BLOKEA 7 - Polinomioen erroak (Ruffini) - Teoria

Polinomio baten erroaren definizioa

r p(x) polinomioaren erroa da baldin eta soilik baldin p(r)=0 bada

n graduko polinomio baten faktorizazioa

Izan bedi n ordenako $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomioa, orduan, p(x) polinomioa $p(x)=a_n \cdot (x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot(x-r_3)\cdot\ldots\cdot(x-r_n)$ bezala faktoriza daiteke, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ polinomioaren erroak izanik.

Polinomio baten erroen kalkulua

Izan bedi $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ non $a_0, a_n \neq 0$

1) Erro osoak

   p(x) polinomioak izan ditzakeen erro osoak a_0 koefizientearen zatitzaileak dira.

2) Erro arrazionalak

   Izan bedi p a_0 koefizientearen zatitzailea

   Izan bedi q a_n koefizientearen zatitzailea

   p(x) polinomioak izan ditzakeen erro arrazionalak p/q motakoak dira.

OHARRA:

Polinomio baten erroak errealak (osoak, arrazionalak, irrazionalak) eta konplexuak izan daitezke, baina Ruffini-ren teknika erabiltzeko erro oso eta arrazionalak dira hautagai erosoenak. Horrela, erro oso eta arrazional posibleak eta Ruffini-ren teknika erabiliko dugu polinomioaren gradua jaisteko.

ADIBIDEA:

Kalkulatu honako polinomioen erroak:

a) $p_1(x)=x^3-7x+6$

b) $p_2(x)= x^4-3x^3-4x^2+12x$

c) $p_3(x)= 2x^3+3x^2-8x+3$

d) $p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10$

Ebazpena:

a) $p_1(x)=x^3-7x+6$

$p_1(x)$-en erro oso eta arrazional posibleak ±6, ±3, ±2, ±1 dira.

Ruffini aplikatuz:

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

r=1 polinomioaren erroa da. Beraz, $p_1(x)=x^3-7x+6$ polinomioa $p_1(x)=(x-1)\cdot(x^2+x-6)$ bezala berridatz daiteke. Gelditzen diren bi erroak lortzeko bigarren mailako ekuazioa ($x^2+x-6=0$) ebatzi edo berriro Ruffini aplika daiteke.

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0
2		2	6	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

$p_1(x)$ polinomioaren erroak 1,2 eta -3 dira.

Konprobaketa: $p_1(1)=1-7+6=0$

$p_1(2)=8-14+6=0$

$p_1(-3)=-27+21+6=0$

Beraz, $p_1(x)=x^3-7x+6$ polinomioa honela faktoriza daiteke:

$$\boxed{p_1(x)=x^3-7x+6=(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot(x-r_3)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}$$

b) $p_2(x)= x^4-3x^3-4x^2+12x$

Polinomioak ez dauka gai askerik, beraz, polinomioa $p_2(x)= x\cdot(x^3-3x^2-4x+12)$ bezala berridatz daiteke eta zeroa polinomioaren erroa izango da.

$x^3-3x^2-4x+12$ polinomioa faktorizatzeko, badakigu bere erro oso eta arrazional posibleak: ±12, ±6, ±3, ±2, ±1 direla.

$x^3-3x^2-4x+12$ gaiari Ruffini aplikatuz:

	1	-3	-4	12
3		3	0	-12
	1	0	-4	0

Beraz, r=3 polinomioaren erroa da, eta polinomioa honela berridatz daiteke:

$$p_2(x)= x^4-3x^3-4x^2+12x = x\cdot(x-3)\cdot(x^2-4).$$

Faktorizazioa bukatzeko, polinomioa honela faktoriza daiteke:

$$\boxed{p_2(x)= x^4-3x^3-4x^2+12x = x\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

c) $p_3(x)= 2x^3+3x^2-8x+3$

Erro oso eta arrazional posibleak: ±3, ±1, ±3/2, ±1/2

Ruffini aplikatuz:

	2	3	-8	3
-3		-6	9	-3
	2	-3	1	0

$r_1=-3$ polinomioaren erroa da. Beste erroak kalkulatzeko lortutako bigarren mailako ekuazioa ($2x^2-3x+1=0$) ebatziko dugu:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}$$

Beraz, beste bi erroak: $r_2=1$ eta $r_3=1/2$ dira:

$$\boxed{p_3(x)= 2x^3+3x^2-8x+3=2\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-1/2)}$$

d) $p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10$

Erro oso eta arrazional posibleak: ±10, ±5, ±2, ±1

Ruffini aplikatuz:

	1	5	-2	-10
-5		-5	0	10
	1	0	-2	0

r_1=-5 polinomioaren erroa da. Beste erroak kalkulatzeko, lortutako bigarren mailako ekuazioa (x^2-2=0) ebatziko dugu:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Beraz, beste bi erroak: $r_2=+\sqrt{2}$ eta $r_3=-\sqrt{2}$ dira.

Ariketa honetan argi ikusten da polinomio baten erroak irrazionalak ere izan daitezkeela, baina Ruffini-ren teknika erro hauekin aplikatzeak kalkuluak zaildu egiten dituenez, beti erro oso eta arrazionalak probatuz haztea komeni da.

Polinomio honen faktorizazioa honakoa da:

$$\boxed{p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10=\cdot(x+5)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$$