GRAFOAK

Leire García

1● GRAFOAK ETA MULTIGRAFOAK:

$G = (V, A, \phi)$ grafo ez zuzendua edo grafo soilik deritzo.

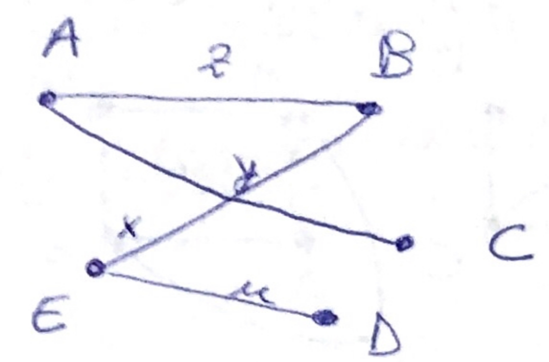
* V-ren elementuak G grafoaren erpinak, A-ren elementuak G-ren arkuak (edo ertzak) eta ϕ intzidentzia-aplikazio deritze.

* Adierazpen grafikoa: $G(V, A, \phi)$ honako eran definitute:

$V = \{A, B, C, D, E\}$

$A = \{x, y, z, u\}$

$\phi = \{(x, (B, E)), (y, (A, C)), (z, (A, B)), (u, (D, E))\}$



* 2 erpin auzokide = arku berdinaren muturrak

* v-rekin intzidenteak diren arku-kopurua, G-ren v erpinaren gradu (balentzia) deritzo eta $gr(v)$ adierazten da.

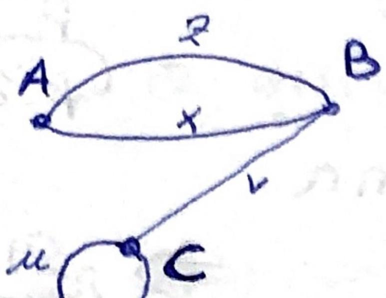
* Grafo erregularra = erpin guztiak gradu berdinekoak. Gradua (q) bada, grafoa (q)-erregularra izango da.

1) G-ren erpinen graduen batura grafoaren arku-kopuruaren bikoitza da.

2) G-ren gradu bakoitiko erpin-kopurua zenbaki bikoiti bat da.

* MULTIGRAFOAK

- Onartuko da bi erpin arku bat baino gehiagorekin lotzea (arku anizkoitzak)
- " " erpin bat bere buruarekin lotzea (kiribil)
- Adierazpen grafikoa:



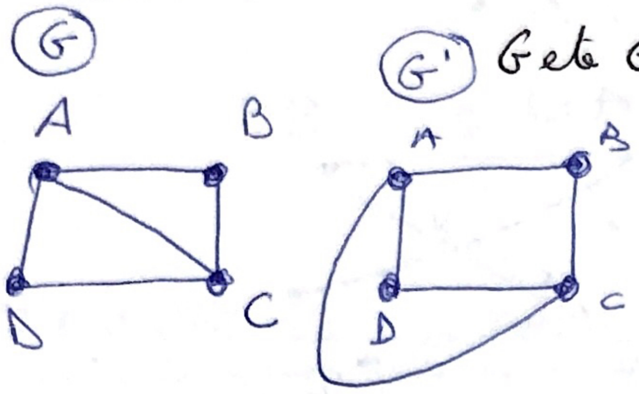
2 • AZPIGRAFOAK ETA GRAFOEN ISOMORFISMOAK

Grafo baten azpigrafoa:

Izan bitez $G = (V, A, \phi)$ eta $G' (V', A', \phi')$ bi grafo.

- G', G-ren azpigrafo bat izango da, baldin eta $V' \subset V$, $A' \subset A$ eta $\phi' = \phi_A$ (A'-ko arkuak intzidenteak V'-ko erpinekin) egiaztatzen bada.

- Isomorfismo ⇒ G-ren G'-ganako isomorfismo bat existitzen bada, orduan G eta G' grafoak isomorfoak (edo baliokideak) direla diogu.



Info ⊜ beste era batean adierazita

3 • GRAFO BATEN BIDEAK ETA ZIKLOAK:

- Bide = G-ren erpinak eta arkuak aldizkatzen dituen segida finitua $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_{p-1}, v_{p-1}, a_p, v_p)$ erakoa.
  $v_0 = v_p$ bada bidea itxia dela diogu.

