INTEGRAL MUGAGABEAK

1.- Sarrera

2.- Aldagai aldaketaren edo ordezkapenaren bidezko integrazioa

3.- Zatikako integrazioa

4.- Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa

5.- Funtzio arrazionalen integrazioa

6.- Integral trigonometrikoak

7.- Integral hiperbolikoak

8.- Integral irrazionalak

Sarrera

Kontzeptua: Izan bedi I tarte ireki bat, eta f, I-n definitutako funtzio bat. f funtzioaren ***jatorrizkoa*** I-n deituko diogu, I-n jarraitua den eta hurrengoa betetzen den F funtzio orori:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

f -ren jatorrizko guztiak $G(x) = F(x)+C$ motakoak dira, non C edozein konstante baita, zeren eta $G'(x) = F'(x)+0 = f(x)$.

f funtzioaren jatorrizko guztien multzoari f -ren ***integral mugagabea*** deitzen zaio eta honela denotatzen da:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

1. adibidea

Sarrera

Berehalako integrazioa: Deribaketa formulak alderantziz aplikatzean lortzen diren jatorrizkoei ***berehalako integralak*** deitzen zaie.

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \left(1+\cot^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a'x}\right| + C = \frac{1}{a}\arg\tanh\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C = \arg\sinh\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \arg\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccsc} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

Sarrera

Berehalako propietateak: Jatorrizko funtzioaren definizioaren eta deribatuen propietateak kontuan hartuz, integral mugatuek hurrengo propietateak betetzen dituzte:

1. $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{R}$
2. $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int \big(k\, f(x)+h\, g(x)\big)\,dx = k\int f(x)\,dx + h\int g(x)\,dx \quad \forall k,h \in \mathbb{R}$
4. Baldin $\int f(x)\,dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; \int f(ax)\,dx = (1/a)\,F(ax)+C$
5. Baldin $\int f(x)\,dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; \int f(x+a)\,dx = F(x+a)+C$
6. Baldin $\int f(x)\,dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; \int f(ax+b)\,dx = (1/a)\,F(ax+b)+C$

Sarrera

Beraien integralak oinarrizko funtzioen bidez ezin adierazi diren funtzioak: Nahiz eta oinarrizko funtzio baten deribatua oinarrizko funtzioen bidez beti adierazgarria izan, jatorrizkoen kalkuluarekin ez da gertatzen. Izan ere, oinarrizko funtzio batzuen integralak ez dira oinarrizko funtzioak. Beste batzuen artean, hurrengoak dauzkagu:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \int \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\;dx$$

Kasu askotan, seriezko garapenen bidez adieraz daitezke.

Aldagai aldaketaren edo ordezkapenaren bidezko integrazioa

Aldagai aldaketaren edo ordezkapenaren bidezko integrazioa: Integral bat beste integral sinpleago batean transformatu nahi dugu, aldagai aldaketa egoki bat eginez. Horretarako, oinarritzat hartzen dugu katearen erregela, hau da, baldin integratzen dakigun $f(t)$ funtzio bat badaukagu eta t -ren lekuan x -ren beste funtzio bat jartzen badugu, $t=g(x)$, orduan:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx=\int f\left(t\right)dt$$

Aldaketa egin ondoren, t-rekiko integratzen da eta amaieran aldagai aldaketa desegiten da.

2. adibidea

Zatikako integrazioa

Zatikako integrazioa: Produktu baten diferentziazio erregelatik, $d(u \cdot v) = vd(u) + ud(v)$, hurrengo formula lortzen da:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Metodo hau bereziki interesgarria da honako motako funtzioak integratzeko:

$$\text{arcsen}\, x,\ e^x P(x),\ P(x)\,\text{sen}\, x, \ldots$$

3. adibidea

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa: Karratu perfektutara murrizten da:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right] \quad \text{non } \pm k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

<u>1. mota</u>

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a} \\ dt=dx \end{array}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

(berehalako integrala)

4. adibidea

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa: Karratu perfektutara murrizten da:

<u>2. mota</u>

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+(B/A)2a+b-b)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} +$$

$$+\frac{A}{2a}\int \frac{((B/A)2a-b)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}$$

1. motakoa da

5. adibidea

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa

Bigarren graduko trinomio bat daukaten funtzioen integrazioa: Karratu perfektutara murrizten da:

3. mota

Berehalako integrala

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\pm\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}}$$

4. mota

3. motakoa da

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\int \frac{(2ax+(B/A)2a+b-b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} +$$

$$+\frac{A}{a}\int \frac{((B/A)2a-b)dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

6. eta 7. adibideak

Funtzio arrazionalen integrazioa

Funtzio arrazionalen integrazioa: Izan bedi hurrengo integrala: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Baldin gradu $P(x) \geq$ gradu $Q(x)$, orduan $P(x)=C(x)\cdot Q(x)+R(x)$.

