

$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$

LOGIKAKO FORMULAK

Baliokidetasun logiko:

$$1) \neg(\neg P) \equiv P$$

$$2) \neg T \equiv C$$

$$3) \neg C \equiv T$$

$$4) P \vee C \equiv P$$

$$5) P \vee T \equiv T$$

$$6) P \vee P \equiv P$$

$$7) P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$8) (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

$$9) P \vee \neg P \equiv T \text{ (T tautologia)}$$

$$10) P \wedge C \equiv C$$

$$11) P \wedge T \equiv P$$

$$12) P \wedge P \equiv P$$

$$13) P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

$$14) (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

$$15) P \wedge \neg P \equiv C$$

$$16) P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

$$17) P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$18) P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$19) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$20) \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Bal. Komuua

bestela Funtzioak

$$21) \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$22) P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$23) P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$24) P \rightarrow Q \equiv P \vee Q \leftrightarrow Q$$

$$25) P \rightarrow Q \equiv P \wedge Q \leftrightarrow P$$

$$26) P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$27) P \Rightarrow P \vee Q$$

$$28) P \leftrightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$29) P \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \rightarrow P$$

$$30) (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Rightarrow P \leftrightarrow Q$$

$$31) P \leftrightarrow Q \Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$32) (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$33) (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$$

$$34) \neg P \rightarrow C \Rightarrow P$$

$$35) (P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q \text{ (ponendo-ponens)}$$

$$36) (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P \text{ (tollendo-tollens)}$$

$$37) (P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q \text{ (tollendo-ponens)}$$

$$38) \text{ Baldintzazko ondorioaren erregela: } P \Rightarrow (R \rightarrow S) \text{ frogatzeko, nahikoa da } P \wedge R \Rightarrow S \text{ frogatzea}$$

$$39) \text{ Absurdo bidezko erregela: } P \Rightarrow Q \text{ frogatzeko, nahikoa da } P \wedge \neg Q \Rightarrow C \text{ frogatzen}$$

$$40) (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$$

Hierarkia

\neg
 \vee (de), \wedge (edo)

\rightarrow (Baldintzazkoak)

\leftrightarrow (Baldintzabikoa)

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
E	E	E	E	E
E	G	E	G	G
G	E	E	G	E
G	G	G	G	E

Pausuak

- ① Ezkermetik hasi
- ② Baliokidetasun logiko
- ③ Inferentzia erregelak

Frogatu baliohidea solik baliokidetasun formulak

① Ariketa $P = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$; P proposizioaren egia funtzioa
adierazten duen taula. MD ①

$3^3 = 8$ ilarrak
 $2^3 = 8$ ezaera

$\neg p$	q	$\neg r$	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$
G	G	G	E	E	G	E
G	G	E	E	G	G	E
G	E	G	E	E	E	E
G	E	E	E	G	G	E
E	G	G	G	E	G	G
E	G	E	G	G	G	G
E	E	G	G	E	E	E
E	E	E	G	G	G	G

② Egia-funtzioa adierazten duen taula: $P = \neg [(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg q)]$

P	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$q \rightarrow \neg q$	$(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg q)$	$\neg [(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg q)]$
E	E	G	E	G	G	E
E	G	E	E	E	E	G
G	E	G	G	E	G	E
G	G	E	E	E	E	G

③ Simplifikazioa.

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q) &\stackrel{(23)}{\equiv} \neg(\neg q \rightarrow p) \vee (p \wedge q) \stackrel{(22)}{\equiv} \neg(\neg q \vee p) \vee (p \wedge q) \stackrel{(22)}{\equiv} \\
 &\stackrel{(22)}{\equiv} \underbrace{(\neg q \wedge \neg p)}_{\text{komutat}} \vee (p \wedge q) \stackrel{(19)}{\equiv} q \wedge \underbrace{(\neg p \vee p)}_{\text{Tautologia}} \stackrel{(1)}{\equiv} q \wedge \top \stackrel{(22)}{\equiv} q \quad //
 \end{aligned}$$

④ Frogatu tautologia:

$$\begin{aligned}
 P = [P \wedge (P \rightarrow q)] \rightarrow q &\stackrel{(22)}{\equiv} [P \wedge (\neg P \vee q)] \rightarrow q \stackrel{(22)}{\equiv} \neg [P \wedge (\neg P \vee q)] \vee q \stackrel{(17)}{\equiv} \\
 &\stackrel{(17)}{\equiv} \neg \underbrace{[(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge q)]}_{\text{kontraesana}} \vee q \stackrel{(15)}{\equiv} \neg \underbrace{[C \vee (P \wedge q)]}_{\text{tautologia}} \vee q \stackrel{(4)}{\equiv} \neg(P \wedge q) \vee q \stackrel{(2)}{\equiv} \\
 &\stackrel{(2)}{\equiv} (\neg P \vee \neg q) \vee q \stackrel{(8)}{\equiv} \neg P \vee \underbrace{(\neg q \vee q)}_{\text{tautologia}} \stackrel{(9)}{\equiv} \neg P \vee \top \stackrel{(5)}{\equiv} \top \quad //
 \end{aligned}$$

