c|^2 = \rho_{RR}^2 + \rho_{IR}^2. \quad (19)$$

O processo de **Multilook** produz

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [a_R^2(k) + a_I^2(k)], \\ B_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b_R^2(k) + b_I^2(k)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Assumindo a independência estatística entre amostras, a média e o desvio padrão podem ser definidos por

$$\begin{aligned} \overline{A_n} &= E[A_n] = 2E[a_R^2(k)] = 2\sigma_a^2, & SD[A_n] &= \frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}}. \\ \overline{B_n} &= E[B_n] = 2E[b_R^2(k)] = 2\sigma_b^2, & SD[B_n] &= \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (21)$$

O coeficiente de correlação *Multilook* para intensidade (equação (9)) pode ser escrito por:

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})]}{SD[A_n]SD[B_n]}. \quad (22)$$

Assumindo a independência entre as amostras e depois de algumas manipulações algébricas para o numerador da equação (22).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [E[(a_R^2(k) + a_I^2(k))(b_R^2(k) + b_I^2(k))] - 4\sigma_a^2\sigma_b^2] \quad (23)$$

OBS: Entender melhor a equação (23) e (24).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2 \quad (24)$$

Agora substituindo em (22)

$$\begin{aligned} \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{SD[A_n]SD[B_n]}. \\ \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n}\sigma_a^2\sigma_b^2|\rho_c|^2}{\frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}} \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}}. \end{aligned} \quad (25)$$

completando as simplificações

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2. \quad (26)$$

OBS: Esta relação mostra que o coeficiente de correlação da intensidade não depende dos *nlooks*.

1.1.2 Diferença de fase *Multilook*

A *PDF* diferença de fase é derivada nesta seção para cada duas componentes do *SAR* polarimetrico. A *look* diferença de fase é definida como

$$\psi_1 = \angle(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H). \quad (27)$$

A fase *multilook* é obtida por

$$\psi_n = \angle \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_i(k) \mathbf{S}_j^H(k) \right). \quad (28)$$

A ψ_n são os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariança Z . Podemos pensar como uma média de *1-looks*.

Para derivar estas *PDF's* vamos usar duas componentes de seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \alpha e^{i\psi_n} \\ \alpha e^{-i\psi_n} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$C = E[\mathbf{S} \mathbf{S}^H] = \begin{bmatrix} C_{11} & \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Onde $A_{12R} + iA_{12I} = \alpha e^{i\psi_n}$ e $C_{ii} = E[|\mathbf{S}_i|^2]$, assim podemos rescrever a matriz (29)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12R} + iA_{12I} \\ A_{12R} - iA_{12I} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$p_A^{(n)}(A) = \frac{|A|^{n-p}}{K(n, p)|C|^n} \exp(-\text{tr}(C^{-1}A)), \quad (32)$$

onde

$$K(n, p) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1), \quad (33)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

Como nesse caso estamos usando $p = 2$ podemos rescrever,

$$p_A^{(n)}(A) = \frac{|A|^{n-2}}{K(n, 2)|C|^n} \exp(-\text{tr}(C^{-1}A)), \quad (34)$$

$$K(n, 2) = \pi \Gamma(n) \Gamma(n-1), \quad (35)$$

Efetuando as manipulações algébricas

$$\begin{aligned} |A| &= A_{11}A_{22} - (A_{12R} + iA_{12I})(A_{12R} - iA_{12I}) \\ |A| &= A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} |C| &= C_{11}C_{22} - C_{11}C_{22}|\rho_c|^2 \\ |C| &= C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2) \end{aligned} \quad (37)$$

assim temos

$$\begin{aligned} |A|^{n-2} &= (A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2))^{n-2} \\ |C|^n &= (C_{11}C_{22})^n(1 - |\rho_c|^2)^n \end{aligned} \quad (38)$$

Agora será verificado somente quociente,

$$\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} = \frac{(A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2))^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n(1 - |\rho_c|^2)^n} \quad (39)$$

Como $A_{12R} + iA_{12I} = \alpha e^{i\psi_n}$ então $|A_{12R} + iA_{12I}| = |\alpha e^{i\psi_n}|$ portanto $\alpha = A_{12R}^2 + A_{12I}^2$

$$\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} = \frac{(A_{11}A_{22} - \alpha^2)^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n(1 - |\rho_c|^2)^n} \quad (40)$$

reescrevendo a equação (40)

$$\begin{aligned} \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(A_{11}A_{22} - \alpha^2)^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n \left(\frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}C_{22}}\right)^2 (1 - |\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(A_{11}A_{22} - \alpha^2)^{n-2}}{\frac{(C_{11}C_{22})^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^2} (1 - |\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{\left(\frac{A_{11}A_{22}}{C_{11}C_{22}} - \frac{\alpha^2}{C_{11}C_{22}}\right)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1 - |\rho_c|^2)^n} \end{aligned} \quad (41)$$

Definindo a seguinte normalização

$$B_1 = \frac{A_{11}}{C_{11}}, \quad B_2 = \frac{A_{22}}{C_{22}}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}. \quad (42)$$

Substituindo na equação (41)

$$\begin{aligned} \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{\left(B_1B_2 - \eta^2\right)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1 - |\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{\left(B_1B_2 - \eta^2\right)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1 - |\rho_c|^2)^n} \end{aligned} \quad (43)$$

OBS: Entender melhor o fator $(C_{11}C_{22})^{-2}$, não está compatível com o artigo [1]- verificar o Jacobiano.

Encontrando a matriz inversa de C ,

$$C^{-1} = \frac{1}{C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)} \begin{bmatrix} C_{22} & -\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ -\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{11} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$C^{-1}A = \frac{1}{C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)} \begin{bmatrix} C_{22}A_{11} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta}\alpha e^{-i\psi_n} & C_{22}\alpha e^{i\psi_n} - A_{22}\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ C_{11}\alpha e^{-i\psi_n} - A_{11}\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{11}A_{22} - \sqrt{C_{11}C_{22}}\rho_c|e^{-i\theta}\alpha e^{i\psi_n} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Aplicando o traço para a matriz $C^{-1}A$,

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \left[C_{22}A_{11} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta}\alpha e^{-i\psi_n} + C_{11}A_{22} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta}\alpha e^{i\psi_n} \right] \quad (46)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \left[C_{22}A_{11} - \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i(\theta-\psi_n)} + C_{11}A_{22} - \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i(\psi_n-\theta)} \right] \quad (47)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} \left[\frac{C_{22}A_{11}}{C_{11}C_{22}} + \frac{C_{11}A_{22}}{C_{11}C_{22}} - \frac{2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{C_{11}C_{22}} \right] \quad (48)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} \left[\frac{A_{11}}{C_{11}} + \frac{A_{22}}{C_{22}} - \frac{2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{C_{11}C_{22}} \right] \quad (49)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} [B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)] \quad (50)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{(1-|\rho_c|^2)} \quad (51)$$

portanto usando as equações (43), (51), (34), (35) termos

$$p(B_1, B_2, \eta, \psi_n) = \frac{(B_1 B_2 - \eta^2)^{n-2} \eta}{\pi(1-|\rho_c|^2)^n \Gamma(n) \Gamma(n-1)} \exp\left(-\frac{B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{(1-|\rho_c|^2)}\right) \quad (52)$$

Derivando a equação (52) com relação a B_1 , B_2 e η podemos afirmar que a distribuição diferença de fase *multilook* é

$$p_\psi^{(n)}(\psi) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})(1-|\rho_c|^2)^n \beta}{2\sqrt{\pi} \Gamma(n)(1-\beta^2)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{(1-|\rho_c|^2)^n}{2\pi} F(n, 1; \frac{1}{2}; \beta^2) \quad (53)$$

Sendo $-\pi < \psi \leq \pi$, $\beta = |\rho_c|\cos(\psi-\theta)$ e $F(n, 1; \frac{1}{2}; \beta^2)$ a função de Gauss hipergométrica.

Para $n = 1$ vale a seguinte identidade para a função de Gauss Hipergeométrica,

$$F(1, 1; \frac{1}{2}; z) = (1-z)^{-1} \left[1 + \frac{\sqrt{z} \sin^{-1}(\sqrt{z})}{\sqrt{1-z}} \right] \quad (54)$$

Pela equação (53)

$$p_\psi^{(1)}(\psi) = \frac{(1-|\rho_c|^2)[(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \cos^{-1}(\beta))]}{2\pi(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (55)$$

Da mesma forma podemos obter $2 - look$, $3 - look$ e $4 - look$,

$$p_{\psi}^{(2)}(\psi) = \frac{3}{8} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^2 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^2}{4\pi(1 - \beta^2)^2} \left[2 + \beta^2 + \frac{3\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (56)$$

$$p_{\psi}^{(3)}(\psi) = \frac{15}{32} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^3 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^3 (1 - \beta^2)^{-3}}{16\pi} \left[8 + 9\beta^2 - 2\beta^4 + \frac{15\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (57)$$

$$p_{\psi}^{(4)}(\psi) = \frac{35}{64} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^4 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^4 (1 - \beta^2)^{-4}}{96\pi} \left[48 + 87\beta^2 - 38\beta^4 + 8\beta^6 + \frac{105\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (58)$$

Distribuições diferença de fase n-looks

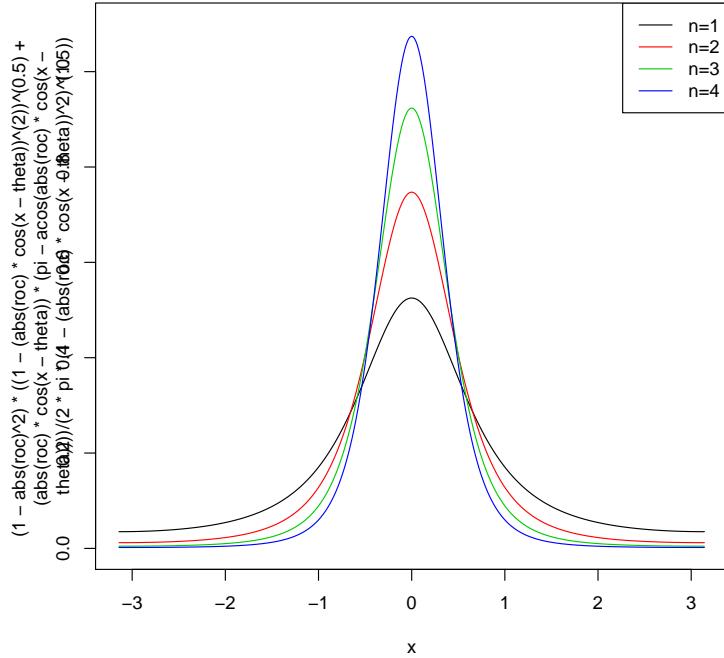


Figura 1: Distribuição diferença de fase n -looks.

