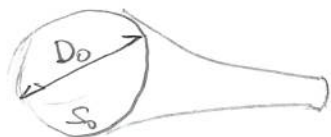


Passar lista de presença

Resumo da aula passada

Condições no Regime molecular ( $\lambda \gg D$ )

### a) Vuvuzela



$$S = S_0 e^{-\beta x}$$

$$C = \frac{4}{3} K \frac{\bar{v}}{\int_0^L \frac{B_0 dx}{A^2}}$$

Equação geral.

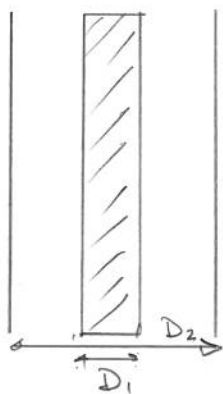
$$C = K \frac{\bar{v} \pi D_0^3 \beta}{8} \left[ e^{\frac{3}{2} \beta L} - 1 \right]^{-1}$$

Para  $\beta \rightarrow 0$  tubo cilíndrico  $N_2$  e  $T = 293 K$

$$C = \frac{12,3}{L} D_0^3 [l/s]$$

$D$  (cm)  
 $L$  (cm)  
 $C$  (l/s)

### b) Duto anular



$$C = \frac{12 K}{L} (D_2 - D_1)^2 (D_1 + D_2)$$

Aproximação do prof. Helcio Onwse

$$C = \frac{12}{L} (D_2^3 - D_1^3) \left( 1 - \frac{D_1}{D_2} \right)$$

### c) Resolução de exercícios

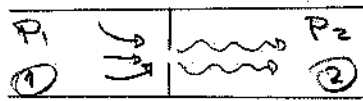


# Condutâncias no Regime Viscoso

(2)

( $1 \ll D$ ); movimento coletivo, colisões elásticas.

Condutância de um orifício



Velocidades altas  
 $u \sim 1 \text{ mach}$   
 $u \sim 340 \text{ m/s}$

Hipóteses

- ①  $P_1 \sim \text{atm}$
- ②  $P_2 < P_1$
- ③  $\lambda$  é menor que as dimensões do orifício

- Nessas condições o gás flui do compartimento ① para o ②
- O gás tem a menor seção transversal ao atravessar o orifício.
- Depois dessa contração (compressão) o gás passa por várias contrações e expansões até finalmente se difundir na massa do gás em ②

## Expansão adiabática

Não há troca de energia térmica

Expansões e contrações tão rápidas que não há transferência de calor.

$$Q (\text{calor}) = 0$$

Equação  $P V^\gamma = \text{cte}$

Hom processo adiabático

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \left\{ \begin{array}{l} C_p \text{ calor específico } P \text{ cte} \\ C_v \text{ calor específico } V \text{ cte} \\ \text{Variação térmica de uma} \\ \text{substância ao receber} \\ \text{certa quantidade de calor} \end{array} \right.$$

$[J/kgK] \quad [\frac{\text{cal}}{g^\circ C}]$

Gases mono. atômicos

$$C_p - C_v = R$$

$$C_v = \frac{3}{2} R$$



$$\left\{ \begin{array}{l} C_v = 12,5 \frac{J}{\text{mol}K} \quad (\text{He}) \\ C_v = 20,0 \frac{J}{\text{mol}K} \quad (\text{N}_2) \end{array} \right.$$

Calor específico é a quantidade de calor necessária para aumentar em 1 grau. 1 mol de moléculas

$\left\{ \begin{array}{l} C_v \text{ a volume cte} \\ C_p \text{ a pressão cte} \end{array} \right.$

$$Q = A P_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{R_0 T_1}{M} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2} \quad \textcircled{I}$$

No sistema CGS

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $R_0$ ,  $M$  massa molar,  $T_1$  temperatura

$P_1 \equiv$  Pressão no compartimento ①

Como  $Q = C \Delta P$ , então:

$$C = \frac{9,13 A}{1 - (P_2/P_1)} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{T_1}{M} \right) \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}$$

A em  $\text{cm}^2$   $C$  (l/s)  $T$  (K)  $M$  (g)