⑤ Frogatu kontraesana:

$$P = \neg(q \rightarrow P) \wedge P \stackrel{(22)}{\equiv} \neg(\neg q \vee P) \wedge P \stackrel{(22)}{\equiv} (q \wedge \neg P) \wedge P \stackrel{(14)}{\equiv} q \wedge \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\text{kontraesana}} \stackrel{(16)}{\equiv} q \wedge C \stackrel{(10)}{\equiv} C \quad //$$

$$\textcircled{6} \quad P = P \wedge \neg q \wedge (P \wedge \neg q \rightarrow P \vee q) \rightarrow P \vee q$$

$$Q = \neg(P \vee q \rightarrow P \wedge \neg q) \wedge P \wedge \neg q$$

Frogatu P tautologia bat dela eta Q kontraversio bat dela.

$$\textcircled{P} \quad \{P \wedge \neg q \wedge (P \wedge \neg q \rightarrow P \vee q)\} \rightarrow P \vee q \stackrel{\textcircled{23}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{22}}{=} (P \wedge \neg q \wedge [\neg(P \wedge \neg q) \vee (P \vee q)]) \rightarrow P \vee q \stackrel{\textcircled{24}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{21}}{=} (P \wedge \neg q \wedge [\neg(\neg P \vee q) \vee (P \vee q)]) \rightarrow P \vee q \stackrel{\textcircled{25}}{=} \begin{array}{c} \text{komuna} \\ \neg P \vee q \vee P \vee q \\ \neg P \vee P \stackrel{\textcircled{26}}{=} T \end{array} \stackrel{\textcircled{27}}{=} T \vee q \stackrel{\textcircled{28}}{=} T \quad //$$

$$\stackrel{\textcircled{29}}{=} (P \wedge \neg q \wedge T) \rightarrow P \vee q \stackrel{\textcircled{30}}{=} (P \wedge \neg q) \rightarrow (P \vee q) \stackrel{\textcircled{31}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{32}}{=} \neg(P \wedge \neg q) \vee P \vee q \stackrel{\textcircled{33}}{=} \neg P \vee \neg q \vee P \vee q \stackrel{\textcircled{34}}{=} T \vee q \stackrel{\textcircled{35}}{=} T \quad //$$

$\neg P \vee P \stackrel{\textcircled{36}}{=} T$

$$\textcircled{Q} \quad \neg(P \vee q \rightarrow P \wedge \neg q) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{37}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{38}}{=} \neg(\neg(P \vee q) \vee (P \wedge \neg q)) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{39}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{40}}{=} \neg((\neg P \wedge \neg q) \vee (P \wedge \neg q)) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{41}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{42}}{=} \neg((\neg P \vee P) \wedge \neg q) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{43}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{44}}{=} \neg(\top \wedge \neg q) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{45}}{=} \neg(\neg q) \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{46}}{=} q \wedge P \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{47}}{=} q \wedge \neg q \stackrel{\textcircled{48}}{=} C \quad //$$

$$\stackrel{\textcircled{49}}{=} C \wedge P \stackrel{\textcircled{50}}{=} C \quad //$$

⑦ Frogatu horako baliokidetasunak ezaztatuera dela:

MD 2

$$\circledast P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

$$\circledast (\neg P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$$

$$\circledast P \rightarrow (Q \vee R) \equiv \neg R \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$\circledast P \rightarrow (Q \wedge R) \stackrel{(2)}{\equiv} \neg P \vee (Q \wedge R) \stackrel{(2)}{\equiv} (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \stackrel{(2)}{\equiv} (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \quad \checkmark$$

$$\circledast (\neg P \vee Q) \rightarrow R \stackrel{(2)}{\equiv} \neg (\neg P \vee Q) \vee R \stackrel{(2)}{\equiv} (\neg \neg P \wedge \neg Q) \vee R \stackrel{(2)}{\equiv} (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \stackrel{(2)}{\equiv} \neg (P \wedge Q) \vee R \stackrel{(2)}{\equiv} (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \quad \checkmark$$

$$\circledast P \rightarrow (Q \vee R) \stackrel{(2)}{\equiv} \neg P \vee (Q \vee R) \stackrel{(2)}{\equiv} R \vee (\neg P \vee Q) \stackrel{(2)}{\equiv} R \vee (P \rightarrow Q) \stackrel{(2)}{\equiv} \neg R \rightarrow (P \rightarrow Q) \quad \checkmark$$

⑧ Frogatu baliokidetasunak ezaztatuera dela.

$$\neg P \vee Q \vee R \equiv (P \wedge \neg Q) \rightarrow R$$

$$(\neg P \vee Q) \vee R \stackrel{(2)}{\equiv} \neg (\neg P \vee Q) \rightarrow R \stackrel{(2)}{\equiv} (P \wedge \neg Q) \rightarrow R \quad \checkmark$$

⑨ $P \wedge Q \Rightarrow P \vee R$, frogatu ezaztatuera dela.

