KUDEAKETA ETA INFORMAZIO SISTEMEN INGENIARITZA

INFORMATIKAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2017ko urtarrilaren 19an

1. ARIKETA

1.- Aztertu

a) hurrengo proposizioa tautologia bada:

$$\left[\neg(p \vee s) \rightarrow (s \wedge q)\right] \vee (p \rightarrow s)$$

Ebazpena:

$$\left[\neg(p \vee s) \rightarrow (s \wedge q)\right] \vee (p \rightarrow s) \equiv \left[(p \vee s) \vee (s \wedge q)\right] \vee (\neg p \vee s) \equiv$$

$$\equiv (p \vee s) \vee (s \wedge q) \vee (\neg p \vee s) \equiv (p \vee s \vee \neg p \vee s) \vee (s \wedge q) \equiv$$

$$\equiv (T \vee s) \vee (s \wedge q) \equiv T \vee (s \wedge q) \equiv T$$

b) hurrengo proposizioa kontraesana bada:

$$(\neg r \rightarrow s) \wedge (p \wedge q) \wedge \neg\left[(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge s)\right]$$

$$(\neg r \rightarrow s) \wedge (p \wedge q) \wedge \neg\left[(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge s)\right] \equiv$$

$$\equiv (r \vee s) \wedge (p \wedge q) \wedge \neg\left[\neg(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge s)\right] \equiv$$

$$\equiv (r \vee s) \wedge (p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg s) \equiv$$

$$\equiv (r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (p \wedge q \wedge p \wedge \neg q) \equiv$$

$$\equiv (r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (p \wedge C) \equiv (r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge C \equiv C$$

(4 puntu)

2.- Aztertu hurrengo arrazonamenduaren baliotasuna:

"Nora ezkontzen bada, orduan eztei-jantzia erosiko du. Norak ezkontzaren eguna zehazten badu, orduan jatetxea erreserbatuko du eztei-oturuntzarako. Norak eztei-jantzia erosiko du edo ezkontzaren eguna zehaztuko du. Nora ezkontzen da. Beraz, Norak eztei-jantzia erosiko du."

Ebazpena:

$p =$ "Nora ezkontzen da"
$q =$ "Norak eztei-jantzia erosiko du"
$r =$ "Norak ezkontzaren eguna zehazten du"
$s =$ "Norak jatetxea erreserbatuko du eztei-oturuntzarako"

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (q \vee r) \wedge p \Rightarrow q$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (q \vee r) \wedge p \equiv (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \to r) \wedge p \equiv$$
$$(p \to q) \wedge p \wedge (\neg q \to r) \wedge (r \to s) \Rightarrow q \wedge (\neg q \to r) \wedge (r \to s) \Rightarrow q$$

(4 puntu)

3.- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi korrespondentzia hurrengo eran definituta daudenak:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = 4^x$$

Grafikoki adierazi bi korrespondentziak eta hurrengo galderak erantzun :

a) Aplikazioak dira? Baiezkoan, aplikazio horiek sailka itzazu.

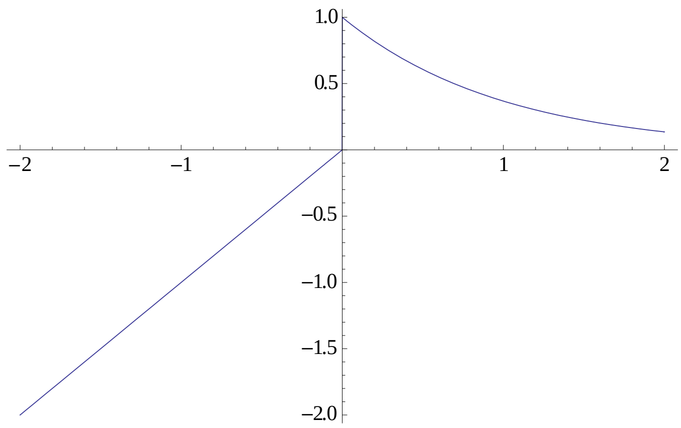
b) Kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$

c) Posiblea denean alderantzizko funtzioa kalkulatu.