A figura (1) mostra a equação (53) para seus diferentes $1, 2, 3$ e $4 - looks$ que são $p_{\psi}^{(1)}(\psi)$, $p_{\psi}^{(2)}(\psi)$, $p_{\psi}^{(3)}(\psi)$ e $p_{\psi}^{(4)}(\psi)$.

1.1.3 Distribuição conjunta do Multilook $|S_i|^2$ e $|S_j|^2$

O PDF conjunto retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e interferométricos são importantes. As PDF's conjuntas conduzem a derivação da intensidade e amplitude razão PDF's. Da equação (42) temos que as intensidades multilook sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 C_{11}}{B_2 C_{22}} \\ R_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2 = \frac{n}{B_2 C_{22}} \end{aligned} \quad (59)$$

Integrando a equação (52) em relação a η e ψ . A PDF é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho_c|^2}\right)}{\Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (60)$$

Sendo

$$I_\mu(z) = \frac{(\frac{z}{2})^\mu}{\Gamma(\mu+1)} F_1^0[-; \mu+1; \frac{z^2}{4}] \quad (61)$$

OBS: As integrações na equação (52) não foram realizadas neste estudo.

$$p(B_1, B_2) = \frac{n^{n+1} (R_1 R_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{n(\frac{R_1}{C_{11}} + \frac{R_2}{C_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(C_{11} C_{22})^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2n\sqrt{\frac{R_1 R_2}{C_{11} C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (62)$$

OBS: Verificar o surgimento de um fator $\frac{n^2}{C_{11} C_{22}}$ na equação (62) - Mudança de variável!!!!.

1.1.4 Distribuição razão intensidade e amplitude para multilook

A razão de intensidade e amplitude entre S_{hh} e S_{vv} são importantes no estudo de radares polarimétricos. A PDF's razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{C_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{C_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (63)$$

Onde $\tau = \frac{C_{11}}{C_{22}}$.

A PDF razão intensidade multilook normalizada é mostrada no apêndice (C) do artigo [1]

$$p^{(n)}(\mu) = \frac{\Gamma(2n)(1-|\rho_c|^2)^n (1+\mu)\mu^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n) [(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (64)$$

OBS: Não realizei as contas do apêndice (C).

Realizando a troca de variável $\nu = \sqrt{\mu}$ a equação (64) pode ser rescrita por

$$p^{(n)}(\nu) = \frac{2\Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(1 + \nu^2)\nu^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1 + \nu^2)^2 - 4|\rho_c|^2\nu^2]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (65)$$

As *PDF's* razão de intensidade e amplitude entre os *multilook* \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 podem ser facilmente deduzidas das seguintes definições e posterior aplicação nas equações (64) e (65). definindo

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2} = \tau\mu \\ z &= \sqrt{w} = \sqrt{\tau}\nu \end{aligned} \quad (66)$$

Portanto a distribuição da razão w de intensidade *multilook* é

$$p^{(n)}(w) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + w)w^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (67)$$

Portanto a distribuição da razão z de amplitude *multilook* é

$$p^{(n)}(z) = \frac{\tau^n \Gamma(2n)(1 - |\rho_c|^2)^n(\tau + z^2)z^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(\tau + z^2)^2 - 4\tau|\rho_c|^2z^2]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (68)$$

A discussão será limitada para estatística da razão ν amplitude normalizada. A figura (2) mostra a distribuição razão amplitude apresentada na equação (65). Notadamente a medida que n aumenta tendemos a ter uma aproximação da "função" delta de Dirac e uma concentração em torno da abscissa $\nu = 1$.

OBS: Processos de *multilook* reduzem a variação estatística.

1.2 Estudo do artigo [2]

A variável randômica gaussiana complexa $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ é uma variável randômica complexa cuja parte imaginária e complexa são distribuída de forma Gaussiana. E uma variável randômica gaussiana complexa p -variada $\xi' = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p)$ é uma p -upla de variáveis randômicas gaussianas complexas tal que o vetor de partes imaginárias e reais é $\eta' = (X_1, Y_1, \dots, X_p, Y_p)$.

A matriz de covariância definida positiva $2p \times 2p$ será:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta} = \begin{bmatrix} E(X_j X_k) & E(X_j Y_k) \\ E(Y_j X_k) & E(Y_j Y_k) \end{bmatrix}.$$

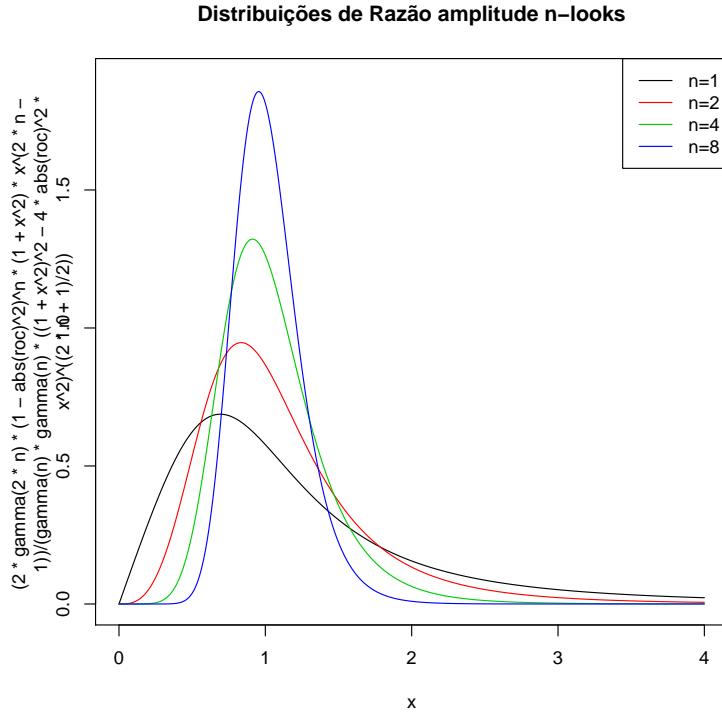


Figura 2: Distribuição de razão amplitude n -looks.

Tal que

$$\Sigma_\eta = \begin{bmatrix} E(X_j X_k) & E(X_j Y_k) \\ E(Y_j X_k) & E(Y_j Y_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_k^2 & \text{se } j = k, \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{ik} & -\beta_{jk} \\ \beta_{jk} & \alpha_{ik} \end{bmatrix} \sigma_j \sigma_k & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Onde $E(\cdot)$ denota o operador de valor esperado(esperança).

Podemos usar a matriz de covariância hermitiana complexa definida positiva usando a ξ variável randômica gaussiana complexa de dimensão $p \times p$

$$\Sigma_\xi = E(\xi \bar{\xi}^T) = \|E(Z_j \bar{Z}_k)\| = \|\sigma_{jk}\|$$

onde

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{se } j = k, \\ (\alpha_{jk} + i\beta_{jk})\sigma_j \sigma_k & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa p -variada é dada por

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_\xi|} \exp(-\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi) \quad (69)$$

Exemplo 1 - Seja a distribuição gaussian complexa univariada ($p = 1$). Sendo $\xi^T = z_1 = x_1 + iy_1$. E a "matriz" de covariância $\Sigma_\xi = \sigma_1^2$ com determinante $|\Sigma_\xi| = \sigma_1^2$ e "matriz inversa" $\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}$, Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 + iy_1) \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= (x_i - iy_1)(x_1 + iy_1) \frac{1}{\sigma_1^2} \\ \bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2} \end{aligned} \quad (70)$$

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi \Sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2}\right) \quad (71)$$

Exemplo 2 - Seja a distribuição gaussian complexa bivariada ($p = 2$). Sendo $\xi^T = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$. E a matriz de covariância

$$\Sigma_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

com determinante $|\Sigma_\xi| = (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ e matriz inversa

$$\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = [z_1, z_2]^H \Sigma_\xi^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = [z_1, z_2]^H \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_1 + \sigma_1^2 z_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_{\xi}^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} (\sigma_2^2 \bar{z}_1 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12}) \sigma_1 \sigma_2 \bar{z}_1 z_2 - (\alpha_{12} - i\beta_{12}) \sigma_1 \sigma_2 \bar{z}_2 z_1 + \sigma_1^2 \bar{z}_2 z_2) \quad (76)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_{\xi}^{-1} \xi = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} (\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12} \sigma_1 \sigma_2 \bar{z}_1 z_2) \quad (77)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_{\xi}^{-1} \xi = \frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12} \sigma_1 \sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} \quad (78)$$

Assim, a função densidade de probabilidade (**pdf**)

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} \exp \left(-\frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12} \sigma_1 \sigma_2 \bar{z}_1 z_2}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \quad (79)$$

Distribuição complexa de Wishart

A distribuição complexa de Wishart descrita no artigo [2], define agora uma amostra de n vetores com valores complexos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ então a matriz hermitiana de covariância é

$$\hat{\Sigma}_{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\xi}_j^T. \quad (80)$$

A matriz $\hat{\Sigma}_{\xi}$ é uma "maximum likelihood" para Σ_{ξ} sendo uma estatística suficiente para a matriz hermitiana de covariância.