Beraz:

berehalako integrala

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx \quad \text{non gradu } R(x) < \text{gradu } Q(x)$$

Zatiki sinpleetan deskonposatuz:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{A_0}{(x-x_0)^{n_0}} + \frac{A_1}{(x-x_0)^{n_0-1}} + \frac{A_2}{(x-x_0)^{n_0-2}} + \cdots + \frac{A_{n_0-1}}{(x-x_0)} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{M_0 x + N_0}{\left[(x-a_s)^2 + b_s^2\right]^{n_s}} + \frac{M_1 x + N_1}{\left[(x-a_s)^2 + b_s^2\right]^{n_s-1}} + \cdots + \frac{M_{n_s-1} x + N_{n_s-1}}{\left[(x-a_s)^2 + b_s^2\right]} \right] dx$$

Funtzio arrazionalen integrazioa

Deskonpostaketan agertzen diren integralak hauexek dira:

$\int C(x)\,dx$ berehalakoa da, polinomikoa delako.

$$\int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A\ln\left|x-x_0\right| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,dx = \frac{A}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} + C \quad \text{baldin } n \neq 1$$

$\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx$ 2. Motako integrala, bigarren graduko trinomio bat daukaten integralen artean.

$\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx$ Hermiteren metodoa

Ejemplo 8

Funtzio arrazionalen integrazioa

Hermiteren metodoa: Metodo hau bereziki baliagarria da funtzio arrazionalen kasuan, izendatzaileak bat baino anizkoiztasun gradu altuagoko erroak dauzkanean.

Izan bedi

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)dx}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_s)^{n_s}}$$

Kontsidera dezagun $q_1(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_s)$, $q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{q_1(x)}$, orduan honela idatz dezakegu:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \int \frac{p_1(x)dx}{q_1(x)} \qquad (1)$$

Funtzio arrazionalen integrazioa

non $p_1(x)$ eta $p_2(x)$, dagozkien izendatzaileek baino gradu bat gutxiagoko polinomio indeterminatuak baitira. Haiek lortzeko (1) deribatu behar da:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_2'(x)q_2(x) - p_2(x)q_2'(x)}{[q_2(x)]^2} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Koefiziente indeterminatuen metodoaz, $p_1(x)$ eta $p_2(x)$ lortzen dira; emaitza (1) adierazpenean sartzen da eta $\int \frac{p_1(x)dx}{q_1(x)}$ mota arrazionaleko integrala integratzen da.

9. adibidea

eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral trigonometrikoak

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx \quad \text{motakoak dira}$$

Kasu guztietan aplikagarria da aldaketa unibertsala; hala ere, gero aurkeztuko diren ordezkapenak aplikatu ahal badira, agertzen diren integral arrazionalak askoz errazagoak izango dira aldaketa unibertsalaz lortutakoak baino.

Aldaketa unibertsala: $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t} \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \ \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}$$

eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral trigonometrikoak

1. mota $\int \operatorname{sen}^n(x)\cdot\cos^m(x)\,dx$

1. Baldin $m=2p+1$, aldaketa: t = sinx.
2. Baldin $n=2q+1$, aldaketa t = cosx.
3. Baldin $m=2p$ eta $n=2q$, potentziak txikiagotzen ditugu:

- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ $\qquad \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
- edo bestela: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

Integral trigonometrikoak

2. Mota $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ aldaketa $\operatorname{tg} x = t$

3. mota $\int \cos(mx)\cdot\cos(nx)dx;\ \int \cos(mx)\cdot\operatorname{sen}(nx)dx;\ \int \operatorname{sen}(mx)\cdot\operatorname{sen}(nx)dx$

Hurrengo transformazioak erabili ahal dira:

$$\cos(mx)\cdot\cos(nx) = \frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}$$

$$\sin(mx)\cdot\cos(nx) = \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}$$

$$\sin(mx)\cdot\sin(nx) = \frac{-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}$$

10. adibidea

Integral hiperbolikoak

Trigonometrikoak bezala ebazten dira, trigonometria hiperbolikoaren formula baliokideak kontutan hartuz:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$$

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2 x + 1$$

Aldaketa unibertsala: $\boxed{\mathrm{th}\dfrac{x}{2} = t} \Rightarrow x = 2\,\mathrm{argth}\,t \;\Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1-t^2}$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{2\,\mathrm{th}\dfrac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \mathrm{ch}\,x = \frac{1+\mathrm{th}^2\dfrac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Integral hiperbolikoak

1. mota: $\int \mathrm{sh}^n(x)\cdot \mathrm{ch}^m(x)\,dx$

1. Baldin $m=2p+1$, aldaketa: t = sinhx.
2. Baldin $n=2q+1$, aldaketa t = coshx.
3. Baldin $m=2p$ eta $n=2q$, potentziak txikiagotzen ditugu:

- $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2} \qquad \mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}$
- edo bestela: $\mathrm{th}\,x = t \Rightarrow x = \mathrm{argth}\,t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$

$$\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{th}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 x} = \frac{1}{1-t^2}$$

emán ta zabal zazu

Integral hiperbolikoak

2. mota: $\int R(\operatorname{th} x)\, dx$ aldaketa: $\operatorname{th} x = t$

3. mota: $\int \operatorname{ch}(mx)\cdot\operatorname{ch}(nx)dx;\ \int \operatorname{ch}(mx)\cdot\operatorname{sh}(nx)dx;\ \int \operatorname{sh}(mx)\cdot\operatorname{sh}(nx)dx$

Hurrengo transformazioak erabili ahal dira:

$$\operatorname{ch}(mx)\cdot\operatorname{ch}(nx) = \frac{\operatorname{ch}(m+n)x + \operatorname{ch}(m-n)x}{2}$$

$$\operatorname{sh}(mx)\cdot\operatorname{ch}(nx) = \frac{\operatorname{sh}(m+n)x + \operatorname{sh}(m-n)x}{2}$$

$$\operatorname{sh}(mx)\cdot\operatorname{sh}(nx) = \frac{\operatorname{ch}(m+n)x - \operatorname{sh}(m-n)x}{2}$$

11. adibidea

Integral irrazionalak

Mota desberdin batzuk bereizi behar ditugu:

1. mota: $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})dx$

$x = t^{\mu}$ aldaketarekin arrazionalizatzen dira (erroa desagertzen da), non $\mu = m.k.t.(n,\ldots,s)$.

2. mota: $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^{\mu}$ aldaketarekin arrazionalizatzen dira, non $\mu = m.k.t.(n,\ldots,s)$.

Integral irrazionalak

3. mota: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

1) Ordezkapen trigonometriko eta hiperbolikoak

Karratu perfektutara murriztuz

$$t = x + \frac{b}{2a}; \;\; dt = dx; \;\; m = \sqrt{|a|}; n = \sqrt{\left| c - \frac{b^2}{4a} \right|}$$

Izan bitez:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Integral irrazionalak

Orduan hurrengo aukerak dauzkagu:

Aldaketak

1. Baldin $a > 0$ eta $c - \frac{b^2}{4a} > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$$

$$t = (n/m)\operatorname{tg} z$$
$$t = (n/m)\operatorname{sh} z$$

2. Baldin $a > 0$ eta $c - \frac{b^2}{4a} < 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}$$

$$t = \frac{(n/m)}{\cos z}$$
$$t = (n/m)\operatorname{ch} z$$

3. Baldin $a < 0$ eta $c - \frac{b^2}{4a} > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}$$

$$t = (n/m)\sin z$$
$$t = (n/m)\operatorname{th} z$$

4. Baldin $a < 0$ eta $c - \frac{b^2}{4a} < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Absurdua

12. adibidea

Integral irrazionalak

2) Metodo alemaniarra: $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Metodo honek funtzio arrazionaletarako erabilitako Hermiteren metodoaren antzekoa da. Ebatzi nahi dugun integrala bi adierazpenen baturarekin identifikatzen da:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = T(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + M\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

non T(x) P(x)-ren gradua baino gradu bat gutxiagoko polinomioa baita. T(x) lortzeko, azken adierazpena deribatzen dugu eta koefiziente ezezagunen metodoa aplikatzen dugu. Behin T(x)-ren koefizienteak eta M ezagututa, azken adierazpenaren integrala berehalakoa da.

13. adibidea

Integral irrazionalak

4. mota: $\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$

Hurrengo hiru kasutan baino ezin dira integratu:

1) Baldin p zenbaki oso positiboa bada: Newtonen binomioaren bidez garatzen da.

2) Baldin $\dfrac{m+1}{n}$ osoa bada:

$$x^n = t,\ x = t^{(1/n)},\ dx = \frac{1}{n} t^{(1/n)-1} dt$$ aldaketa eginez:

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \int t^{m/n} (a+bt)^p \frac{1}{n} t^{(1/n)-1} dt = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p \, dt$$

non $z=a+bt$, $dz=bdt$ ordezkapenak adierazpen honetara garamatza:

$$\frac{1}{nb} \int \left(\frac{z-a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} z^p dz$$

Newtonen binomioa

eman ta zabal zazu
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral irrazionalak

3) Baldin $\frac{m+1}{n}+p$ osoa bada: berriro ere, $x^n = t$ aldaketa eginez:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\, dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

Baldin $p=\frac{q}{l}$ zatiki bat bada, $z^l = \frac{a+bt}{t}$ aldaketa erabiltzen da, arrazional bihurtzeko.

14. adibidea