Absurdo bidezko emegea: $P \Rightarrow Q$ frogatzeko, nahikoa da $P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ Frogatzea

$$P \wedge Q \wedge \neg (P \vee R) \stackrel{(2)}{\equiv} P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg R \stackrel{(2)}{\equiv} C \wedge Q \wedge \neg R \stackrel{(2)}{\equiv} C \quad \checkmark$$

$P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ dela frogatu dugunetz, ezaztatzen dugu $P \Rightarrow Q$, horakoan punie anketarca aplikatutako, berdinak esan dezakegu.

⑩ Frogatu horako hauetako ezaztatuera dela.

1) $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ (ponendo-ponens) frogatzeko, absurdo bidezko emegea erabiliz
dut, hau da, $P \Rightarrow Q$ frogatzeko $P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ frogatzea:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q \stackrel{(2)}{\equiv} ((\neg P \vee Q) \wedge P) \wedge \neg Q \stackrel{(2)}{\equiv} ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \wedge \neg Q \stackrel{(2)}{\equiv}$$

$$\stackrel{(2)}{\equiv} (C \vee (Q \wedge P)) \wedge \neg Q \stackrel{(2)}{\equiv} (Q \wedge P) \wedge \neg Q \stackrel{(2)}{\equiv} (Q \wedge \neg Q) \wedge P \stackrel{(2)}{\equiv} C \wedge P \stackrel{(2)}{\equiv} C \quad \checkmark$$

Onduan $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ frogatu dugunet $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ frogatu dugu.

10) 2) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ (tolleido - tollens). egiortatzeko delako absurdo biderko emegeta erabiliko dut.

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge P \Rightarrow C$ frogatu behar da egiortatzeko.

$$\begin{aligned} & \text{② cre que maline es estay invertido?} \\ & (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge P \stackrel{\text{②}}{\equiv} ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge P \stackrel{\text{③ ④}}{\equiv} ((\neg P \wedge \neg Q) \vee C) \wedge P \stackrel{\text{⑤}}{\equiv} ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge P) \stackrel{\text{⑥}}{\equiv} \neg P \wedge \neg Q \stackrel{\text{⑦}}{\equiv} C \wedge \neg Q \stackrel{\text{⑧}}{\equiv} C \end{aligned}$$

\hookrightarrow kontrapositiva

3) $P \vee Q \wedge \neg P \Rightarrow Q$ (tolleido - ponens)

Absurdo biderko emegetaren bider propositako dut.

$P \vee Q \wedge \neg P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ frogatu behar dut.

$$\begin{aligned} & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q \stackrel{\text{②}}{\equiv} (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \wedge \neg Q \stackrel{\text{③}}{\equiv} C \vee (Q \wedge \neg P) \wedge \neg Q \stackrel{\text{④}}{\equiv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{⑤ ⑥}}{\equiv} (Q \wedge \neg P) \wedge \neg Q \stackrel{\text{⑦ ⑧}}{\equiv} (Q \wedge \neg Q) \wedge \neg P \stackrel{\text{⑨}}{\equiv} C \wedge \neg P \stackrel{\text{⑩}}{\equiv} C \end{aligned}$$

\hookrightarrow egiortatzeko dugi.

11) B13 Frogatu egiortatzeko direla.

1) $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ ponendo - ponens

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q \wedge P \stackrel{\text{②}}{\equiv} \neg P \vee Q \wedge P \stackrel{\text{③}}{\equiv} (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P) \stackrel{\text{④}}{\equiv} C \vee (Q \wedge P) \stackrel{\text{⑤}}{\equiv} Q \wedge P \stackrel{\text{⑥}}{\Rightarrow} Q \end{aligned}$$

2) $P \rightarrow Q \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ tolleido - tollens

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q \wedge \neg Q \stackrel{\text{②}}{\equiv} (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \stackrel{\text{③}}{\equiv} (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \stackrel{\text{④}}{\equiv} (\neg P \wedge \neg Q) \vee C \stackrel{\text{⑤}}{\equiv} \\ \stackrel{\text{⑥}}{\equiv} \neg P \wedge \neg Q \stackrel{\text{⑦}}{\Rightarrow} \neg P \end{aligned}$$

3) $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ tolleido - ponens

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \stackrel{\text{②}}{\equiv} (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \stackrel{\text{③}}{\equiv} C \vee (Q \wedge \neg P) \stackrel{\text{④}}{\equiv} Q \wedge \neg P \stackrel{\text{⑤}}{\Rightarrow} Q$$

