MATEMATIKA DISKRETUA

1. GAIA - LOGIKA MATEMATIKOA

Erik Alonso González

Matematika Aplikatua Saila

Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)

Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)

Aurkibidea

Aurkibidea

Sententzia Logikoak

1.1. Definizioa

- Sententzia logiko bat, egia ala gezurra, baina ez biak aldi berean, izan daitekeen aditz-adierazpen sinple bat da.
- Sententzia logikoak sententzia izendatuko dira eta letra xeheen bidez adieraziko dira: p, q, r,...
- "Mendia garaia da" eta "Ni ikaslea naiz" aditz-adierazpenak $\rightarrow$ sententziak dira
- "Etor zaitez korrika" eta "Zenbat ikasten duzu?" aditz-adierazpenak $\rightarrow$ EZ dira sententziak
- p sententzia egiazkoa bada $\rightarrow$ bere egia-balioa E
- p sententzia gezurrazkoa bada $\rightarrow$ bere egia-balioa G

Lotura Logikoak I

Sarrera

- Lotura logikoen bidez aditz-adierazpen sinpleekin definitutako sententziak konbina daitezke konplexuagoak diren sententzia berriak lortuz. Hauei **sententzia konposatu** deritze.
- Honako lotura logikoak aztertuko dira:
  - Ezeztapena ($\neg$)
  - Disjuntzioa ($\vee$)
  - Konjuntzioa ($\wedge$)
  - Baldintzazkoa ($\rightarrow$)
  - Baldintzabikoa ($\leftrightarrow$)

Lotura Logikoak II

1.2. Definizioa

- Izan bedi p sententzia bat, p-ren ezeztapena, $\neg p$ adieraziko den beste sententzia bat izango da, zeina egiazkoa izango den p gezurrezkoa bada eta gezurrezkoa p egiazkoa bada.
- $\neg p$ sententzia, “ez p” irakurriko da eta $\overline{p}$, p^c, p' eta $\sim p$ notazioekin ere adieraziko da.

p	**¬p**
E	G
G	E

Lotura Logikoak III

1.3. Definizioa

- Izan bitez p eta q sententzia bi. p eta q-ren disjuntzioa, $p \vee q$ adieraziko den beste sententzia bat izango da, zeina egiazkoa izango den haietariko bat egiazkoa bada eta gezurrezkoa biak egiazkoa badira.
- $p \vee q$ sententzia, "p edo q" irakurriko da.

p	**q**	**$p \vee q$**
E	E	E
E	G	E
G	E	E
G	G	G

Lotura Logikoak IV

1.4. Definizioa

- Izan bitez p eta q sententzia bi. p eta q-ren konjuntzioa, $p \wedge q$ adieraziko den beste sententzia bat izango da, zeina egiazkoa izango den biak egiazkoak badira eta gezurrezkoa bietariko bat gezurrezkoa bada.
- $p \wedge q$ sententzia, "p eta q" irakurriko da.

p	**q**	**p∧q**
E	E	E
E	G	G
G	E	G
G	G	G

Lotura Logikoak V

1.5. Definizioa

- Izan bitez p eta q sententzia bi. p eta q-ren baldintzazkoa, $p \to q$ adieraziko den beste sententzia bat izango da, zeina gezurrezkoa izango den p egiazkoa bada eta q gezurrezkoa. Beste edozein kasutan, sententzia egiazkoa izango da.
- $p \to q$ sententzia, “baldin p orduan q” edo “p baldintza nahikoa da q izateko” edo “q beharrezko baldintza da p izateko” irakurriko da.

p	**q**	**p→q**
E	E	E
E	G	G
G	E	E
G	G	E

Lotura Logikoak VI

1.6. Definizioa

- Izan bitez p eta q sententzia bi. p eta q-ren baldintzabikoa, p↔q adieraziko den beste sententzia bat izango da, zeina egiazkoa izango den p eta q egiazkoak edo p eta q gezurrezkoak badira. Beste edozein kasutan, sententzia gezurrezkoa izango da.
- p↔q sententzia, "p baldin eta soilik q" edo "p baliokide q" edo "p baldintza beharrezkoa eta nahikoa da q izateko" irakurriko da.

p	**q**	**p↔q**
E	E	E
E	G	G
G	E	G
G	G	E

- p↔q sententziaren egia-balioa eta (p→q)∧(q→p) sententziarena berdinak dira.

