1. adibidea

Klasifikatu hurrengo bi kasuetan agertzen diren soluzioak:

(a) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = Ax + B\ln x$, $y_2 = 3x - 2\ln x$

(b) $y'^2 - xy' + y = 0$; $y_1 = Cx - C^2$, $y_2 = 3(x-3)$, $y_3 = x^2/4$

(a) y_1 soluzioa dela egiaztatzen da:

$$y_1 = Ax + B\ln x \rightarrow y_1' = A + B/x \rightarrow y_1'' = -B/x^2 .$$

$$\rightarrow \quad x^2(1-\ln x)B/x^2 - x(A + B/x) + Ax + B\ln x = 0$$

Gainera, y_1 soluzio orokorra da, bi konstante arbitrario (A) eta (B) dauzkalako. y_2 soluzio partikularra da, soluzio orokorretik $A=3, B=-2$ eginez lortzen baita.

(b) y_1 ere soluzio orokorra da (C konstante bat dauka)

$$y_1 = Cx - C^2 \quad \rightarrow \quad y_1' = C \quad \rightarrow \quad C^2 - xC + Cx - C^2 = 0$$

y_2 soluzio partikular bat da ($C = 3$).

y_3 soluzio singularra da (ezin lor daiteke soluzio orokorretik C zehaztuz).

2. adibidea

Integratu $2xy\,dx - dy = 0$ ekuazioa.

$$2xdx - dy/y = 0 \quad \rightarrow \quad \int 2xdx - \int dy/y = C \;\rightarrow\; x^2 - \ln|y| = C$$

Operatzaile esponentziala aplikatu ostean:

$$|y| = \exp(x^2 - C) \equiv B\exp(x^2),\ \text{non}\ \ B = \exp(-C) > 0\,.$$

Praktikan, balio absolutua ez da kontutan hartzen eta $\pm \mathrm{B} = \mathrm{A} \neq 0$ idazten da, hauxe lortuz:

$$y = \pm B\exp(x^2) = A\exp(x^2),\ \text{non}\ A \neq 0$$

Ekuazioa lehenago y-z zatitu dugunez, orain faktore hau zerora berdintzen badugu, $y = 0$ eginez, soluzio orokorrean sartuta ez dagoen beste soluzio bat lortzen da ($A = 0$ kasuari dagokiona) eta beraz soluzio singular bat daukagu. Nahi bada, adierazpen orokorrean sar dezakegu, A konstante arbitrarioa, balio nulua har dezakeen D beste konstante batez ordezkatuz,. Horrela, hauxe idatziko dugu:

$$y = D\exp(x^2) \qquad (D \in \mathbb{R})$$

3. adibidea

Integratu hastapen baldintzako hurrengo ekuazioa:

$$(x^4 + y^4)dx - 2x^3 y dy = 0,\ \ y(1) = 0\,.$$

(y') (y/x)-ren funtzio bezala adieraz daiteke: $y' = \dfrac{1+(y/x)^4}{2(y/x)}$.

$y/x = z$ aldagai aldaketa eginez $\rightarrow$ $y = xz$ $\rightarrow$ $y' = z + xz'$:

$$z + xz' = \frac{1+z^4}{2z} \ \rightarrow\ xz' = \frac{(z^2-1)^2}{2z} \ \rightarrow \int \frac{2z dz}{(z^2-1)^2} - \ln x = C \ \rightarrow\ \frac{-1}{z^2-1} - \ln x = C\,.$$

$z = y/x$ ordezkatzean soluzio orokorra lortzen da: $\dfrac{x^2}{x^2-y^2} - \ln x = C$.

<u>*Integral partikularra*</u>*:*

$$y(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 1/1 - \ln 1 = C \quad \rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2-y^2} - \ln x = 1\,.$$

Bestela, y^2 askatzean $y^2 = \dfrac{x^2 \ln x}{1+\ln x}$ lortzen dugu.

4. adibidea

Integratu $y' = \dfrac{x+y-2}{x-y}$.

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ zuzenek $(1,1)$ puntuan elkar ebakitzen dute.

