# MATEMATIKA DISKRETUA

# 2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

Erik Alonso González

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)

# Aurkibidea

1. Multzoak
2. Eragiketak multzoekin
3. Multzoen biderkadura kartesiarra
4. Aplikazioak
5. Zenbaki osoak eta zatidura
6. Erlazio bitarrak
7. Baliokidetasun-erlazioak
8. Ordena-erlazioak
9. Saretxoak eta multzo ordenatuak
10. Indukzio-printzipioa
11. Proposatutako ariketak

# Aurkibidea

1 Multzoak
- Multzo-kontzeptua
- Zenbakizko multzoak
- Sinbolo erabilgarriak
- Pertenentzia eta berdintasun erlazioak
- Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak
- Multzo hutsa
- Multzo osagarria
- Venn-en diagramak

# Multzo-kontzeptua I

## Sarrera

- XI. mendearen amaieran, multzo teoriaren azterketaren sortzailea izan zen George Cantor filosofo eta matematikariak multzo bat honela definitu zuen: "oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma"
- Beranduago, Bertrand Russell-ek honako paradoxa hau aurkeztu zuen: Izan bedi A, bere buruaren elementuak ez diren multzo guztien multzoa. A bere buruaren elementua da ala ez? Erantzuna kontraesan bat da.
- George Cantor-ek ezarritako multzoaren gainean, Bertrand Russell-en paradoxaren intzidentziak honako multzoaren kontzeptu hau ezartzera bultzatzen du.

# Multzo-kontzeptua II

## 1.1. Definizioa

- Multzo bat, oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma da, non ez den bere buruaren elementu bat bezala ulertzen.
- Multzoak letra larriekin adieraziko dira eta elementuak xeheekin.
- Multzo bat ondo definituta dagoela diogu, baldin eta irizpide bat badugu ezagutzeko elementu bat multzoaren barnean dagoen ala ez. Multzoak hedaduraz edo edukieraz defini daitezke.

# Multzo-kontzeptua III

## 1.1. Definizioa

- Multzo bat hedatuz definituta dagoela diogu, baldin eta haren elementuak komaz banatuta edo giltzen artean kokatuz adierazten badira.
- Multzo bat edukieraz definituta dagoela diogu, baldin eta multzoko elementuek soilik betetzen duten propietate baten bidez definituta badago.
- Multzo bat finitua dela diogu, elementu-kopuru finitua badu. Aurkako kasuan infinitu deritzo. A multzo finitu baten elementu-kopurua n(A) adieraziko da.

# Multzo-kontzeptua IV

## 1.1. Definizioa

- Horrela, adibidez, bokalen V multzoa hedaduraz a,e,i,o,u definituko da eta zenbaki bikoitien P multzoa edukieraz honako propietate karakteristiko honen bidez definituko da: x, P-ren elementua da baldin eta soilik baldin, x zenbaki bikoitia bada. V multzo finitua da eta P infinitua.

# Zenbakizko multzoak

## Zenbakizko multzoak

- Matematikaren garapenean garrantzi handikoak izango dira honako multzo infinitu hauek:
  - $\mathbb{N}$ Zenbaki arrunten multzoa
  - $\mathbb{Z}$ Zenbaki osoen multzoa
  - $\mathbb{Q}$ Zenbaki arrazionalen multzoa
  - $\mathbb{R}$ Zenbaki errealen multzoa
  - $\mathbb{C}$ Zenbaki konplexuen multzoa

# Sinbolo erabilgarriak

## Sinbolo erabilgarriak

- Multzoen teorian zenbait sinbolo, batzuk logika matematikotik hartuta, esandako teoria garatzen lagunduko dute. Honako taula honetan gehien erabilitakoak agertzen dira:

| Sinboloa | Esanahia |
|---|---|
| $\vee$ | edo |
| $\wedge$ | eta |
| $\Rightarrow$ | orduan |
| $\Leftrightarrow$ | baldin eta soilik baldin |
| $\forall$ | edozeinerako |
| $\exists$ | Existitzen da bat gutxienez |
| $\exists!$ | Existitzen da bakarra |
| $\nexists$ | Ez da existitzen |
| $/$ | non |
| $:$ | Egiaztatzen du |

# Pertenentzia eta berdintasun erlazioak

## 1.2. Definizioa

- x elementu bat A multzoan badago $x \in A$ adieraziko da eta "x elementua A multzoaren barnean dago" irakurriko da. x elementu bat A multzoan ez badago $x \notin A$ adieraziko da eta "x elementua ez dago A-ren barnean" irakurriko da.
- A multzo baten x edozein elementu B multzoan badago eta B-ren elementu bakoitza A multzoan badago orduan A eta B multzo berdina dira eta $A=B$ denotatuko da.
- Horrela, adibidez, P zenbaki bikoitien multzoa bada $8 \in P$ eta $7 \notin P$ izango dugu.

# Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak

## 1.3. Definizioa

- A multzo bat B beste multzo batean sartuta dagoela diogu, $A \subset B$ denotatuz, baldin eta A-ren edozein elementu B-ren barnean badago.
- A multzoa B multzoan sartua badago, A, B-ren azpimultzoa edo, A, B-ren zati bat dela diogu. A ez badago B multzoan sartuta, $A \not\subset B$ denotatuko da.
- Logika matematikoaren terminoetan, $A \subset B$ adierazpenak $X \in A \Rightarrow X \in B$ esan nahi du eta gainera $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.
- Horrela, adibidez, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eta $\mathbb{C}$ zenbakizko multzoetarako honako partekotasun kate hau egiaztatuko da: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

# Multzo hutsa

## Sarrera

- Kontsidera dezagun A multzo bat eta defini dezagun $\phi_A = \{x \in A \ / \ x \notin A\}$ multzoa. $\phi_A$ multzoak ez du elementurik eta A multzoari elkartutako multzo hutsa deritzo.
- Multzo huts bakarra existitzen da, hots, hartutako A multzoarekiko independentea da multzo hutsaren definizioa. Benetan, B bada beste multzo bat eta $\phi_B = \{x \in B \ / \ x \notin B\}$ bada B multzoari elkartutako multzo hutsa, berehalakoa da $\phi_A \subset \phi_B$ eta $\phi_B \subset \phi_A$ ziurtatzea, hau da $\phi_A = \phi_B$.