- Bidea
  - → Arku ≠ ⇒ Bide sinple / Bidezidorra
  - → Erpin ≠ ⇒ Bide elementala / Ibilbide

- Bidearen luzera = Bidearen parte diren G-ren arku kopurua.

- Bide itxia
  - → Bide elemental / Ibilbide (Erpin ≠) ⇒ ZIKLO:
    p luzera duten zikloei, p-ziklo deritze.
    $p \geq 3$ izan behar du.
  - → Bide sinple / Bidezidorra (Arku ≠) ⇒ ZIRKUITU:
    p luzera duten zirkuituei, p-zirkuitu deritze.

4 • GRAFO KONEXUAK

(!) Gogoratu!
- Arku ≠ ⇒ Bide sinple / Bidezidorra, itxia bada ziklo eta luzera ≥ 3
- Erpin ≠ ⇒ Bide elementala / Ibilbide, itxia bada zirkuitu

* Lotutako erpinak = bi erpin lotuta daude baldin eta v eta w erpinen arteko G-ren bide bat existitzen da.

* Grafo konexua = G-ren v eta w ~~edozein~~ erpin bikoteren artean bide sinple bat existitzen bada, G konexua dela diogu.

  - $d(v,w) = l$, hau da, v eta w-ren arteko bidezidorra luzera txikiena l izanik, d V-ren gaineko distantzia bat da.
    * G-ren gaineko dist. handienari G-ren diametro deritzo.

5 • GRAFO EULERIARRAK

* Bide euleriarra = G-ren arku guztiak barne dituen bidezidorra.
  - Itxia bada, zirkuitu euleriar deritzo.
  - G konexua bada, orduan G-k bide euleriar ez itxi bat izango du, baldin eta soilik baldin G-k zehazki gradu bakoitiko 2 erpin baditu (bidearen irteera eta helmuga).

* Grafo euleriarra = G-n zirkuitu euleriarra existitzen bada.
  - Grafo euleriarra da baldin eta soilik baldin G konexua eta bere erpin guztiak bikoitiak badira.

6 • GRAFO HAMILTONIARRAK

* Bide hamiltoniarra = G-ren erpin guztiak barne dituen G-ren edozein ibilbide.
  - Ibilbidea itxia bada, orduan ziklo hamiltoniar deritzo.

- Bide hamiltoniar bat izango du baldin:
  * $n(V) = m \geq 2$ eta $gr(v) + gr(w) \geq m-1$, non $v \neq w$ den
  * $n(V) = m \geq 2$ eta $gr(v) \geq \frac{m-1}{2}$ $\forall v \in V$

* Grafo hamiltoniar = Baldin eta G-n ziklo hamiltoniar bat existitzen bada, G grafo hamiltoniarra dela diogu.

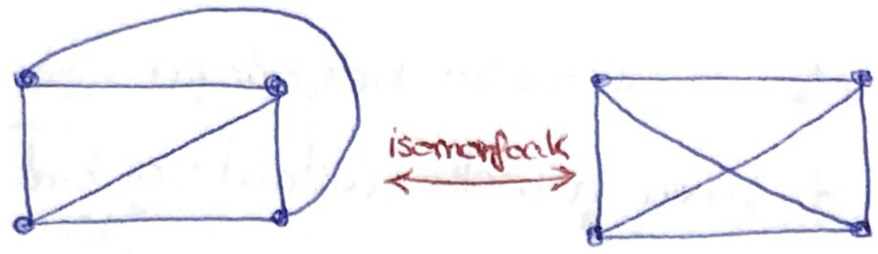
- G grafo hamiltoniarra izango da baldin:
  - $n(V) = m \geq 3$ eta $gr(v) + gr(w) \geq m$ $\forall v,w \in V$, non v eta w auzokideak ez diren.
  - $n(V) = m \geq 3$ eta $gr(v) \geq \frac{m}{2}$ $\forall v \in V$
  - $n(V) = m \geq 3$ eta $n(A) \geq \binom{m-1}{2} + 2$ $\forall v \in V$

Adierazitako guztia kiribil gabeko multigrafoetara hedatu daiteke.