Hurrengo translazioa eginez:

$$\begin{cases} x = 1+X \\ y = 1+Y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} dx = dX \\ dy = dY, \end{matrix}$$

hauxe lortzen dugu:

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} = \frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}},$$

azken ekuazio hau homogeneoa delarik. Orain $u = \dfrac{Y}{X}$ aldaketa aplikatuz:

$$Y = uX \quad \Rightarrow \quad Y' = u'X + u,$$

$$u'X + u = \frac{1+u}{1-u} \quad \Rightarrow \quad u'X = \frac{1+u^2}{1-u} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{X}dX .$$

Integratuz:

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln\left|X\right| + C$$

Aldaketa deseginez, $u = \dfrac{Y}{X}$,

$$\arctan\frac{Y}{X} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|X\right|^2 = C$$

$$\arctan\frac{Y}{X} - \frac{1}{2}\ln\left|X^2+Y^2\right| = C$$

Azkenik, $\begin{cases} x = 1+X \\ y = 1+Y \end{cases}$ aldaketak gogoratuz, honako hau daukagu:

$$\arctan\frac{y-1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left|(x-1)^2+(y-1)^2\right| = C$$

5. adibidea

Kalkulatu hurrengo ekuazioaren integral partikularra:

$$[(2x-y)\exp(y/x)]\,dx+[3y^2+x\exp(y/x)]\,dy=0\,,\ \text{ non y(2) = 0}$$

Ekuazio diferentzial zehatz bat daukagu. Izan ere:

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\exp(y/x)-(y/x)\exp(y/x)=(1-y/x)\exp(y/x)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{2x-y}{x}\exp(y/x)-\exp(y/x)=(1-y/x)\exp(y/x)$$

Soluzio orokorra hauxe da (kalkulua sinplifikatzeko, $a=1,\ b=0$ hartzen ditugu):

$$\int_b^y[3y^2+x\exp(y/x)]\,dy+\int_a^x(2x-b)\exp(b/x)\,dx=C\rightarrow$$

$$\rightarrow\ [y^3+x^2\exp(y/x)]_0^y+[x^2]_1^x=C\quad\rightarrow\quad y^3+x^2\exp(y/x)=A$$

Soluzio partikularra

$$y(2)=0\quad\rightarrow\quad 4\exp(0/2)=A\quad\rightarrow\quad A=4\quad\Rightarrow\quad y^3+x^2\exp(y/x)=4$$

6. adibidea

Faktore integratzaile errazak erabiliz, integratu hurrengo ekuazioak:

(a) $y\sin(xy)\,dx+[x\sin(xy)-\cos(xy)/y]\,dy=0$; (b) $(x^4+y^4)\,dx-xy^3dy=0$

(a) ekuazioak y -ren funtzioa den faktore integratzaile bat onartzen du. Izan ere:

$$\frac{\partial Y/\partial x-\partial X/\partial y}{X}=\frac{\sin(xy)+xy\cos(xy)+\sin(xy)-\sin(xy)-xy\cos(xy)}{y\sin(xy)}=\frac{1}{y}\,.$$

$$z(y)=A\exp\int\frac{\partial Y/\partial x-\partial X/\partial y}{X}dy=A\exp\int\frac{dy}{y}=A\exp(\ln y)=Ay\equiv y\quad(A=1)\,.$$

Ekuazioa faktoreaz biderkatuz eta $a=0$ eta $b=0$ egin ondoren integratuz:

$$y^2\sin(xy)\,dx+[xy\sin(xy)-\cos(xy)]\,dy=0\xrightarrow{\int}$$

$$\int_0^x y^2\sin(xy)\,dx-\int_0^y dy=A\ \rightarrow\ [-y\cos(xy)]_0^x-[y]_0^y=A\ \rightarrow y\cos(xy)=-A\equiv B$$

(b) ekuazioak $z(x)$ moduko faktore integratzaile bat onartzen du. Kasu horretan:

$$\frac{\partial X/\partial y-\partial Y/\partial x}{Y}=\frac{4y^3+y^3}{-xy^3}=\frac{-5}{x}\equiv\phi(x)$$

$$z(x)=A\exp\int\frac{\partial X/\partial y-\partial Y/\partial x}{Y}dx=A\exp\int\frac{-5dx}{x}=A\exp(-5\ln x)=Ax^{-5}\equiv x^{-5}\,.$$