Considerando $A = ||A_{jkR} + iA_{jkI}|| = n\hat{\Sigma}_{\xi}$ chamaremos a matriz A de distribuição complexa de Wishart. A função densidade de probabilidade de A é

$$p_W(A) = \frac{|A|^{n-p}}{I(\Sigma_{\xi})} \exp(-\text{tr}(\Sigma_{\xi}^{-1} A)), \quad (81)$$

onde

$$I(\Sigma_{\xi}) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \cdots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\xi}|^n, \quad (82)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

1.3 Estudo do artigo [3]

Definição importante

Definição 1.1 Divergência (h, ϕ) . Sejam as variáveis aleatórias X e Y com mesmo suporte S e p.d.f respectivamente $f_X(x|\theta_1)$ e $f_Y(x|\theta_2)$. Sejam ainda $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função convexa e diferenciável, e h uma função crescente tal que $h(0) = 0$ então a divergência (h, ϕ) é definida como

$$d_\phi^h(X||Y) = h \left[\int_{x \in S(x)} f_Y(x|\theta_2) \phi \left(\frac{f_X(x|\theta_1)}{f_Y(x|\theta_2)} \right) dx \right]. \quad (83)$$

Definindo que divergência é uma maneira de medir as diferenças entre duas distribuições. A seguir descreveremos um exemplo para ilustrar a definição.

Para começar a entender os resultados do artigo [3] é descrito abaixo o exemplo 1 sobre medida craniana de rãs:

Sendo (x_1) o comprimento craniano e (x_2) a amplitude craniana, uma amostra de $n = 35$ rãs femeas maduras conduziu a seguinte estatística:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 22.860 \\ 24.397 \end{bmatrix} \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 17.178 & 19.710 \\ 19.710 & 23.710 \end{bmatrix}.$$

e similar medidas para uma amostra $m = 14$ rãs machos,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 21.821 \\ 22.843 \end{bmatrix} \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 17.159 & 17.731 \\ 17.731 & 19.273 \end{bmatrix}.$$

onde \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 são estimadores de máxima varrossimilhança da matriz de covariância.

Para auxiliar foi criado dois programas em matlab chamados "salicruex1a.m" e "salicru1ex1b.m" armazenado em (meu micro):

"*/home/aborba/MEGAsync/mack/alejandro/gitufalmackbackup/doclarex/*"

(a) Sendo:

$$\mathbf{S} = \frac{n\mathbf{S}_1 + m\mathbf{S}_2}{n+m} = \begin{bmatrix} 17.173 & 19.145 \\ 19.145 & 22.442 \end{bmatrix}.$$

tal que sua matriz inversa é:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.18958 & -1.01482 \\ -1.01482 & 0.91028 \end{bmatrix}.$$

A expressão (r, s) -divergência obtida de (h, ϕ) -divergência sobre certas condições pode ser escrita:

$$\begin{aligned} D_r^s((\mu_1, \Sigma_1), (\mu_2, \Sigma_2)) &= \frac{1}{(s-1)} \left[\exp \left(\frac{r(s-1)}{2} (\mu_1 - \mu_2)^T [\Sigma_2 + (1-r)\Sigma_1]^{-1} (\mu_1 - \mu_2) \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{|r\Sigma_2 + (1-r)\Sigma_1|^{\frac{(1-s)}{2(r-1)}}}{|\Sigma_1|^{\frac{s-1}{2}} |\Sigma_2|^{\frac{(1-s)r}{2(r-1)}}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (84)$$

Assim calculando

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{2nm}{r(n+m)} D_r^s((\mathbf{x}_1, \mathbf{S}), (\mathbf{x}_2, \mathbf{S})) \\ T_4 &= 40(0.052663) \\ T_4 &= 2.10653 \end{aligned} \quad (85)$$

- (b) Será usado o corolário 2b do artigo [3] assim a estatística que vamos calcular será:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2nm}{r(n+m)} D_r^s((\mathbf{x}_1, \mathbf{S}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{S}_2)) \\ T_3 &= 4.76047 \end{aligned} \quad (86)$$

Tendo um valor diferente do artigo, investigando onde pode estar a discrepância encontramos o seguinte valor para,

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T [r\mathbf{S}_2 + (1 - r)\mathbf{S}_1]^{-1} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0.22724 \quad (87)$$

enquanto o artigo encontrou 0.06970 para o mesmo passo, até o momento não sei explicar a diferença.

1.4 Estudo do artigo [4]

O instrumento SAR totalmente polarimétrico transmite pulsos de microondas polarizados ortogonalmente e mede componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido para todas as combinações de transmitidas e recebidas polarizações.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{jkr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix} \quad (88)$$

Onde k denota o número de onda e r é a distância entre o radar e o alvo. No campo eletromagnético com componentes E_i^j os índices subscritos denotados polarização horizontal h ou vertical v enquanto os índices sobreescritos indicam a onda recebida r ou transmitida t .

A matrix de espalhamento pode ser reduzida ao seguintes vetores:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \frac{S_{hv} + S_{vh}}{\sqrt{2}} \\ S_{vv} \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

1.4.1 Modelos Gaussianos

Podemos assumir que o vetor de espalhamento é uma distribuição gaussiana complexa circular. A matriz \mathbf{S} e os vetores \mathbf{s} e \mathbf{k} são *Single-look complex* representação dos daos PolSAR. Dados PolSAR *Multilook* podem ser representados por

$$\mathbf{C}_s = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \quad \mathbf{C}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^H. \quad (90)$$

chamadas de matriz de covariância e matriz de coerência, sendo L o número de *looks*. Por definição assumimos que \mathbf{s} ou \mathbf{k} é gaussiana multivariada e complexa circular e tem média zero. Será denotado $s \sim N_d^{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \Sigma_s)$ onde $\mathbf{0}$ é um vetor coluna de zeros, d a dimensão de \mathbf{s} a matriz de covariância de \mathbf{s}

$$\Sigma_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_p^H) \\ E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_p^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_p^H) \end{bmatrix}. \quad (91)$$

A função densidade de probabilidade (*pdf*) de \mathbf{s} é

$$p(\mathbf{s}, \Sigma_s) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_s|} \exp(-\mathbf{s}^H \Sigma_s^{-1} \mathbf{s}) \quad (92)$$

Se $L \geq d$ e os \mathbf{S}_i (ou \mathbf{k}_i) e na equação (90) são independentes, então a matriz de covariância escalada pode ser definida como $\mathbf{Z} = L\mathbf{C}_s$ (ou $\mathbf{Z} = L\mathbf{C}_k$), de acordo com distribuição de Wishart complexa não singular [2]

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma) = \frac{|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)} \exp(-\text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z})), \quad (93)$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ é o operador traço e $\Sigma = \frac{E[\mathbf{Z}]}{L} = E[\mathbf{C}_s]$.

Vamos escrever $\mathbf{Z} \sim W_d^{\mathbb{C}}(L, \Sigma)$.

E ainda, A constante de normalização $\Gamma_d(L)$ é a função Gamma multivariada definida como

$$\Gamma_d(L) = \pi^{\frac{1}{2}d(d-1)} \prod_{i=0}^{d-1} \Gamma(L-i) \quad (94)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

Seja a distribuição complexa Wishart (93) vamos encontrar a derivada do logaritmo natural desta distribuição em relação ao número de *looks*.

$$\begin{aligned}
\ln p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma) &= \ln \left(\frac{|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)} \exp(-\text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z})) \right), \\
\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma)) &= \ln \left(\frac{|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)} \right) + \ln(\exp(-\text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}))), \\
\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma)) &= \ln(|\mathbf{Z}|^{L-p}) - \ln(|\Sigma|^L \Gamma_d(L)) - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma)) &= (L-p) \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\Sigma|^L) - \ln(\Gamma_d(L)) - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma)) &= L \ln(|\mathbf{Z}|) - p \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_d(L)) - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}).
\end{aligned} \tag{95}$$

Derivando o logaritmo da densidade em relação a L teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L} (\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma))) &= \frac{\partial}{\partial L} (L \ln(|\mathbf{Z}|) - p \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_d(L)) - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z})) . \\
\frac{\partial}{\partial L} (\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma))) &= \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial L} (\ln(\Gamma_d(L))). \\
\frac{\partial}{\partial L} (\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma))) &= \ln \left(\frac{|\mathbf{Z}|}{|\Sigma|} \right) - \frac{\Gamma'_d(L)}{\Gamma_d(L)}.
\end{aligned} \tag{96}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial L} (\ln(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \Sigma))) = \ln \left(\frac{|\mathbf{Z}|}{|\Sigma|} \right) - \frac{\Gamma'_d(L)}{\Gamma_d(L)}. \tag{97}$$

1.4.2 Coeficiente de estimador de variação

O exemplo da figura (3) mostra uma distribuição gamma $g(\sigma, L)$ parametrizada com intensidade média $\sigma = 0.0358$ e com números de *looks* $L = \{8, 10, 12\}$.

$$p_I(I; \sigma, L) = \frac{1}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\sigma} \right)^L \exp \left(-\frac{LI}{\sigma} \right), \tag{98}$$

onde intensidade média σ e número de *looks* L são parametros desta distribuição gamma.

obs 1 - Programa *proanfinsen2009.r* armazenado no meu computador pessoal.

1.5 Estudo do artigo [5]

As definições deste artigo são semelhantes as definições do artigo [4] descrita na seção acima.

1.5.1 Entendendo as densidades e seus gráficos

Nesta seção o intuito é reproduzir e entender as distribuições que geraram as figuras (1), (2) e (3) do artigo [5].

