eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

MATEMATIKA APLIKATUA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

KALKULUA

AZTERKETA PARTZIALA. 2018ko Apirilaren 13an

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$

b) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$

---

a) atalaren ebazpena

$$\int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t \\ 1+x^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x\,dx = t\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t^2}\,t\,dt = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2} + C$$

b) atalaren ebazpena

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t\,dt}{1+t^4} = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(t^2\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + C$$

2. Ariketa

Izan bedi $[D]$ hurrengo eran definitutako domeinu laua:

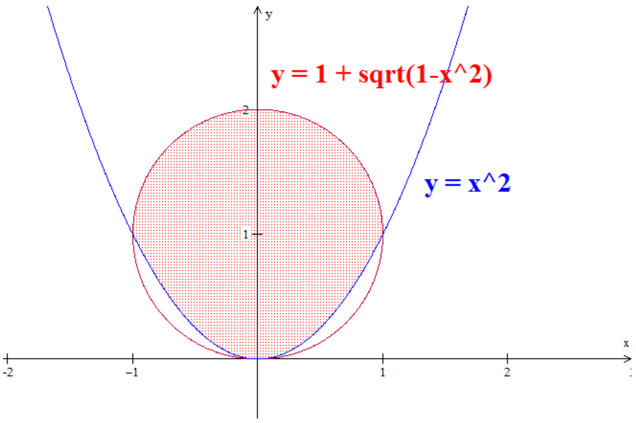
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-2y\le 0,\quad y\ge x^2\right\}$$

Integral mugatuaren kontzeptua erabiliz, kalkulatu:

1.- $[D]$ domeinu lauaren azalera

2.- $[D]$ absiza ardatzen inguruan biratzerakoan sortutako bolumena.

Ebazpena:



Ebakidura puntuak kalkulatu egiten dira:

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2-2y=0\\ y=x^2\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad (x=0;\ y=0)\vee(x=\pm 1;\ y=1)$$

Irudiari begira esan daiteke kalkulatu beharreko azalera hurrengoa dela:

$$A=2\left[\int_0^1 1+\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx\right]=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{4}{3}+J=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{8+3\pi}{6}\quad u^2$$

$$J=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l}x=\sin(t)\\ dx=\cos(t)\,dt\\ x=1\to t=\dfrac{\pi}{2}\\ x=0\to t=0\end{array}\right\|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Sortutako bolumena $[D]$ x ardatzaren inguruan biratzerakoan hurrengoa da:

$$V = 2\pi\int_0^1 \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx = 2\pi\int_0^1 \left(2-x^2-x^4+2\sqrt{1-x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{22}{15}+\frac{\pi}{2}\right] \quad u^3$$

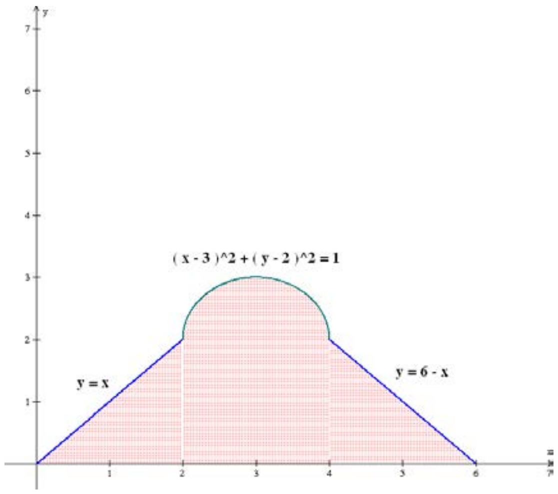
3. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena honako integral honetan:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx \int_0^{2+\sqrt{1-(x-3)^2}} f(x,y)\,dy + \int_4^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)\,dy$$

eta kalkulatu integrazio domeinuaren azalera

Ebazpena:



Integrazio ordena alderantzikatuko dugu. Domeinua bi zatitan deskonposatuko dugu:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad (x-3)^2 = 1-(y-2)^2 \quad \rightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{1-(y-2)^2}$

$$I = \int_0^2 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx + \int_2^3 dy \int_{3-\sqrt{1-(y-2)^2}}^{3+\sqrt{1-(y-2)^2}} f(x,y)\,dx$$

$$I = \int_0^2 dy \int_y^{6-y} dx + \int_2^3 dy \int_{3-\sqrt{1-(y-2)^2}}^{3+\sqrt{1-(y-2)^2}} dx = \int_0^2 (6-2y)\,dy + \int_2^3 2\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy =$$

$$= \left[6y - \frac{2y^2}{2} \right]_0^2 + J = 8 + \frac{\pi}{2} \quad u^2$$

non J hurrengo eran ebazten dugun:

$$J=\int_2^3 2\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy=\left\|\begin{array}{l} y-2=\sin(t)\\ dy=\cos(t)\,dt\\ y=3\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ y=2\rightarrow t=0\end{array}\right\|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

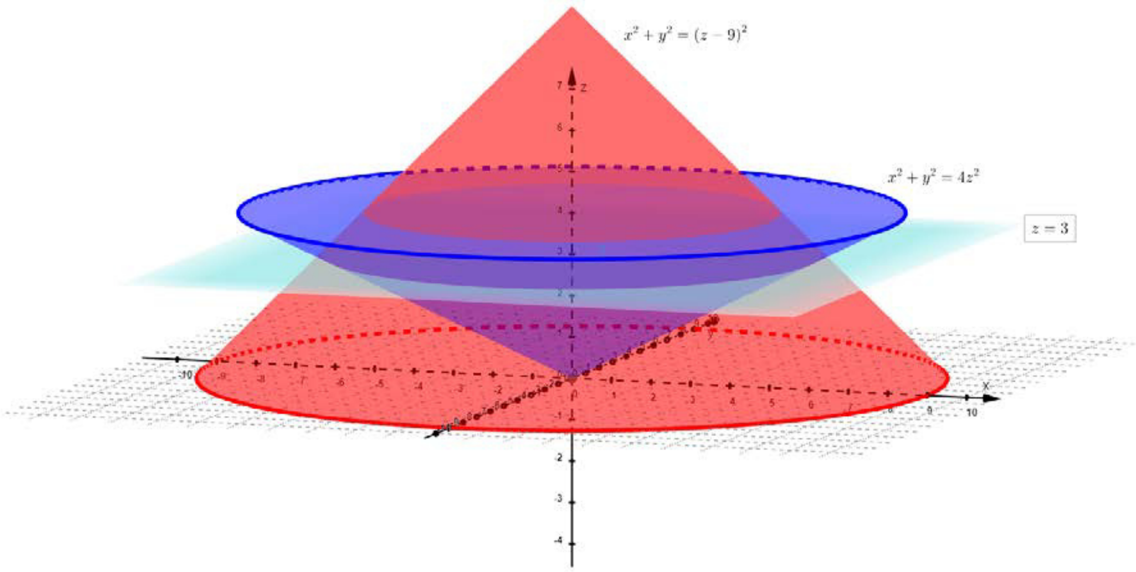
4. Ariketa

Integral hirukoitzak erabiliz, hurrengo gainazalek mugatutako $[C]$ gorputz homogeneoaren bolumena kalkulatu:

$$x^2+y^2-4z^2=0 \ \ (z\geq 0), \quad x^2+y^2-z^2+18z-81=0 \ \ (z\leq 9)$$

Ebazpena:

Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez bi kono ditugu.



Bi konoek mugatutako [C] gorputzaren bolumena, kono urdinetik ($x^2+y^2-4z^2=0$) kono gorrirakoa ($x^2+y^2=(z-9)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

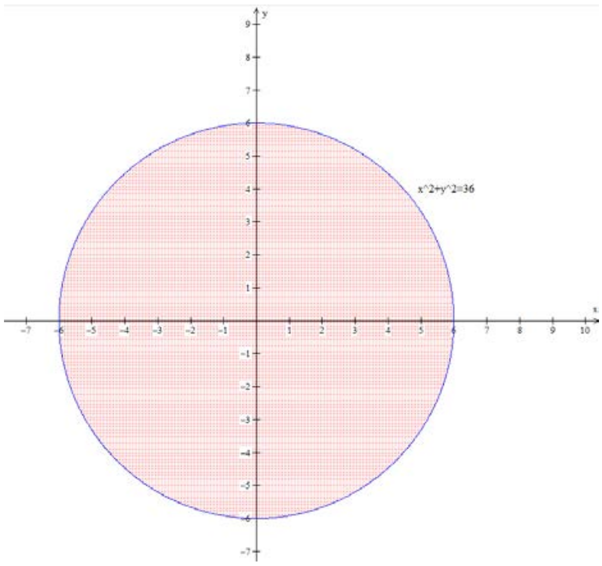
$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=4z^2 \\ x^2+y^2=(z-9)^2 \end{cases}\right\} 4z^2=(z-9)^2 \quad \Rightarrow \quad 4z^2=z^2+18z-81 \quad \Rightarrow \quad 3z^2-18z+81=0 \quad \Rightarrow \quad z^2-6z+27=0$$