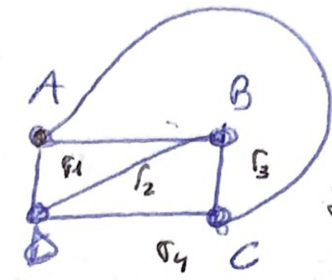
7. GRAFO LEUNAK

- **Grafo leuna** = Grafikoki adierazi daiteke eta bere arkuak soilik G-ren erpinetan ebakitzen dira.
  - **Mapa** = Grafo leun baten adierazpen grafikoa.

Grafo leuna — Grafo ez-leuna



- **Mapa konexuak eta mapa baten eskualdeak:**



$gr(r_1) = 3$
Bide itxia
A B D A

- M mapa konexua da G konexua bada
- M-ren eremu deritzen $r_1, r_2, \ldots, r_q$ deritzen zonaldetan banandute dago, bi eremu auzokideak baldin M-ren arku bat komunean badute.

- gradu (r) = M-ren r eremuko gradua deritzo, r-ren mugak osatuteko G-ren bide itxiaren luzerari.
- M konexua bada eta R, M-ren eremu multzoa bada;

EULER-en FORMULA egiaztatuko da:

$$n(V) + n(R) = n(A) + 2$$

M mapari dagokion G grafo leun konexuaren erpin-kopurua. ($n(V)$)

M-ren eremu-kopurua. ($n(R)$)

M mapari dagokion G grafo leun konexuaren arku-kopurua. ($n(A)$)

8. GRAFO KOLORESTATUAK

- **Erpinen kolorizazioa**: G-ren erpinei koloreak egokitu, non erpin auzokideak kolore ~~ez~~-ak dituzte.
  q-koloreztagarria da, baldin eta erpinen kolorizazioarako q kolore desberdin erabiltzen dira.

- **Zenbaki kromatikoa** = G-ren kolorizazioa egiteko behamezkoa den kolore desberdinen zenbaki minimoa eta $c(G)$ denotatuko da.

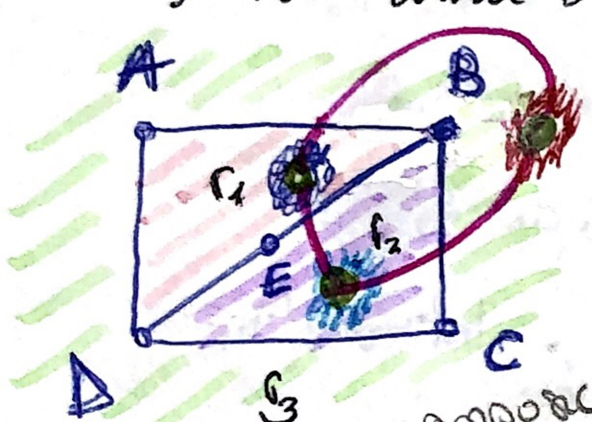
- **Koloreztatzeko algoritmoa**:
  1. G-ren erpinen zerrenda egin gradu handienetik txikienera.
  2. Lehen kolorea erabiliz lehen erpina (lehen aldiean gradu handiena duen) koloreztatu eta zerrendaren lehen erpin honen auzokideak ez diren beste erpinak.
  3. Kolorestatu gabe geratu diren erpinak bigarren zerrenda zehazten dute.
  4. 2. eta 3. pausuak errepikatu zerrenda berriarekin.
  5. G-ren erpin guztiak koloreztatu harte errepikatu.

* Kolorazioa eremuen arabera :

  • M-ren eremuei koloreak egokitu, non eremu auzokideak kolore ⊕ak dituzten
  • M q-kolorestagarria da, baldin eta eremuen kolorizazioan q kolore erabili badira.
  • Mapen kolorizazioaren problema, baliokidea da grafo lauen erpinen kolorizazioarekin, mapa dualaren kontzeptuaren bidez.

* Mapa duala :

  • M* mapa berria, M-ren mapa duala lortzeko :
    M-ren eremu bakoitzean puntu bat aukeratuko dugu. r eta r' bi eremu auzokide badira, eremu horiei dagozkien puntuak lerro jarraitu baten bidez lotuko dira r eta r' eremuen arku komuna zeharkatuz.
  • M*-ren eremu bakoitzak, M-ren erpin bakarra izango du
  • M-ren arku bakoitzak, M-ren arku bakarra zeharkatuko du.