11) Frogatu hau egiortatzeko delako:

$$P \wedge \neg Q \rightarrow C \Leftrightarrow P \rightarrow Q \quad \left. \begin{array}{l} P \wedge \neg Q \rightarrow C \\ P \rightarrow Q \end{array} \right\} \text{Balioidideak izan behar dira}$$

$$(P \wedge \neg Q) \rightarrow C \stackrel{\text{②}}{\equiv} \neg (P \wedge \neg Q) \vee C \stackrel{\text{③}}{\equiv} \neg P \vee Q \vee C \stackrel{\text{④}}{\equiv} \neg P \vee Q \stackrel{\text{⑤}}{\equiv} P \rightarrow Q$$

Lehenengo zatik habiatuta bizarren zatia lortu duguer, balioidideak nirek esan dezakegu, eta beraiz, frogatu dugi egiortatzeko delako.

(12) $P_1 = P \vee \neg r, \quad P_2 = P \rightarrow \neg q, \quad Q = q \rightarrow r$ } Froga ezazu ($P_1, P_2; Q$) arazoan mendua
baliorkoa dela.

MD ③

$P_1 \wedge P_2 \Rightarrow Q$ frogatuko, absurdio baderko erregela erabiltuko ditz, hau egiteko
 $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg Q \Rightarrow$ frogatuko ditz.

Use ditz frogapena
azmatu dudala

$$(P \vee \neg r) \wedge (P \rightarrow \neg q) \wedge \neg (q \rightarrow r) \stackrel{(1)}{\equiv} (P \vee \neg r) \wedge (\neg P \vee \neg q) \wedge \neg (\neg q \vee \neg r) \stackrel{(2)}{\equiv}$$

$$\equiv (P \vee \neg r) \wedge (\neg P \vee \neg q) \wedge (q \wedge r) \stackrel{(3)}{\equiv} (\neg r \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg q) \wedge (q \wedge r) \stackrel{(4)}{\equiv}$$

$$\stackrel{(5)}{\equiv} (r \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow \neg q) \wedge (q \wedge r) \Rightarrow (r \rightarrow \neg q) \wedge (q \wedge r) \stackrel{(6)}{\equiv} (\neg r \vee \neg q) \wedge (q \wedge r) \stackrel{(7)}{\equiv}$$

$$\stackrel{(8)}{=} [(\neg r \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)] \wedge r \stackrel{(9)}{=} [(\neg r \wedge q) \vee c] \wedge r \stackrel{(10)}{=} (\neg r \wedge q) \wedge r \stackrel{(11)}{=} (\neg r \wedge r) \wedge q \stackrel{(12)}{=} c \wedge q \stackrel{(13)}{=} c$$

(13) $P_1 = P \vee q \quad P_2 = \neg P \quad Q = \neg q$ } Froga ezazu ($P_1, P_2; Q$) arazoan mendua
gezurmezkoa dela.

$$P_1 \wedge P_2 \Rightarrow Q$$

$$(P \vee q) \wedge \neg P \stackrel{(1)}{=} (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge q) \stackrel{(2)}{=} c \vee (\neg P \wedge q) \stackrel{(3)}{=}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \neg P \wedge q \Rightarrow \neg P \Rightarrow q \quad \begin{matrix} \text{kontrapositua} \\ \rightarrow \text{arazoan mendua geruzetako da} \\ \neg q \text{ implikatu.} \end{matrix}$$

(14) Ikeratu honako proposizio hauetik:

1) "Martxik matematika gauzitu du. Aefoutsiko kunka gauzitu du. Oraintzako
fisika gauzitu du."

$$\neg(P \wedge q \wedge r) \equiv \neg P \vee \neg q \vee \neg r$$

2) "Pedroki matematika gauzitu du edo Luisak manazketa gauzitu du."

$$\neg(S \vee t) \equiv \neg S \wedge \neg t$$

3) "Eguzkia egiten badu belarria lehortu egongo da."

$$\neg(V \rightarrow u) \equiv \neg(\neg V \vee u) \equiv V \wedge \neg u$$

⑯ Sententzia jazmentsoa ego epxarkoa da? Ez dakin zer eg behar d

"Gezura da gizonean narrantia dela eta hura izan bat dela,
edo Paris Frankian dagoela."

$$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$$

⑯ Kontuan izanik baldin eta hodeiak badante orduan eunia egiten
duela; uda ez badala, hodeiak dantela eta eunia aniztua; uda
izango ote da?

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p \wedge q) \Rightarrow r ?$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p \wedge q) \stackrel{(1)}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge [\neg r \vee (p \wedge q)] \stackrel{(18)}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee q) \equiv$$

$$\Rightarrow r \vee (p \wedge q) \quad \text{Ez da baliostsoa}$$

zer patik oink?