$$z^2-6z+27=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=-9 \\ \boxed{z=3} \end{cases}$$

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \\ J(\rho,\theta,z) = \rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \rho/2 \\ x^2 + y^2 = (z-9)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = (z-9)^2 \quad \Rightarrow \quad z = 9-\rho \end{cases}$$

Behin z-ren mugak zehaztuta daudela, XOY planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2 + y^2 = 36$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta R=6.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$\theta = [0, 2\pi]; \quad \rho = [0,6]; \quad z = [\rho/2, 9-\rho]$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukooitza planteatzen dugu:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^6 \rho\, d\rho \int_{\rho/2}^{9-\rho} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^6 \rho(9-\rho-\frac{\rho}{2})d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^6 (9\rho - \frac{3\rho^2}{2})d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{2} \right]_0^6 d\theta = \pi\left[9\cdot 6^2 - 6^3\right] = 36\pi\left[9 - 6\right] = 108\pi$$

$$\boxed{V = 108\pi \quad u^3}$$

KALKULUA

AZTERKETA PARTZIALA. 2019ko martxoaren 29an

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ (ez ebatzi berehalako integral bat bezala)

(2 puntu)

---

a) $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx = \left\| \begin{matrix} t=\tan x & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}(t+1)}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)(t+1)}$$

Zatiki sinpleetan deskonposatuz:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t+1)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{C}{(t+1)}$$
$$t^2 = (At+B)(t+1) + C(1+t^2)$$
$$t^2 = At^2 + At + Bt + B + C + Ct^2$$

Koefizienteak berdinduz:

$$\left.\begin{matrix} t^2 \to 1 = A+C \\ t \to 0 = A+B \\ \text{t. i. } \to 0 = B+C \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{matrix}\right.$$

Beraz:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(t+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{4}\int \frac{2t}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(t\right) + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) + C = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\tan^2 x+1\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln\left(\tan x+1\right) + C}$$

b) Zatika integratuz:

$$I = \int \arcsin x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = (\arcsin x)'\, dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y = \arcsin x & \Rightarrow & x = \sin y & \overset{\mathrm{D}}{\Rightarrow} & 1 = \cos y \cdot y' & \Rightarrow \\ y' = \dfrac{1}{\cos y} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x - \int x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (-2)x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx =$$

$$= x\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C = \boxed{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

2. Ariketa

Kalkulatu hurrengo kurbek mugatutako [D] eskualdearen perimetroa:

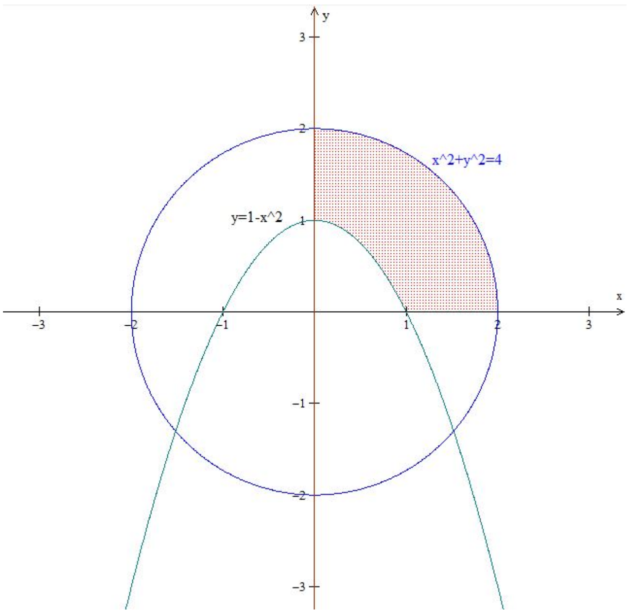
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge 1 - x^2, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0 \right\}$$

Oharra: edozein luzera kalkulatzeko integral mugatua erabili behar da.