M* mapa duala.
M mapa.

no muy importante (sin proporciones)
  • M f kolorestagarria (edo eremuen arabera) baldin eta soilik baldin M*-ri dagokion grafo laua q kolorestagarria (erpinen arabera) bada.
    * M, 2 kolorestgarria soilik baldin M-ren erpin guztiek 2 edo handiagoa den gradu bikoitia badute.
    * M, 3 kolorestgarria baldin eta soilik baldin M-ren eremu bakoitza M-ren arku kopuru bikoiti batez mugatuta badago
  • M, 5 kolorestagarria da. ⇐ ez dira ezagutzen
  • M, 4 kolorestagarria da. ⇐ frogapena ordenagailu simulazio frogen bidez lortu da.

9 • ZUHAITZAK

Zuhaitza :

* G basoa da, G-k ziklorik ez badu.
* G zuhaitza da, konexua bada eta ziklorik ez badu.
* G', G-ren azpigrafo bat bada, non $V' = V$ eta G' zuhaitz bat bada, orduan G', G-ren <u>zuhaitz estaltzailea</u> da.
* G zuhaitza bada, egiaztatzen da: $n(V) = n(A) + 1$
* G " " eta $n(V) \geq 2$ bada, orduan G-k bat gutxienez 2 erpin (erpin esekiak) izango ditu gutxienez
* G zuhaitza bada, orduan G, 2-koloreztagarria izango da.

10 • GRAFO ZUZENDUAK

$G = (V, A, \phi)$ grafo zuzendu edo digrafo deritzo.

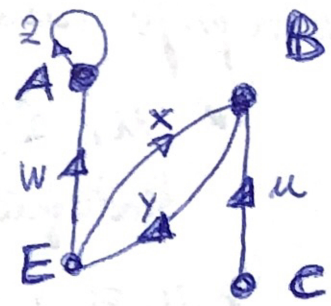
→ Grafoaren erpinak

↳ intzidentzia-aplikazioa

↳ G-ren arkuak

* $\phi(a_h) = (V_i, V_k)$ bada, a_h arkuaren muturrak V_i eta V_k erpinak dira, non V_i hasiera (jatorrizko) erpina, eta V_k helburuko erpina baita. Intzidentzia bat da V_i-tik ateratzen eta V_k-n sartzen. Bereziki $\phi(a_h) = (V_i, V_i)$ bada, orduan a_h kiribil bat da.

* Adierazpen grafikoa: $G(V, A, \phi)$ grafo zuzendua



$V = \{A, B, C, E\}$

$A = \{x, y, z, u, w\}$

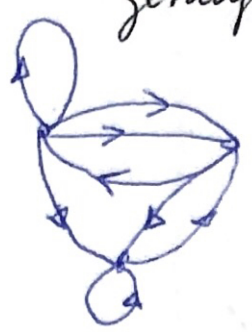
$\phi = \{(x, (E, B)), (y, (B, E)), (z, (A, A)), (u, (C, B)), (w, (E, A))\}$

* <u>Irteera-gradua</u> = $gr_i(v)$, v-tik ateratzen den G-ren arku kopurua.
* <u>Sarrera-gradua</u> = $gr_s(v)$, v-tik sartzen den G-ren arku kopurua.
* G-k $V_1, V_2, \ldots, V_m$, m erpin eta $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n arku baditu, orduan honako hau egiaztatuko da: $\sum_{i=1}^{m} gr_s(V_i) + gr_i(V_i) = 2 \cdot n$
* <u>Iturri</u> = $gr_s(v) = \emptyset$ bada, v erpina iturri bat da.
* <u>Isurbide</u> = $gr_i(v) = \emptyset$ bada, v erpina isurbide bat da.
* G-k ez badu ziklorik, orduan G-k, iturri bat eta isurbide bat izango ditu.

10 • GRAFO ZUZENDUAK

JARRAIPENA

- Multigrafoak: Grafo zuzendutan (digrafoetan) bi erpin gehienez 2 arkuz elkar daitezke, multigrafo zuzendutan aldiz, onartuko da e arku baino gehiagorekin lotzea. Adierazpen grafikoa:



- Azpigrafo
- Isomorfismo
- Bide eta ziklo

} ⟹ Definizioak grafo zuzenduei hedatuko da.