Ordena Hierarkikoa

1.6. Definizioa

- $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ eta $\leftrightarrow$ loturen bidez lortutako sententzia konposatuen egiazko balioa lortzeko, lotura desberdinen ebaluazioan honako ordena hau kontuan hartuko da:
  - Ezeztapenak ($\neg$)
  - Disjuntzioak ($\vee$) eta konjuntzioak $\wedge$
  - Baldintzazkoak ($\rightarrow$)
  - Baldintzabikoak ($\leftrightarrow$)
- Hierarkia maila berdinetarako loturak ezkerretik eskuinera neurtuko dira. Lotura desberdinen ebaluazioan ordena hierarkikoa aldatzeko parentesi bikoteak (gakoak eta giltzak ere bai) erabiliko dira, barrutik kanpora neurtuz.

Aurkibidea

Proposizio Logikoak

2.1. Definizioa

- p, q, r,... sententzia generikoak, lotura eta parentesien bidez konbinatuz lortutako edozein adierazpen formalari, proposizio logiko edo proposizio soilik deritzo. Bereziki, proposizio generiko bat proposizio bat da.
- Proposizioak P(p,q,r,...) denotatuko dira. p, q, r,... aldagai edo zehaztugabeko sententzia generikoak izanik. Dena den, zalantzarik ez dagoen bitartean, proposizioak P, Q, R,... letra larriekin adieraziko dira soilik.
- P(p,q,r,...) proposizio bat haren egia-funtzioarekin ezaugarrituko da, P proposizioak hartzen dituen egia-balioak agertzen diren taula batean adieraziz, p, q, r,... aldagaiei emandako egia-balioen arabera.

Tautologiak eta Kontraesanak

2.2. Definizioa

- T(p,q,r,...) proposizioa **tautologia** bat da baldin eta p, q, r,... haren aldagaien edozein baliotarako lortutako sententzia guztiak beti egiazkoak badira.

2.3. Definizioa

- C(p,q,r,...) proposizioa **kontraesana** edo taxugabea da baldin eta p, q, r,... haren aldagaien edozein baliotarako lortutako sententzia guztiak beti gezurrezkoak badira.

Ordezkapen Legeak

2.4. Definizioa

- P(p,q,r,...), Q(p,q,r,...), R(p,q,r,...),... edozein proposizio badira eta T(p,q,r,...) tautologia bat bada, orduan T(P(p,q,r,...), Q(p,q,r,...), R(p,q,r,...),..) proposizioa ere tautologia bat da. Emaitza honi tautologien ordezkapen legea deritzo.

2.5. Definizioa

- P(p,q,r,...), Q(p,q,r,...), R(p,q,r,...),... edozein proposizio badira eta C(p,q,r,...) kontraesan bat bada, orduan C(P(p,q,r,...), Q(p,q,r,...), R(p,q,r,...),..) proposizioa ere kontraesan bat da. Emaitza honi kontraesanen ordezkapen legea deritzo.

Aurkibidea

Baliokidetasun Logikoaren Kontzeptua

3.1. Definizioa

- Izan bitez P eta Q bi proposizio. P eta Q baliokideak edo berdinak direla diogu, $P \equiv Q$ denotatuz, baldin eta P eta Q-k balio-taula berdina badute.
- Kontuan izan, definizio honen arabera, P eta Q baliokideak direla baldin eta $P \leftrightarrow Q$ tautologia bat bada. $P \equiv Q$ baliokidetasuna $P \Leftrightarrow Q$ ere denotatuko da.