Ebazpena:

a)

f(*x*) irudikatzen dugu:



f aplikazioa da zeren:

$D(f) = \mathbb{R}$ eta $x \in D(f)$ bakoitzarentzat $\exists!\ y \in Im(f) / f(x) = y$

$Im(f) = (-\infty, 1)$

Injektiboa da zeren:

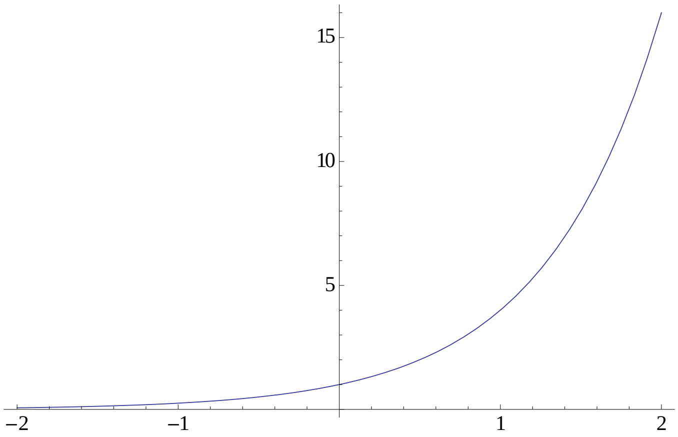
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

EZ da suprajektiboa zeren:

$Im(f) \neq \mathbb{R}$

Beraz, EZ da bijektiboa, injektiboa delako baina ez suprajektiboa.

eta gero g(*x*):



g aplikazioa da zeren:

$D(g) = \mathbb{R}$ eta $x \in D(g)$ bakoitzarentzat $\exists!\ y \in Im(g) / g(x) = y$

$Im(g) = (0, \infty)$

Injektiboa da zeren:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

EZ da suprajektiboa zeren:

$Im(f) \neq \mathbb{R}$

Beraz, EZ da bijektiboa, injektiboa delako baina ez suprajektiboa.

b)

$f \circ g = f[g(x)] = f[4^x] = e^{-x}$

$$g \circ f = g[f(x)] = \begin{cases} g[f(x)] & x > 0 \\ g[f(x)] & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 4^{e^{-x}} & x > 0 \\ 4^x & x \leq 0 \end{cases}$$

c) Bi aplikazioak bijektiboak ez direnez ezin da alderantzizkorik kalkulatu.

(6 puntu)

4.- $(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R}$ multzoan hurrengo eran definitutako $\mathcal{R}$ erlazio bitarra definitzen da:

$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \quad \wedge \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$$

a) $\mathcal{R}$ –ren propietateak aztertu.

b) Baliokidetasun-erlazio bat da?

c) Ordena-erlazioa da? Baiezkoan, ordena partzialekoa ala totalekoa?

d) Zeintzuk dira (1,1) elementuarekin erlazionatutako elementuak?

Ebazpena:

a)

BIHURKORRA: BAI

$\forall(x_1,y_1)\in(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R} \qquad (x_1,y_1)\Re(x_1,y_1)$

$$(x_1,y_1)\Re(x_1,y_1) \Leftrightarrow x_1 \le x_1 \quad \wedge \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1}{x_1}$$

SIMETRIKOA: EZ

$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R} \qquad (x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \Rightarrow (x_2,y_2)\Re(x_1,y_1)$

$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \quad \wedge \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$$

$$(x_2,y_2)\Re(x_1,y_1) \Leftrightarrow x_2 \le x_1 \quad \wedge \quad \frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}$$

Soilik $x_1=x_2$ kasuan beteko da. Horrek esan nahi du erlazioa antisimetrikoa izango dela. Simetrikoa ez delaren adibidea jarri dezakegu:

$(1,2)\Re(2,4) \Rightarrow (2,4)\Re(1,2)$

$$(1,2)\Re(2,4) \Leftrightarrow 1 \le 2 \quad \wedge \quad \frac{2}{1}=\frac{4}{2}$$

$$(2,4)\Re(1,2) \Leftrightarrow 2 \le 1 \quad \wedge \quad \frac{4}{2}=\frac{2}{1}$$

2 ez da 1 baino txikiagoa, beraz (2,4) ez dago (1,2)-rekin erlazionaturik.