- Grafo zuzendu konexuak:

G grafoaren arkuen ekilbidearen noranzkoa kontuan hartzen ez bada eta bi erpin arku bat baino gehiagorekin lotuta badaude arku bakarra kontsideratzen bada, orduan G' grafo ez zuzendu bat lortuko da.

- G konexua dela diogu baldin G' konexua bada.
- Multigrafo zuzenduei ere hedatuko da.

- Grafo zuzendu eulerianoak:
  - Definizioak grafo zuzenduei hedatuko dira.
  - $G=(V,A,\phi)$ grafo zuzendua euleriarra da baldin eta soilik baldin konexua bada eta $gr_i(v)=gr_s(v)$ $\forall v \in V$
  - Multigrafo zuzenduei hedatuko da.

11 • OPTIMIZAZIOA ETA GRAFOAK

- Grafo haztatua: Izan bedi $G=(V,A,\phi)$ grafo ez zuzendu edo zuzendua kinbil gabekoa. G haztatua dela diogu baldin eta $a \in A$ arku bakoitzari $p(a)$ dendatutako zenb. erreal positibo bat egokitzen bazaio. $p(a)$ a-ren pisua (edo luzera) deritzo. Gainera $\phi(a)=(v,w)$ bada, orduan $p(a)$-ren notazioa $p(v,w)$ izango da.
  - $v,w \in V$ erpinetarako ez bada existitzen $a \in A$ non $\phi(a)=v,w$ den, orduan $p(v,w)=\infty$ definituko da.

11● OPTIMIZAZIOA ETA GRAFOAK — JARRAIPENA

8

⊛ Bi erpinen arteko distantzia:

Izan bedi $G(V, A, \phi)$ grafo zuzendu kiribil gabea eta haztatua.

- $C = (V_0, a_1, V_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, V_{r-1}, a_r, V_r)$, G-ren V_0 erpinetik V_r erpinerako bide bat bada, orduan G-ren C bidearen pisu (luzera) $p(C)$ zenbaki real positibo hau da:

$$p(C) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_r)$$

- G-ren v erpinetik, G-ren w erpinerako dist. $d(v, w)$ zenbaki erreal positibo hau da: $d(v, w) = \min\{p(C_1), p(C_2), \ldots, p(C_s)\}$
  - non $C_1, C_2, \ldots, C_s$ den v erpinetik atera eta w-tik heltzen diren bide guztien multzoa.
  - G-ren 2 erpinen arteko dist. zehazteko Dijkstra algoritmoa.

⊛ Dijkstra

Izan bedi $G(V, A, \phi)$ grafo zuzendu haztatu kiribil gabea $n(V)$ erpinekin. Algoritmoaren bidez G-ren V_0 erpin finkotik G-ren beste erpin guztietara dagoen dist. kalkulatu ahal izango da, baita beste erpin guztietara ibilbide minimoa duen bidezidor bat. → arku ≠ ak dituen bidea

! gogoratu!

Pausuak:

① $i = \emptyset$
$S_\emptyset = V_\emptyset$
$E(V_\emptyset) = \emptyset$
$E(v \neq V_0) = \infty$

Hasieraketak

- $V_\emptyset$-ri $(0, -)$ etiketa esleitzen zaio eta (dist. / Nondik)
  $V_0 \neq V$ diren v erpinei $(\infty, -)$ etiketa esleitzen zaie.
- $n(V) = 1$ bada, orduan $V = \{V_\emptyset\}$ eta problema bukatu da
- $n(V) > 1$ bada, 2. pausura.

② $\forall w \in V - S_i$

$$E(w) = \min_{v \in S_i}\{E(w), E(v) + p(v, w)\}$$

aurreko pausuan aukeratu dugun erpineko etiketa

lehenengo iterazioa denean $E(V_0) = 0$
$p(V_0, w)$

w-ren ordez V-S_i multzoko erpinak jarriko ditugu.
Gero balio minimoa duena hautatuko dugu $E(w)$ etiketari esleitzeko.

