AULA 6

Ciência e Tecnologia do Vácuo

– 2024 –

27/08/24

Lista de presença
distribuir lista 2

Resumo da aula anterior

(a) $\nu = \frac{1}{4} n \bar{v} \equiv \frac{\text{nº de moléculas}}{\text{área tempo}}$ $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$; $n = \frac{P}{kT}$

$$\boxed{\nu = \frac{3{,}5 \times 10^{22}}{(MT)^{1/2}} P(\text{Torr})} \quad \frac{\text{moléculas incidentes}}{\text{cm}^2\ \text{s}}$$

Para N_2 e $T = 300\,K$ $\nu = 3{,}8 \times 10^{20} P(\text{Torr}) \frac{\text{moléculas incidente}}{\text{cm}^2\ \text{s}}$

SLIDE $\boxed{\tau = \frac{2{,}7 \times 10^{-6}}{P(\text{Torr})}}$ tempo de formação de uma monocamada

(b) cálculo $N_c \equiv N_V$

$$P = \frac{12 kT}{\pi \delta^2 R_0} \qquad \begin{cases} \delta_{N_2} = 3{,}7 \times 10^{-8}\ \text{cm} \\ k = 10^{-19}\ \frac{\text{Torr cm}^3}{K} \end{cases}$$

$$\boxed{N_V \equiv N_S \text{ para } P \cong 10^{-2}\ \text{Torr}}$$

(c) Viscosidade $\boxed{\eta = \frac{1}{3} \lambda n m \bar{v}}$

(d) Regimes de escoamento

- Regime viscoso $(\lambda \ll D)$ – movimento coletivo
  - fluxo turbulento
  - fluxo laminar
- Regime intermediário
- Regime molecular $(\lambda \gg D)$

Definições

nº de Reynolds

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\eta}}$$

$Q > 200\,D$ (cm) turbulento

$Q < 100\,D$ (cm) laminar

nº de Knudsen

$$\boxed{N_K = \frac{\lambda}{D}}$$

$DP \geq 1$ viscoso

$10^{-2} < DP < 1$ intermediário

$DP \leq 10^{-2}$ molecular

exemplos:

Bancadas 1 e 2

$P \cong 10^{-2}$ Torr $D = 10$ cm $DP = 10^{-1}$ cm Torr

Intermediário

$P = 1$ Torr $D = 10$ cm $DP = 10$ cm Torr

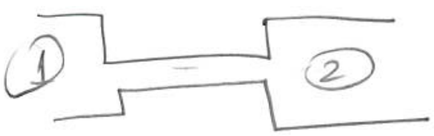
Viscoso

Bancada 3

$P = 10^{-6}$ Torr $D = 10$ cm $DP = 10^{-5}$ cm Torr

Molecular

Regime Molecular

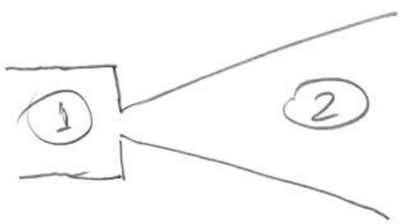


Probabilidade de Transmissão

$N_o \times P_{12}$

Simétrico

1 → 2 e 2 → 1 são iguais



Assimétrico

1 → 2 e 2 → 1 também são iguais

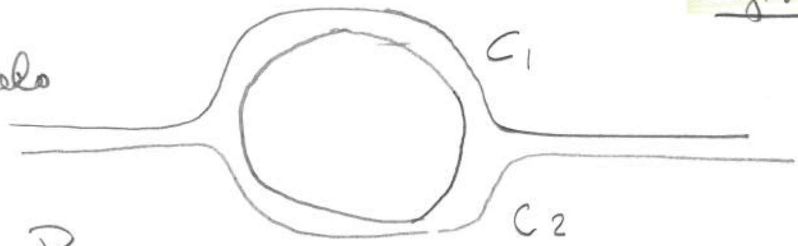
Argumento:

sem bombeamento $P_1 = P_2$

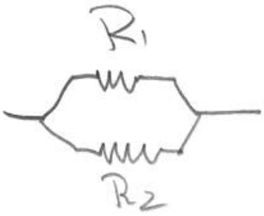
Cálculo de Condutâncias

Regime molecular

Tubos em paralelo



analogia

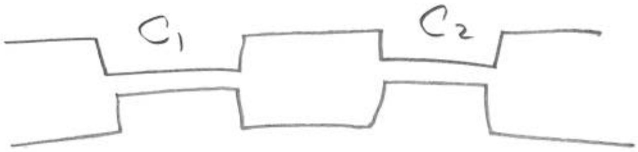


$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Para tubos no regime molecular

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

Tubos em série



Analogia

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

Para tubos no regime molecular

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Aula de hoje

Regime molecular (Bancada 3 - bomba difusora)

1. Condutância de um orifício
2. condutância de um diafragma
3. tubo circular
4. duto com seção reta retangular

Leitura recomendada

P. A. Redhead "The ultimate vacuum"

VACUUM 53 (1999) 137-149

—/—

Impedância $Z_{AB} = \dfrac{P_A - P_B}{Q}$ analogia $\begin{cases} V = Ri \\ \Delta P = Z_{AB} Q \end{cases}$

Condutância

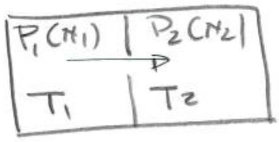
$$\boxed{C_{AB} = \frac{Q}{P_A - P_B}}$$

ou

$$\boxed{Q = C \Delta P}$$

Condutância de um orifício

Regime molecular



As dimensões da câmara de vácuo devem ser maiores do que as do orifício

Suposição: As moléculas colidem apenas com as paredes da câmara de vácuo.

Fluxo de gás (throughput - Q) lembrando $\boxed{PV = NkT}$

$$Q = PS = P\frac{dV}{dt} = kT\frac{dN}{dt}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{4} n \bar{v}}$$ onde $\nu = \dfrac{\text{nº de moléculas}}{\text{área tempo}}$

$\dfrac{dN}{dt} = \nu A$, então:

$$Q = kT\nu A = kT\left(\frac{1}{4} n \bar{v}\right) A$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{v} &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \\ n &= \frac{N}{V} = \frac{P}{kT} \end{aligned} \right.$$

$$Q = \cancel{kT}\,\frac{1}{4}\,\frac{P}{\cancel{kT}}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\;A$$

$$\boxed{Q = PA\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}$$

$$Q_T = Q_1 - Q_2 = A\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,(P_1 - P_2)$$

O que nos interessa é o fluxo de massa total que é exatamente a diferença entre os dois compartimentos.

então

$$\boxed{Q_T = A\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\;\Delta P}$$

Mas, por definição $Q = C(P_1 - P_2)$

logo $$\boxed{C = A\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}$$ condutância de um orifício

Reescrevendo em unidades úteis:

$$\boxed{C = 3{,}64 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} A \ \ l/s}$$

Para N_2 $T = 20°C$ $(T = 293\,K)$

$$\boxed{C_{N_2} = 12\,A \ \ l/s}$$ A (cm^2) C (l/s)

Para um orifício circular $A = \frac{\pi D^2}{4}$, logo

$$C_{o_{N_2}} = \frac{12\pi D^2}{4} \Longrightarrow \boxed{C_{o_{N_2}} = 9D^2}$$ D (cm) C_o (l/s)

Importante notar que $C \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$

→ No regime molecular a condutância não depende da pressão.