## 1.4. Definizioa

- Elementuak ez dituen $\phi$ multzo bakarrari multzo huts deritzo.
- A edozein multzo izanik, $\phi \subset A$ egiaztatuko da.

# Multzo osagarria

## 1.5. Definizioa

- Izan bitez A eta E bi multzo, non $A \subset E$ baita.
- Honako A' multzo honi, A-ren multzo osagarria E-rekiko deritzo:

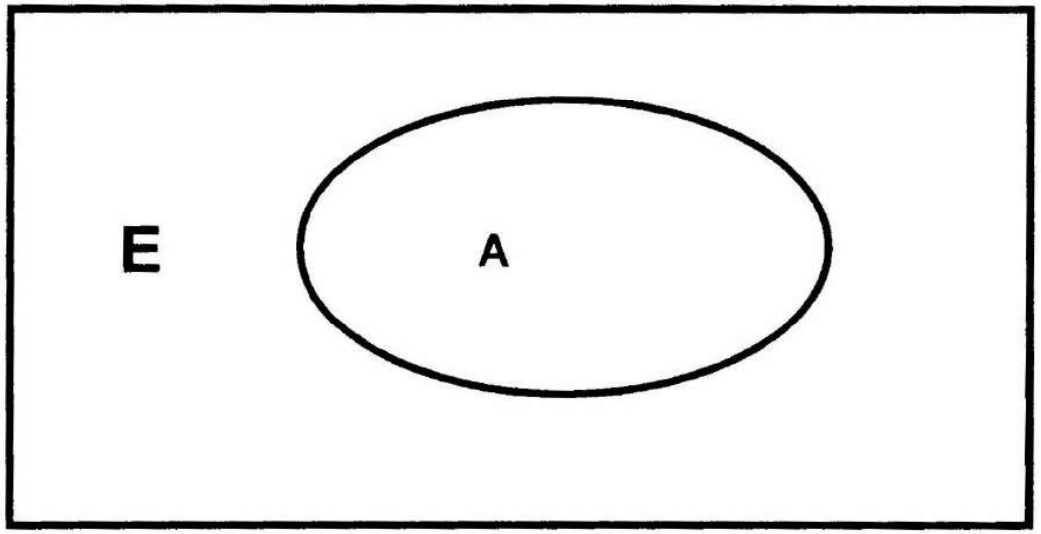
$$A' = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$

- Horrela, adibidez, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ eta $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ badira, orduan $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ izango da.
- $\mathbb{Q}$-ren osagarria $\mathbb{R}$-rekiko, zenbaki irrazionalen multzoa da.

# Venn-en diagramak

## Venn-en diagramak

- Multzoak kurba itxi ganbilez mugatutako planoko eremuen bidez adieraz daitezke. Adierazpen hauei Venn-en diagrama deritze.




$A \subset E$

# Aurkibidea

2 Eragiketak multzoekin
- Bildura
- Ebakidura
- Diferentzia
- Oinarrizko propietateak
- Berretura multzoa
- Multzo baten partiketa

# Eragiketak multzoekin

## Sarrera

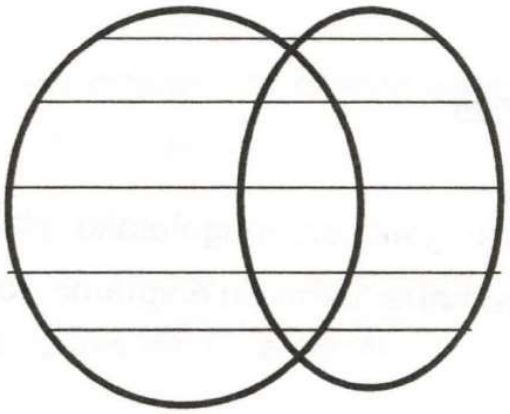
- Multzoen arteko eragiketen bidez multzoak konbina daitezke multzo berriak sortuz. Bildura ($\cup$), ebakidura ($\cap$) eta diferentzia ($-$) eragiketak aztertuko ditugu.

# Bildura

## 2.1. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren bildura $A \cup B$ denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean edo B-ren barnean baitaude.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

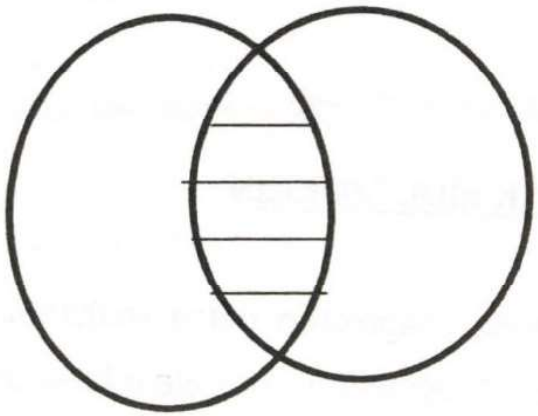


# Ebakidura

## 2.2. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren ebakidura $A \cap B$ denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean eta B-ren barnean baitaude.
- $A \cap B = \phi$ bada A eta B multzo disjuntuak direla diogu.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

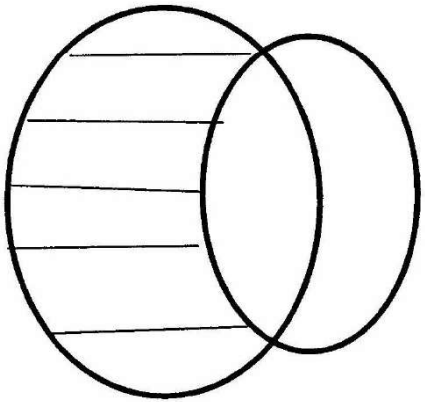


# Diferentzia

## 2.3. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren diferentzia A-B denotaturiko beste multzoa izango da, non haren elementuak A-ren barnean baitaude, baina ez B-n.
- $A \subset E$ badago, orduan $A' = E - A$ egiaztatuko da.
- Problema konkretu bateko multzo guztien elementuak dituen E multzo bati erreferentzia-multzo edo multzo unibertsal deritzo.