ANTISIMETRIKOA: BAI

$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R} \qquad (x_1,y_1)\Re(x_2,y_2)\wedge(x_2,y_2)\Re(x_1,y_1) \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \quad \wedge \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$$

$$(x_2,y_2)\Re(x_1,y_1) \Leftrightarrow x_2 \le x_1 \quad \wedge \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$$

Aurrekoa betetzen da soilik hurrengo kasuan:
$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$
Beraz, erlazioa antisimetrikoa dela ondoriozta dezakegu.

IRANGANKORRA: BAI

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in (\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R}$$
$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)\Re(x_3,y_3) \Rightarrow (x_1,y_1)\Re(x_3,y_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \quad \wedge \quad \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} \\ (x_2,y_2)\Re(x_3,y_3) \Leftrightarrow x_2 \le x_3 \quad \wedge \quad \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \le x_3 \quad \wedge \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_3}{x_3}$$

Beraz,

$(x_1,y_1)\Re(x_3,y_3)$

orduan erlazioa irangankorra da.

b) Erlazioa simetrikoa ez denez, EZ da baliokidetasun-erlazioa.

c) Ordena-erlazioa da, bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra delako. Ordena partzialekoa. Totalekoa izan dadin edozein (x_1,y_1), (x_2,y_2)-rentzat honako hau bete behar baita:

$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \vee (x_2,y_2)\Re(x_1,y_1)$
Azkeneko hau ez da betetzen. Adibidez,

$(1,3)\Re(2,3) \Leftrightarrow 1 \le 2 \quad \wedge \quad \dfrac{3}{1} = \dfrac{3}{2}$ Ez da betetzen

$(2,3)\Re(1,3) \Leftrightarrow 2 \le 1 \quad \wedge \quad \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ Ez da betetzen

eta argi eta garbi ez da betetzen.

d) (1,1) elementuarekin erlazionatutako elementuak kalkulatzeko honako hau kalkulatu beharra dago:

$$(x,y)\Re(1,1) \Leftrightarrow x \le 1 \quad \wedge \quad \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x \le 1 \quad \wedge \quad y = x$$

Beraz, (1,1) elementuarekin erlazionatutako elementuak (x,x) dira non x txikiago edo berdin 1 izango den eta 0-ren desberdina (enuntziatuak zehazten digu eta).

(6 puntu)

2. ARIKETA

1.- Eskola batean 12 ikaslek euren ikasketak bukatu dituzte: zazpi neska eta bost mutil. Orlako argazkia ateratzeko, ikasleez gain bost irakasle aukeratuak izan dira orlan agertzeko. Argazkian, irakasleak goiko ilaran agertuko dira eta 12 ikasleak beheko hiru ilaratan, 4 ikasle ilara bakoitzean. Zenbat eratan koka daiteke irakasle/ikasleen talde hau argazkia ateratzeko?

Ebazpena

Irakasleak kokatzeko P_5 aukera daude.

Ikasleak kokatzeko P_{12} era daude.

Beraz, irakasleen eta ikasleen taldea $P_5 \cdot P_{12} = 57.480.192.000$ era desberdinetan kokatu daitezke argazkia ateratzeko.

Beste era batean ebatzita:

Irakasleak kokatzeko P_5 aukera daude.

