Fast Solver of Closely Related Quadratic Programming Problems

Andreas Halle

June 10, 2013

PROMAPS

- Utviklet av Goodtech og MathConsult
- Kalkulerer leveransepåliteligheten i et nettverk
- Utfall: Gren i nettverket faller ut
- Formulert som mange like QP-problemer
- Flaskehals: QP-løseren
- Skjermbildet oppdateres hvert 5. minutt
- `http://www.tu.no/energi/2011/10/07/her-beregnes-risikoen-for-svikt-i-kraftnettet`

Objektfunksjonen

$$f(x) = x^T \Phi D x + (g - c)^T x$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$
- $f(x)$ representerer leveransekostnader (E/s)
- x representerer strømmen over grenene (W)
- Φ representerer strømtap $(1/W)$
- D representerer overføringskostnader (E/J)
- g representerer kostnader for å generere strøm (E/J)
- c representerer leveransepris (E/J)

Objektfunksjonen

$$f(x) = x^T Hx + b^T x$$

- $H = \Phi D$ representerer kostnader $(E/(W^2 s))$
- $b = g - c$ representerer kostnader (E/J)
- Minimerer kostnader

Optimeringsproblemet

Et konvekst QP-problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{subject to } Ax = 0, \; l \leq x \leq u$$

- A er en $m \times n$ orientert insidensmatrise for et strømnettverk (rettet graf)
- m noder, n grener
- l er nedre grenkapasitet (W)
- u er øvre grenkapasitet (W)

Utfall

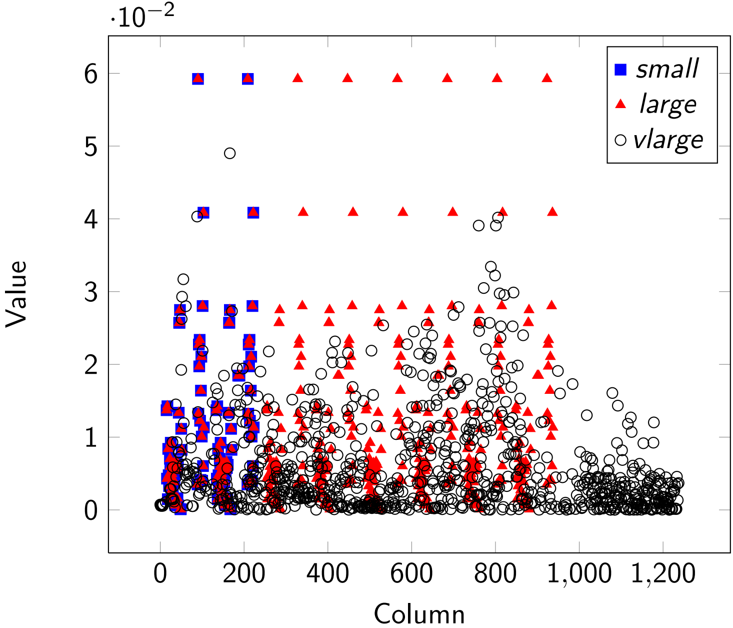
Modellerer utfall

- Setter $l_i = u_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$
- Løse QP-problemet for så mange utfall som mulig
- Instans er et QP-problem uten utfall
- Subinstans er en instans med utfall

Utfall

- 2^n mulige utfall
- Usannsynlig at det er mange utfall
- Løse alle subinstanser med maks et gitt antall utfall

Instanser fra Goodtech



Instanser fra Goodtech

Table : Størrelse for hver instans

Problemstørrelse	*small*	*large*	*vlarge*
Rader	82	328	1127
Kolonne	238	952	3437
Ikke-nuller A	348	1392	4840
Ikke-nuller H	108	432	894

Table : Verdier i objektfunksjonen

	small og *large*	*vlarge*
$\max(h_{ii})$	2.9614×10^{-2}	4.9011×10^{-2}
$\min(h_{ii})$	4.9290×10^{-5}	1.1026×10^{-5}
$\mathrm{mean}(h_{ii})$	5.2864×10^{-3}	5.8984×10^{-3}
$\max(b_i)$	20	20
$\min(b_i)$	-70	-50