(3 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, D domeinuaren adierazpen grafikoa irudikatu egiten dugu. Lehenengo koadrantean ($y \ge 0, \quad x \ge 0$) parabolaren ($y \ge 1 - x^2$) eta zirkunferentziaren ($x^2 + y^2 \le 4$) arteko eskualdea da hain zuzen ere D domeinu laua.



Perimetroa kalkulatzeko, eskualdea lau zatitan banatuko dugu:

- L_1: lehenengo koadranteko zirkunferentzia laurdenaren luzera.
- L_2: lehenengo koadranteko parabola zatiaren luzera.
- L_3: D eskualdea mugatzen duen x ardatzaren zatiaren luzera.
- L_4: D eskualdea mugatzen duen y ardatzaren zatiaren luzera.

L_1 kalkulatzeko, zirkunferentziaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$x^2 + y^2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{4 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad (y')^2 = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

L_1-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_1=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}dx=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\left[2\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2=2\frac{\pi}{2}=\boxed{\pi}$$

L_2 kalkulatzeko, parabolaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$y=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x \quad\Rightarrow\quad (y')^2=4x^2$$

L_2-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_2=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx$$

Integral mugagabea metodo alemaniarra erabiliz ebatziko dugu eta gero [0,1] tartean ebaluatuko dugu L_2 lortzeko.

$$I_1=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{1+4x^2}+M\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Espresio guztia deribatuz

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}=A\sqrt{1+4x^2}+(Ax+B)\frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}+\frac{M}{\sqrt{1+4x^2}} \quad\Rightarrow\quad 1+4x^2=A\left(1+4x^2\right)+4x(Ax+B)+M$$

Ekuazio sistema ebatzi behar dugu koefiziente indeterminatuak lortzeko.

$x^2:\quad 4=4A+4A \quad\Rightarrow\quad A=1/2$

$x\ :\quad 4B=0 \quad\Rightarrow\quad B=0$

$x^0:\quad 1=A+M \quad\Rightarrow\quad M=1/2$

$$I_1=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|+C$$

Beraz, L_2 honela geratzen da:

$$L_2=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right|=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

L_3-ren kalkulua egiteko, y=0 zuzena integratu beharra dago:

$$L_3=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2\sqrt{1}dx=\boxed{1}$$

L_4-ren kalkulua egiteko, x=0 zuzena integratu beharra dago, kasu honetan y-rekiko integratuko dugu:

$$L_4 = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1}\,dy = \boxed{1}$$

Azkenik,

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \pi + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| + 2}$$

3. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena honako integral honetan:

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{4-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{2-\sqrt{-(y-2)}}^{2+\sqrt{-(y-2)}} f(x,y)\,dx$$

eta lortutako integrala erabiliz kalkulatu integrazio domeinuaren azalera.

(2 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, integrazio domeinua identifikatu egiten dugu:

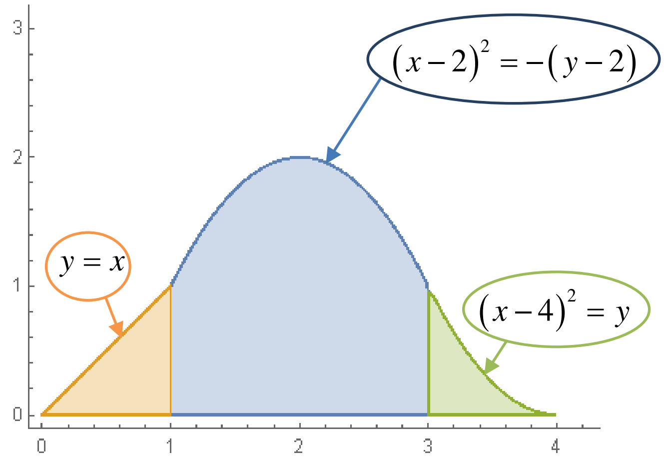
Lehenengo integralaren limiteak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=0\rightarrow \text{zuzena} \\ y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ x=y\rightarrow \text{zuzena} \\ x=4-\sqrt{y}\rightarrow (x-4)=-\sqrt{y}\rightarrow (x-4)^2=y\rightarrow \text{OY ardatzarekiko paraleloa den ardatza duen parabola,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{erpina (4,0) puntuan dago} \end{cases}$$