Kasu honetan $a=1,\ b=0$ eginez:

$$(x^4+y^4)\,dx-xy^3dy=0\quad\rightarrow\quad(x^{-1}+x^{-5}y^4)\,dx-x^{-4}y^3dy=0\xrightarrow{\text{zehatza}}$$

$$\int_1^x(x^{-1}+x^{-5}y^4)dx-\int_0^y y^3dy=A\quad\rightarrow\quad\left[\ln x-\frac{y^4}{4x^4}\right]_1^x-\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^y=A\quad\rightarrow$$

$$\ln x-\frac{y^4}{4x^4}=A\quad\rightarrow\quad y^4=4x^4\ln x+Bx^4\,.$$

Faktore integratzaile berbera lortzeko, ekuazio homogeneoetarako adierazitako formulazioa erabil daiteke:

$$z(x,y)=\frac{1}{xX(x,y)+yY(x,y)}=\frac{1}{x^5+xy^4-xy^4}=\frac{1}{x^5}\,.$$

7. adibidea

Ebatzi hurrengo ekuazio diferentzialak:

(a) $x\,dy + (y - x\cos x)\,dx = 0; \quad y(\pi) = 1.$

(b) $y\,dx + [(xy-1)\cot y + x]\,dy = 0; \quad y(0) = \pi/2.$

(a) ekuazioa lineala da y aldagaian:

$$y' + y/x = \cos x, \quad \text{non} \quad P(x) = 1/x; \quad Q(x) = \cos x$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \to \quad \begin{cases} -\int P(x)\,dx = -\ln x \quad \to \quad \exp\left[-\int P(x)\,dx\right] = \dfrac{1}{x} \\ \\ \int P(x)\,dx = \ln x \qquad \to \quad \exp\int P(x)\,dx = x. \end{cases}$$

Soluzio orokorrerako formulan ordezkatuz:

$$y = \exp\left[-\int P(x)dx\right]\left(\int \left[Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]\right]dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int x\cos x\,dx + C\right).$$

Zatika integratuz: $y = \dfrac{x\sin x + \cos x + C}{x}.$

Soluzio partikularra lortzeko, C zehaztu behar da.

$$y(\pi) = 1 \;\to\; \frac{\pi\sin\pi + \cos\pi + C}{\pi} = 1 \;\to\; C = \pi + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x\sin x + \cos x + \pi + 1}{x}.$$

(b) ekuazioa ez da lineala y aldagaian, baina bada x funtzio moduan hartuz gero. $x' + P(y)x = Q(y)$ bezala idatziz, hauxe daukagu:

$$x'(y) + \frac{y\cot y + 1}{y}x = \frac{\cot y}{y} \quad \to \quad P(y) = \frac{y\cot y + 1}{y}; \quad Q(y) = \frac{\cot y}{y}$$

$$P(y) = \frac{y\cot y + 1}{y} \to \begin{cases} -\int P(y)\,dy = -\ln\sin y - \ln y \to \exp\left[-\int P(y)\,dy\right] = \dfrac{1}{y\sin y} \\ \\ \int P(y)\,dy = \ln\sin y + \ln y \quad \to \quad \exp\int P(y)\,dy = y\sin y. \end{cases}$$

Soluzio orokorrerako eta partikularrerako:

$$x(y) = \frac{1}{y\sin y}\left(\int \cos y\,dy + C\right) = \frac{\sin y + C}{y\sin y}.$$

$$y(0)=\pi/2 \quad \to \quad -\sin(\pi/2)=C \quad \to \quad C=-1 \quad \Rightarrow \quad (xy-1)\sin y+1=0$$

8. adibidea

Ebatzi hurrengo ekuazio diferentziala: $y' = \dfrac{y}{x^2 \ln y - x}$.

Ekuazio hori Bernoulli motako ekuaziotzat identifikatzeko, x hartuko dugu menpeko aldagaitzat.

$$x' = \frac{x^2 \ln y - x}{y} \quad \rightarrow \quad x' + \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2 \quad \text{con} \quad P(y) = \frac{1}{y}; \quad Q(y) = \frac{\ln y}{y}; \quad n = 2\,.$$

Soluziorako formulan ordezkatuz:

$$x^{-1} = \exp\left[\int dy/y\right]\left(\int\left[\frac{-\ln y}{y}\exp\left[\int(-dy/y)\right]\right]dy + C\right) = y\left(\int\left[\frac{-\ln y}{y}\frac{dy}{y} + C\right]\right) =$$

$$= y\left(\frac{\ln y + 1}{y} + C\right) = \ln y + Cy + 1 \quad \rightarrow \quad x(\ln y + Cy + 1) = 1.$$