Instanser fra Goodtech

- $hii \ll b_i$

$$
\begin{array}{llrl}
\mathcal{Q}: & \min_{x\in\mathbb{R}^n} & x^T Hx + b^T x & \text{subject to } Ax = 0,\ l \leq x \leq u \\
\mathcal{L}: & \min_{x\in\mathbb{R}^n} & b^T x & \text{subject to } Ax = 0,\ l \leq x \leq u
\end{array}
$$

- Optimal løsning til $\mathcal{Q}$ noteres x^*
- Optimal løsning til $\mathcal{L}$ noteres $\hat{x}$
- Δ noterer avviket mellom $f(x^*)$ og $f(\hat{x})$

Hvor like er $\mathcal{L}$ og $\mathcal{Q}$?

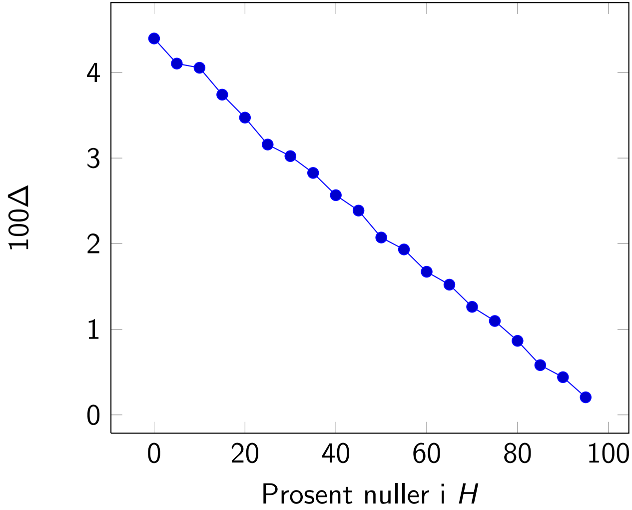


Figure : Avvik som en funksjon av tettheten i H.

Hvor like er $\mathcal{L}$ og $\mathcal{Q}$?

Oppnår 95% optimal verdi etter løst $\mathcal{L}$.

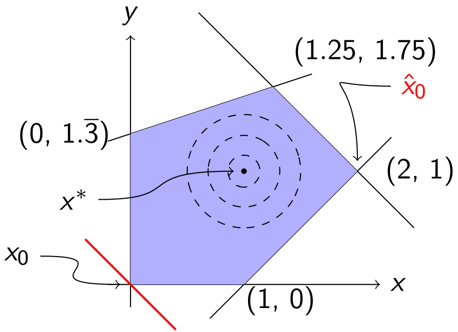
- Metode basert på successive linear programming (SLP)
- $x_0 = 0 \Rightarrow$ 95% av optimal målfunksjonsverdi etter 1 iterasjon

Et eksempel

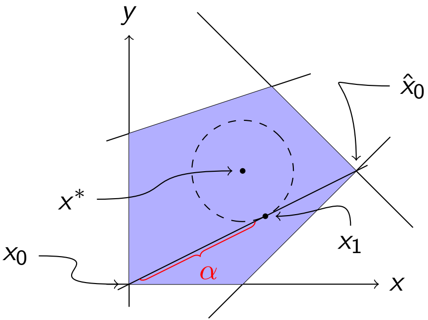
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\mathcal{Q}: \text{minimize} & (x-1)^2 & + & (y-1)^2 & - & 2 \\
\text{subject to} & x & + & y & \leq & 3 \\
 & x & - & y & \leq & 1 \\
 & x & + & 3y & \leq & 4 \\
 & & & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrcrcl}
\mathcal{L}: \text{minimize} & - & 2x & - & 2y & & \\
\text{subject to} & & x & + & y & \leq & 3 \\
 & & x & - & y & \leq & 1 \\
 & & x & + & 3y & \leq & 4 \\
 & & & & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