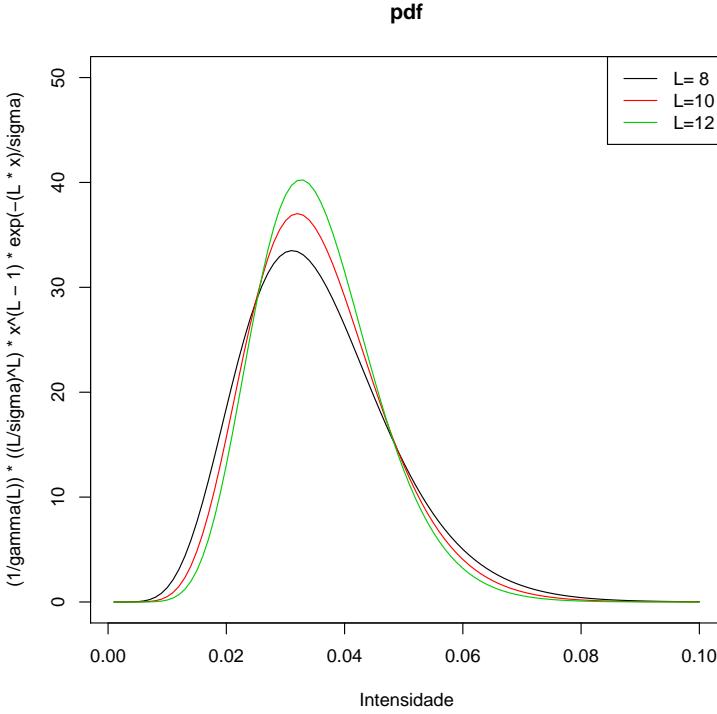


Figura 3: Distribuição gamma da referência [4] com parametros $\sigma = 0.0356$ e $L = \{8, 10, 12\}$.

$$f_X(x) = \frac{r_{\alpha,\omega}}{2K_\alpha(\omega)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{r_{\alpha,\omega}x} + r_{\alpha,\omega}x\right)\right), \quad (99)$$

onde $x > 0$ e $r_{\alpha,\omega} = \frac{K_{\alpha+1}(\omega)}{K_\alpha(\omega)}$

Seja K_ν uma função de Bessel de terceiro tipo e com ordem ν . Na figura (4) é mostrado os gráficos das funções para diferentes valores de $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ e $\nu = 20$.

A figura (5) mostra os gráficos da equação (99) para $\omega = 1$ e diferentes valores de $\alpha \in (1.1, 3, 10, 20)$.

A figura (6) mostra os gráficos da equação (99) para $\alpha = 1$ e diferentes valores de $\omega \in (1, 2, 10, 30)$.

As figuras (5) e (6) deste estudo deveriam estar equivalentes as figuras (1) e (2) do artigo [5], porém mostraram diferenças consideráveis nas magnitudes das funções.

Para gerar as figuras (4), (5) e (6) usei a função de Bessel (besselk) programada no pacote R.

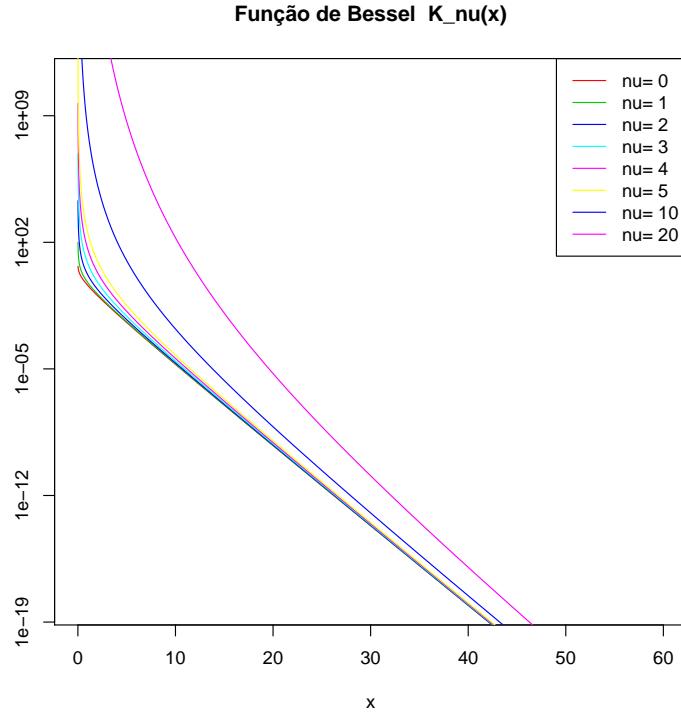


Figura 4: Gráficos da referência [5] para as funções de Bessel de terceiro tipo para diferentes ν .

obs 2 - Programa *probessel freitasfrerry2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 3 - Programa *prof1g1freitasfrerry2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 4 - Programa *prof1g2freitasfrerry2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

A densidade que caracteriza a distribuição gamma com média unitária

$$f_X(x) = \frac{\alpha^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\alpha x), \quad (100)$$

onde $\alpha, x > 0$, cujos gráficos estão na figura (7).

A densidade que caracteriza a distribuição gamma recíproca com média unitária

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(-\alpha-1)^\alpha \Gamma(-\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha+1}{x}\right), \quad (101)$$

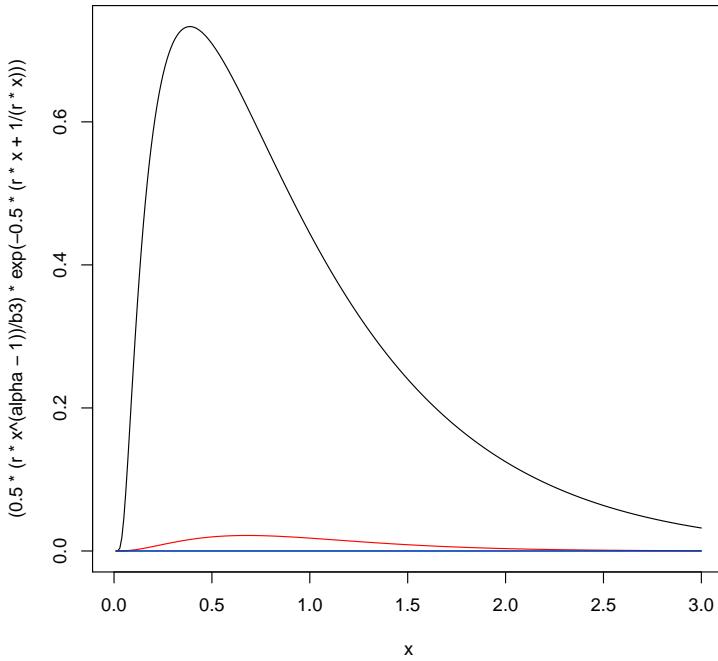


Figura 5: Gráficos da referência [5] para as equações (99) para $\omega = 1$ e $\alpha \in (1.1, 3, 10, 20)$.

onde $-\alpha, x > 0$, cujos gráficos estão na figura (8).

obs 5 - Programa *profig3afreitasfrerry2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 6 - Programa *profig3bfreitasfrerry2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

1.6 Estudo do artigo [6]

No artigo é apresentado uma nova classe de distribuições g surgindo do modelo multiplicativo e um caso especial chamado g^0 o qual se mostrou hábil para modelar *extremely heterogeneous clutter*.

1.6.1 O modelo multiplicativo e o ruído *speckle*

Os ruídos *speckle* são associados a cenas "coerentes iluminadas" tais como as obtidas por microondas, laser, ultrasonografia, etc. É um tipo de ruído que aparece devido a fenômenos de interferência entre o sinal incidente e o sinal

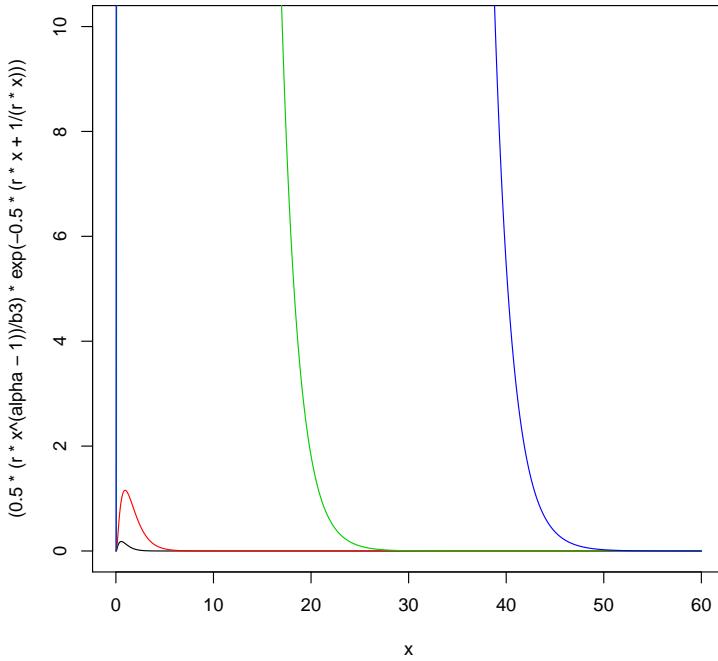


Figura 6: Gráficos da referência [5] para as equações (99) para $\alpha = 1$ e $\omega \in (1, 2, 10, 30)$.

refletido. Este tipo de ruído pode tornar a tarefa de interpretar a imagem tanto visual como automática difícil.

O modelo multiplicativo é uma ferramenta usada para explicar o comportamento estatístico de dados obtidos com coerentes iluminação. Assumindo que a observação com estas imagens são o resultado do produto de duas independentes variáveis randômicas, uma (X) modelando o retroespalhamento do terreno, e outra (Y) modelando o ruído *speckle*. O primeiro é considerado real e positivo, enquanto o segundo pode ser complexo.

O valor observado é resultado da variável randômica definida como $Z = X \cdot Y$. Serão definidos os seguintes subescritos C , I , e A para a referência a complexos, intensidade e amplitude respectivamente.

Speckle complexo tem distribuição normal bivariada com componentes distribuída identicamente independente tendo média 0 e variância $\frac{1}{2}$. Assim, $\mathbf{Y}_C = (Y_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{I}}) \sim N_2(0, \frac{1}{2})$ denota a distribuição do par.