Para o ar 80%  $\text{N}_2$  20%  $\text{O}_2$   $M = 29$   $T = 293 \text{ K}$   $\gamma = 1,4$

$$C = \frac{76,6 A}{1 - (P_2/P_1)} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0,712} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0,288} \right]^{1/2} \quad \text{②}$$

Para  $P_1 = P_2$   $Q = 0$  Vide eq ①

e sua máxima para  $\left( \frac{P_2}{P_1} \right) = \left( \frac{2}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \equiv r_c$

$r_c$  é um valor crítico

Para  $T = 293 \text{ K}$   $r_c = 0,525$

(3)

$$\boxed{Q_c = 20 A P_1} \quad A (\text{cm}^2) \quad P (\text{Torr}) \quad Q \left( \frac{\text{Torr} \cdot \text{l}}{\text{s}} \right)$$

Para  $\frac{P_2}{P_1} \ll r_c \longrightarrow$  Lembrando que  $Q = C \Delta P$   
 $Q = C (P_1 - P_2)$

$$C = \frac{Q}{P_1 - P_2} = \frac{20 A P_1}{P_1 - P_2}$$

então  $\boxed{C = \frac{20 A}{1 - P_2/P_1}}$

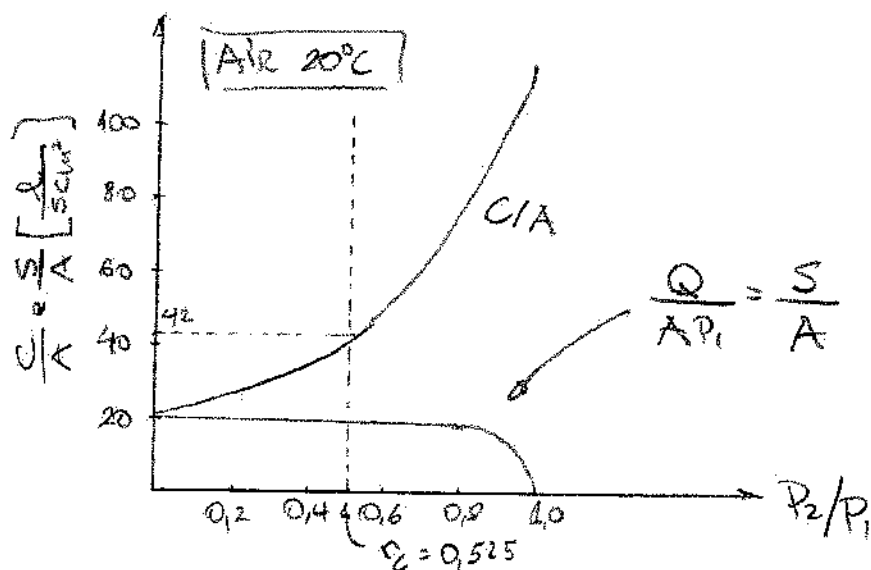
ou seja para  $P_2 < 0,1 P_1$  ;  $\frac{P_2}{P_1} < 0,1$

$$C \approx 20 A$$

Velocidade de bombeamento (S) através de um orifício

$$Q = P S \Rightarrow S = \frac{Q}{P} = \frac{C (P_1 - P_2)}{P_1} \rightarrow S = C \left( 1 - \frac{P_2}{P_1} \right)$$

SLIDE



$\frac{S}{A}$  é constante até  $r_c$  e cai a zero para  $P_1 \approx P_2$

$\frac{C}{A}$  tende a infinito para  $P_1 \approx P_2$



## Regime Viscoso

(4)

⑥ Condutância de um tubo

Lei de Poiseuille

- Em um tubo longo o fluxo de gás passa da região de alta pressão ( $P_1$ ) para a região de baixa pressão ( $P_2$ )
- O perfil de velocidade do fluxo de moléculas é constante.
- Não tem movimento turbulento
- A velocidade do fluxo de moléculas nas paredes é nula!

$$\boxed{P_1 \pi r^2 \quad \text{---} \quad P_2 \pi r^2} \quad \text{FORÇAS VISCOSAS}$$