Oinarrizko Propietateak I

3.2. Proposizioa

- Izan bedi C kontraesan bat eta T tautologia bat. P edozein proposizio izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$\neg(\neg P) \equiv P \tag{1.p}$$

$$\neg T \equiv C \tag{2.p}$$

$$\neg C \equiv T \tag{3.p}$$

Oinarrizko Propietateak II

3.3. Proposizioa

- Izan bedi C kontraesan bat eta T tautologia bat. P, Q eta R edozein proposizio izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \vee C \equiv P \tag{4.p}$$

$$P \vee T \equiv T \tag{5.p}$$

$$P \vee P \equiv P \tag{6.p}$$

$$P \vee Q \equiv Q \vee P \tag{7.p}$$

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \tag{8.p}$$

$$P \vee \neg P \equiv T \quad (\text{T tautologia}) \tag{9.p}$$

Oinarrizko Propietateak III

3.4. Proposizioa

- Izan bedi C kontraesan bat eta T tautologia bat. P, Q eta R edozein proposizio izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \wedge C \equiv C \tag{10.p}$$

$$P \wedge T \equiv P \tag{11.p}$$

$$P \wedge P \equiv P \tag{12.p}$$

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P \tag{13.p}$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \tag{14.p}$$

$$P \wedge \neg P \equiv C \tag{15.p}$$

Oinarrizko Propietateak IV

3.5. Proposizioa

- P, Q eta R edozein proposizio izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P \tag{16.p}$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \tag{17.p}$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \tag{18.p}$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \tag{19.p}$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \tag{20.p}$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \tag{21.p}$$

Oinarrizko Propietateak V

3.6. Proposizioa

- P, Q eta R edozein proposizio izanik honako hau egiaztatuko da:

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \quad (22.p)$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P \quad (23.p)$$

$$P \rightarrow Q \equiv P \vee Q \leftrightarrow Q \quad (24.p)$$

$$P \rightarrow Q \equiv P \wedge Q \leftrightarrow P \quad (25.p)$$

Aurkibidea

Inplikazio Logikoa

4.1. Definizioa

- Izan bitez P eta Q bi proposizio. P-k Q inplikatzen duela diogu baldin eta $P \rightarrow Q$ tautologia bat bada. $P \Rightarrow Q$ adieraziz.
- Definizio hau kontuan izanik, $P \equiv Q$ (edo $P \Leftrightarrow Q$) honako honetan itzuliko da: $P \Rightarrow Q$ eta $Q \Rightarrow P$.

Aurkibidea

Arrazonamendu Logikoa I

5.1. Definizioa

- $(P_1, P_2, ..., P_n; Q)$ gisan denotatutako arrazonamendu bat honako era honetan adierazitako adierazpen edo sententzia bat izango da:
  - "$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$ baieztatzen dugu", hots:
  - "$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ tautologia bat dela baieztatzen dugu", edo:
  - "$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ egiazkoa denean Q ere egiazkoa dela baieztatzen dugu"
- Sententzia hau honelakoa izan daiteke:
  1. Egiazkoa. Kasu honetan arrazonamendua egiazkoa, baliozkoa edo zuzena izango da eta $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$ gisan adieraziko da. Ondorioz, $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ tautologia bat da edo beste era batera: $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ egiazkoa denean ($P_1, P_2, ..., P_n$ denak egiazkoak) Q ere egiazkoa izango da.
  2. Gezurrezkoa. Kasu honetan arrazonamendua gezurrezkoa, okerra edo engainua izango da eta $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \not\Rightarrow Q$ gisan adieraziko da. Ondorioz, $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ ez da tautologia bat.

Arrazonamendu Logikoa II

5.2. Definizioa

- P_1,P_2,...,P_n proposizioak arrazonamenduaren premisak dira eta Q proposizioa premisen ondorio edo bukaera izango da.

5.3. Definizioa

- P_1,P_2,...,P_n premisak oinarri-gabekoak dira baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

- Beste edozein kasutan P_1,P_2,...,P_n funtsezkoak izango dira.

Arrazonamendu Logikoa III

Oharra

- Taulen prestaketa neketsua da eta gainera (P_1,P_2,...,P_n;Q) arrazonamendu bat egiazkoa dela ziurtatzeko, bakarrik behar dugu P_1,P_2,...,P_n guztiak egiazkoak izatea, Q egiazkoa dela ondorioztatzeko (eta taularen lerro baten edo zenbait lerrotan baino ez da gertatuko eta ez derrigorrez taula osoan). Egia-taulak osorik egitea saihesteko, inferentzia erregelak deritzen teknikak erabiliko ditugu. Hauen bidez premisak egiazkoak diren kasuak baino ez dira erabiliko, eta beraz, ondorioa egiazkoa izango da.