$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$



# Oinarrizko propietateak I

## 2.4. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P edozein azpimultzo izanik, honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$(P')' \equiv P \tag{1.p}$$

$$\phi' \equiv E \tag{2.p}$$

$$E' \equiv \phi \tag{3.p}$$

# Oinarrizko propietateak II

## 2.5. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup \phi \equiv P \tag{4.p}$$

$$P \cup E \equiv E \tag{5.p}$$

$$P \cup P \equiv P \tag{6.p}$$

$$P \cup Q \equiv Q \cup P \tag{7.p}$$

$$(P \cup Q) \cup R \equiv P \cup (Q \cup R) \tag{8.p}$$

$$P \cup P' \equiv E \tag{9.p}$$

# Oinarrizko propietateak III

## 2.6. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cap \phi \equiv \phi \tag{10.p}$$

$$P \cap E \equiv P \tag{11.p}$$

$$P \cap P \equiv P \tag{12.p}$$

$$P \cap Q \equiv Q \cap P \tag{13.p}$$

$$(P \cap Q) \cap R \equiv P \cap (Q \cap R) \tag{14.p}$$

$$P \cap P' \equiv \phi \tag{15.p}$$

# Oinarrizko propietateak IV

## 2.7. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup (P \cap Q) \equiv P \tag{16.p}$$

$$P \cap (P \cup Q) \equiv P \tag{17.p}$$

$$P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R) \tag{18.p}$$

$$P \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \tag{19.p}$$

$$(P \cup Q)' \equiv P' \cap Q' \tag{20.p}$$

$$(P \cap Q)' \equiv P' \cup Q' \tag{21.p}$$

# Oinarrizko propietateak V

## 2.8. Proposizioa

- P eta Q edozein multzo finitu izanik, honako hau egiaztatuko da:

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$$

# Berretura multzoa

## 2.9. Definizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A-ren azpimultzo guztiek osatzen duten P(A) multzoari A-ren berretura multzoa deritzo.

## 2.10. Proposizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A multzo finitua bada eta n(A)=r orduan honako hau egiaztatuko da: $n[P(A)]=2^r$.

# Multzo baten partiketa

## Sarrera

- Izan bedi A multzo ez huts bat eta $F=\{S_i \ / \ i\in I\}$ A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat.

## 2.11. Proposizioa

- F, A-ren partiketa bat dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:
  1. $\bigcup_{i\in I} S_i = A$
  2. $\forall i,j\in I \ / \ i\neq j \quad S_i\cap S_j = \phi$
- 1. atala baino ez bada egiaztatzen, F, A-ren estaldura dela diogu.

# Aurkibidea

3 Multzoen biderkadura kartesiarra

# Multzoen biderkadura kartesiarra I

## 3.1. Definizioa

- A eta B bi multzoren biderkadura kartesiarra AxB denotaturiko honako multzo hau izango da:

$$AxB=\{(x,y) \ / \ x\in A \wedge y\in B\}$$

- AxB multzoko (x,y) elementuei bikote ordenatu deritze.

## 3.2. Definizioa

- A, B eta C hiru multzoren biderkadura kartesiarra AxBxC denotaturiko multzo hau izango da:

$$AxBxC=\{(x,y,z) \ / \ x\in A \wedge y\in B \wedge z\in C\}$$

- AxBxC multzoko (x,y,z) elementuei hirukote ordenatu deritze.

# Multzoen biderkadura kartesiarra II

## 3.3. Definizioa

- $A_1$, $A_2$,... eta $A_m$, m multzoren biderkadura kartesiarra $A_1xA_2x...xA_m$ denotaturiko multzo hau izango da:

$$A_1xA_2x...xA_m=\{(x_1,x_2,...,x_m) \ / \ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2... \wedge x_m \in A_m\}$$

- $A_1xA_2x...xA_m$ multzoko $(x_1,x_2,...,x_m)$ elementuei n-kote deritze.
- $A_1=A_2=...=A_m$ berdinak badira, orduan $AxAx...xA$ multzoa $A^m$ adieraziko da.
- Bereziki interesgarriak dira plano arrunta eta espazio arrunta adierazten dituzten $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoak, non $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoa baita.

# Multzoen biderkadura kartesiarra III

## 3.4. Proposizioa

- $A_1$, $A_2$,... eta $A_m$ multzo finituak badira honako hau egiaztatuko da:

$$n(A_1 x A_2 x ... x A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) ... n(A_m)$$

# Aurkibidea

4 Aplikazioak
- Korrespondentziak
- Aplikazioak
- Zenbait aplikazio berezi
- Aplikazioen sailkapena
- Aplikazioen konposaketa
- Alderantzizko aplikazioa

# Korrespondentziak I

## 4.1. Definizioa

Izan bitez A eta B bi multzo ez huts.

- AxB multzoko edozein G azpimultzori A-ren B gaineko korrespondentzia deritzo.
- A, B eta G multzoei korrespondentziaren hasiera multzo, helburu multzo eta grafo deritze hurrenez hurren.
- $D \subset A$ multzoari, non $x \in D$ elementu bakoitzarentzat $y \in B$ elementu bat existitzen den $(x,y) \in G$ izanik, korrespondentziaren definizio-eremu deritzo. Era berean, $I \subset B$ multzoari, non $y \in I$ bakoitzarentzat $x \in A$ elementu bat existitzen den $(x,y) \in G$ izanik, korrespondentziaren irudi edo balio-eremu deritzo.