Lehenengo ilaran ikasleak kokatzen ditugu: $V_{12}^4 = \dfrac{12!}{8!}$

Kokatzeko geratzen diren ikasleen artean, bigarren ilara osatzen dugu $v_8^4 = \dfrac{8!}{4!}$

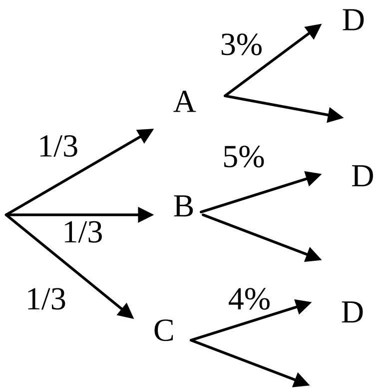
Kokatzeko geratzen diren ikasleen artean, hirugarren ilara osatzen dugu $v_4^4 = \dfrac{4!}{0!} = 4!$

Beraz, guztira argazkia ateratzeko $5!\dfrac{12!}{8!} \cdot \dfrac{8!}{4!} 4! = 5! \cdot 12!$ era daude.

(4 puntu)

2.- Fakultateko sarreran hiru fotokopiagailu daude: A, B eta C. Haien errore probabilitatea: %3, %5 eta %4 da, hurrenez hurren. Fakultatera sartzen den ikasle batek ausaz fotokopiagailu bat aukeratzen du eta klasera heltzen denean konturatzen da fotokopiak akats bat daukala. Zein da fotokopia hori B fotokopiagailuan egin izanaren probabilitatea?

Ebazpena



D= “akatsa duen fotokopia”

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 5\%}{\frac{1}{3}\cdot 3\%+\frac{1}{3}\cdot 5\%+\frac{1}{3}\cdot 4\%}=\frac{5\%}{12\%}=\frac{5}{12}$$

(4 puntu)

3.- Indukzio metodoa erabiliz, hurrengoa egiaztatu:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$$

Ebazpena

1) $n=1$ kasurako formula egia dela egiaztatzen da.

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

2) $n=k$ kasurako formula egia dela egiaztatzen da

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

3) $n=k+1$ kasurako formula egia dela konprobatzen da.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}\overset{?}{=}\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{k\left(2k+3\right)+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$

Erroak ateratzen ditugu: $2k^2+3k+1=0 \Rightarrow k=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$

Eta hurrengoa sinplifikatuz $\dfrac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\dfrac{2(k+1)\left(k+\dfrac{1}{2}\right)}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\dfrac{k+1}{2k+3}$

Egiaztatzen da formula betetzen dela $\forall\ n\in\mathbb{N}$

(4 puntu)

4.- A, B, C, D eta E hiriak lotzen dituen trenbide bat eraikiko da. Bide posible bakoitza eraikitzeko kostua hurrengo taulan adierazten da non kostua milioi eurotan adierazita dagoen.

	A	B	C	D	E
A	0	14	38	10	26
B	14	0	12	0	9
C	38	12	0	0	13
D	10	0	0	0	28
E	26	9	13	28	0

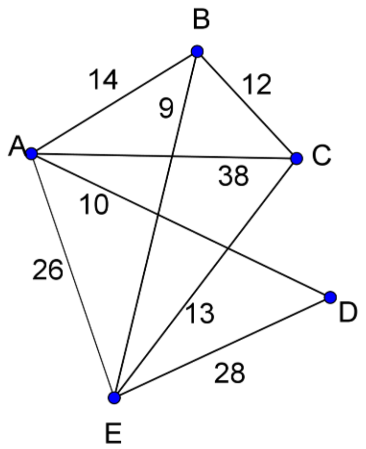
Hurrengoa lortu:

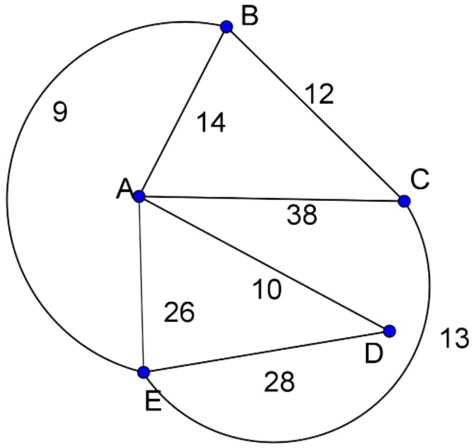
a) Bide posible guztiak barne hartzen dituen grafo leuna irudikatu.

b) Algoritmo egokia erabili zehazteko zein bide eraiki behar diren kostua minimizatzeko. Lortutako kostu minimoa adierazi.

