5. GAIA: Balio Propioak eta Bektore Propioak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Definizioa

Izan bedi $A=[a_{ij}]_{nxn} \in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize karratua **(**K = $\mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$**)**

A-ren **balio propioa** (autobalio edo balio karakteristikoa), $\lambda \in K$ eskalar bat da, zeinetarako gutxienez $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ berdintza betetzen duen $\vec{x}$ bektore ez nulu bat existitzen den.

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ betetzen duen $\vec{x}$ bektore ez nulu orori λ **balio propioari elkartutako** A-ren **bektore propioa** (autobektorea edo bektore karakteristikoa) deritzo.

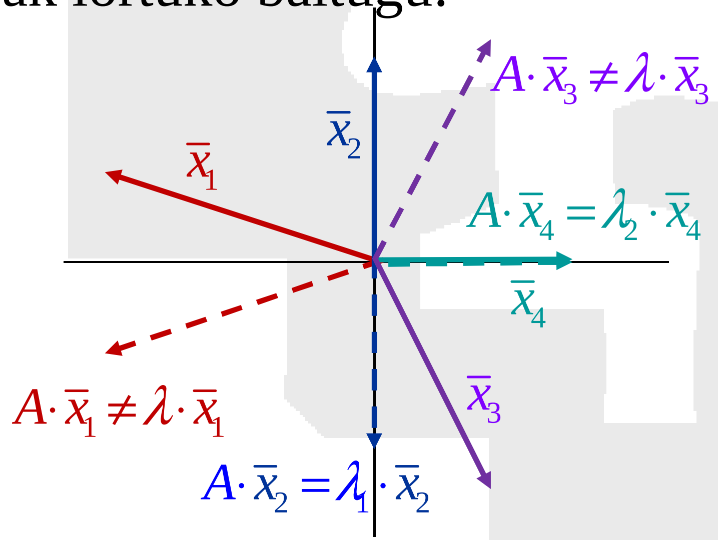
$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}$$

$\vec{x}$ bektorearen norabidea mantentzen da

Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Adibidea: Izan bedi $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matrizea. A matrizea berezia da, bektore bat A matrizeagatik biderkatzen badugu, bektore horren OX ardatzarekiko simetrikoa den bektoreak lortuko baitugu:

$$\mathrm{A}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$$



Aurreko irudia kontutan hartuz, lau bektore horietatik, zeintzuk dira A matrizearen bektore propioak? Zein balio propiori daude elkartuta?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio eta bektore propioak

Balio eta bektore propioen kalkulua

Polinomio eta ekuazio karakteristikoa

Azpiespazio bektorial propioa

Balio propio eta bektore propioen propietateak

Anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa

Zenbait emaitza: Cayley-Hamilton teorema

Matrize antzekoak

Matriz karratuen diagonalizazioa

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

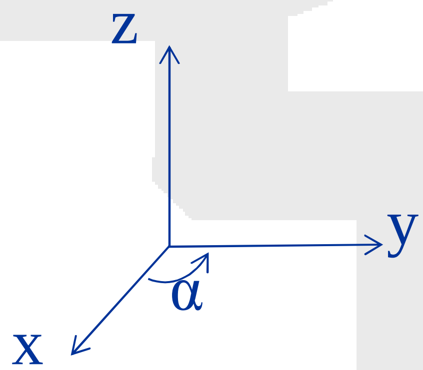
Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Adibidea: Izan bedi A hiru dimentsioko sistema bateko OZ ardatzarekiko biraketa matrizea

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \text{ biraketa-angelua}$$

$\alpha = 90^{o}$ kasurako balio eta bektore propioak kalkulatu:

$$A(90^{o}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Balio propioak: $A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 = \lambda^2 x_2 \to (\lambda^2+1)x_2 = 0 \to \boxed{x_2 = 0 \to x_1 = 0} \\ x_3 = \lambda x_3 \to x_3(\lambda - 1) = 0 \to x_3 \neq 0 \ (\vec{x} \neq \vec{0} \text{ baita}) \to \boxed{\lambda = 1} \end{cases}$$

Ondorioz, A-ren balio propioa $\lambda=1$ da bektore propioak hurrengo itxura dute:

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

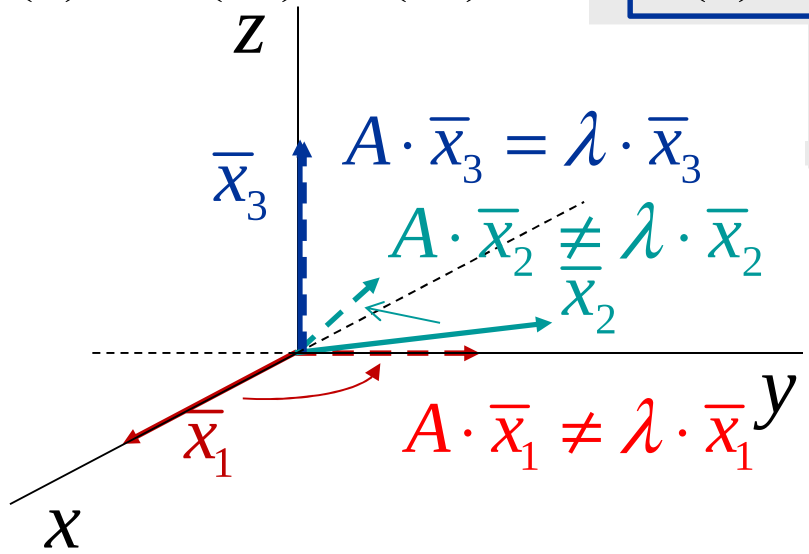
OZ ardatzean dauden bektoreak

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Grafikoki adieraziz: $A(90)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratu baten balio propioak eta bektore propioak

Definizioa:

A matrizearen balio propioen multzoari **A matrizearen espektroa** deritzo eta $\sigma(A)$ erabiliz adierazten da:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propio eta bektore propioen kalkulua

Balio eta bektore propioak kalkulatzeko prozesua:

Izan bitez $A \in M_{nxn}(K)$ n ordenako matrize karratua eta $\vec{x}$ bektorea λ balio propioari elkartutako bektore propioa, hau da, $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ betetzen da.

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}$$

Aurreko ekuazio linealezko sistema homogeneoak soluzio nabariaz gain beste soluzio bat izango du baldin eta soilik baldin A-λI matrizea singularra bada, hau da, |A-λI|=0 bada.

Ondorioz:

A-ren **balio propioak** |A-λI|=0 ekuazioaren soluzioak dira.

λ balio propioari elkartutako bektore propioak $(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ sistema homogeneoaren soluzio ez nabariak dira.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Polinomio karakteristikoa eta ekuazio karakteristikoa

Definizioa

A matrizearen **polinomio karakteristikoa**: $\mathbf{p(\lambda) = |A-\lambda I|}$ da.

Definizioa

A matrizearen **ekuazio karakteristikoa**: $\mathbf{p(\lambda) = 0 \Rightarrow |A-\lambda I| = 0}$ da.

Oharra: A-ren **balio propioak** A-ren **polinomio karakteristikoaren erroak** dira, edo beste era batera esanda, A matrizearen balio propioak A-ren **ekuazio karakteristikoaren soluzioak dira.**

Oharra: $p(\lambda) = |A-\lambda I| \rightarrow p(0) = |A|$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propio bati elkartutako azpiespazio bektorial propioa

Definizioa

Izan bitez $A \in M_{nxn}(K)$ matrizea eta λ A matrizearen balio propio bat. **λ balio propioari elkartutako bektore propioek** hurrengo **azpiespazio bektoriala** sortzen dute:

$$V(\lambda) = E_{\lambda} = \{\vec{x} \ / \ A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}\}$$

Azpiespazio bektorial honi A matrizeari **elkartutako λ balio propioaren azpiespazio propioa** deritzo.

Oharra: $V(\lambda)$ azpiespazio bektoriala bektore propio guztiek bektore nuluarekin batera osatutako azpiespazio bektoriala da.

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propio bati elkartutako azpiespazio bektorial propioa

Adibidea: Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkulatu A matrizearen balio propioak, bektore propioak eta azpiespazio propioak.

1. Balio propioak:

Balio propioak aurkitzeko $p(\lambda) = |A - \lambda.I| = 0$ ekuazio karakteristikoa ebatziko dugu:

$$p(\lambda) = |A - \lambda.I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

A matrizearen balio propioak $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = -1$ dira, espektroa $\sigma(A) = \{1, -1\}$ izanik.