# Korrespondentziak II

## 4.1. Definizioa

- Korrespondentziak adierazteko $f:A\to B$ erabiliz gero, orduan $(x,y)\in G$ badago "y, x-ren irudi f-ren arabera" dela esango da, eta $y=f(x)$ denotatuko da. Gainera, korrespondentziaren definizio-eremua eta irudia edo balio-eremua honako era honetan adieraziko dira:

$$D(f)=\{x\in A \ / \ \exists y\in B: f(x)=y\}=\{x\in A \ / \ \exists y\in B: (x,y)\in G\}$$
$$Im(f)=\{y\in B \ / \ \exists x\in A: f(x)=y\}=\{y\in B \ / \ \exists x\in A: (x,y)\in G\}$$

# Aplikazioak

## 4.2. Definizioa

- $f:A\to B$ korrespondentzia bat, aplikazio bat dela diogu baldin eta $D(f)=A$ bada eta $x\in D(f)$ bakoitzarentzat $y\in Im(f)$ bakarra existitzen bada, non $f(x)=y$ baita.

$$D(f)=A \quad \wedge \quad \forall x\in D(f):\ \exists! y\in Im(f)\ /\ f(x)=y$$

- Hots, A-ren B gaineko f aplikazio bat A-ren elementu bakoitzari B-ren elementu bakarra egokitzen dion erregela baten bidez definituko da.
- f aplikazio batentzat $y=f(x)$ bada, orduan "y elementua x jatorrizkoaren irudia f-ren arabera" dela esango dugu.

# Zenbait aplikazio berezi I

## 4.3. Definizioa

- $A \subset B$ bada, honako $i_A : A \to B$ aplikazio honi A-ren B gaineko inklusio aplikazio deritzo:

$$i_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

## 4.4. Definizioa

- Honako $I_A : A \to A$ aplikazio honi A-ren identitate aplikazio deritzo:

$$I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

- Kontuan izan identitate aplikazioa, inklusio aplikazioaren kasu berezi bat dela.

# Zenbait aplikazio berezi II

## 4.5. Definizioa

- Izan bedi $k \in B$ elementu bat. Honako $f_k : A \to B$ aplikazio honi aplikazio konstante deritzo:

$$f_k(x) = k \quad \forall x \in A$$

## 4.6. Definizioa

- Izan bedi A, E-ren azpimultzo bat. Honako $c_A : E \to \{0, 1\}$ aplikazio honi A-ren funtzio karakteristiko deritzo:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ badago} \\ 0 & x \in E\text{-}A \text{ badago} \end{cases}$$

# Zenbait aplikazio berezi III

## 4.7. Definizioa

- Kontsidera ditzagun $f:A\to B$ aplikazio bat eta A-ren S azpimultzo bat. Honako $f_s:S\to B$ aplikazio honi f-ren murrizketa aplikazio S gainean deritzo:

$$f_s(x)=f(x) \quad \forall x\in S$$

# Aplikazioen sailkapena I

## 4.8. Definizioa

- f:A→B aplikazio bat injektiboa dela diogu baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \ / \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta A-ren jatorrizko desberdinei f-ren arabera B-ko irudi desberdinak egokitzen bazaizkie.

# Aplikazioen sailkapena II

## 4.8. Definizioa

- 4.8 definizioa honako definizio honen baliokidea da:
- f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \ / \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta B-ko irudi berdinei A-ren jatorrizko berdinak egokitzen bazaizkie f-ren arabera.

# Aplikazioen sailkapena III

## 4.9. Definizioa

- $f:A \to B$ aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta $Im(f)=B$ egiaztatzen bada.
- Hots, $f:A \to B$ aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza A-ren elementu baten irudia bada gutxienez. Sinbolikoki:

$$\forall y \in B : \exists x \in A \ / \ f(x)=y$$

# Aplikazioen sailkapena IV

## 4.10. Definizioa

- $f:A \to B$ aplikazio bat bijektiboa da baldin eta injektiboa eta suprajektiboa bada.
- Hots, $f:A \to B$ aplikazio bat bijektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza Aren elementu bakarraren irudia bada. Sinbolikoki:

$$\forall y \in B : \exists! x \in A \ / \ f(x)=y$$

# Aplikazioen konposaketa

## 4.11. Definizioa

- Izan bitez $f:A\to B$ eta $g:B\to C$ bi aplikazio. Honako $g\circ f:A\to C$ aplikazio honi f eta g-ren aplikazio konposatu deritzo:

$$g\circ f(x)=g[f(x)] \quad \forall x\in A$$

- $f:A\to A$ aplikazio bat izanik, $f\circ f$ aplikazioa $f^2$ denotatuko da.
- 4.11 definizioa erabiliz erraz defini daiteke hiru edo aplikazio gehiagoren arteko konposaketa.

# Alderantzizko aplikazioa

## 4.12. Definizioa

- Izan bedi $f:A\to B$ aplikazio bijektibo bat. B-ren y elementu bakoitzari A-ren x jatorrizkoa f-ren arabera egokitzen dion $f^{-1}:B\to A$ aplikazioari f-ren alderantzizko aplikazio deritzo.
- Kontuan izan $f\circ f^{-1}=I_B$ eta $f^{-1}\circ f=I_A$ egiaztatzen direla.

# Aurkibidea

5 Zenbaki osoak eta zatidura
- Zenbaki osoen zatidura
- Zatitzaile komunetako handiena eta multiplo komunetako txikiena
- Kongruentziak modulu m

# Zenbaki osoen zatidura I

## 5.1. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$, non "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen duela diogu baldin eta c $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non b = ac baita. "a", "b"-ren zatitzailea dela ere esango da, edo "b", "a"-ren multiploa dela eta honela denotatuko da: $a|b$. "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen ez badu, honela denotatuko da: $a\nmid b$.