Multilook intensity speckle surge tomando a média sobre n amostras independentes de $Y_I = \|Y_C\|^2$ na qual implica a distribuição gamma denotada

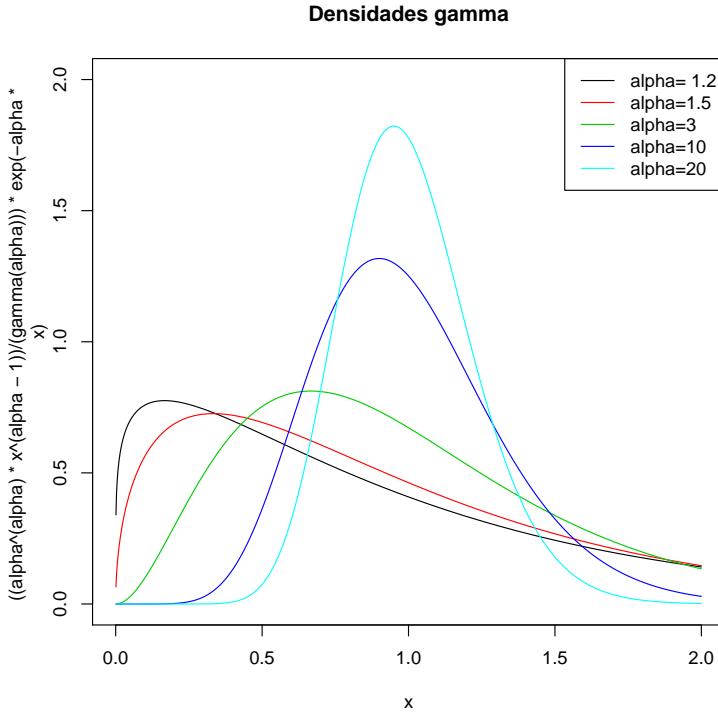


Figura 7: Densidades gamma unitária (100) para $\alpha > 0$ e $|\alpha| \in (1.2, 1.5, 3, 10, 20)$, referência [5] .

por $Y_I \sim \Gamma(n, n)$ e caracterizado pela densidade mostrada na figura (9)

$$f_{Y_I}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \exp(-ny), \quad y, n > 0 \quad (102)$$

Multilook amplitude speckle surge tomando a raíz quadrada do *Multilook intensity speckle* e portanto a raíz quadrada da distribuição gamma, denotado por $Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n, n)$ e caracterizado pela densidade e mostrada na figura (10).

$$f_{Y_A}(y) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2*n-1} \exp(-ny^2), \quad y, n > 0 \quad (103)$$

1.6.2 Amplitude do retroespalhamento

A amplitude do retroespalhamento obedece a raíz quadrada da lei gaussiana inversa generalizada, donotado aqui por $\mathbf{X}_A \sim N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma, \lambda)$, sendo sua

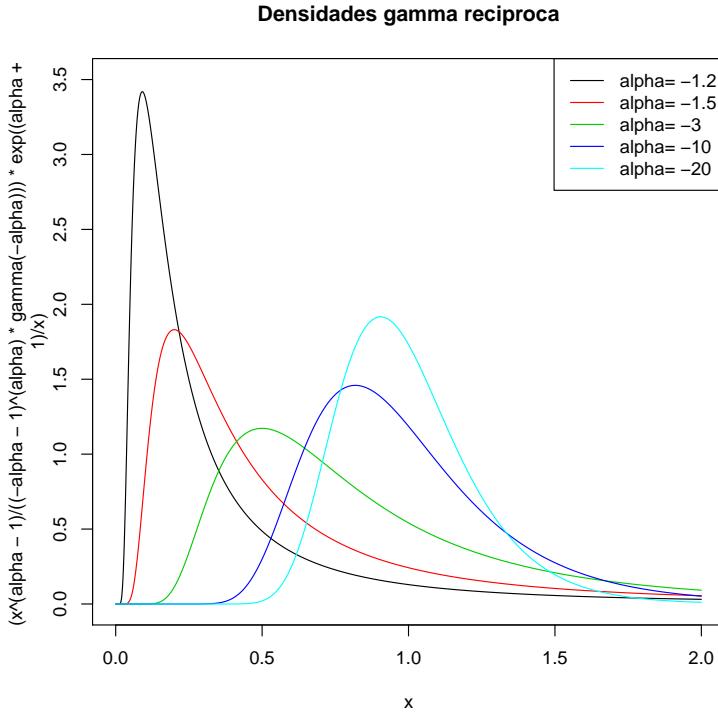


Figura 8: Densidades gamma unitária recíproca (101) para $\alpha < 0$ e $|\alpha| \in (1.2, 1.5, 3, 10, 20)$, referência [5] .

densidade dada por

$$f_{X_A}(x) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{x^2} - \lambda x^2\right) \quad (104)$$

Dois casos particulares desta distribuição são de interesse na análise de dados *SAR*, a raiz quadrada de gamma e a recíproca da raiz quadrada da distribuição gamma.

A raiz quadrada da distribuição gamma surge quando $\gamma \rightarrow 0$ enquanto $\alpha, \lambda > 0$. Esta distribuição é denota aqui por $\Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha, \lambda)$ e caracterizada pela densidade

$$f_{X_A}(x) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} \exp(-\lambda x^2), \quad \alpha, \lambda, x > 0. \quad (105)$$

A recíproca da raiz quadrada da distribuição gamma surge quando $\lambda \rightarrow 0$ enquanto $-\alpha, \gamma > 0$. Esta distribuição é denotada aqui por $\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma)$ e

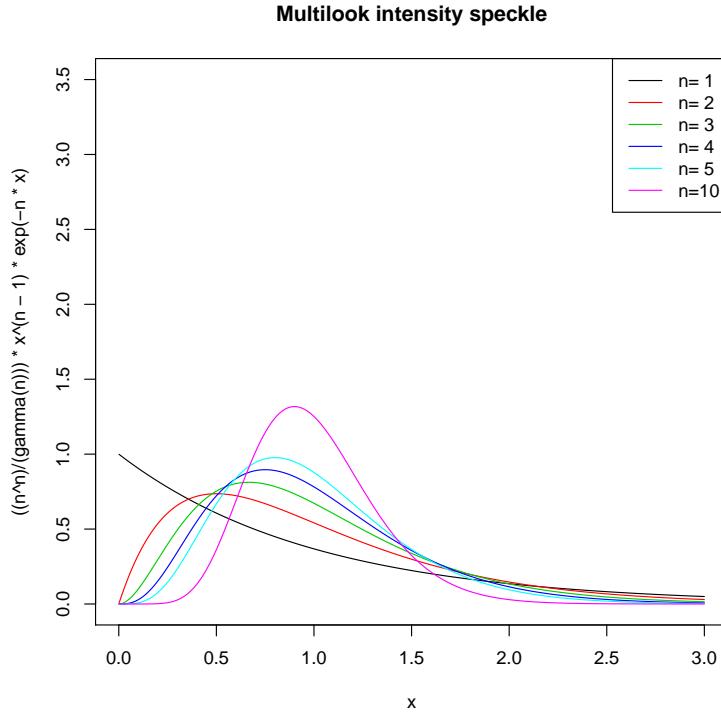


Figura 9: Multilook Intensity speckle para $n \in (1, 2, 3, 4, 5, 10)$.

caracterizada pela densidade

$$f_{X_A}(x) = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} \exp\left(-\frac{-\gamma}{x^2}\right), \quad -\alpha, \lambda, x > 0. \quad (106)$$

1.6.3 Retorno complexo

Definindo uma distribuição geral X_A como sendo $N^{-\frac{1}{2}}$ e dado um ruído complexo *speckle* é definido como $Y_C = (Y_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{I}}) \sim N2(0, \frac{1}{2})$. assim é possível derivar uma distribuição marginal associada para o retorno complexo, o qual é dado por $Z_C = X_A \cdot Y_C = X_A \cdot (Y_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{I}})$. A densidade que caracteriza a distribuição da parte real e da parte imaginária de Z_C , denotada por Z_o e definida por

$$f_{Z_o}(x) = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} \sqrt{\frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^\alpha}{\pi}} \left(\frac{\gamma + x^2}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\lambda(\gamma + x^2)}\right), x \in \mathbb{R}. \quad (107)$$

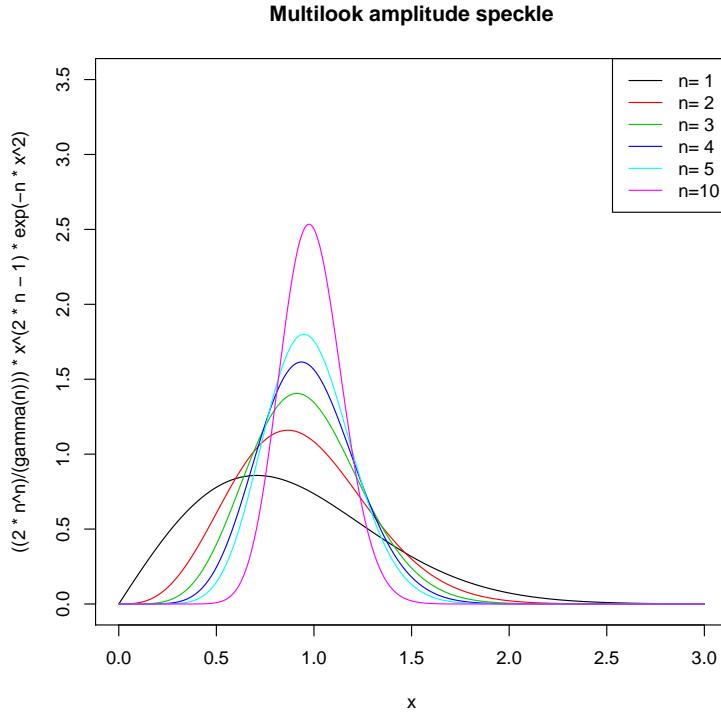


Figura 10: Multilook Amplitude speckle para $n \in (1, 2, 3, 4, 5, 10)$.

sendo o espaço do parâmetro dado por:

$$\begin{cases} \gamma > 0, \quad \lambda \geq 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ \gamma > 0, \quad \lambda > 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0, \quad \lambda > 0 & \text{se } \alpha > 0 \end{cases} \quad (108)$$

Esta distribuição é denotada por $g_C(\alpha, \gamma, \lambda)$, o artigo mostra que a distribuição $g_C(\alpha, \gamma, \lambda)$ pode convergir em distribuição com condições estabelecidas no artigo para $K_C(\alpha, \lambda)$ (retroespalhamento heterogêneo) ou para g_C^0 (retroespalhamento extremamente heterogêneo).