Supondo um pequeno cilindro de raio  $r$  em equilíbrio

→ Velocidade constante

$$\boxed{P = F/A}$$

Forças atuando no cilindro

① Diferença de pressão  $= dP \pi r^2$

② Força viscosa  $\equiv$  oposta ao fluxo

$$\boxed{F = -\eta A \frac{du}{dr}}$$

$$F = -\eta \underbrace{2\pi r dx} \frac{du}{dr}$$

→ Área da superfície do cilindro

Iguando as duas forças

$$-\eta 2\pi r dx \frac{du}{dr} = dP \pi r^2$$

$$\boxed{-du = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} r dr}$$

integrando, temos

$$-\int du = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} \int_0^r r dr$$

$$-u = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} \frac{r^2}{2} + C$$

A constante  $C$  pode ser obtida das condições de contorno:  $v = 0$  para  $r = R$

$$0 = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} \frac{R^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{dP}{dx} \frac{R^2}{4\eta}}$$

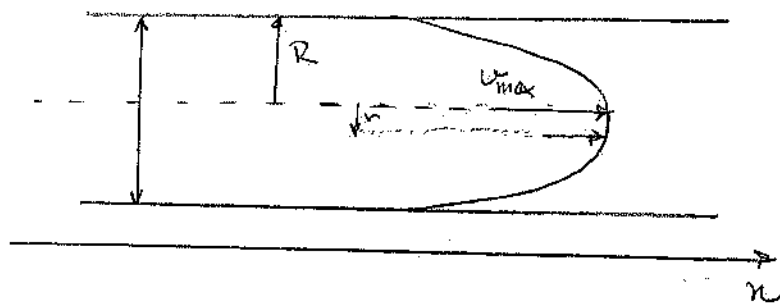
O perfil da velocidade das moléculas será:

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2)}$$

O fluxo de gás (velocidades) vai na direção da queda de pressão

Tem perfil parabólico

Distribuição das velocidades no regime viscoso





# Cálculo do Throughput

(5)

$$Q = PS$$

$$Q = P \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$dV = v dt dA$$

análise dimensional  
 $\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^2 = \text{cm}^3 \equiv V$

$$\left. \begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ dA &= 2\pi r dr \\ \frac{dV}{dt} &= v dA \end{aligned} \right\}$$

substituindo na equação da distribuição de velocidades, temos:

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{dV}{dt} = \left( -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) \right) 2\pi r dr$$

O volume total do gás fluindo através da seção reta de um tubo por unidade de tempo é obtido integrando de  $r=0$  a  $r=R$

$$\frac{dV}{dt} = - \int_0^R \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) r dr = - \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = - \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \left[ \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right]$$

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dx} \frac{R^4}{4} = - \frac{\pi}{8\eta} \frac{dP}{dx} R^4$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = - \frac{\pi}{8\eta} \frac{dP}{dx} R^4}$$

depende inversamente da viscosidade

Essa equação só tem sentido no regime viscoso!!

$$Q = P \frac{dV}{dt} = P \left[ -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{dP}{dx} \right]$$

$$\boxed{Q = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 P \frac{dP}{dx}}$$

integrando de  $P_1$  a  $P_2$  e de 0 a  $L$ , temos:

Como não sabemos  $P(x)$ , é feita uma estimativa da média do throughput ao longo do tubo.

$$\langle Q \rangle = \int_0^L \frac{Q dx}{L} = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{R^4}{L} \int_0^L P \frac{dP}{dx} dx$$

$$\langle Q \rangle = -\frac{\pi R^4}{8\eta L} \int_{P_1}^{P_2} P dP$$

$$\langle Q \rangle = -\frac{\pi R^4}{8\eta L} \frac{P^2}{2} \Big|_{P_1}^{P_2} = -\frac{\pi R^4}{16\eta L} (P_2^2 - P_1^2)$$

$$\langle Q \rangle = -\frac{\pi R^4}{16\eta L} (P_2 - P_1)(P_2 + P_1)$$

definindo  $\bar{P} = \frac{P_2 + P_1}{2}$ , temos:

$$Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L} 2\bar{P}(P_1 - P_2)$$

Mas,  $Q = C \Delta P$

(6)