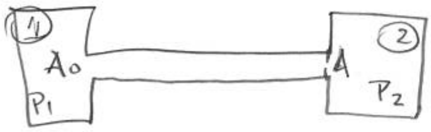
→ Quanto maior a temperatura, maior a condutância

→ Quanto menor a temperatura, menor a condutância

→ A condutância é inversamente proporcional a massa molecular M

Condutância de um diafragma

Condutância de orifícios com áreas diferentes ligados por um tubo de comprimento L.



$$\boxed{\nu = \frac{1}{4} n \bar{v}}$$

Considerando a impedância na direção 1 para 2

A molécula de gás deve encontrar o orifício do tubo e depois vencer a superfície do tubo

$$Z_{12} = Z_{A_0} + Z_L + Z_{ef}$$

Na direção contrária 2 → 1

$$Z_{21} = Z_A + Z_L$$

Sabendo que: $Z_{21} = Z_{12}$

Vamos supor que o sistema esteja sendo bombeado e que se estabeleça um fluxo de massa.

Desligando-se as bombas de vácuo, as pressões P_1 e P_2 devem se igualar, logo $Z_{21} \equiv Z_{12}$

Então $Z_{A_0} + Z_L + Z_{ef} = Z_A + Z_L$

$$\boxed{Z_{ef} = Z_A - Z_{A_0}}$$

$$\frac{1}{C_{ef}} = \frac{1}{C_A} - \frac{1}{C_{A_0}} \Rightarrow \boxed{C_{ef} = \frac{C_A C_{A_0}}{C_{A_0} - C_A}}$$

Lembrando que $C_0 = 12A = 9D^2$ para N_2
$T = 293K$

$$C_{ef} = 12A\left[\frac{A_0}{A_0 - A}\right]$$ ou

$$C_{ef} = 9D^2\left[\frac{D_0^2}{D_0^2 - D^2}\right]$$

Estudo de Casos:

CASO 1

Para $A \ll A_0$

$C_{ef} = 12A$ ou $C_{ef} = 9D^2$

i.e. $\boxed{C_{ef} = C_A}$

Caso 2

Para $A \sim A_0$

$C_{ef} \to \infty$ i.e $\boxed{Z_{ef} = 0}$

CASO 3

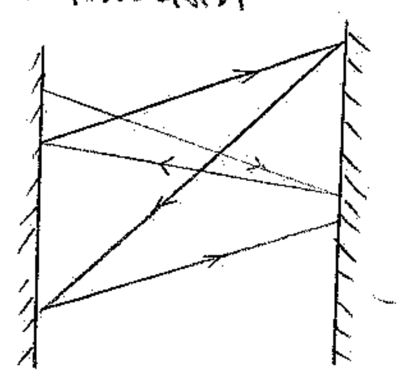
$$A = \frac{A_0}{2}$$

$\boxed{C_{ef} = 2C_A}$ efeito diafragma

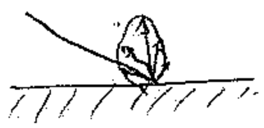
Condutância de um tubo circular

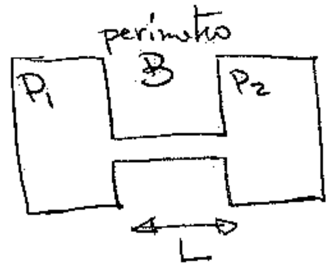
Regime molecular - deduzido por Knudsen

No regime molecular as moléculas descrevem trajetórias em linhas retas aleatórias entre as paredes.



$$\boxed{\nu = \frac{1}{4} n \bar{v}} \qquad \frac{\text{nº de moléculas}}{cm^2\, s}$$





$$\begin{cases} B = 2\pi R \\ B = \pi D \end{cases}$$

Nem todas as moléculas que penetram no tubo conseguem chegar ao outro lado.