Balio propio bati elkartutako azpiespazio bektorial propioa

2. Bektore propioak eta azpiespazio propioak:

Balio propio bakoitzari elkartutako bektore propioak lortzeko

$\left(A - \lambda.I\right)\vec{x} = \vec{0} \quad \left(\vec{x} \neq \vec{0}\right)$ sistema ebatziko dugu:

- $\lambda_1 = 1$:

$$\left(A - \lambda.I\right)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \left(A - I\right)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Sistemaren soluzioa: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propio bati elkartutako azpiespazio bektorial propioa

Ondorioz, $\lambda_1 = 1$ balio propioari elkartutako bektore propio batzuk:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Eta $\lambda_1 = 1$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa:

$$V(1) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \ / \ \vec{x} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(1,0)\}\right)$$

- $\lambda_2 = -1$:

$$\left(A - \lambda . I\right)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \left(A + I\right)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propio bati elkartutako azpiespazio bektorial propioa

Sistemaren soluzioa: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Ondorioz, $\lambda_2 = -1$ balio propioari elkartutako bektore propio batzuk:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$$

Eta $\lambda_2 = -1$ <u>balio propioari elkartutako azpiespazio propioa</u>:

$$V(-1) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,/\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\{(0,1)\}\right)$$

Balio propio eta bektore propioen propietateak

Propietateak

1) A-ren $\vec{x}$ bektore propio oro λ balio propio bakar bati elkartua dago.

2) $\vec{x}$ A-ren λ balio propioari elkartutako bektore propioa bada, orduan, $\delta\vec{x}$ $\forall\delta\in K-\{\vec{0}\}$ λ balio propioari elkartutako bektore propioa da.

3) Baldin λ_1 eta λ_2 A-ren bi balio propio desberdin badira, orduan:

$$V(\lambda_1)\cap V(\lambda_2) = \{\vec{0}\}$$

4) Balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak linealki independenteak dira.

Balio propio eta bektore propioen propietateak

Propietateak

5) $Aztarna(A) \ = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

6) $|A| \ = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

7) $\lambda = 0$ A matrizearen balio propioa bada, orduan |A|=0 da, hau da, A matrizea singularra da.

8) λ A-ren balio propioa bada, $\Rightarrow \lambda^k$, A^k-ren balio propioa da, k zenbaki oso eta positiboa izanik.

Gainera, $V(\lambda) = V(\lambda^k)$ betetzen da.

9) λ A matrize alderanzgarri baten balio propioa bada $\Rightarrow \lambda^{-1}$ eskalarra A^{-1} matrizearen balio propioa da.

Gainera, $V(\lambda) = V(\lambda^{-1})$ betetzen da

Balio propioen anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa

Definizioa:

λ_i balio propioaren **anizkoiztasun aljebraikoa** λ_i balio propioak polinomio karakteristikoan duen anizkoiztasuna da eta k_i, n_i edota α_i erabiliz adierazten da.

Definizioa:

λ_i balio propioaren **anizkoiztasun geometrikoa** λ_i balio propioari elkartutako azpiespazio propioaren dimentsioa da eta d_i erabiliz adierazten da.

$$dim(V(\lambda_i)) = d_i$$

Propietatea:

$$d_i = dim(V(\lambda_i)) = n - h(A - \lambda_i \cdot I)$$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Balio propioen anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa

Proposizioa

Izan bedi λ_i A-ren balio propio bat, orduan bere anizkoiztasun aljebraikoak eta geometrikoak hurrengoa betetzen dute:

$$1 \leq d_i \leq k_i.$$

Definizioa:

λ **k ordenako A-ren balio propioa** dela esaten da, baldin λ ekuazio karakteristikoaren soluzioa bada bere anizkoiztasun aljebraikoa k izanik.

Baldin k = 1, orduan λ -ri **balio propio bakuna** deritzo.

Polinomio karakteristikoaren erlazionatutako hainbat emaitza

Oharra:

Demagun A matrizeak r balio propio desberdin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ dituela, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ beraien ordenak izanik. Orduan $k_1+k_2+\ldots+k_r = n$ bada:

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}$$

Adibidea: Kalkulatu $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matrizearen polinomio karakteristikoa.

Aurreko adibidean kalkulatu dugun bezala:

$\sigma(A)=\{\lambda_1=1,\lambda_2=-1\},\ k_1=1,\ k_2=1$ eta $p(\lambda)=(1-\lambda)(-\lambda-1)$

Ikus dezagun $p(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}$ egiaztatzen dela:

$$p(\lambda)=(-1)^2(\lambda-1)(\lambda+1)=(1-\lambda)(-\lambda-1)$$

Polinomio karakteristikoaren erlazionatutako hainbat emaitza

Definizioa:

Izan bedi $p(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \ldots + k_1 x^1 + k_0$ polinomioa.