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg r$	$p \wedge q$	$\neg r \rightarrow p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p \wedge q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p \wedge q) \rightarrow r$
G	G	G	E	E	G	G	G	E
G	G	E	E	G	G	E	E	E
G	E	G	E	G	G	G	E	E
G	E	E	E	G	G	E	E	E
E	G	G	E	G	G	G	E	E
E	G	E	G	G	E	G	E	E
E	E	G	E	E	E	E	G	E
E	E	E	E	E	E	E	E	E

\Leftarrow Ez da tautologia,
berast, ez.

(17) Demagun Jorok gimnasia egiten badu argaldu egiteen dile M10 ④
ete torrik egiteen et badu topura dela. Fraga ezarne badetu egiteen
badu edo logurrik et badu, orduan et du gimnasia egiteen edo et lo
egiteen du.

"gimnasia egia" = P

"argaldu" = q \Rightarrow "badetu" = $\neg q$???

"lo egia" = r

"logura" = s

$$(P \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg P \vee \neg r) ?$$

$$(P \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s) \stackrel{\textcircled{1}}{=} (\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \equiv$$

Txantoreste dant Ez dakit nele garrantzu, agian txate
plankatutile olego ???

$$(P \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge \neg [(\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg P \vee \neg r)] \Rightarrow c; \text{ Absurdo bielazko emegeta erabili z}$$

$$(\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg [(\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg P \vee \neg r)] \stackrel{\textcircled{2}}{=}$$

$$(\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg [(\neg q \vee \neg s) \vee (\neg P \vee \neg r)] \stackrel{\textcircled{3}}{=}$$

$$= (\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg [(\neg q \wedge s) \vee (\neg P \vee \neg r)] \stackrel{\textcircled{4}}{=}$$

$$= (\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg [(\neg q \wedge s) \wedge \neg (\neg P \vee \neg r)] \stackrel{\textcircled{5}}{=}$$

$$= (\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge [(\neg q \wedge s) \wedge (\neg P \wedge r)] \stackrel{\textcircled{6}}{=}$$

$$= P \wedge (\neg P \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \wedge s) \wedge r \stackrel{\textcircled{7}}{=}$$

$$\stackrel{\textcircled{8}}{=} [(\overset{c}{P} \wedge \neg P) \vee (P \wedge q)] \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \wedge s) \wedge r \stackrel{\textcircled{9}}{=}$$

$$= [c \vee (P \wedge q)] \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \wedge s) \wedge r \stackrel{\textcircled{10}}{=}$$

$$\begin{aligned}
 & \equiv (p \wedge q) \wedge (r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge r \stackrel{(7)}{\equiv} \\
 & \equiv q \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge p \wedge r \wedge (r \vee s) \stackrel{(19)}{\equiv} \\
 & \equiv [(q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg s)] \wedge p \wedge r \wedge (r \vee s) \stackrel{(18)}{\equiv} \\
 & \equiv [c \vee (q \wedge \neg s)] \wedge p \wedge r \wedge (r \vee s) \stackrel{(24)}{\equiv} \\
 & \equiv (q \wedge \neg s) \wedge p \wedge r \wedge (r \vee s) \stackrel{(7)}{\equiv} \\
 & \equiv \neg s \wedge (r \vee s) \wedge q \wedge p \wedge r \stackrel{(19)}{\equiv} \\
 & \equiv [(\neg s \wedge r) \vee (\neg s \wedge \neg s)] \wedge q \wedge p \wedge r \stackrel{(15)}{\equiv} \\
 & \equiv [(\neg s \wedge r) \vee c] \wedge q \wedge p \wedge r \stackrel{(4)}{\equiv} \\
 & \equiv (\neg s \wedge r) \wedge q \wedge p \wedge r = \neg s \wedge q \wedge p \wedge r
 \end{aligned}$$

Txato

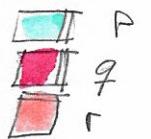
Ez do fragezen?
Ez dobit

18 PROPIETATEAK ERABILIZ

MD 5

Azkena honako orazionamendu honen baliotasuna:

"Mariak tenisea jokatzen du, ~~ene~~ egitea du edo ~~obestu~~
egitea du. Mariak ~~ez~~ du tenisea jokatzen eta ~~ez~~ da ~~arretzen~~.
Ondorioz Mariak ~~obestu~~ egitea du". $\rightarrow Q$



$$P_1 = P \vee Q \vee R$$

$$P_2 = \neg P \wedge \neg Q$$

$$Q = R$$

$$\left. \begin{array}{l} (P_1, P_2; Q) \\ P_1 \wedge P_2 \Rightarrow Q \end{array} \right\}$$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow R ?$$

$$\begin{aligned}
 & (\overbrace{P \vee Q \vee R}^{\neg(P \vee Q)} \wedge \overbrace{\neg P \wedge \neg Q}^{\neg(P \vee Q)}) \stackrel{(2)}{\equiv} (\overbrace{P \vee Q \vee R}^{\neg(P \vee Q)} \wedge \overbrace{\neg(P \vee Q)}^{\neg(P \vee Q)}) \equiv [(P \vee Q) \wedge \neg(\neg(P \vee Q))] \vee [R \wedge \neg(\neg(P \vee Q))] \equiv \\
 & \equiv C \vee [R \wedge \neg(\neg(P \vee Q))] \stackrel{(4)}{\equiv} R \wedge \neg(\neg(P \vee Q)) \stackrel{(6)}{\Rightarrow} R
 \end{aligned}$$