## 5.2. Definizioa

- p>1 zenbaki arrunt bat lehena dela diogu baldin eta haren zatitzaile arrunt bakarrak 1 eta zenbaki bera badira. Aurkako kasuan konposatua deritzo.

# Zenbaki osoen zatidura II

## 5.3. Proposizioa

- Izan bitez a, b, c $\in \mathbb{Z}$. Orduan, honako hau egiaztatuko da:
  1. a|b bada eta a|c bada, a|(b+c) egiaztatuko da.
  2. a|b bada, orduan a|bc $\forall$c $\in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.
  3. a|b bada eta b|c bada, orduan a|c egiaztatuko da. Kasu honetan, a|(mb+nc), $\forall$m, n $\in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.

## 5.4. Proposizioa (aritmetikaren funtsezko teorema)

- Izan bedi z zenbaki oso bat 1 baino handiagoa. Orduan, z zenbakia era bakarrean idatziko da zenbaki lehen gisa, edo bi edo zenbaki lehen gehiagoren berreturen batura gisa.

# Zenbaki osoen zatidura III

## 5.5. Proposizioa

- Izan bedi $z \in \mathbb{Z}$ zenbaki oso konposatu bat. Orduan, z zenbakiak $\sqrt{z}$ baino txikiagoa edo berdina den zatitzaile lehen bat izango du.

## 5.6. Proposizioa (Zatidura osoaren algoritmoa)

- Izan bitez a zenbaki oso bat eta b zenbaki oso positibo bat. p eta r bi zenbaki oso bakarrak existituko dira, non $a = pb + r$ den, $0 \leq r < b$ izanik.

## 5.7. Definizioa

- Aurreko proposizioan b zatitzailea da, a zatikizuna, p zatidura eta r hondarra.

# z.k.h eta m.k.t I

## 5.8. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. d|a eta d|b betetzen dituen d zenbaki oso handienari a eta b-ren zatitzaile komunetako handiena deritzo eta honela denotatuko da:

$$d = zkh(a, b).$$

## 5.9. Proposizioa (Euclides-en algoritmoa)

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. a = pb + r bada, non $0 \leq r < b$ den, honako hau egiaztatuko da:

$$zkh(a, b) = zkh(b, r).$$

## 5.10. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a eta b berekiko lehenak dira baldin eta zkh(a, b) = 1 egiaztatzen bada.

# z.k.h eta m.k.t II

## 5.11. Definizioa

- Izan bitez $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. $a_1, a_2, \dots, a_n$ binaka berekiko lehenak direla diogu baldin eta $zkh(a_i, a_j) = 1$ egiaztatzen bada, non $1 \leq i < j \leq n$ den.

## 5.12. Proposizioa (Bezout-en teorema)

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b berekiko lehenak dira, baldin eta soilik baldin $p,q \in \mathbb{Z}$ existitzen badira non honako hau egiaztatzen den: $ap + bq = 1$ .

## 5.13. Definizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b-rekin zatigarria den zenbaki oso positibo txikienari a eta b-ren multiplo komunetako txikiena deritzo eta honela denotatuko da:

$$mkt(a, b)$$

# z.k.h eta m.k.t III

## 5.14. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. Honako hau egiaztatuko da:

$$ab = zkh(a, b)\ mkt(a, b)$$

## 5.15. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. zkh(a, b)=1 bada, orduan mkt(a, b)=ab egiaztatuko da.

# Kongruentziak modulu m I

## 5.16. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a eta b kongruente modulu m direla esango dugu, m zenbaki positibo bat delarik, baldin eta m|(a-b) egiaztatzen bada eta honela denotatuko da: a≡b (mod m).

## 5.17. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. Orduan honako hau egiaztatuko da: a≡b (mod m) baldin eta soilik baldin k $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non a=b+km den.

# Kongruentziak modulu m II

## 5.18. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a≡b (mod m) eta c≡d (mod m) badira, honako hau egiaztatuko da:

$$a+c\equiv b+d \pmod{m}$$
$$ac\equiv bd \pmod{m}$$

- Hau da, modulu berdinekiko kongruentziak gaika batu eta biderkatu daitezke. Hots, batura eta biderkadura bateragarriak dira kongruentzia-erlazioarekin.

# Aurkibidea

6 Erlazio bitarrak
- Erlazio bitarraren kontzeptuak
- Erlazio bitarren propietateak

# Erlazio bitarraren kontzeptuak

## 6.1. Definizioa

- AxA-ko G edozein azpimultzori A gaineko erlazio bitar deritzo. Hots, erlazio bitar bat A-ren A gaineko korrespondentzia bat da.
- $R$ ikurraren bidez adierazten bada erlazio bitarra, orduan $(x,y)\in G$ badago "x, y-rekin erlazionatuta dago" esango dugu eta $xRy$ denotatuko da. $(x,y)\notin G$ bada "x ez dago y-rekin erlazionatuta" esango dugu eta $x\not R y$ denotatuko da. Gainera $R$ erlazio bitarra karakterizatzen duen G azpimultzoari $R$-ren grafo deritzo.

# Erlazio bitarren propietateak I

Izan bedi A gainean definitutako $R$ erlazio bitar bat, haren grafoa G izanik.