$p(x)$ edozein polinomiok **p(A) polinomio matrizial** bat elkartua du, non A n ordenako matrize arbitrario bat den, eta I n ordenako identitate matrizea:

$$p(A) = k_n A^n + k_{n-1} A^{n-1} + \ldots + k_1 A^1 + k_0 I$$

Definizioa.

$p(x)$ A matrizearen **polinomio deuseztatzailea** dela esaten da (edo A p(x) polinomioaren zero bat dela) $p(A) = (0)_{nxn}$ bada.

Polinomio karakteristikoaren erlazionatutako hainbat emaitza

Cayley-Hamilton-en teorema:

A matrize karratu baten p(λ) polinomio karakteristikoa A-ren polinomio deuseztatzailea da, hau da, $p(A) = (0)_{nxn}$

Adibidea: Froga ezazu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen polinomio karakteristikoa A-ren polinomio deuseztatzailea dela:

Polinomio karakteristikoa:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 1$$

A matrizea polinomioan ordezkatuz:

$$p(A) = A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize antzekoak

Definizioa

Bi matrize A eta B $\in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) **antzekoak** direla esaten da, P $\in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize erregular bat existitzen bada non hurrengo erlazioa betetzen den:

$$\mathbf{B = P^{-1}.A.P}$$

Propietateak

1) Antzekoak diren matrizeak polinomio karakteristiko berdina daukate.
2) Antzekoak diren matrizeak balio propio berdinak dauzkate, beraien anizkoiztasun aljebraikoak berdinak izanik.
3) Antzekoak diren matrizeak heina berdina daukate.
4) Antzekoak diren matrizeak aztarna berdina daukate.
5) Antzekoak diren matrizeak determinante berdina daukate.

Matrize karratuen diagonalizazioa

Definizioa

$A \in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize bat **antzekotasunez diagonalizagarria** dela estaten da, baldin $P \in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize bat eta D matrize diagonal bat existitzen badira non:

$$\mathbf{D = P^{-1}.A.P}$$

Hortaz, A diagonalizagarria da matrize diagonal baten antzekoa bada.

- A $\mathbb{M}_{nxn}$ ($\mathbb{R}$) diagonalizagarria $\Leftrightarrow$ A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^n$-ko oinarri bat existitzen da $\Leftrightarrow$ A-k n bektore propio linealki independente ditu.

- A-k n balio propio desberdin baditu $\Rightarrow$ n bektore propio linealki independente ditu $\Rightarrow$ A matrizea diagonalizagarria da.

Matrize karratuen diagonalizazioa

Matrizea diagonalizagarria izateko baldintzak:

Izan bedi A $\in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrizea, orduan bi posibilitate desberdin daude.

1) A-k n balio propio desberdin ditu $\Rightarrow$ A matrizea diagonalizagarria da.

2) A-k r balio propio desberdin ditu, r<n izanik, orduan:

$$\text{A diagonalizagarria da} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n \\ k_i = d_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r \end{cases}$$

n polinomio karakteristikoaren maila izanik.

Hau da, A diagonalizagarria da $\Leftrightarrow$ balio propioen anizkoiztasun aljebraikoen batura polinomio karakteristikoaren mailaren berdina bada eta balio propioen anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa bat badator.

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

Orokorrean, $A \in \mathbb{M}_{nxn}(K)$ diagonalizatzea D eta P matrizeak lortzean datza.

Demagun A matrizearen balio propioak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ direla, berain anizkoiztasun aljebraikoak $k_1, k_2, \ldots, k_r$ izanik, hurrenez hurren.

D matrizea balio propioak diagonal nagusian dituen matrize diagonala da:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & 0 & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}_{nxn}$$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

P matrizea balio propio bakoitzari elkartutako bektore propioak zutabeka dituen matrize alderanzgarria da:

Demagun n bektore propioak $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ direla, ondorioz:

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ & & \vdots & \\ & & \cdots & \end{pmatrix}_{nxn}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

A matrizea diagonalizatzeko jarraitu beharreko pausuak:

1. urratsa: Matrizearen polinomio karakteristikoa lortu. (Baita ekuazio karakteristikoa ere).

2. urratsa: Matrizearen λ_i balio propioak kalkulatu.

3. urratsa: λ_i balio propioei elkartutako azpiespazio propioak lortu eta matrizea diagonalizagarria den aztertu.

4. urratsa: A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^n$-n oinarria eraiki.

5. urratsa: D eta P matrizeak eraiki.