19) Kontsidera dezagun $P_1 = \neg P \vee R$; $P_2 = P \wedge \neg Q$ eta $P_3 = R \rightarrow Q$ eran definituriko P_1 , P_2 eta P_3 premisak. Fraga ezaune P_1 , P_2 , P_3 premisa multzoa oinarri-gabekoa dela.

$$\begin{aligned}
 & (\neg P \vee R) \wedge (P \wedge \neg Q) \wedge (R \rightarrow Q) \stackrel{(2)}{\equiv} (\neg P \vee R) \wedge (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee Q) \stackrel{(4)}{\equiv} \\
 & \equiv [P \wedge (\neg P \vee R)] \wedge [\neg Q \wedge (\neg R \vee Q)] \stackrel{(2)}{\equiv} [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge R)] \wedge [(\neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge Q)] \stackrel{(2)}{\equiv} \\
 & \equiv [C \vee (P \wedge R)] \wedge [(\neg Q \wedge \neg R) \vee C] \stackrel{(4)}{\equiv} (P \wedge R) \wedge (\neg Q \wedge \neg R) \stackrel{(14)}{\equiv} \\
 & \equiv (R \wedge \neg R) \wedge P \wedge \neg Q \stackrel{(15)}{\equiv} C \wedge P \wedge \neg Q \stackrel{(14)}{\equiv} C
 \end{aligned}$$

Ez definit?
ustek adibidez gaina badu

20) Izan hitez $P_1 = q \rightarrow p$, $P_2 = \neg p \vee \neg r$ eta $P_3 = q \vee r$ eran definitatko P_1, P_2, P_3 premisak. Froga ezaune P_1, P_2, P_3 premise multoa oinarrizkoak dela.

$$\begin{aligned}
 & (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \equiv \\
 & \stackrel{\text{ea nogo silean}}{\equiv} \left[(\neg q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (p \wedge (\neg p \vee \neg r)) \right] \wedge (q \vee r) \stackrel{(1)}{\equiv} \\
 & \equiv \left[(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee \stackrel{p \wedge}{\text{berdine}} (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r) \right] \wedge (q \vee r) \stackrel{(4)}{\equiv} \\
 & \equiv \left[(\neg q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (p \wedge \neg r) \right] \wedge (q \vee r) \stackrel{(16)}{\equiv} (p \wedge \neg r) \wedge (q \vee r) \stackrel{(14)}{\equiv} \\
 & \equiv p \wedge (\neg r \wedge (q \vee r)) \stackrel{(19)}{=} p \wedge \left[(\neg r \wedge q) \vee (\neg r \wedge r) \right] \stackrel{(15)}{=} \\
 & \equiv p \wedge \left[(\neg r \wedge q) \vee c \right] \stackrel{(4)}{=} p \wedge \neg r \wedge q
 \end{aligned}$$

21) Izan hitez $P_1 = p \rightarrow q$, \hookrightarrow et de oinarrizkoak ??

$P_2 = p \vee q$, $P_3 = q \wedge r$ eran definitatko P_1, P_2 eta P_3 premisak.

Froga ezaune P_1, P_2, P_3 premise multoa gutxizkoak dela.

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \wedge r) \stackrel{(22)}{\equiv} [(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)] \wedge (q \wedge r) \stackrel{(18)}{\equiv} \\
 & \equiv [q \vee (\neg p \wedge p)] \wedge (q \wedge r) \stackrel{(15)}{\equiv} [q \vee c] \wedge (q \wedge r) \equiv \\
 & \equiv q \wedge (q \wedge r) \stackrel{(12)}{=} q \wedge r \equiv \text{Gutxizkoak dela? edo note frogatu?} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{berber da?}
 \end{aligned}$$

22) Absurdo bidatzeko metoda erabiliz, proga
 exzise honako arrazonamendu hau baliozkoa dela:
 $(\neg P \vee \neg q, P \rightarrow r, P \vee \neg r; \neg P)$ MD 6

$P \Rightarrow Q$ propteko

$P \wedge \neg q \Rightarrow C$ propteko behar da

$(\neg P \vee \neg q) \wedge (P \rightarrow r) \wedge (P \vee \neg r) \Rightarrow \neg P$ propteko