A distribuição K e g^0 podem ser representadas pelas equações respectivamente

$$f_{Z_\circ}(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\pi}} |x|^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}(2|x|\sqrt{\lambda}), \alpha, \lambda > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (109)$$

$$f_{Z_\circ}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha)}{\sqrt{\pi} \gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} (x^2 + \gamma)^{\alpha-\frac{1}{2}}, -\alpha, \lambda > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (110)$$

1.6.4 Retorno da amplitude

A distribuição do retorno da distribuição surge de $Z_A = X_A Y_A$ onde $X_A \sim N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma, \lambda)$ e $Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n, n)$ é denotado por como $g_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ é caracterizado pela densidade

$$f_{Z_A}(x) = \frac{2n^n \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(n) K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2n-1} \left(\frac{\gamma + nx^2}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-n}{2}} K_{\alpha-n}(2\sqrt{\lambda(\gamma + nx^2)}), x \in \mathbb{R}. \quad (111)$$

com o espaço de parametro (108).

Onde K_A e g_A distribuição amplitude K e a distribuição g^0 e podem ser representadas pelas equações abaixo respectivamente

$$f_{Z_A}(x) = \frac{4\lambda n x}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} (\lambda n x^2)^{\frac{(\alpha+n)}{2}-1} K_{\alpha-n}(2x\sqrt{\lambda n}), \alpha, \lambda, n, x > 0. \quad (112)$$

$$f_{Z_A}(x) = \frac{2n^n \Gamma(n-\alpha) \gamma^{-\alpha} x^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)(\gamma + nx^2)^{n-\alpha}}, -\alpha, \gamma, n, x > 0. \quad (113)$$

As distribuições g_A com a variação do parâmetros conforme o artigo estão representadas nas figuras (11) e (12).

1.6.5 Modelando áreas urbanas

Quando estimamos os três parâmetros da distribuição g_A sobre áreas urbanas foi observado que o atrator e a solução global do sistema de equações estava no subconjunto do espaço de parâmetros dado por ($\alpha < 0, \gamma > 0, \lambda < 10^{-6}$);

1.7 Estudo do artigo [7]

1.7.1 Distribuição complexa de Wishart

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L) = \frac{L^{pL} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)} \exp(-L \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z})), \quad (114)$$

A ideia é encontrar a derivada do logaritmo natural em relação ao número

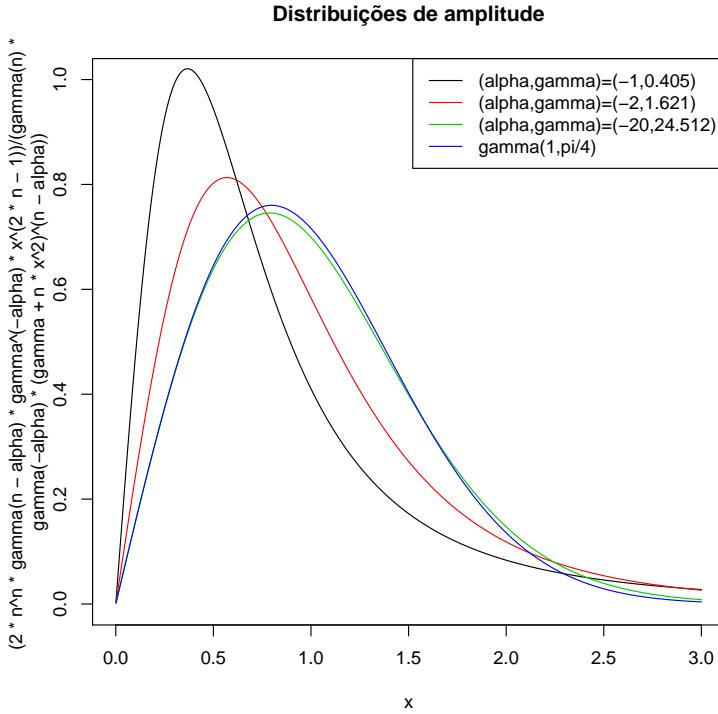


Figura 11: Distribuições de amplitude.

de *looks*, com esse intuito a distribuição (114) será reescrita

$$\begin{aligned}
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln\left(\frac{L^{pL}|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)} \exp(-L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}))\right), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln\left(\frac{L^{pL}|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\Sigma|^L \Gamma_d(L)}\right) \ln(\exp(-L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}))), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln(L^{pL}) - \ln(|\Sigma|^L \Gamma_d(L)) - L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln(L^{pL}) + \ln(|\mathbf{Z}|^{L-p}) - \ln(|\Sigma|^L) - \ln(\Gamma_d(L)) - L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= pL \ln(L) + (L-p) \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_d(L)) - L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
 \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= pL \ln(L) + L \ln(|\mathbf{Z}|) - p \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_d(L)) - L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}),
 \end{aligned} \tag{115}$$

Derivando com relação ao número de *looks* L , teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial L} (\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L))) &= \frac{\partial}{\partial L} (pL \ln(L) + L \ln(|\mathbf{Z}|) - p \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_d(L)) - L \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z})), \\
 \frac{\partial}{\partial L} (\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L))) &= (p \ln(L) + p) + \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial L} \ln(\Gamma_d(L)) - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}), \\
 \frac{\partial}{\partial L} (\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L))) &= p(\ln(L) + 1) + \ln\left(\frac{|\mathbf{Z}|}{|\Sigma|}\right) - \frac{\Gamma'_d(L)}{\Gamma_d(L)} - \text{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{Z}).
 \end{aligned} \tag{116}$$

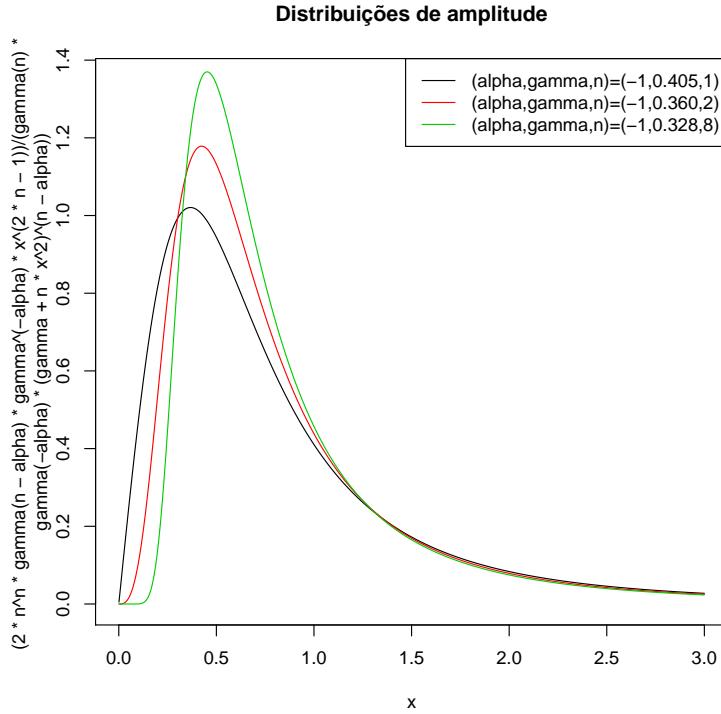


Figura 12: Distribuições de amplitude.

Sendo n tomado arbitrariamente entre o L looks temos a seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln (f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, n))) = p (\ln (n) + 1) + \ln \left(\frac{|\mathbf{Z}|}{|\Sigma|} \right) - \frac{\Gamma'_d(n)}{\Gamma_d(n)} - \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}). \quad (117)$$

1.8 Estudo do livro [8]

Algumas observações:

- (1) As imagens *SAR* são uma técnica de sensoriamento remoto bem desenvolvidas para obter imagens da superfície da terra bidimensionais com alta resolução espacial e em larga escala.
- (2) Sistema de imagem *SAR* são um sistema de radar operando na região de microondas do spectro eletromagnético, usualmente entre a *P-band* e *Ka-band* conforme tabela abaixo.

<i>band</i>	Frequênci $f(Ghz)$	Freq \times Comprimento de onda $\lambda(cm)$.
<i>P-band</i>	($< 0.39, 0.39$)	0.3×100.0
<i>L-band</i>	($0.39 - 1.55$)	1.0×30.0
<i>S-band</i>	($1.55 - 3.90$)	3.0×10.0
<i>C-band</i>	($3.90 - 5.75$)	$\sim (4.0 \times 7.0)$
<i>X-band</i>	($5.75 - 10.9$)	10.0×3.0
<i>K-band</i>	($10.9 - 36.0$)	30.0×1.0
<i>Q-band</i>	($36.0 - 46.0$)	$\sim (40.0 \times 0.8)$
<i>V-band</i>	($46.0 - 56.0$)	$\sim (50.0 \times 0.6)$
<i>W-band</i>	($56.0 - > 56.0$)	100.0×0.3

Tabela 1: Espectro magnético para a faixa de microondas.

- (3) O radar é usualmente montado em uma plataforma em movimento(aviões, satélites e etc...) e opera com a fonte eletromagnética emissora perpendicular ao linha suporte do voo.
- (4) O sistema emite para terra um pulso de microondas e recebe um sinal eletromagnético retroespalhados.
- (5) O sistema *SAR* usa o sinal recebido para sintetizar a imagem da superfície terra com alta resolução.
- (6) E ainda permite monitorar clima em escala global quando a frequência opera abaixo de *L-band*.

1.8.1 Estudo das imagens PolSar

1.9 Estudo do artigo [9]

1.9.1 Imagens Simuladas

Será usado imegens sintéticas 500×500 para estudar a acurácia de diferentes métodos de classificação. A ideia é estudar como ocorre a redução de ruído e preservação de bordas. Para gerar uma imagem PolSAR usaremos a imagem sintética combinada com as matrizes de covariância $\{\Sigma_k\}_{k=1\dots 5}$ extraídas de uma imagem PolSAR com uma distribuição de Wishart complexa $W_G(\Sigma, L)$. No presente artigo os experimentos apresentados usam $L = 4$.