Matrize karratuen diagonalizazioa

Adibidea: Diagonalizatu posible bada $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea

1. Kalkulatu polinomio karakteristikoa:

$$p(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)^2$$

2. Balio propioak ekuazio karakteristikoaren soluzioak dira:

$$p(\lambda)=0\Rightarrow p(\lambda)=(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)^2=0\quad\begin{cases}\lambda_1=-1 & k_1=2\\ \lambda_2=1 & k_2=1\end{cases}$$

Matrize karratuen diagonalizazioa

3. λ_i balio propioei elkartutako azpiespazio propioak lortu:

Horretarako $\left(A-\lambda_i\cdot I\right)\cdot\bar{x}=\bar{0}$ sistemak ebatziko dira:

- $\lambda_1=-1 \qquad \left(A+1\cdot I\right)\cdot\bar{x}=\bar{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boxed{2} & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{M}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$h(M)=1$

$d_1=n-h(M)=3-1=2$ izango da

$$\left.2\cdot x+2z=0\right\}\rightarrow x=-z$$

$$\vec{x}=(-z,y,z)=z(-1,0,1)+y\cdot(0,1,0)\Rightarrow \boxed{V(-1)=\mathcal{L}\left(\left\{(-1,0,1)(0,1,0)\right\}\right)}$$

$$d_1=\dim\left(V(-1)\right)=2$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

- $\lambda_2=1 \quad (A-1\cdot I)\cdot\bar{x}=\bar{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & -2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{M}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(M)=2$

$d_2=n-h(M)=3-2=1$ izango da.

$$\left.\begin{array}{r} 2z=0 \\ -x-2y-z=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2z=0 \\ -x-z=2y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to z=0 \\ \to x=-2y \end{array}$$

$$\vec{x}=(-2y,y,0)=y\cdot(-2,1,0) \Rightarrow \boxed{V(1)=\mathcal{L}(\{(-2,1,0)\})}$$

$$d_2=\dim(V(1))=1$$

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

- $k_1 + k_2 = 2 + 1 = 3$
- $\left.\begin{array}{l} k_1 = 2 = d_1 \\ k_2 = 1 = d_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_i = d_i \quad \forall i = 1,2$

Beraz, matrizea diagonalizagarria da .

4. <u>A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-n oinarria eraiki</u>:

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(-1,0,1),(0,1,0),(-2,1,0)\}$$

5. <u>D eta P matrizeak eraiki</u>:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize karratuen diagonalizazioa

Oharrak

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize diagonalizagarria, orduan:

1) $D = P^{-1}.A.P \quad \Leftrightarrow \quad A = P.D.P^{-1}$

2) $A^k = (P.D.P^{-1})^k \; = \; P.D^k.P^{-1}$

3) $A^k = P.D^k.P^{-1} \quad \Leftrightarrow D^k = P^{-1}.A^k.P$

4) $A^{-1} = (P.D.P^{-1})^{-1} = P.\ D^{-1}.P^{-1}$

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

Definizioa:

$A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ matrizea ortogonalki diagonalizagarria da baldin $P \in \mathbb{M}_{nxn}$ (K) matrize ortogonal bat ($P^{-1}=P^T$) eta D matrize diagonal bat existitzen badira non:

$$\mathbf{D = P^{-1}.A.P= P^T.A.P}$$

- $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ matrize **erreala ortogonalki diagonalizagarria** da $\Leftrightarrow$ A **matrize erreala simetrikoa** da

- $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ ortogonalki diagonalizagarria $\Leftrightarrow$ A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^n$-n **oinarri ortonormal** bat existitzen da

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

Teorema:

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ matrize erreal simetrikoa, orduan, hurrengo propietateak betetzen dira:

1) A-ren **balio propio guztiak errealak** dira.

2) A-ren **balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak ortogonalak** dira: $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j)$ (Hau da, $V(\lambda_i)$ eta $V(\lambda_j)$ espazio propioak ortogonalak dira)

3) A **matrizea diagonalizagarria** da, hots, P matrize erregularra eta D matrize diagonala existitzen dira non $P^{-1}.A.P=D$ betetzen den.

4) A **ortogonalki diagonalizagarria** da, hots, P matrize ortogonala eta D matrize diagonala existitzen dira non $P^{T}.A.P=D$ betetzen den.

Oharra: Balio propio berari elkartutako bektore propioak ez dira ortogonalak izan behar.