③
- $i \in \{\emptyset, 1, 2, \ldots, n-2\}$ baterentzat, $V - S_i$-ren erpin bakoitzak $(\infty, -)$ etiketa badu, orduan grafo etiketatuak nahi dugun informazioa du. → $\exists V_{i+1} \in V - S_i / E(V_{i+1})$ minimoa
- Aurkako kasuan, $w \in V - S_i$ erpin bat existitzen da gutxienez $(\infty, -)$ etiketarik gabe
  1. V_{i+1} erpina hautatuko dugu, $E(V_{i+1})$ minimoa izanik eta V_0-tik hurbilen dagoen $V - S_i$-ren elementu bat da. (gerta daiteke aukera gehiago egotea)
  2. $S_{i+1} = S_i \cup \{V_{i+1}\}$
  3. $i{+}{+}$. $i < n(V) - 1$ bada, 2. pausura itzuli. $i = n-1$ bada grafo etiketatuak nahi dugun info du.

Pausuak

Dijkstra ~~v_0 erpinetik beste erpinetara dagoen dist.~~

1. $i = \emptyset$

   $S_0 = v_0$

   $E(v_0) = \emptyset$

   $E(v \neq v_0) = \infty$

   v_0-ri $(0, -)$ etiketa esleitu

   $v \neq v_0$ diren erpinei $E(v) = (\infty, -)$ etiketa esleitzen zaie.

2. $\forall w \in V - S_i$

   ⚠ Arku ⓔ-eko baidea

   $$E(w) = \min_{v \in S_i} \{ E(w), E(v) + p(v, w) \}$$

3. $\exists w \in V - S_i \,/\, E(v_{i+1})$ minimo

   $S_{i+1} = S_i \cup \{ v_{i+1} \}$

   $i{+}{+}$ $\quad i < n(v) - 1$ bada $\Rightarrow$ 2. pausura

⊛ Zuhaitz estaltzaile minimalak

Izan bedi $G(V,A,\phi)$ grafo ez zuzendu haztatua.

Zuhaitz estaltzaile minimala = G', G-ren zuhaitz estaltzaile minimala da baldin eta G'-ren arkuen pisuen(luzera) batura minimoa bada G-ren beste zuhaitz estaltzaileekiko.

Lortzeko algoritmoa → Kruskal

⊛ Kruskal Izan bedi $G(V,A,\phi)$ grafo ez konexu haztatua $n(V)$ erpinekin.

Pausuak:

① $i=1$

G-ren a_1 arkua aukeratuko dugu, non $p(a_1) = \min\{p(a_h) / a_h \in A\}$

② $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$ balioetarako, $a_1, a_2, \ldots, a_i$ arkuak aukeratu baditugu, orduan zehaztu dezagun $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ multzoko a_{i+1} arkua honako baldintza hauek egiaztatuz:

① $p(a_{i+1}) = \min\{p(a_h) / a_h \in A - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}\}$

② $a_1, a_2, \ldots, a_i$ arkuek (eta dagozkien erpinek) osatzen duten G-ren G' azpigrafoak ez du ziklorik.
↳ Bidezidor itxia (arku ⊕)

③ $i{+}{+}$

- $i < n(V) - 1$ bada, 2. pausura itzuli
- $i = n(V) - 1$ bada, orduan $a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}$ arkuek (eta dagozkien erpinek) osatzen duten G-ren azpigrafoa $n-1$ arku eta erpineko azpigrafo konexua da eta gainera G-ren zuhaitz estaltzaile minimala da.

{KRUSKAL} Pausuak:

① $i=1$

a_1 aukeratu, non $p(a_1) = \min\{p(a_h) / a_h \in A\}$

② a_{i+1} aukeratzeko:

- $p(a_{i+1}) = \min\{p(a_h) / a_h \in A - \{a_1, a_2, \dots, a_i\}\}$
- $a_1, a_2, \dots, a_i$ arkuek (eta dagozkien erpinek osatzen duten G' azpigrafoak ez du ziklorik.

Bidezidor itxia (arku ≠)

③ $i++$
- $i < n(V)-1$, 2. pausura
- $i = n(V)-1$, $a_1, a_2, \dots a_{i+1}$ arkuak (eta erpinek) $n-1$ arku eta erpineko G' azpigrafo konexua eta gainera G-ren zuhaitz estaltzaile minimoa da.