Para cada par de matrizes de covariância $\Sigma_{k_1}, \Sigma_{k_2}$ (com $k_2 > k_1$) será gerado uma imagem PolSAR $P_{k_1, k_2, \beta}$ da seguinte maneira: em cada pixel branco da imagem sintética vindo de $W_G(\Sigma_{k_1}, L)$ e de cada pixel preto vindo de $W_G(\Sigma_{k_2}, L)$ vamos fazer a combinação linear $W_G(\beta\Sigma_{k_1} + (1 - \beta)\Sigma_{k_2}, L)$ com $\beta \in [0, 1]$.



Figura 13: Imagem PolSar da Baía de São Francisco.

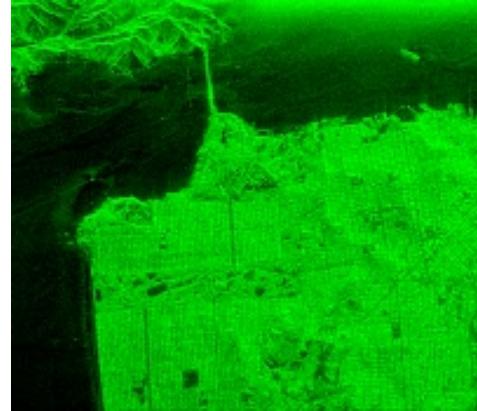


Figura 14: Canal com a cor verde da imagem PolSar.



Figura 15: Canal com a cor azul da imagem PolSar.



Figura 16: Canal com a cor vermelha da imagem PolSar.

O parâmetro β é usado para pesar as informações entre as matrizes de covariância Σ_{k_1} e Σ_{k_2} , modelando a mistura de classes em imagens PolSAR atuais. Quando $\beta = 0$ não há mistura e o problema consiste em escolher entre amostras puras de Σ_{k_1} e Σ_{k_2} . Se o parâmetro β se aproxima de 1, teremos uma aproximação com a matriz de covariância Σ_{k_1} , assim teremos maior dificuldade de escolher classes. As figuras abaixo mostram algumas *Phantoms* geradas com auxílio dos códigos programados pelos autores do artigo em Matlab e localizado em

<http://www.ctim.es/polsar/>

As *Phantoms* foram geradas com o auxílio do método Monte Carlo, que será descrito com mais detalhes na próxima seção.

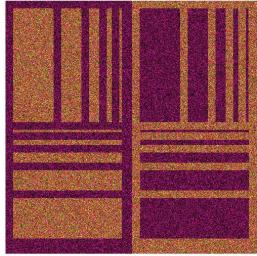


Figura 17: $P_{1,3,0.0}$

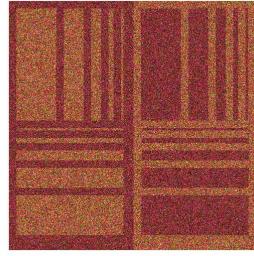


Figura 18: $P_{1,3,0.5}$

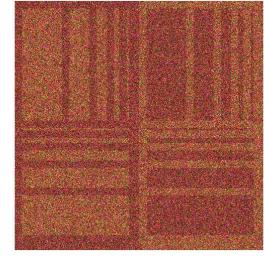


Figura 19: $P_{1,3,0.7}$

1.9.2 Monte Carlo [10]

Sendo uma matriz de covariância e simétrica definida positiva S . Portanto podemos encontrar a fatoração de Crout $S = CC^H$. Segue que o vetor Z_α pode ser encontrado da seguinte maneira $Z_\alpha = CW_\alpha$, onde o vetor W_α $p \times 1$ é distribuído como $N(\phi, I)$, isto é, $W_\alpha \sim N(\phi, I)$. Definindo $N(\phi, I)$ como uma distribuição normal multivariada com vetor de média nula ϕ e a matriz de covariância sendo a identidade I . Isto significa que W_α são vetores independentes p -dimensionais cuja as componentes são variáveis independentes normalmente distribuídas com média zero e variância unitária.

$$B = \{b_{ij}\} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} W_\alpha W_\alpha^T \quad (118)$$

então

$$CBC^T = \{b_{ij}\} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} CW_\alpha W_\alpha^T C^T = A \quad (119)$$

Desta forma, o problema fica restrito a gerar uma matriz randômica simétrica B .

1.9.3 Algoritmo de geração das imagens *Phantoms*

No arquivo

`S_6_classes.m`

há seis matrizes de dados Polaris Wishart, extraídas de uma imagem de dados "inteiramente" Polaris. Por exemplo

$$\mathbf{S}(:,:,1) = \begin{bmatrix} 0.002836 & 0.000067 + -0.000526i & 0.006216 + 0.000654i \\ 0.000067 + 0.000526i & 0.000543 & -0.000084 + 0.001434i \\ 0.006216 - 0.000654i & -0.000084 - 0.001434i & 0.016687 \end{bmatrix}.$$

Além das definições de S nesse arquivo temos a definição do número de visadas $L = 4$. Rodando o arquivo será gerado o arquivo

`S_6_classes.mat`

com as matrizes e o número de visadas.

No arquivo

`cwishart_variates.m`

está programando o processo descrito na seção anterior e com uma versão melhorada, o arquivo recebe a matriz Σ_i , L e $NSamples$. Onde Σ_i é uma matriz de covariância Σ_i e o número de visadas L definidas respectivamente em `S_6_classes.m` e `NSamples` o número de amostras definido no programa.

A saída do programa é um vetor de matrizes de Wishart B com $(p \times p \times Nsample)$.

O arquivo

`Generate_Polsar_two_classes_phantom`

tem entradas S, L, m, n onde respectivamente S é a matriz de covariância Σ_i , L é o número de visadas, e m e n são as dimensões da imagem *Phantom*.

A saída do programa são a imagem *phantom* de tamanho $(m \times n \times 9)$ e uma vetor de matriz R de tamanho $(3 \times 3 \times 2)$.

O arquivo

`Polsar_two_classes_phantom_Convex_Sum.m`

é o programa principal que chama os programas descritos acima e geram uma matriz wishart $W_G(\Sigma, L)$. Para cada par de matriz de covariância Σ_{k_1} e Σ_{k_2} com $k_2 > k_1$ será gerado uma imagem PolSAR $P_{k_1, k_2, \alpha}$ da seguinte maneira: Em casa pixel branco da imagem *phantom* colocamos $W_G(\Sigma_{k_1}, L)$ e para cada pixel preto vamos colocar a combinação linear $W_G(\alpha\Sigma_{k_1} + (1 - \alpha)\Sigma_{k_2})$ com $\alpha \in [0, 1]$ combinações lineares convexas de *Phantoms* com duas matrizes de covariância,

1.9.4 Imagens $P_{k_1, k_2, 0}$ - Visualização de Pauli

Para essa imagens está sendo usado o matlab, com a visualização de Pauli

1.9.5 Imagens $P_{k_1, k_2, 0}$ - Visualização com histeq

São realizadas equalizações das imagens usando o comando `histeq(I)`

Para essa imagens está sendo usado o matlab, cuidar ainda algumas discrepâncias em relação ao artigo

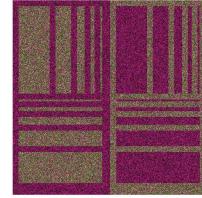
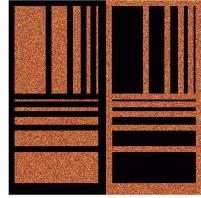
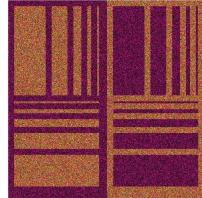
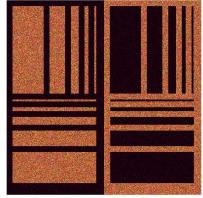


Figura 20: $P_{1,2,0.0}$ Figura 21: $P_{1,3,0.0}$ Figura 22: $P_{1,4,0.0}$ Figura 23: $P_{1,5,0.0}$

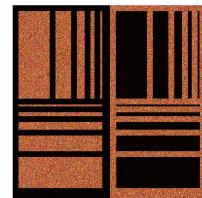
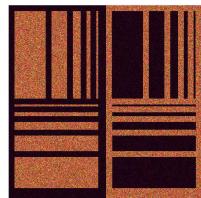
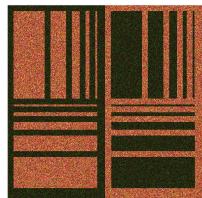
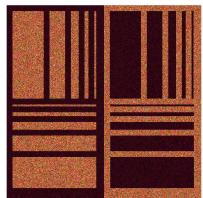


Figura 24: $P_{2,3,0.0}$ Figura 25: $P_{2,4,0.0}$ Figura 26: $P_{2,5,0.0}$ Figura 27: $P_{3,4,0.0}$

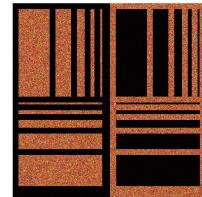
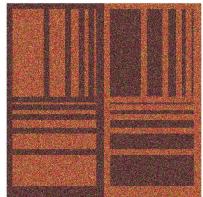


Figura 28: $P_{3,5,0.0}$

Figura 29: $P_{4,5,0.0}$

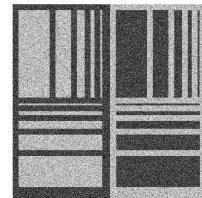
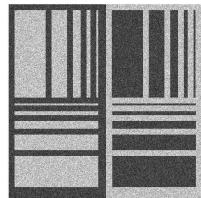
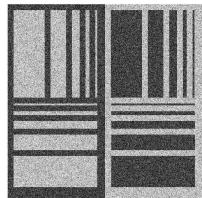
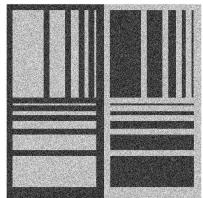


Figura 30: $P_{1,2,0.0}$ Figura 31: $P_{1,3,0.0}$ Figura 32: $P_{1,4,0.0}$ Figura 33: $P_{1,5,0.0}$

1.10 Estudo do artigo [11]

Artigo que discutirá métodos de detecção de borda em imagens PolSar com multiplas visadas. A ideia básica é detectar o ponto de transição em uma faixa tão fina quanto possível entre duas regiões da imagem.