$(\neg P \vee \neg q) \wedge (P \rightarrow r) \wedge (P \vee \neg r) \wedge \neg(\neg P) \Rightarrow C?$

$(\neg P \vee \neg q) \wedge (P \rightarrow r) \wedge (P \vee \neg r) \wedge \neg(\neg P) \stackrel{21}{=} (\neg P \vee \neg q) \wedge (\neg P \vee r) \wedge (P \vee \neg r) \wedge P \stackrel{7}{\equiv}$

$\equiv [P \wedge (\neg P \vee \neg q)] \wedge (\neg P \vee r) \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{19}{\equiv} [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg q)] \wedge (\neg P \vee r) \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{5}{\equiv}$

$\equiv [C \vee (P \wedge \neg q)] \wedge (\neg P \vee r) \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{4}{\equiv} P \wedge \neg q \wedge (\neg P \vee r) \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{14}{\equiv}$

$\equiv \neg q \wedge [P \wedge (\neg P \vee r)] \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{10}{=} \neg q \wedge [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge r)] \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{15}{\equiv}$

$\equiv \neg q \wedge [C \vee (P \wedge r)] \wedge (P \vee \neg r) \stackrel{4}{=} \neg q \wedge r \wedge (P \wedge (P \wedge \neg r)) \stackrel{12}{=} \neg q \wedge r \wedge P \stackrel{14}{=} \neg q \wedge r \wedge C \stackrel{13}{\equiv}$

$\equiv \neg q \wedge (r \wedge \neg r) \wedge P \stackrel{10}{=} \neg q \wedge C \wedge P \stackrel{15}{\equiv} C$

23) Iau hiztegi honako predikatu hauetako arrazonamendua baliozkoa da.

• $P(x) : x \leq 4$ $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ eibozien x amanta posiboa ~~tx~~-rako
 • $Q(x) : x + 3$ bikoitza $\forall x \in \mathbb{Z}^+$

1) Aukitzu honako hauen egiaztako balioak: $P(1), P(5), Q(2), Q(7), P(1) \wedge Q(7), P(7) \vee Q(7), \neg P(2), \neg Q(6), \neg [P(4) \vee Q(3)]$ eta $P(2) \rightarrow Q(5)$.

$P(1) : E$	$P(1) \wedge Q(7) : E \wedge E : E$	$\neg [P(4) \vee Q(3)] : \neg [E \vee E] : \neg E : G$ $P(2) \rightarrow Q(5) : E \rightarrow E : E$
$P(5) : G$	$P(7) \vee Q(7) : G \vee E : E$	
$Q(2) : G$	$\neg P(2) : \neg E : G$	
$Q(7) : E$	$\neg Q(6) : \neg G : E$	

23) JARRAIPENA

2) Aunkitu zerbaki oso posiboa pertiak non $P(x) \wedge Q(x)$ predikatu komposatua egiaztua den.

$P(x) \wedge Q(x)$: E izatetik $P(x)$ egia izan behar du ^(ota baino z+ span behar du)

$Q(x)$ ere, beraz $x \leq 4$ eta $x+3$ bakoitza izan behar du.

④ Halditura horiek betetzen dituzten x balioak hauek

dira:

$$\{x = 1 \text{ eta } x = 3\}$$

3) Aunkitu zerbaki oso posiboa pertiak non $P(x) \vee Q(x)$ predikatu komposatua egiaztua den.

$P(x) \vee Q(x)$: E

$P(x)$ edo $Q(x)$ predikatu riude bat edo biak egiaztuak direneau predikatu komposatua egiaztua izango da.

④ $P(x)$ egiaztua izango da $x \leq 4$ direan, beraz $x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

direan.

④ $Q(x)$ egiaztua izango da $x+3$ bakoitza direan, beraz x zerbaki bakoitza direan +3 opetai zerbaki bakoitza lortuko dugu, hori dela eta

$x = 2n-1$ izango da non n zerbaki arrenten multzoaren barne dagoen.

④ Aurrekoan jazkunola, x -ren balioak $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, \dots, 2n-1\}$ non

$n \in \mathbb{N}$ izango dura predikatu komposatua egiaztu balioa zatiko.

83) JARRAI PENAS

→ \mathbb{Z}^+

MD 7

4) Aunkitu zentzuk osa positiboa jasotakoak non $P(x) \rightarrow Q(x)$ predikatu komposatua egazkia den.

$P(x) \rightarrow Q(x)$ gerunberkoa izango da soñik $Q(x)$ gerunberkoa
de $P(x)$ eparisko dirnean, beste kasuetan eparisko balioa izango den.

P	q	$P \rightarrow Q$
E	E	E
E	G	G
G	E	E
G	G	E

④ $Q(x)$ gerunberkoa da x balorria denean, haudela $x = 2n$ non
 $n \in \mathbb{N}$ dagoen.