---

a) Bide posible guztiak barne hartzen dituen grafo leuna irudikatu





b) Algoritmo egokia erabili zehazteko zein bide eraiki behar diren kostua minimizatzeko. Lortutako kostu minimoa adierazi.

<u>Kruskal-en algoritmoa</u>
Izan bitez G grafoa, V erpinen multzoa eta A^* arkuen multzoa.

$n(V) = 5$

1. pausua
$i = 1$ hartzen da eta hurrengoa kalkulatzen da:

$p(a_1) = \min\{p(a_h)/a_h \in A^*\} = 9 \Rightarrow a_1 = (B,E)$

2. pausua
Hurrengoa kalkulatzen da
$p(a_2) = \min\{p(a_h)/a_h \in A^* - \{a_1\}\} = 10 \Rightarrow a_2 = (A,D)$
horrela $T_1 = \{a_1, a_2\}$ grafoa, G-ren azpigrafoa da ziklorik gabekoa.

3. pausua
i handitzen da, $i = 2$. E $i < n(V) - 1$ denez, 2. pausura bueltatzen gara.

2. pausua
Hurrengoa kalkulatzen da
$p(a_3) = \min\{p(a_h)/a_h \in A^* - \{a_1, a_2\}\} = 12 \Rightarrow a_3 = (B,C)$
horrela $T_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$ grafoa, G-ren azpigrafoa da ziklorik gabekoa.

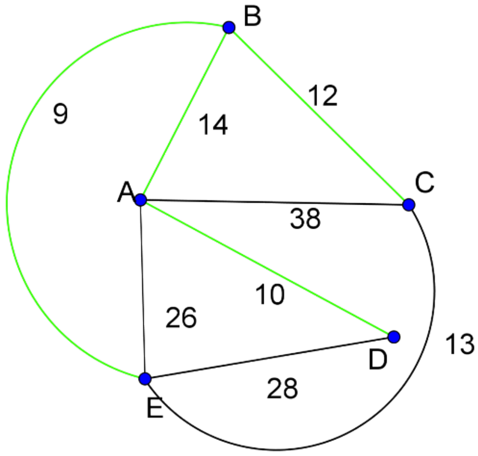
3. pausua
i handitzen da, $i = 3$. $i < n(V) - 1$ denez, 2. pausura bueltatzen gara.

2. pausua
Hurrengoa kalkulatzen da
$p(a_4) = \min\{p(a_h)/a_h \in A^* - \{a_1, a_2, a_3\}\} = 14 \Rightarrow a_4 = (A,B)$
horrela $T_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ grafoa, G-ren azpigrafoa da ziklorik gabekoa.

3. pausua
i handitzen da, $i = 4$. $i = n(V) - 1$ denez, algoritmoa bukatu egiten da.
Horrela $T_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ grafoa, G-ren zuhaitz estaltzaile minimala da.

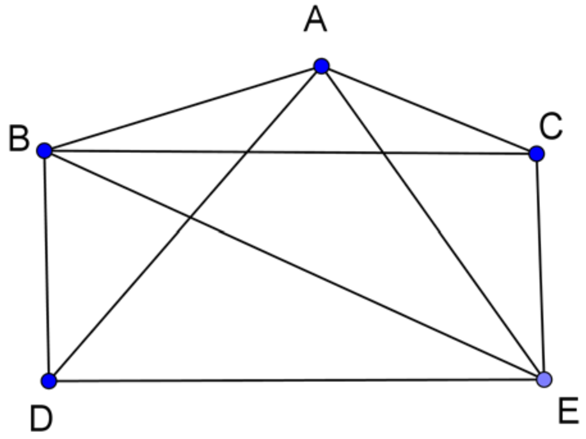
Kostu minimoa $9 + 10 + 12 + 14 = 45$ milioi eurokoa da de.