Os métodos clássicos de detecção de bordas assumem que o ruído é adi-

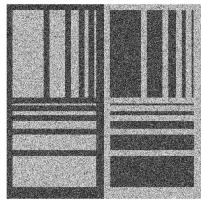


Figura 34: $P_{2,3,0.0}$

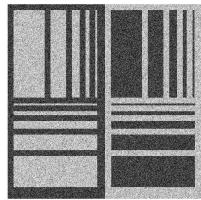


Figura 35: $P_{2,4,0.0}$

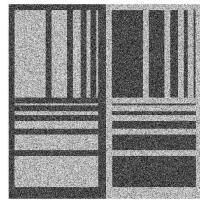


Figura 36: $P_{2,5,0.0}$

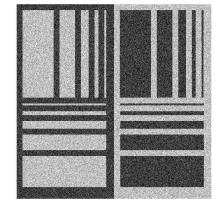


Figura 37: $P_{3,4,0.0}$

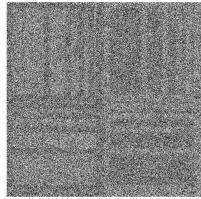


Figura 38: $P_{3,5,0.0}$

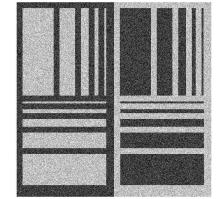


Figura 39: $P_{4,5,0.0}$

tivo, tornando esses métodos ineficientes para aplicação em imagens PolSAR. O ruídos neste tipo de imagens é do tipo *speckle* que tem natureza multiplicativa e torna images SAR uma tarefa desafiadora.

Podemos indicar que o problema de detecção de borda pode ser resumido em três importantes aspectos:

1. o procedimento para detecção,
2. a determinação de uma posição mais acurada da posição da borda,
3. a especificação de tamanho para uma janela (pode ser uma janela quadrada ou ou em uma faixa de dados).

O tamanho dá janela pode influenciar em alguns aspectos como por exemplo, uma janela pequena pode não conter informações para identificar a presença de bordas, ou janelas maiores podem obter informações para mais de uma borda. Assim o tamanho de janela ideal é aquele que contém as informações para detecção de uma borda. Vamos assumir que há uma borda na janela fornecida pela seleção inicial.

A proposta do artigo extende este procedimento em três sentidos:

1. as mais finas faixas possíveis usadas, inclusive do tamanho de um pixel,
2. distâncias estocásticas e diferenças de entropias são aplicadas como função objetivo para serem maximizadas, não somente a função de verosimilhança,

3. A influência da resolução espacial da imagem é usada.

1.10.1 Detecção de bordas em imagens PolSAR

De uma maneira geral, a ideia se baseia em encontrar um ponto de transição em uma faixa de dados o qual é considerado uma estimativa de posicionamento da borda. O estimador é o máximo de uma função dada.

As metodologias de detecção de bordas nesse artigo ocorrem em diversos estágios:

1. identificar o centroíde de uma área de interesse de maneira automática, semiautomática ou manual,
2. Construindo raios do centroíde para fora da área de interesse,
3. Coletando dados em torno dos raios,
4. detectar pontos na faixa de dados os quais fornecem evidências de mudanças de propriedades, ou seja, uma transição,
5. Definindo o contorno usando um método de interpolação entre os pontos de transição, por exemplo as B-Splines.

Inicialmente, escolhemos uma região R com centroíde \mathbf{C} e traçamos raios iniciando em C e indo até um ponto de controle P_i , com $i = 1, 2, \dots, S$, estes pontos de controle estão fora da região R . Teremos S raios resultantes representados por $\mathbf{s}^{(i)} = \overrightarrow{CP_i}$ com ângulos $\epsilon_i = \angle(\mathbf{s}_{(i)}, \mathbf{s}_{(i+1)})$.

O raio será convertido sobre pixel usando o algoritmo *Bresenham's midpoint line algorithm*, esse algoritmo fornece uma fina representação digital para o raio.

Vamos assumir que os dados seguem uma distribuição complexa Wishart e com sua respectiva função de distribuição dado por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}' ; \Sigma, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}'|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}')), \quad (120)$$

onde \mathbf{Z}' é um possível resultado para \mathbf{Z} , Σ representa a matriz de covariância, L é o número de visadas, m é o número de canais polarizados. Sendo ainda, a constante de normalização $\Gamma_m(L)$ é a função Gamma multivariada definida como

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (121)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma e $|\cdot|$, $tr(\cdot)$ são respectivamente o determinante e o traço de uma matriz. Vamos denotar a distribuição Wishart como $W(\Sigma, L)$.

A faixa de dados coletada no i -ésimo raio s^i , $i = 1, 2, \dots, S$, contém $N^{(i)}$ pixels. Para cada pixel k em uma dada faixa i é assumida que pode ser descrita pelo resultado da matriz $\mathbf{Z}_k^{(i)}$ que é um distribuição de Wishart.

$$\begin{cases} Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_A^{(i), L_A^{(i)}}), & \text{para } k = 1, \dots, j^{(i)} \\ Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_B^{(i), L_B^{(i)}}), & \text{para } k = j^{(i)} + 1, \dots, N^{(i)} \end{cases} \quad (122)$$

Podemos definir cada faixa composta de dois tipos de amostras, e cada tipo obedece uma lei de Wishart complexa com diferentes parâmetros. Vamos assumir que o número de visadas é constante para todas as faixas.

A ideia principal é encontrar a posição $j^{(i)}$ em uma faixa ao longo do raio $s^{(i)}$ dada alguma regra específica.

O modelo proposto em (122) assume que existe uma transição ocorrendo ao longo da faixa $s^{(i)}$.

Na continuidade do trabalho será omitido o índice (i) para focarmos nossa análise em uma única faixa.

1.10.2 Máxima verosimilhança

A função de máxima verosimilhança descrita por (122) é dada por

$$L(j) = \prod_{k=1}^j f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) \prod_{k=j+1}^N f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L)$$

Usando propriedades de logaritmos naturais teremos,

$$l(j) = \ln(L(j)) = \sum_{k=1}^j \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L)) \quad (123)$$

realizando as manipulações algébricas na função de distribuição em cada região

$$\begin{aligned} \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma, L)) &= \ln\left(\frac{L^{mL} |\mathbf{Z}'_k|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)} \exp(-Ltr(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}'_k))\right), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma, L)) &= \ln\left(\frac{L^{mL} |\mathbf{Z}'_k|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)}\right) + \ln(\exp(-Ltr(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}'_k))), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma, L)) &= \ln(L^{mL} |\mathbf{Z}'_k|^{L-m}) - \ln(|\Sigma|^L \Gamma_m(L)) - Ltr(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}'_k), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma, L)) &= \ln(L^{mL}) + \ln(|\mathbf{Z}'_k|^{L-m}) - \ln(|\Sigma|^L) - \ln(\Gamma_m(L)) - Ltr(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}'_k), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma, L)) &= mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_m(L)) - Ltr(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}'_k), \end{aligned}$$

Substituindo nas duas parcelas da equação (123) levando em consideração as duas regiões diferentes teremos

$$\begin{aligned}
l(j) &= \sum_{k=1}^j [mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_A|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)], \\
l(j) &= \sum_{k=j+1}^N [mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_B|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)], \\
l(j) &= \sum_{k=1}^N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - \sum_{k=1}^j [L \ln(|\Sigma_A|) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)], \\
l(j) &= \sum_{k=1}^N [(L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|)] - \sum_{k=j+1}^N [L \ln(|\Sigma_B|) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[(N-j) \ln(|\Sigma_B|) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right],
\end{aligned}$$

Podemos encontrar uma aproximação para Σ usando o estimador de máxima verosimilhança denotado por $\widehat{\Sigma}$.

$$\widehat{\Sigma}_I(j) = \begin{cases} j^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}_k & \text{se } I = A, \\ (N-j)^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}_k & \text{se } I = B. \end{cases}$$

Com isso a equação acima pode ser reescrita por

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\sum_{k=j+1}^N \Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\Sigma_A^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\Sigma_B^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L[mj + (N-j)m], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - LN m, \\
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N-j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|),
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\widehat{\Sigma}_A(j)|) + (N-j) \ln(|\widehat{\Sigma}_B(j)|) \right], \\
&\quad + (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|),
\end{aligned} \tag{124}$$

O estimador de máxima verosimilhança \hat{j}_{ML} do índice de localização onde acontece a transição de região é dado por:

$$\hat{j}_{ML} = \arg \max_j l(j). \quad (125)$$

obs: No artigo não existe o último termo da equação acima, entender o motivo.

1.10.3 Gráfico de $l(j)$

Referências

- [1] J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango, and A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028, September 1994.
- [2] N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180, 03 1963.
- [3] M. Salicru, D. Morales, M.L. Menendez, and L. Pardo. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, 51(2):372 – 391, 1994.
- [4] Stian Normann Anfinsen, Anthony P Doulgeris, and Torbjørn Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(11):3795–3809, 2009.
- [5] Corina C Freitas, Alejandro C Frery, and Antonio H Correia. The polarimetric g distribution for sar data analysis. *Environmetrics*, 16(1):13–31, 2005.
- [6] Alejandro César Frery, H-J Muller, Corina da Costa Freitas Yanasse, and Sidnei João Siqueira Sant’Anna. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 35(3):648–659, 1997.
- [7] Alejandro C Frery, Abraao DC Nascimento, and Renato J Cintra. Analytic expressions for stochastic distances between relaxed complex wishart distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(2):1213–1226, 2014.

- [8] Jong-Sen Lee and Eric Pottier. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. CRC press, 2009.
- [9] Luis Gomez, Luis Alvarez, Luis Mazorra, and Alejandro C Frery. Fully polsar image classification using machine learning techniques and reaction-diffusion systems. *Neurocomputing*, 255:52–60, 2017.
- [10] P. L. Odell and A. H. Feiveson. A numerical procedure to generate a sample covariance matrix. *Journal of the American Statistical Association*, 61:199–203, 1966.
- [11] Abraão Nascimento, Michelle Horta, Alejandro Frery, and Renato Cintra. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for polsar imagery. 7:648–663, 02 2014.