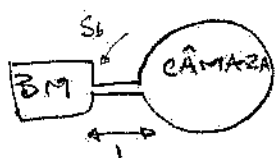
então  $C = \frac{\pi R^4 \bar{P}}{8 \eta L}$

ou  $C = \frac{\pi D^4 \bar{P}}{128 \eta L}$  onde  $D = 2R$

No regime viscoso a condutância depende da pressão  
para  $N_2$ ,  $T = 293 \text{ K}$  e  $\eta = 175 \mu \text{ Poise}$

$C_{N_2} \approx \frac{180 D^4 \bar{P}}{L}$   $\left\{ \begin{array}{l} P (\text{Torr}) \\ D (\text{cm}) \end{array} \right.$ ;  $\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$

Lista 2 - Ex 16



$\left\{ \begin{array}{l} S_b = 60 \text{ l/min} = 1 \text{ l/s} \\ L = 80 \text{ cm} \\ D = 1'' = 2,54 \text{ cm} \end{array} \right.$

Qual a velocidade de bombeamento efetiva ( $S_{ef}$ )?

$N_2$ ,  $T = 300 \text{ K}$

(a) No regime molecular

$C_{N_2} = \frac{12 D^3}{L} (\text{l/s})$

$C_{N_2} = \frac{12 (2,5)^3}{80} = 2,3 \text{ l/s}$

$S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \Rightarrow S_{ef} = \frac{1 \cdot 2,3}{2,3 + 1} = 0,7 \text{ l/s}$

No Regime Viscoso

$$C_{N_2, \text{viscoso}} = \frac{180 D^4 \bar{P}}{L}$$

Depende da pressão!

$DP \ll 10^{-2}$  em Torr  $\longrightarrow$  Regime molecular

$DP \gg 1$  em Torr  $\longrightarrow$  Regime viscoso

$$C_{N_2, \text{viscoso}} = \frac{180 D^3 (\overline{DP})}{L} \quad DP \gg 1 \text{ condição limite}$$

$$C_{N_2, \text{viscoso}} = \frac{180 (2,5)^3 \cdot 1}{80} = 35 \text{ l/s}$$

Neste caso  $S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \sim S_b = 1 \text{ l/s}$

—————//—————  
Comparação das condutâncias

$$\frac{C_{\text{viscoso}}}{C_{\text{molecular}}} = \frac{180 D^3 (\overline{DP})}{\cancel{L}} \cdot \frac{1}{\frac{12 D^3}{\cancel{L}}} \approx 15$$

No início do bombeamento as condutâncias  
são ENORMES!!

ou seja IMPEDÂNCIAS pequenas.

# Condutâncias dependentes do gás

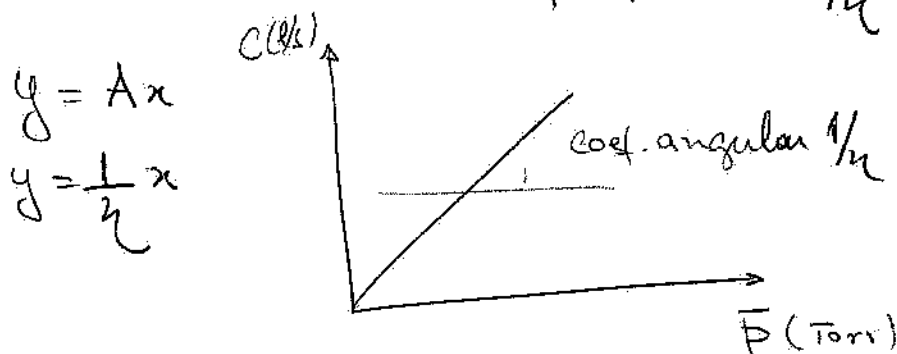
(7)