Zuhaitz estaltzaile minimala hurrengoa da beraz:



(6 puntu)

5.- izan bedi G hurrengo eran adierazitako grafoa:

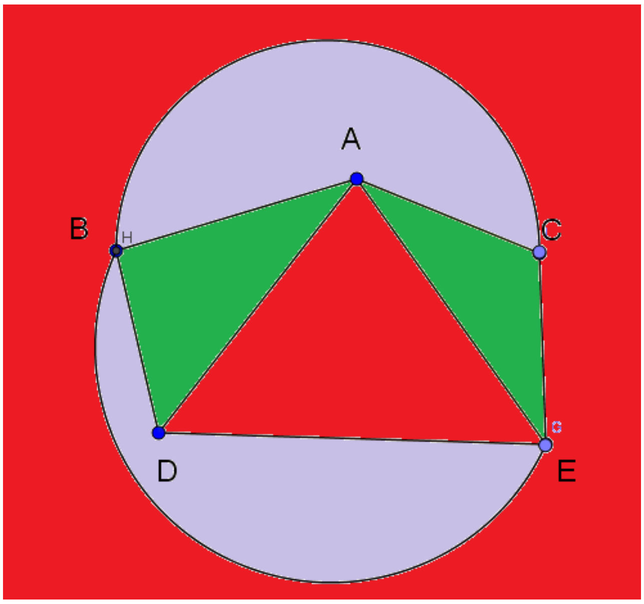


a) Koloreztatu eremuak. Konprobatu Euler-en formula betetzen bada.
b) Erpinak koloreztatu eta zenbaki kromatikoa kalkulatu.
c) Grafo euleriarra da? Grafo hamiltoniarra da? Arrazoitu erantzunak.

----

a) Koloreztatu eremuak. Konprobatu Euler-en formula betetzen bada.

Primeramente calculamos una representación plana de dicho grafo.

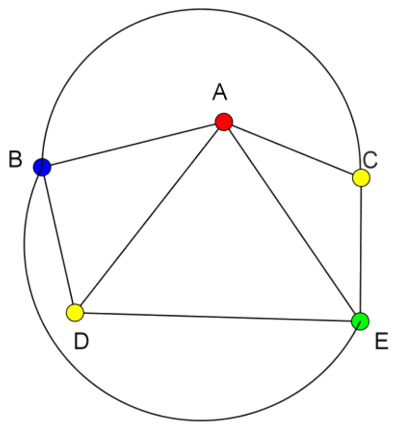


Eremuen bidez 3-koloreztagarria da.
Euler-en formula egiaztatzen da

$$n(V) + n(R) = n(A) + 2$$
$$5 + 6 = 9 + 2$$

b) Erpinak koloreztatu eta zenbaki kromatikoa kalkulatu.

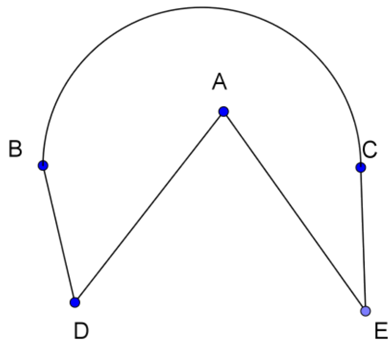
Erpinen bidez 4-koloreztagarria da. Zenbaki kromatikoa beraz 4 da.



c) Grafo euleriarra da? Grafo hamiltoniarra da? Arrazoitu erantzunak

Ez da grafo euleriarra zeren grafo konexua izan arren erpinen gradu guztiak ez dira bikoitiak. Bide euleriarra existitzen da, zehazki bi erpin daudelako gradu bakoitiarekin. Bi erpin horiek bidearen hasiera eta helmuga izango dira hain zuzen ere.

Grafoa hamiltoniarra da $n(V) = 5 \geq 3$ delako eta $gr(V) \geq \frac{5}{2}$ delako. Ziklo hamiltoniarra hurreengoa izan daiteke adibidez: C B D A E C



(4 puntu)