Bigarren integralaren limiteak, aldiz, hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ y=2\rightarrow \text{zuzena} \\ \left.\begin{array}{l} x=2-\sqrt{-(y-2)} \\ x=2+\sqrt{-(y-2)} \end{array}\right\}\rightarrow (x-2)=\pm\sqrt{-(y-2)}\rightarrow \underbrace{(x-2)^2=-(y-2)}_{\downarrow} \\ \qquad\qquad \text{OY ardatzarekiko paraleloa den simetria ardatza duen parabola, erpina (2,2) puntuan dago} \end{cases}$$

Beraz, domeinua hurrengoa da:



y lehenengo integrazio aldagaitzat hartuz gero domeinua ez da erregularra eta hiru domeinu partzial erregularretan banandu beharra dago:

- Lehenengo domeinu partzialean x aldagaiaren mugak 0 eta 1 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y=x$ zuzena.
- Bigarren domeinu partzialean x aldagaiaren mugak 1 eta 3 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $(x-2)^2=-(y-2)$ parabola.
- Hirugarren domeinu partzialean x aldagaiaren mugak 3 eta 4 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y=(x-4)^2$ parabola.

Beraz:

$$\boxed{I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{2-(x-2)^2} f(x,y)\,dy+\int_3^4 dx\int_0^{(x-4)^2} f(x,y)\,dy}$$

Azaleraren kalkulua orduan hurrengo eran egin daiteke:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy+\int_1^3 dx\int_0^{2-(x-2)^2} dy+\int_3^4 dx\int_0^{(x-4)^2} dy=$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3\left(2-(x-2)^2\right)dx+\int_3^4 (x-4)^2\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_3^4=\frac{1}{2}+6-\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{25}{6}u^2}$$

4. Ariketa

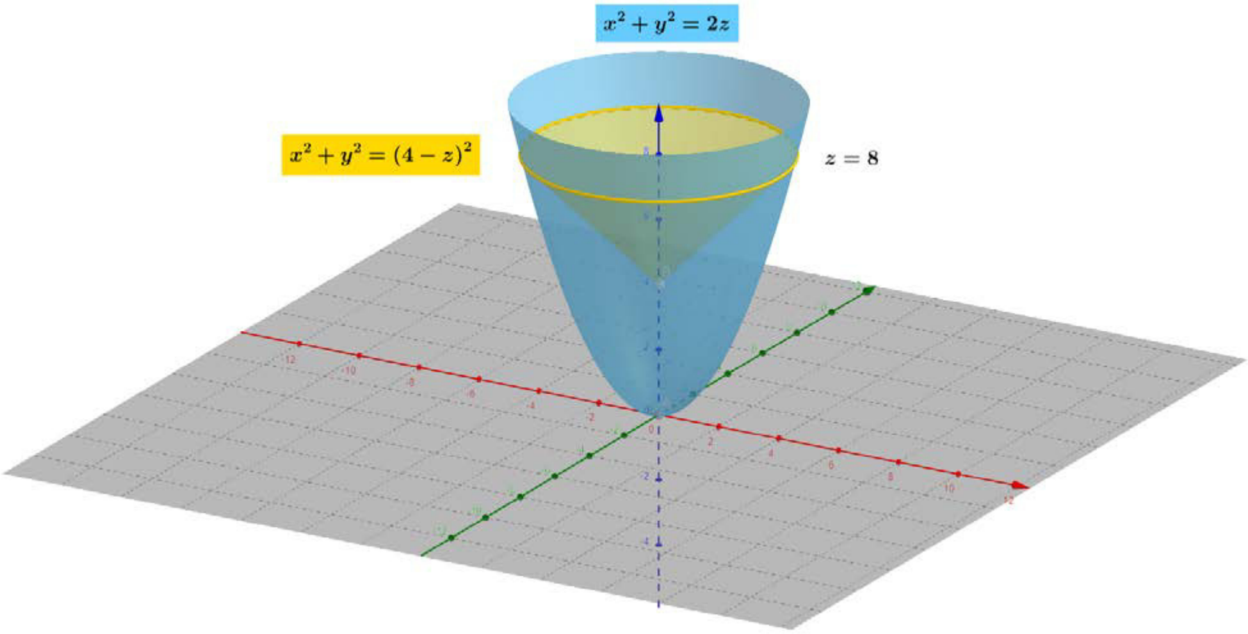
Integral hirukoitzak erabiliz, hurrengo gainazalek mugatutako [C] gorputz homogeneoaren grabitate zentroa kalkulatu:

$$x^2+y^2-(4-z)^2 \geq 0 \;\; (z \geq 4), \quad x^2+y^2-2z \leq 0$$

(3 puntu)

Ebazpena:

Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez kono bat eta paraboloide bat ditugu.



Konoak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa ($x^2+y^2 \leq 2z$) eta konoaren kanpokoa ($x^2+y^2 \geq (4-z)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

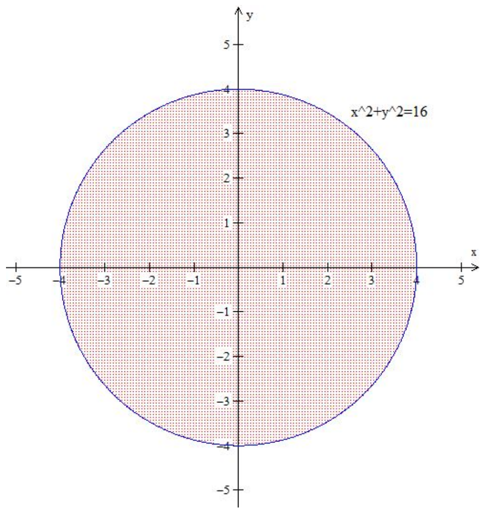
$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2=(4-z)^2 \end{cases}\right\} 2z=(4-z)^2 \;\Rightarrow\; 2z=z^2-8z+16 \;\Rightarrow\; z^2-10z+16=0 \;\Rightarrow\; z=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot1\cdot16}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{10\pm6}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \boxed{z=8} \\ z=2 \end{cases}$$

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \\ J(\rho,\theta,z)=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=2z \quad\Rightarrow\quad \rho^2=2z \quad\Rightarrow\quad z=\rho^2/2 \\ x^2+y^2=(4-z)^2 \quad\Rightarrow\quad \rho^2=(4-z)^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \boxed{z=4+\rho} \\ z=4-\rho \end{cases} \end{cases}$$

Behin z-ren mugak zehaztuta daudela, XOY planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=16$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta R=4.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$\theta=[0,2\pi]; \quad \rho=[0,4]; \quad z=[\rho^2/2, 4+\rho]$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho\,d\rho\int_{\rho^2/2}^{4+\rho}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho(4+\rho-\frac{\rho^2}{2})d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4(4\rho+\rho^2-\frac{\rho^3}{2})d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2\rho^2+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{8}\right]_0^4 d\theta=2\pi\left[32+\frac{64}{3}-\ 32\right]=\frac{128\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{128\pi}{3}\quad u^3}$$

Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko z_c koordenatua soilik lortu behar dugu [C] gorputza simetrikoa baita OX eta OY ardatzekiko. Beraz, $z_C = \frac{1}{V}\int\int\int_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\, d\rho \int_{\rho^2/2}^{4+\rho} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\left(\left(4+\rho\right)^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left(16\rho + 8\rho^2 + \rho^3 - \frac{\rho^5}{4}\right)d\rho =$$

$$= \pi\left[8\rho^2 + \frac{8\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{24}\right]_0^4 = \pi\left[2^3\cdot 2^4 + \frac{2^3\cdot 2^6}{3} + \frac{2^8}{2^2} - \frac{2^{12}}{3\cdot 2^3}\right] = \pi\left[2^7 + \frac{2^9}{3} + 2^6 - \frac{2^9}{3}\right] = \pi 2^6\left(2+1\right) = 192\pi$$

Beraz, z_c koordenatua hurrengoa da:

$$z_C = \frac{1}{V}\int\int\int_C z\,dx\,dy\,dz = \frac{3\cdot 192\pi}{128\pi} = \frac{9}{2}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0,0,\frac{9}{2}\right)$ da.