→ A transmissão não é 100%

Hipótese de Knudsen

$$\boxed{P_{transmissão} \propto \frac{A}{BL}}$$

Algumas moléculas vão para frente e outras voltam.
A probabilidade de transmissão é proporcional à seção reta do tubo e inversamente proporcional à superfície do tubo.

$$\begin{cases} A = \text{área (seção reta)} \\ B = \text{perímetro } (2\pi R = \pi D) \\ L = \text{comprimento do tubo} \end{cases}$$

Ref. A. Roth pag 82-85 seção 3.3.3

$$\text{Condutância} \propto N_{\text{moléculas}} \times P_{\text{transmissão}}$$

$N_{\text{moléculas}} \propto Q$ (proporcional ao throughput)

$$Q = P\frac{\Delta V}{\Delta t} = kT\frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad \boxed{\frac{dN}{dt} = \nu A} \qquad \nu = \frac{1}{4}n\bar{v}$$

$$Q = kT\nu A = kT\left(\frac{1}{4}n\bar{v}\right)A \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$Q = \cancel{kT}\left(\frac{1}{4}\frac{P}{\cancel{kT}}\right)\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\,A \qquad n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$$

$$Q = PA\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

então $Q_1 = P_1 A\sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}$ e $Q_2 = P_2 A\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$

Hipótese de Knudsen $\qquad P_{\text{transmissão}} \propto \frac{A}{BL}$

sendo $C \propto P_{\text{transmissão}} \propto N_{\text{moléculas}}$.

$N \propto Q$, então:

$$Q_T \propto \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,A\,(P_1 - P_2) \times \frac{A}{BL}$$

$$\boxed{Q_T \propto \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,(P_1 - P_2)\,\frac{A^2}{BL}}$$

Nessa equação é necessário incluir uma constante de proporcionalidade devido à correção de velocidades $\frac{16K}{3}$

$$Q = C\Delta P = C(P_1 - P_2)$$

$$\therefore \boxed{C_{tubo} = \frac{16K}{3}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,\frac{A^2}{BL}}$$ Equação Geral

- Para tubos cilíndricos $K = 1$
- Para tubos de seção retangular, o fator K depende da relação entre os lados do tubo (b/a).

Sendo $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, vem:

$$\boxed{C = \frac{4}{3}K\,\bar{v}\,\frac{A^2}{BL}}$$

Para um tubo circular, temos $A = \frac{\pi D^2}{4}$

$B = 2\pi R = \pi D$

logo $$\boxed{C = \frac{\pi}{12}\,\bar{v}\,\frac{D^3}{L}}$$

Influência da temperatura

$$C \propto \bar{v} \quad e \quad \bar{v} \propto \sqrt{\frac{T}{M}}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/2}$$

Para $T_1 = 293\,K$ (20°C) e $T_2 = 77\,K$ (N_2 líquido)

$$C \propto \sqrt{\frac{293}{77}} \sim 2 \Longrightarrow$$ fator 2 na temperatura ambiente

$\Longrightarrow$ Ao se colocar N_2 líquido a condutância diminui um fator 2, mas a pressão também diminui, porque as moléculas grudam nas paredes do tubo.

Condutância de um tubo cilíndrico para N_2

$$\boxed{C = \frac{\pi}{12} \bar{v} D^3}$$

$T = 300\,K$
$M = 28$ uma.

$$\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \left(\frac{8RT}{\pi N_A m}\right)^{1/2} = \left(\frac{8R}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{C = 3{,}8 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} \frac{D^3}{L}}$$

Roth pag 84

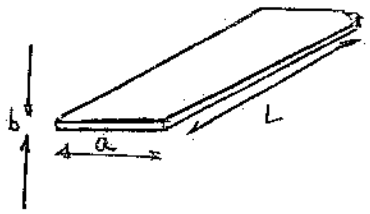
Para $T = 293\,K$
$M = 28$ uma.

$$\boxed{C_{Air} \simeq \frac{12 D^3}{L}}$$

D (cm)
L (cm)
c (ℓ/s)