Arrazonamendu Logikoa IV

5.4. Proposizioa - Inferentzia logikoaren erregelak

$$1)\quad P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$2)\quad P \Rightarrow P \vee Q$$

$$3)\quad P \leftrightarrow Q \Rightarrow P \to Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \to P$$

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Rightarrow P \leftrightarrow Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Rightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

$$4)\quad (P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$$

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$$

$$5)\quad \neg P \to C \Rightarrow P$$

Arrazonamendu Logikoa V

5.4. Proposizioa - Inferentzia logikoaren erregelak

6) $(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$ (ponendo-ponens erregela)

7) $(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ (tollendo-tollens erregela)

8) $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ (tollendo-ponens erregela)

9) Baldintzazko ondorioaren erregela:

$P \Rightarrow (R \to S)$ frogatzeko, nahikoa da $P \wedge R \Rightarrow S$ frogatzea

10) Absurdo bidezko erregela:

$P \Rightarrow Q$ frogatzeko, nahikoa da $P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ frogatzea

11) $(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow P \wedge R \to Q \wedge S$

Aurkibidea

Predikatuak eta Kuantifikatzaileak

Sarrera

- Aldagai bat (edo zenbait aldagai) dituzten adierazpen formalak ez dira zertan sententziak izan behar. Adibidez, "x+3 bikoitia da" ez da sententzia bat, x-ren balioa ezagutzerakoan izango da sententzia.

Predikatuak

6.1. Definizioa

- Honako baldintza hauek egiaztatzen dituen P adierazpen formalari predikatu edo formula deritzo:
  1. P aldagai bat edo gehiagoren bidez definituta dago.
  2. A priori, P ez da sententzia bat.
  3. P sententzia batetan bihurtuko da haren aldagaiak aldakuntza-eremuko balioekin ordezkatzen direnean.
- Predikatuak P(x,y,...) denotatuko dira, x,y ... izanik definizioan erabilitako aldagaiak. Zalantzarik ez badago, predikatuak sinpleki P, Q, ... letra larriekin denotatuko dira.
- Predikatu sinple eta predikatu konposatuen artean bereiztuko dugu. Adierazpen formalari dagokionean zatiezinak diren predikatuei, predikatu sinple deritze. Lotura logikoen bidez predikatu sinpleak konbinatuz sortutakoei, predikatu konposatu deritze.

Kuantifikatzaile Unibertsala

6.2. Definizioa

- "$\forall$x, P(x)" sententzia honela irakurriko da: "edozein x-rako, P(x) predikatua egiazkoa da". $\forall$ sinboloari kuantifikatzaile unibertsala deritzo eta "edozein" irakurriko da. X aldagaiak A aldakuntza-eremua badu, honako hau idatziko dugu: "$\forall x \in A$, P(x)" eta "A aldakuntza-eremuko edozein x-rako P(x) predikatua egiazkoa da" irakurriko da.

Kuantifikatzaile Existentziala

6.3. Definizioa

- "$\exists x$, P(x)" sententzia honela irakurriko da: "x bat existitzen da gutxienez, non P(x) predikatua egiazkoa den". $\exists$ sinboloari kuantifikatzaile existentzial deritzo eta "gutxienez bat existitzen da" irakurriko da. x aldagaiak A aldakuntza-eremua badu, honako hau idatziko dugu: "$\exists x \in A$, P(x)" eta "A aldakuntza-eremuko x bat existitzen da, non P(x) predikatua egiazkoa den" irakurriko da.
- Honako hau kontuan izan behar dugu:
  1. "$\forall x \in A$, P(x)" sententziaren ukapena "$\exists x \in A$, ez P(x)" izango da eta "x bat existitzen da gutxienez, non P(x) predikatua gezurrezkoa den" irakurriko da.
  2. "$\exists x \in A$, P(x)" sententziaren ukapena "$\forall x \in A$, ez P(x)" izango da eta "edozein x-rako, P(x) predikatua gezurrezkoa da" irakurriko da. "$\exists x \in A$, P(x)" sententziaren ukapena "$\nexists x \in A$, P(x)" eran ere adiraziko da.