## 6.2. Definizioa

- $R$ bihurkorra dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in A \qquad xRx$$

edo

$$\forall x \in A \qquad (x,x) \in G$$

## 6.3. Definizioa

- $R$ simetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \Rightarrow yRx$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$$

# Erlazio bitarren propietateak II

## 6.4. Definizioa

- $R$ antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow x=y$$

## 6.4. Definizioa (Beste era bat)

- $R$ antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow x \not R y \vee y \not R x$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow (x,y) \notin G \vee (y,x) \notin G$$

# Erlazio bitarren propietateak III

## 6.5. Definizioa

- $R$ iragankorra dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y,z \in A \qquad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

edo

$$\forall x,y,z \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$$

# Aurkibidea

7 Baliokidetasun-erlazioak
- Baliokidetasun-erlazioen kontzeptua
- Baliokidetasun klaseak
- Zatidura multzoa

# Baliokidetasun-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako $R$ erlazio bitar bat.

## 7.1. Definizioa

- $R$ erlazio bitarra, baliokidetasun-erlazioa dela diogu, baldin eta bihurkorra, simetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, $xRy$ bada "x baliokide y" esango da.
- Baliokidetasun-erlazioak $\sim$ ikurrarekin adieraziko dira.

# Baliokidetasun klaseak I

Izan bedi A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazio bat.

## 7.2. Definizioa

- Kontsidera dezagun $a \in A$ elementu bat. Honako A-ren C(a) multzo honi "a elementuaren baliokidetasun klase, modulu $\sim$" deritzo:

$$C(a)=\{x \in A \ / \ x \sim a\}$$

- Baliokidetasun klaseen beste notazio batzuk honako hauek dira: [a] edo $\bar{a}$.

# Baliokidetasun klaseak II

## 7.3. Proposizioa

- A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagozkion baliokidetasun klaseak kontsideratzen badira, honako propietate hauek egiaztatuko dira:
  1. $\forall x \in A \quad C(x) \neq \emptyset$
  2. $\forall x,y \in A \quad x \sim y \Rightarrow C(x) = C(y)$
  3. $\{C(x) \ / \ x \in A\}$ A-ren partiketa bat da.
- 2. atalaren ondorioz, C(x), baliokidetasun klase bat, klasearen adierazle deritzon haren edozein elementuren bidez zehaztu daiteke.

# Zatidura multzoa

## 7.4. Definizioa

- Honako multzo honi, $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagokion zatidura multzo deritzo eta $A/\sim$ denotatuko da:

$$A/\sim=\{C(x) \ / \ x\in A\}$$

- Hots, $A/\sim$ zatidura multzoa $\sim$ moduluko baliokidetasun klaseekin osatuta dago eta 7.3 proposizioaren 3. atalaren arabera A-ren partiketa bat.

# Aurkibidea

8 Ordena-erlazioak
- Ordena-erlazioen kontzeptua
- Elementu nabarmenak
- Multzo bornatuak

# Ordena-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako $R$ erlazio bitar bat.

## 8.1. Definizioa

- $R$ erlazio bitarra, ordena-erlazioa dela diogu, baldin eta $R$ bihurkorra, antisimetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, $xRy$ bada "x, y-ren aurreko" esango da.
- Ordena-erlazioak $\preccurlyeq$ ikurrarekin adieraziko dira.

## 8.2. Definizioa

- "$\preccurlyeq$" erlazio bitar batez hornituriko A multzo ez huts bati, multzo ordenatu deritzo. Gainera, $x \preccurlyeq y$ edo $y \preccurlyeq x$ egiaztatzen bada, x eta y A-ren edozein elementurentzat, orduan A multzo guztiz ordenatua dela esango dugu.

# Elementu nabarmenak I

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" erlazio bitar baten bidez eta kontsidera dezagun A-ren H azpimultzo ez huts bat.

## 8.3. Definizioa

- $m \in H$ elementu bat H-ren minimo bat izango da, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad m \preccurlyeq x$$

## 8.4. Proposizioa

- H-ren minimo bat existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren minimoaren kontzeptua izango dugu.

# Elementu nabarmenak II

## 8.5. Definizioa

- $i \in A$ elementu bat H-ren behe-borne bat (edo minorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad i \preccurlyeq x$$

- Kontuan izan:
  1. $i \in A$ H-ren behe-borne bat bada eta $i' \in A$ elementuak $i' \preccurlyeq i$ baldintza egiaztatzen badu, orduan $i'$ ere H-ren behe-borne bat izango da.
  2. H-k $m \in H$ minimo bat badu, orduan m H-ren behe-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{i} \in H$ behe-borne bat badu, orduan $\hat{i}$ H-ren minimoa da.

# Elementu nabarmenak III

## 8.6. Definizioa

- $M \in H$ elementu bat H-ren maximoa dela diogu, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq M$$

## 8.7. Proposizioa

- H-ren maximoa existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren maximoaren kontzeptua izango dugu.

# Elementu nabarmenak IV

## 8.8. Definizioa

- $s \in A$ elementu bat H-ren goi-borne bat (edo maiorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq s$$

- Kontuan izan:
  1. $s \in A$ H-ren goi-borne bat bada eta $s' \in A$ elementuak $s \preccurlyeq s'$ baldintza egiaztatzen badu, orduan $s'$ ere H-ren goi-borne bat izango da.
  2. H-k $M \in H$ maximo bat badu, orduan M H-ren goi-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{s} \in H$ goi-borne bat badu, orduan $\hat{s}$ H-ren maximoa da.

# Elementu nabarmenak V

## 8.9. Definizioa

- H-ren behe-borne guztien multzoak maximoa badu, orduan maximo horri H-ren infimo deritzo, eta inf(H) denotatuko da.

## 8.10. Proposizioa

- H-k minimo bat badu, orduan inf(H)=m egiaztatuko da.

## 8.11. Definizioa

- H-ren goi-borne guztien multzoak minimo bat badu, orduan minimo horri H-ren supremo deritzo, eta sup(H) denotatuko da.

## 8.12. Proposizioa

- H-k M maximo bat badu, orduan sup(H)=M egiaztatuko da.

# Multzo bornatuak

## 8.13. Definizioa

- H behe-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez behe-borne bat badu.

## 8.14. Definizioa

- H goi-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez goi-borne bat badu.

## 8.15. Definizioa

- H bornatua dela diogu, baldin eta goi-bornatua eta behe-bornatua bada.