Independe da Pressão

Condutância de um tubo retangular



$b < a$

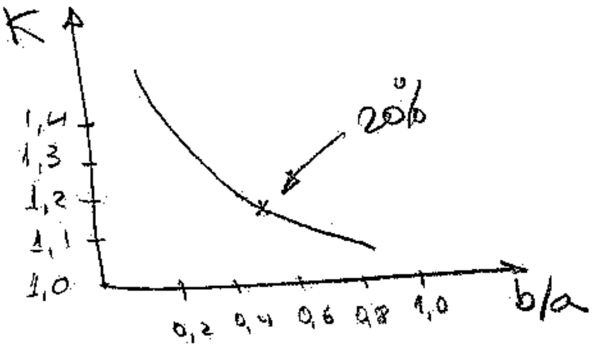
$$\begin{cases} A = a \cdot b & \text{área} \\ B = 2(a+b) & \text{perímetro} \end{cases}$$

Lembrando

$$\boxed{C = \frac{4}{3} \bar{v} \frac{A^2}{BL} K}$$

$$C = \frac{4}{3}\bar{v} \frac{(ab)^2}{2(a+b)L} K = \frac{2}{3} \bar{v} \frac{a^2 b^2}{(a+b)L} K$$

Valores de K



mostrar slide

para $a = 2b$

correção de 20%

Estudo de casos

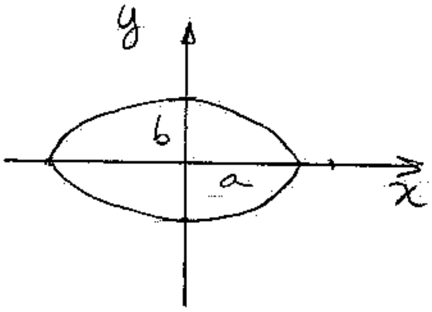
ⓐ Para $a >> b$

$$\boxed{C = \frac{2K}{3} \bar{v} \frac{ab^2}{L}}$$

ⓑ Para $a = b$ quadrado

$$\boxed{C = \frac{K}{3} \bar{v} \frac{a^3}{L}}$$

c) Elipse



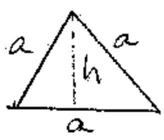
semi-eixos a e b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$A = \pi a b$$
$$B = 2\pi\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{C = k\,\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{\pi}{L}\,\frac{a^2 b^2}{(a^2+b^2)^{1/2}}\,\bar{v}}$$

d) Tubo triangular



$K = 1,24$

triângulo equilátero de lado a

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a \;;\quad B = 3a$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

dedução $\quad h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$$\therefore\; h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Longrightarrow A = \frac{a.h}{2} = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$\boxed{C = 0,43\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}\frac{a^3}{L}}$$ em CGS

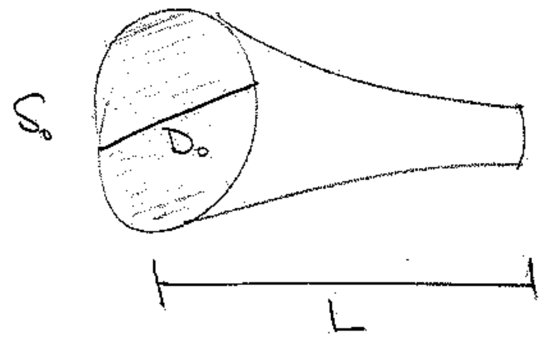
Para o ar seco a 20°C

$$\boxed{C = \frac{4,8\,a^3}{L}}$$

Expressão geral para o cálculo da condutância de tubos.

$$\boxed{C = K \frac{\frac{4}{3}\,\bar{v}}{\int_0^L \frac{B}{A}\,dl}}$$

Exemplo: trombeta (Vuvuzela)



seção circular

$$\boxed{S = S_0\, e^{-\beta x}}$$

$$0 \leqslant x \leqslant L$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} D_0^2\, e^{-\beta x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2 = D_0^2\, e^{-\beta x} \\ D = D_0\, e^{-\frac{\beta x}{2}} \end{array} \right.$$

O problema se reduz ao cálculo da integral

$$\boxed{I = \int_0^L \frac{B}{A^2}\,dl}$$

será feito na próxima aula