Regime viscoso

$$C = \frac{1}{\eta} \frac{\pi D^4 P}{128 L}$$

gases diferentes  
=  
 $\eta$  diferentes

Condutância em função de  $1/\eta$



Pode-se extrair a  
o valor de viscosidade  
do gás experimentalmente  
a partir dessa medida

$$\eta = \frac{nm\bar{u}\lambda}{2} \quad n = \frac{P}{kT} \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma^2} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 P}$$

$$\lambda = 2,3 \times 10^{-20} \frac{T}{\sigma^2 P} \text{ [cm]}$$

Para  $T$  em K  
 $\sigma$  em cm  
 $P$  em Torr

CGS  $1 \text{ Poise} = \frac{1 \text{ g}}{\text{cm s}} = \frac{\text{dyna s}}{\text{cm}^2}$

SI  $10 \text{ Poise} = \frac{1 \text{ kg}}{\text{ms}} = \text{Pa s}$

$$\eta = \frac{nm\bar{u}\lambda}{2} = \frac{P}{kT} \frac{m}{2} \bar{u} \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 P} = \frac{m\bar{u}}{2\sqrt{2} \pi \sigma^2}$$

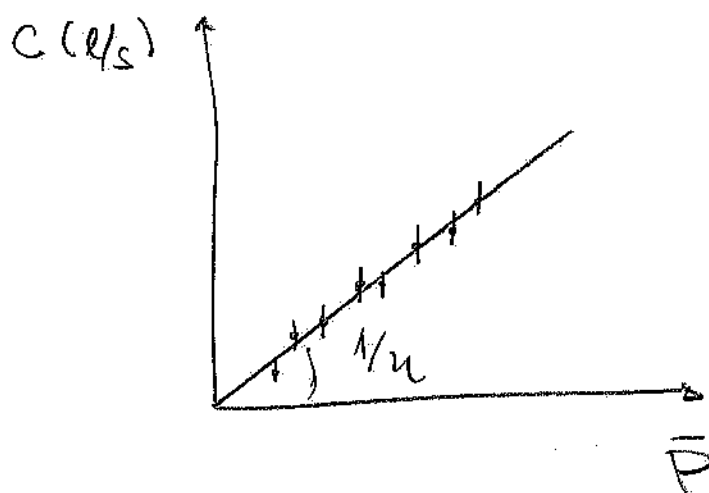
$$\eta \approx \frac{1}{\pi \sigma^2} \sqrt{\frac{m k T}{\pi}}$$

$$\lambda = \frac{5 \times 10^{-3}}{P(\text{Torr})} \text{ [cm]}$$

| gas              | $\eta$ ( $\mu$ Poise a 20°C) | $C_{gas}$ |
|------------------|------------------------------|-----------|
| N <sub>2</sub>   | 175                          | 1,0       |
| O <sub>2</sub>   | 203                          | 0,86      |
| Ar               | 182                          | 0,96      |
| H <sub>2</sub>   | 88                           | 2,0       |
| He               | 196                          | 0,89      |
| H <sub>2</sub> O | 94                           | 1,9       |

$$C_{viscoso} = \frac{\pi}{180} \frac{D^4}{L} \frac{1}{\eta} \bar{P}$$

É possível medir no laboratório



Proporcional ao  
inverso da  
viscosidade.

## Regime Intermediário

(8)

$$10^{-2} < D\bar{P} < 1$$

$$C_I = C_V + \alpha C_m$$

$$f(x) = a + bx$$

$C_I$  = condutância no regime intermediário

$C_V$  =  $C$  no regime viscoso      $C_m$  é a condutância no regime molecular

$$\alpha = 1 + \left( \frac{m}{kT} \right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}$$

$$1 + 1,24 \left( \frac{m}{kT} \right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}$$

$$\eta = \lambda P \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$$

$$\eta = \frac{n m \bar{c} \lambda}{2} ; \quad n = \frac{P}{kT} ; \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\eta = \frac{P}{kT} \frac{m \lambda}{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = P \lambda \sqrt{\frac{2m}{kT \pi}}$$

$$\alpha = \frac{1 + 1,25 \frac{D}{\lambda}}{1 + 1,55 \frac{D}{\lambda}}$$

$$\lambda = \frac{5 \times 10^{-3}}{\bar{P}(\text{Torr})} \text{ [cm]}$$

Equação aproximada

$$C_I = C_m \left( 0,0736 \frac{D}{\lambda} + 1 \right)$$