# Aurkibidea

9 Saretxoak eta multzo ordenatuak
Saretxoak eta multzo ondo ordenatuak

# Saretxoak eta multzo ondo ordenatuak

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" ordena-erlazioaren arabera.

## 9.1. Definizioa

- A saretxo bat dela diogu baldin eta $x,y \in A$ edozein elementurako $H=\{x,y\}$ multzoak infimoa eta supremoa dituela egiaztatzen bada.

## 9.2. Definizioa

- A multzoa ondo ordenatua dela diogu baldin eta A-ren H edozein azpimultzo ez-hutsak minimoa badu.

# Aurkibidea

10 Indukzio-printzipioa
Indukzio-printzipioa

# Indukzio-printzipioa

Izan bedi $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten multzoa $\preccurlyeq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioarekin. $\mathbb{N}$ multzo ondo ordenatua da esandako ordena-erlazioarekiko eta indukzio-printzipio deritzon honako emaitza hau egiaztatzen da:

## 10.1. Proposizioa

- Izan bedi P(n) n zenbaki arruntei dagozkien propietate bat, orduan honako emaitza hau egiaztatzen bada:
  1. $n_0$ zenbaki arrunt bat existituko da, non $P(n_0)$ egia den.
  2. $k \geq n_0$ edozein zenbaki arrunterako, P(k) egia bada P(k+1) ere egia izango da.
- P(n) propietatea egia da n edozein zenbaki arrunterako.

# Aurkibidea

11 Proposatutako ariketak
Proposatutako ariketak

# Proposatutako ariketak I

## 1. Ariketa

- 140 ikasletik, 120-k gutxienez matematika (M), fisika (F) edo kimika (K) ikasten dute. Gainera, 80 ikaslek matematika ikasten dute, 75-ek fisika, 50-ek kimika, 40-k matematika eta fisika, 35-ek matematika eta kimika eta 20-k fisika eta kimika.

  Honakoa hau kontuan izanik:
  $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

  Aurkitu:
  1. Hiru irakasgaiak batera ikasten dituzten ikasle-kopurua.
  2. Matematika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Fisika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Kimika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua.
  3. Matematika eta fisika baina ez kimika ikasten duten ikasle-kopurua.
  4. Matematika eta kimika baina ez fisika ikasten duten ikasle-kopurua.
  5. Fisika eta kimika baina ez matematika ikasten duten ikasle-kopurua.

# Proposatutako ariketak II

## 2. Ariketa

1. Aurkitu A eta B bi multzo finitu honako hau jakinik:
   A-B$=\{1,2,3,4\}$; B-A$=\{5,6,7\}$; A$\cap$B$=\{8,9\}$
2. Aurkitu C eta D bi multzo finitu honako hau jakinik:
   C-D$=\{1,2,4\}$; D-C$=\{7,8\}$; C$\cup$D$=\{1,2,4,5,7,8,9\}$

# Proposatutako ariketak III

## 3. Ariketa

- Izan bedi E=$\{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$ multzoa eta kontsidera ditzagun honako E-ren azpimultzo hauek:

  A=$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, B=$\{1, 2, 4, 8\}$, C= $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, D = $\{2, 3, 5, 8\}$

  Aurkitu:

  1. $(A \cup B) \cap C$
  2. $(C \cap D)'$
  3. $(A \cup B) - C$
  4. $(A \cup B) - (C \cap D)$
  5. $C' \cup D'$

# Proposatutako ariketak IV

## 4. Ariketa

- 25 liburu erabiliz irakasle batek hiru gai aztertu nahi ditu: A (konpilagailuak), B (datu-egiturak) eta C (itzultzaileak). Gai horiei buruzko liburu-kopurua honako datu hauekin bat datorrela jakinik:

  $n(A)=9$, $n(B)=13$, $n(C)=12$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=3$, $n(B\cap C)=6$ eta $n(A\cap B\cap C)=2$

  Aurkitu:

  1. Gutxienez gai bati buruzko liburu-kopurua.
  2. Zenbatek ez dute horrelako gai bat ere aztertzen?
  3. Soilik itzultzaileei buruz diren liburu-kopurua.
  4. Soilik konpilagailuei buruz diren liburu-kopurua.

# Proposatutako ariketak V

## 5. Ariketa

- Kontsidera ditzagun $\mathbb{Z}$-ren honako azpimultzo hauek:

  $A=\{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  $B = \{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $C = \{2x-1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $D = \{2x+3 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  Aztertu honako emaitzen egiatasuna::

  1. $A\subset B$ eta $A\subset D$
  2. $A=B$ eta $B=C$
  3. $1\in A$, $-3\in C$, $-4\in B$, $6\notin D$
  4. $A\cup D=A$ eta $A\cap D=D$

# Proposatutako ariketak VI

## 6. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. $(A\cap B) \cup (A\cap B')=A$
  2. $A\cup B=(A\cap B') \cup (A'\cap B) \cup (A\cap B)$
  3. $(A\cap B) \cup [B \cap ((C\cap D) \cup (C\cap D'))]=B\cap(A\cup C)$

## 7. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. $A-(A\cap B)=A-B$
  2. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

# Proposatutako ariketak VII

## 8. Ariketa

- A=[0,5] eta B=[2,8)$\in\mathbb{R}$ badira, aurkitu:
  1. $A\cap B$
  2. $A\cup B$
  3. A' eta B'
  4. A-B eta B-A

# Proposatutako ariketak VIII

## 9. Ariketa

- Kontsidera ditzagun honako korrespondentzia hauek:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x)=x^2$ den.

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $g(x)=x+3$ den.

h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $h(x)=\ln x$ den.

k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $k(x)=\sin x$ den.

p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $p(x)=\frac{x+1}{x-1}$ den.