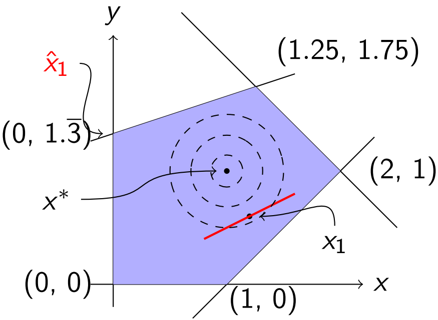
$\mathcal{L}_0$



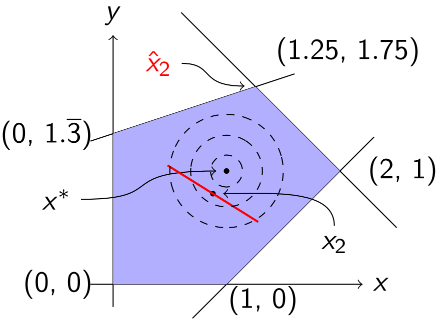
Linjesøk



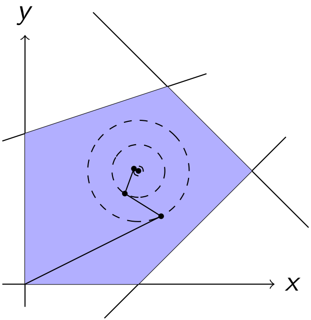
$\mathcal{L}_1$



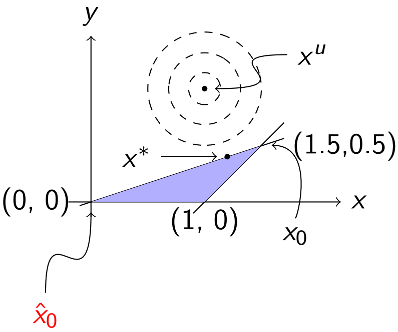
$\mathcal{L}_2$



Sti



Endrer et sidekrav



- $-x + 3y \leq 4$
- $-x + 3y \leq 0$

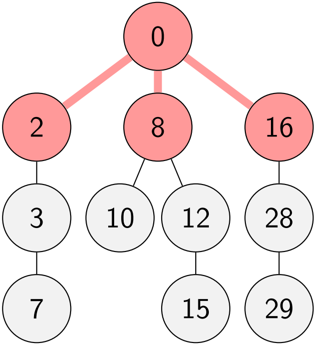
Like optimale løsninger

- Metode for å redusere antall QP-kall

$$(3,0,7,0,4) \qquad (3,0,7,0,4)$$

$$(3,0,7,0,4) \qquad (a,b,0,c,d)$$

En trekonstruksjon



$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{M}_0 = \{\} & \mathcal{Z}_0 = \{1,3\} \\
\mathcal{M}_2 = \{2\} & \mathcal{Z}_2 = \{2,3,5\} \\
\mathcal{M}_3 = \{1,2\} & \mathcal{Z}_3 = \{1,2,4,5\} \\
\mathcal{M}_7 = \{1,2,3\} & \mathcal{Z}_7 = \{1,2,3,5\} \\
\mathcal{M}_8 = \{4\} & \mathcal{Z}_8 = \{1,4,5\} \\
\mathcal{M}_{10} = \{2,4\} & \mathcal{Z}_{10} = \{2,3,4,5\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{M}_{12} = \{3,4\} & \mathcal{Z}_{12} = \{4,3,1\} \\
\mathcal{M}_{15} = \{1,2,3,4\} & \mathcal{Z}_{15} = \{1,2,3,4\} \\
\mathcal{M}_{16} = \{5\} & \mathcal{Z}_{16} = \{1,3,5\} \\
\mathcal{M}_{28} = \{3,4,5\} & \mathcal{Z}_{28} = \{2,3,4,5\} \\
\mathcal{M}_{29} = \{1,3,4,5\} & \mathcal{Z}_{29} = \{1,2,3,4,5\}
\end{array}
$$