Predikatuen Baliokidetasuna eta Inplikazioa

6.4. Definizioa

- A aldakuntza-eremua duten P(x) eta Q(x) bi predikatu baliokideak dira baldin eta "$\forall x \in A,\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$" egiaztatzen bada, $P(x) \equiv Q(x)$ denotatuz.

6.5. Definizioa

- Izan bitez A aldakuntza-eremua duten P(x) eta Q(x) bi predikatu. P(x) predikatuak Q(x) predikatua inplikatzen duela diogu baldin eta "$\forall x \in A,\ P(x) \rightarrow Q(x)$" egiaztatzen bada, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ denotatuz.

6.6. Proposizioa

1. $[\forall x \in A,\ P(x)] \wedge (a \in A) \Rightarrow P(a)$
2. $(a \in A) \wedge P(a) \Rightarrow \exists x \in A,\ P(x)$

Aurkibidee

Ariketak I

1. Ariketa

- Aurkitu $P = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$ eran definitutako p, q eta r hiru aldagaiko P proposizioaren egia-funtzioa adierazten duen taula.

2. Ariketa

- Aurkitu $P{=}\neg[(p \vee \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg q)]$ eran definitutako p eta q bi aldagaiko P proposizioaren egia-funtzioa adierazten duen taula.

3. Ariketa

- Sinplifikatu honako adierazpen logiko hau: $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Ariketak II

4. Ariketa

- Froga ezazue $P=[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$ eran definitutako p eta q bi aldagaiko P proposizioa tautologia bat dela.

5. Ariketa

- Froga ezazue $P=\neg(q \rightarrow p)\wedge p$ eran definitutako p eta q bi aldagaiko P proposizioa kontraesan bat dela.

6. Ariketa

- Kontsidera ditzagun $P=p\wedge\neg q\wedge(p\wedge\neg q \rightarrow p\vee q)\rightarrow p\vee q$ eta $Q=\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge \neg q)\wedge p\wedge\neg q$ eran definitutako p eta q bi aldagaiko P eta Q proposizioak. Froga ezazue P tautologia bat dela eta Q kontraesan bat dela.

Ariketak III

7. Ariketa

- Froga ezazue P, Q eta R edozein proposizio izanik honako baliokidetasunak egiaztatzen direla: $P \to Q \wedge R \equiv (P \to Q) \wedge (P \to R)$, $P \vee Q \to R \equiv (P \to R) \wedge (Q \to R)$ eta $P \to Q \vee R \equiv \neg R \to (P \to Q)$.

8. Ariketa

- Froga ezazue P, Q eta R edozein proposizio izanik honako baliokidetasuna egiaztatzen dela: $\neg P \vee Q \vee R \equiv P \wedge \neg Q \to R$.

9. Ariketa

- Froga ezazue P, Q eta R edozein proposizio izanik honako hau egiaztatzen dela: $P \wedge Q \Rightarrow P \vee R$.

Ariketak IV

10. Ariketa

- Froga ezazue P eta Q edozein proposizio izanik honako hauek egiaztatzen direla:
  1. $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$
  2. $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
  3. $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

11. Ariketa

- Froga ezazue P eta Q edozein proposizio izanik honako hau egiaztatzen dela: $P \wedge \neg Q \rightarrow C \Leftrightarrow P \rightarrow Q$, C kontraesan bat izanik.

12. Ariketa

- Izan bitez $P_1 = p \vee \neg r$, $P_2 = p \rightarrow \neg q$ eta $Q = q \rightarrow \neg r$ eran definitutako P_1, P_2 eta Q proposizioak. Froga ezazue $(P_1, P_2; Q)$ arrazonamendua baliozkoa dela.

Ariketak V

13. Ariketa

- Izan bitez $P_1 = p \vee q$, $P_2 = \neg p$ eta $Q = \neg q$ eran definitutako P_1, P_2 eta Q proposizioak. Froga ezazue (P_1,P_2;Q) arrazonamendua gezurrezkoa dela.