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

A matrizea erreal simetrikoa ortogonalki diagonalizatzeko jarraitu beharreko pausuak:

1. urratsa: Matrizearen polinomio karakteristikoa lortu

2. urratsa: Matrizearen λ_i balio propioak kalkulatu (gogoratu balio propio guztiak errealak direla)

3. urratsa: λ_i balio propioei elkartutako azpiespazio propioak lortu (gogoratu matrizea erreala eta simetrikoa denez diagonalizagarria dela)

4. urratsa: A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^n$-n oinarria eraiki ondoren Gram-Schmidt-en metodoa erabiliz $\mathbb{R}^n$-n oinarri ortonormala lortu.

5. urratsa: D eta P matrizeak eraiki (P eraikitzean aurreko urratsean lortutako oinarri ortonormala erabili)

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

Adibidea: Diagonalizatu ortogonalki posible bada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea

Posible da matrizea ortogonalki diagonalizatzea **simetrikoa** delako.

1. Kalkulatu polinomio karakteristikoa:

$$p(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{e_2 - e_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{z_2 + z_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \left(-3\lambda + \lambda^2\right)$$

2. Balio propioak ekuazio karakteristikoaren soluzioak dira:

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = -\lambda \cdot \left(-3\lambda + \lambda^2\right) = -\lambda \cdot \lambda(-3 + \lambda) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 & k_2 = 1 \end{cases}$$

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

3. λ_i balio propioei elkartutako azpiespazio propioak lortu:

Horretarako $\left(A-\lambda_i \cdot I\right)\cdot \bar{x}=\bar{0}$ sistemak ebatziko dira:

- $\lambda_1=0$ $\quad\left(A-0\cdot I\right)\cdot \bar{x}=\bar{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(M)=1$

$d_1=n-h(M)=3-1=2$ izango da.

$$\left.x+y+z=0\right\}\rightarrow x=-y-z$$

$$\vec{x}=\left(-y-z,y,z\right)=y\left(-1,1,0\right)+z\cdot\left(-1,0,1\right)$$

$$\boxed{V(0)=\mathcal{L}\left(\left\{\left(-1,1,0\right),\left(-1,0,1\right)\right\}\right)}\qquad d_1=\dim\left(V(0)\right)=2$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

- $\lambda_2=3 \quad (A-3\cdot I)\cdot\overline{x}=\overline{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{M}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(M)=2$

$d_2=n-h(M)=3-2=1$ izango da.

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z&=0 \\ x-2y+z&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow - \left.\begin{aligned} y+z&=2x \\ -2y+z&=-x \end{aligned}\right\} \rightarrow z=-x+2y=x$$

$$3y \quad =3x \rightarrow y=x\uparrow$$

$$\vec{x}=(x,x,x)=x\cdot(1,1,1)\Rightarrow \qquad \boxed{V(3)=\mathcal{L}(\{(1,1,1)\})}$$

$$d_2=\dim(V(3))=1$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

- $k_1 + k_2 = 2 + 1 = 3$
- $\left.\begin{array}{l} k_1 = 2 = d_1 \\ k_2 = 1 = d_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_i = d_i \quad \forall i = 1,2$

Bagenekien A matrizea diagonalizagarria zela, matrize simetrikoa delako.

<u>4. A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-n oinarria eraiki</u>:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{R}^3} = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

5. A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-n oinarri ortonormala lortu:

Lehenengo eta behin, oinarri ortogonala lortu beharko da Gram-Schmidt metodoa erabiliz. Matrize simetrikoa denez, badakigu balio propio desberdinei dagozkien bektore propioak ortogonalak izango direla:

$$<\vec{u}_1,\vec{u}_3>=<(-1,1,0),(1,1,1)>=0$$

$$<\vec{u}_2,\vec{u}_3>=<(-1,0,1),(1,1,1)>=0$$

Beraz, anizkoiztasun aljebraiko bikoitza duen balio propioaren bektore propioak ortogonalak diren konprobatu behar dugu

$$<\vec{u}_1,\vec{u}_2>=<(-1,1,0),(-1,0,1)>=1\neq 0$$ Ez dira ortogonalak.

Gram-Schmidt metodoa erabili behar dugu oinarri ortogonala eraikitzeko.

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{<\vec{u}_2, \vec{v}_1>}{\|\vec{v}_1\|^2} \cdot \vec{v}_1 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3$$

Lortu ditugun bektore ortogonalak normalizatuko ditugu:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \qquad \vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)}{\sqrt{6/4}} \qquad \vec{w}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$B_{ON} = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Matrize erreal eta simetrikoen diagonalizazio ortogonala

6. D eta P matrizeak eraiki

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\Rightarrow D=P^T\cdot A\cdot P$$