Eksperiment 1

Vi løser *small* og opp til 2 utfall. 28442 subinstanser

Table : Kjøretid i CPU-sekunder

ϵ	cClp	cSlp	nClp	nSlp
10^{-1}	45.51	55.61	72.32	85.51
10^{-2}	46.34	55.89	73.11	85.51
10^{-3}	51.12	59.04	75.60	85.28
10^{-4}	52.46	73.79	77.83	107.39
10^{-5}	54.48	232.53	81.16	355.47
10^{-6}	65.42	1363.46	93.29	2022.25
10^{-7}	70.78	6522.91	100.85	9395.92

Eksperiment 1

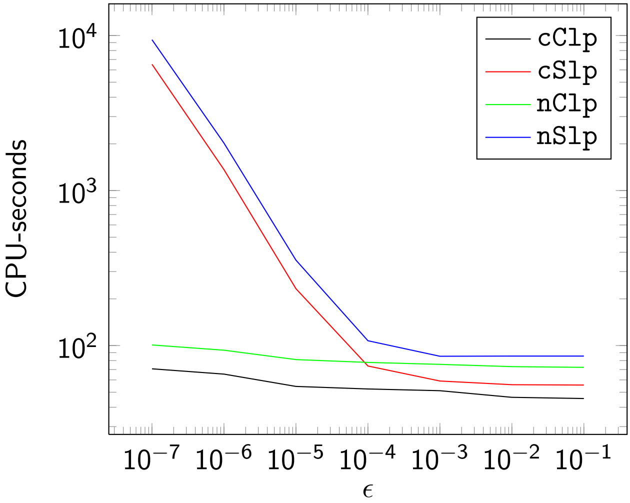


Figure : Kjøretid i CPU-sekunder for å løse *small* og dens subinstanser.

Eksperiment 2

Table : Kjøretid i CPU-sekunder for å løse de tre instansene.

Implementasjon	*small*	*large*	*vlarge*
`cClp`	0.52	9.55	76.18
`cSlp`	0.71	32.88	585.60
`nClp`	0.65	11.68	157.53
`nSlp`	0.89	39.87	1173.74

Tilfeldige instanser

- $m = \lfloor \frac{7}{20} n \rfloor$
- 50% null i b og H

Eksperiment 3

Table : Kjøretid for å løse tilfeldige instanser med økende *n*. $\beta = 1$.

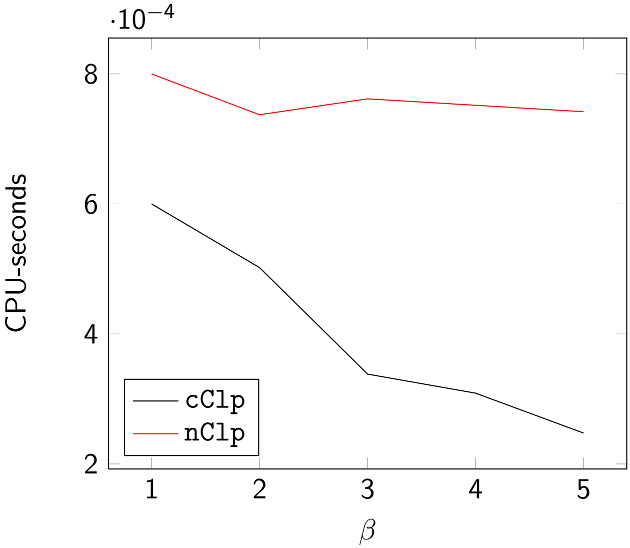
n	`cClp`	`nClp`	Relativ Speedup
500	4.9	5.9	16.9%
1000	42.1	53.0	20.6%
1500	181.5	234.5	22.6%
2000	547.1	710.2	23.0%

Eksperiment 4

Table : Kjøretid i CPU-sekunder for $n = 50$ og økende β.

β	`cClp`	`nClp`	Relativ Speedup	Distinkte løsninger
1	0.03	0.04	25.0%	37.4 (74.3%)
2	0.64	0.94	31.9%	744.3 (58.3%)
3	7.06	15.90	55.6%	9484.7 (45.4%)
4	77.59	188.83	58.9%	82262.5 (32.8%)
5	586.54	1758.23	66.6%	574685.0 (24.2%)

Eksperiment 4



Vi konkluderer

- Raskere jo flere subinstanser vi løser
- Speedup uavhengig av løser.