④ $P(x)$ eparisko da $x = \{1, 2, 3, 4\}$ balorok denean.

④ Bai baldintza betetzen duten x balorok hauetakoak dira:

$x = \{1, 2, 4\}$, berat $P(x) \rightarrow Q(x)$ eparisko balioa hantxka

du $x \in \mathbb{Z}^+ - \{1, 2, 4\}$ denean.

15 Aztertu honako sententzia hau epiarkhoa edo
gezurrikoa den: "Gezura da (gizona ^P narastia dela eta
Lurra izar bat ^q dela, edo Paris Frantzian dagoela).".

$$\neg [(p \wedge q) \vee r] \stackrel{16}{\equiv} \neg (p \wedge q) \wedge \neg r \stackrel{17}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r = \\ = \neg p \vee \neg q \wedge \neg r \rightarrow \text{zahut amaitu duolan aho}$$

17 Demagun Jonek gimnasia egiten badu argaldu egitea
dela eta berik egiten ez badu lopura dela. Friga erarre eodatu
egiten bada edo lopuraink ez badu, orduan ez du
gimnasia egiten edo ~~lo~~ egiten ~~badu~~.

$$\left. \begin{array}{l} \text{gimnasia eguna} = p \\ \text{argaldu} = q \\ \text{lo eguna} = r \\ \text{lopura} = s \end{array} \right\} \begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s) \Rightarrow (\neg q \vee \neg s) \rightarrow \\ (\neg p \vee r) \equiv \\ \stackrel{18}{\equiv} (\neg q \vee \neg s) \vee (\neg p \vee r) \equiv \\ \stackrel{19}{\equiv} (q \wedge s) \vee (\neg p \vee r) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s) \stackrel{20}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \stackrel{21}{\equiv} [(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee [(\neg p \vee q) \wedge s] = \\ = [(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee [(\neg p \wedge s) \vee (q \wedge s)] \stackrel{22}{\Rightarrow} \\ = (q \wedge s) \vee [(\neg p \vee r)] \stackrel{23}{\equiv} (q \wedge s) \vee (\neg p \vee r) \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{20} \quad P_1 = q \rightarrow P \\
 P_2 = \neg P \wedge \neg r \\
 P_3 = q \vee r
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Frogatu premisak} \\
 \text{ Beste kasuak futeskola dira.}
 \end{array} \right\} \text{ oruare gabeakoa} \quad \text{diora.} \\
 \textcircled{21} \quad P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow C \quad \text{ oruare gabeakoa}$$

$$\begin{aligned}
 (q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge \neg r) \wedge (q \vee r) &\stackrel{\textcircled{22}}{=} ((\neg q \vee P) \wedge (\neg P) \wedge \neg r \wedge (q \vee r)) \stackrel{\textcircled{23}}{=} \\
 &\equiv [(\neg q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg P)] \wedge [(\neg r \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg r)] \stackrel{\textcircled{24}}{=} \\
 &\equiv [(\neg q \wedge \neg P) \vee C] \wedge [(\neg r \wedge q) \vee C] \stackrel{\textcircled{25}}{=} \neg q \wedge \neg P \wedge \neg r \wedge q \stackrel{\textcircled{26}}{=} \\
 &= (q \wedge \neg q) \wedge \neg P \wedge \neg r \stackrel{\textcircled{27}}{=} C \wedge \neg P \wedge \neg r \stackrel{\textcircled{28}}{=} C // \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$$

40. proprietatea eta
prosperitatea.

$$\neg (P \wedge R) \vee (Q \wedge S) \equiv (\neg P \vee \neg R) \vee (Q \wedge S)$$

lo cogemos como una sola cosa

$$\begin{aligned}
 (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) &\stackrel{\textcircled{22}}{=} (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \stackrel{\textcircled{29}}{=} [(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \vee [(\neg P \vee Q) \wedge S] \stackrel{\textcircled{30}}{=} \\
 &\equiv [(\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)] \vee [(\neg P \wedge S) \vee (Q \wedge S)] \quad \text{lo reservamos} \\
 &\equiv (Q \wedge S) \vee [(\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge S)] \stackrel{\textcircled{31}}{=} \\
 &= (Q \wedge S) \vee [\neg P \vee (\neg R \vee S)] \vee (Q \wedge \neg R) \stackrel{\textcircled{32}}{\Rightarrow} \\
 &\Rightarrow (Q \wedge S) \vee (\neg P \vee \neg R) \stackrel{\textcircled{33}}{=} (\neg P \vee \neg R) \vee (Q \wedge S) \stackrel{\textcircled{34}}{=} \neg (P \wedge R) \vee (Q \wedge S) \stackrel{\textcircled{35}}{=} \\
 &= (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$