14. Ariketa

- Ukatu honako proposizio hauek:
  1. "Martak matematika gainditu du eta Alfontsok kimika gainditu du eta Fernandok fisika gainditu du"
  2. "Pedrok matematika gainditu du edo Luisak marrazketa gainditu du"
  3. "Eguzkia egiten badu belarra lehortu egingo da"

15. Ariketa

- Aztertu honako sententzia hau egiazkoa edo gezurrezkoa den: "Gezurra da gizona narrastia dela eta Lurra izar bat dela, edo Paris Frantzian dagoela"

Ariketak VI

16. Ariketa

- Kontuan izanik baldin eta hodeiak badaude orduan euria egiten duela; uda ez bada, hodeiak daudela eta euria ari duela; uda izango ote da?

17. Ariketa

- Demagun Jonek gimnasia egiten badu argaldu egiten dela eta lorik egiten ez badu logura dela. Froga ezazue loditu egiten bada edo logurarik ez badu, orduan ez du gimnasia egiten edo ez lo egiten du.

18. Ariketa

- Aztertu honako arrazonamendu honen balioztasuna: "Mariak tenisera jokatzen du, erre egiten du edo abestu egiten du. Mariak ez du tenisera jokatzen eta ez du erretzen. Ondorioz Mariak abestu egiten du"

Ariketak VII

19. Ariketa

- Kontsidera ditzagun $P_1 = \neg p \vee r$, $P_2 = p \wedge \neg q$ eta $P_3 = r \rightarrow q$ eran definitutako P_1, P_2 eta P_3 premisak. Froga ezazue P_1, P_2, P_3 premisa multzoa oinarri-gabekoa dela.

20. Ariketa

- Izan bitez $P_1 = q \rightarrow p$, $P_2 = \neg p \vee \neg r$ eta $P_3 = q \vee r$ eran definitutako P_1, P_2 eta P_3 premisak. Froga ezazue P_1, P_2, P_3 premisa multzoa oinarri-gabekoa dela.

21. Ariketa

- Izan bitez $P_1 = p \rightarrow q$, $P_2 = p \vee q$ eta $P_3 = q \wedge r$ eran definitutako P_1, P_2 eta P_3 premisak. Froga ezazue P_1, P_2, P_3 premisa multzoa funtsezkoa dela.

Ariketak VIII

22. Ariketa

- 11. ariketaren ondorioz $P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ egiaztatzen bada, C kontraesan bat izanik, $P \Rightarrow Q$ ere egiaztatuko da. Absurdo bidezko metodoa erabiliz, $P \Rightarrow Q$ erako arrazonamendu bat frogatzea $P \wedge \neg Q \Rightarrow C$ arrazonamendua frogatzean datza. Absurdo bidezko metodoa erabiliz, froga ezazue honako arrazonamendu hau baliozkoa dela: $(\neg p \vee \neg q,\ p \rightarrow r,\ q \vee \neg r;\ \neg p)$.

Ariketak IX

23. Ariketa

- Izan bitez honako predikatu hauek:
  - P(x): $x \leq 4 \ \forall x \in \mathbb{Z}^+$
  - Q(x): $x+3$ bikoitia $\forall x \in \mathbb{Z}^+$

1. Aurkitu honako hauen egiazko balioak: $P(1)$, $P(5)$, $Q(2)$, $Q(7)$, $P(1) \wedge Q(7)$, $P(7) \vee Q(7)$, $\neg P(2)$, $\neg Q(6)$, $\neg[P(4) \vee Q(3)]$ eta $P(2) \rightarrow Q(5)$.
2. Aurkitu zenbaki oso positibo guztiak non $P(x) \wedge Q(x)$ predikatu konposatua egiazkoa den.
3. Aurkitu zenbaki oso positibo guztiak non $P(x) \vee Q(x)$ predikatu konposatua egiazkoa den.
4. Aurkitu zenbaki oso positibo guztiak non $P(x) \rightarrow Q(x)$ predikatu konposatua egiazkoa den.