KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN INGENIARITZAKO GRADUA

ANALISIS MATEMATIKOA 2018ko abenduaren 4a

1. ARIKETA

Aztertu honako funtzio honen jarraitutasuna eta deribagarritasuna $x = 0$ puntuan.

$$f(x) = \begin{cases} sin(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + x^3 & x < 0 \end{cases}$$

Soluzioa:

Jarraitutasuna $x = 0$ puntuan:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} sin(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + x^3 = 0$$

Beraz, funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan.

Deribagarritasuna $x = 0$ puntuan:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{sin(\Delta x) - 0}{\Delta x} \sim \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x + \Delta x^3 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} 1 + \Delta x^2 = 1$$

Beraz, funtzioa deribagarria da $x = 0$ puntuan.

2. ARIKETA

Kalkulatu a eta b honako ekuazio honetan:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$y = e^{-x} + 2e^{-2x}$ funtzioa ekuazioaren soluzio bat dela jakinda.

Soluzioa:

Emandako soluzioa deribatuz:

$$y' = -e^{-x} - 4e^{-2x}$$

$$y'' = e^{-x} + 8e^{-2x}$$

Ekuazioan ordezkatuz:

$$e^{-x}+8e^{-2x}+a\left(-e^{-x}-4e^{-2x}\right)+b\left(e^{-x}+2e^{-2x}\right)=0$$
$$e^{-x}\left(1-a+b\right)+e^{-2x}\left(8-4a+2b\right)=0$$

Esponentziala positiboa eta ez-nulua da, beraz:

$$\begin{cases}1-a+b=0\\8-4a+2b=0\end{cases}$$

Sistema ebatziz:

$$\boxed{a=3}$$
$$\boxed{b=2}$$

3. ARIKETA

Izan bedi $x^2-3=0$ ekuazioa: a) Froga ezazu ekuazioak $\hat{x}$ soluzio bakarra duela [1,2] tartean.

b) Dikotomia metodoa erabiliz, aurkitu $\hat{x}$-ren balio hurbildu bat, egindako errorea<0.1 izanik.

Soluzioa:

a) $f(x)=x^2-3$ funtzioa jarraitua era deribagarria de [1,2] tartean

$f'(x)=2x$. Zeinua mantentzen du [1,2] tartean (beti positiboa).

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=1^2-3=-2<0\\f(2)=2^2-3=1>0\end{array}\right\}f(1)f(2)<0$$

Beraz, baldintza guztiak betetzen dira [1,2] tartean soluzio bakarra egoteko.

b) **Lehenengo iterazioa**: [1,2] tartea

Erdi-puntua:

$$x_1=\frac{1+2}{2}=1.5$$

Errore handiena:

$$e=\frac{2-1}{2}=0.5>0.1$$

Beste iterazio bat egin behar dugu.

Hurrengoa kontuan hartuta:

$$f(1) < 0$$
$$f(2) > 0$$
$$f(1.5) = (1.5)^2 - 3 = -0.75 < 0$$

Bigarren iterazioan [1.5,2] tartea hartu behar dugu.

Erdi-puntua:

$$x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

Errore handiena:

$$e = \frac{2-1}{2^2} = 0.25 > 0.1$$

Beste iterazio bat egin behar dugu.

Hurrengoa kontuan hartuta:

$$f(1.5) < 0$$
$$f(2) > 0$$
$$f(1.75) = (1.75)^2 - 3 = 0.0625 > 0$$

Hirugarren iterazioan [1.5,1.75] tartea hartu behar dugu.

Erdi-puntua:

$$x_3 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$$

Errore handiena:

$$e = \frac{2-1}{2^3} = 0.125 > 0.1$$

Beste iterazio bat egin behar dugu.

Hurrengoa kontuan hartuta:

$$f(1.5) < 0$$
$$f(1.75) > 0$$
$$f(1.625) = (1.625)^2 - 3 = 0.359 < 0$$

Laugarren iterazioan [1.625,1.75] tartea hartu behar dugu.

Erdi-puntua:

$$x_3 = \frac{1.625+1.75}{2} = 1.6875$$

Errore handiena:

$$e=\frac{2-1}{2^4}=0.06<0.1$$

Beraz, amaitu dugu eta balio hurbildua $\boxed{1.6875}$ izango da.

4. ARIKETA

Izan bedi $f(x)=\sqrt{x+1}$ funtzioa,

a) Aurkitu $f(x)$ funtzioaren 4. mailako MacLaurinen garapena
b) Kalkulatu $\sqrt{1,02}$ -ren balio hurbildu bat bigarren mailako garapena erabiliz
c) Aurreko atalean egindako errorea kalkulatu

Soluzioa:

a)

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}$$

Beraz, 4. mailako MacLaurinen garapena hurrengoa da:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{4!}x^4=$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}\frac{x^3}{6}-\frac{15}{16}\frac{x^4}{24}=\boxed{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}}$$

b) $\sqrt{1,02}=f(0.02)$. 2. mailako garapena erabiliz:

$$f(0.02)=1+\frac{0.02}{2}-\frac{1}{8}(0.02)^2=\boxed{1.00995}$$

c)

$$R_3\le\left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.02)^3\right|=\left|\frac{\frac{3}{8}(\xi+1)^{-5/2}}{6}(0.02)^3\right|\le\left|\frac{\frac{3}{8}}{6}(0.02)^3\right|=\boxed{5\cdot10^{-7}}$$