1. Aurkitu bakoitzaren izate-eremua.
2. Aurkitu bakoitzaren irudi-multzoa.
3. Zeintzuk dira aplikazioak?
4. Sailkatu aplikazioak direnak.
5. Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$.
6. Aurkitu $g^{-1}$

# Proposatutako ariketak IX

## 10. Ariketa

- Kontsidera ditzagun honako korrespondentzia hauek:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x)=x^2+1$ den.

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $g(x)=\frac{x-1}{2}$ den.

h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $h(x)=\frac{x}{x+1}$ den.

1. Aurkitu bakoitzaren izate-eremua.
2. Aurkitu bakoitzaren irudi-multzoa.
3. Zeintzuk dira aplikazioak?
4. Sailkatu aplikazioak direnak.
5. Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$.
6. Aurkitu $g^{-1}$

# Proposatutako ariketak X

## 11. Ariketa

- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi aplikazio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 2 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 3x & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

1. Sailkatu f eta g.
2. Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$.
3. Aurkitu $g^{-1}$

# Proposatutako ariketak XI

## 12. Ariketa

- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi aplikazio:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 2x-1 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 1 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

1. Sailkatu f eta g.
2. Aurkitu f∘g eta g∘f.
3. Aurkitu $f^{-1}$ eta $g^{-1}$

# Proposatutako ariketak XII

## 13. Ariketa

- Faktorizatu 100, 641, 999 eta 1024 zenbakiak zenbaki lehenen biderkadura gisa.

## 14. Ariketa

- Froga ezazue 101 zenbaki lehena dela.

## 15. Ariketa

- Zehaztu 10, 19 eta 24 zenbakiak berekiko lehenak diren ala ez.

## 16. Ariketa

- Aurkitu zkh(120,500).

# Proposatutako ariketak XIII

## 17. Ariketa

- Euclides-en algoritmoa erabiliz, kalkulatu zkh(3258,1164).

## 18. Ariketa

- Kalkulatu 200 baino txikiagoak diren zenbaki lehenak *Eratostenes-en bahea* deritzon metodoarekin:
  1. Idatzik zenbaki guztiak 1-tik 200-era.
  2. Ezabatu zenbaki bikoitiak, 2a izan ezik.
  3. Ezabatu 3-ren multiploak, 3a izan ezik.
  4. Eta horrela jarraitu.

## 19. Ariketa

- Kalkulatu zkh(1000,625) eta mkt(1000,625) eta konprobatu honako berdintza hau: $\text{zkh}(1000,625) \cdot \text{mkt}(1000,625) = 1000 \cdot 625$

# Proposatutako ariketak XIV

## 20. Ariketa

- Balioztatu honako adierazpenak:
  1. 144 mod 7
  2. -28 mod 3
  3. 155 mod 19
  4. -221 mod 23

## 21. Ariketa

- Idatzi 0,1,2,3,4 zenbakiekin kongruenteak modulu 5 diren zenbakien segidak.

## 22. Ariketa

- Egia al da $80 \equiv 5 \pmod{17}$ afirmazioa?

# Proposatutako ariketak XV

## 23. Ariketa

- A ={1,2,3} multzoan honako grafo hauek dituzten erlazio bitarrak kontsideratuko ditugu:
  1. $G_1$={(1,2), (2,2)}
  2. $G_2$={(1,2), (2,3), (1,3), (2,1)}
  3. $G_3$={(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)}
  4. $G_4$={(1,2), (2,3)}

  Adierazi bakoitzaren propietateak. Zeintzuk dira baliokidetasun erlazioak? Eta ordena partzialekoak? Eta ordena osokoak?

# Proposatutako ariketak XVI

## 24. Ariketa

- A ={a,b,c,d} multzoan honako grafo hauek dituzten erlazio bitarrak kontsideratuko ditugu:
  1. $G_1$={(a,c), (b,a), (b,c), (c,d), (d,d)}
  2. $G_2$={(a,a), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (d,d)}
  3. $G_3$={(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (c,d), (d,c)}

  Adierazi bakoitzaren propietateak.

# Proposatutako ariketak XVII

## 25. Ariketa

- Izan bedi A ={1,2,3,4, ... ,20} multzoa honako erlazio bitar honekin:

  x$R$y baldin eta "x-y zatigarria 5-ekin" edo "x-y 5-en multiploa"

  1. Froga ezazue $R$ baliokidetasun-erlazioa dela.
  2. Aurkitu A/$R$ zatidura multzoa.
  3. Eman $R$ erlazioaren G grafoa.

# Proposatutako ariketak XVIII

## 26. Ariketa

- Kontsidera dezagun $\mathbb{Q}$-n honako erlazio bitar hau:

$$xRy \text{ baldin eta } \text{“}x^2-y^2=x-y\text{”}$$

1. Froga ezazue $R$ baliokidetasun-erlazioa dela.
2. Aurkitu [2].

## 27. Ariketa

- Kontsidera dezagun $A=\{1,2,3,4,6,8\}$ multzoan honako erlazio bitar hau:

$$xRy \text{ baldin eta } \text{“}x\text{-k } y \text{ zatitzen du”} \ (x \mid y)$$

1. Idatzi erlazioaren G grafoa.
2. Adierazi erlazioaren propietateak.

# Proposatutako ariketak IXX

## 28. Ariketa

- $\mathbb{Q}$-n honako erlazio bitar hau definitu da:

$$xRy \text{ baldin eta } \text{“}\exists h \in \mathbb{Z} \ / \ x = \frac{3y+h}{3}\text{”}$$

Froga ezazue $R$ baliokidetasun-erlazioa dela.

## 29. Ariketa

- Kontsidera ditzagun honako erlazio bitar hauek $\mathbb{Z}^2$ multzoan:

$$(x,y)R(x',y') \text{ baldin eta } x \leq x',\ y \leq y'$$
$$(x,y)R(x',y') \text{ baldin eta } x \leq x',\ y \neq y'$$

Aztertu ordena erlazioak diren ala ez.

# MATEMATIKA DISKRETUA

# 2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

Erik Alonso González

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)