Konbinatoria

Leire Garcia

1

1. Zenbaketa

⊛ **Baturaren erregela:**

Zeregin bateraezinak $n+m$ era egiteko.

⊛ **Biderkaduraren erregela:**

Zeregin osoa ondoz ondoko 2 azpizereginetan banatu badaitezke eta gainera azpizeregin bakoitza egiteko n eta m era badaude, orduan zeregin osoa burutzeko $n \cdot m$ era daude.

bata bestearen menpekoa

m era — n era

hau maiztundu — honetakoren bat aldatu

- **Aren Kardinal, $|A|$,** deritzo A multzoaren elementu kopuruari.

- **Gehiegizko zatidura:** $\boxed{\lceil m/n \rceil}$ (redondear hacia ↑)

- **Gutxiegizko zatidura:** $\boxed{\lfloor m/n \rfloor}$ (redondear hacia ↓)

⊛ **Usategiaren printzipioa** (Dirichlet-en printzipio laburtua):

m objetu n kutxan banatzen badira, non $m>n$ den, orduan kutxa bat existituko da gutxienez bi edo objektu gehiago dituen.

⊛ **Dirichlet-en printzipio orokortua**

kutxa bat existituko da, gutxienez $\lceil m/n \rceil$ objektu dituen eta beste bat gehienez $\lfloor m/n \rfloor$ objektu dituena.

- X multzo finitua eta $A \subset X$ bada orduan:

$$\boxed{|X-A| = |X| - |A|}$$

2. Aldakuntzak, permutazioak eta konbinazioak

Laginak eta selekzioak:

Konbinatorian 2 eragiketa daude:
- → multzo baten zati bat aukeratu
- → multzo baten elementuak ordenatu

- A multzoa bat. A-ren edozein azpimultzoari A-ren lagina da.

Multzo baten zati bat aukeratzea lagin bat definitzea da.

Lagin (n elem. kop; s-naka hartu)
- → ORDENATUA
  - → aldakuntza ($n>s$)
    - → ORDEZKAPEN GABE → $V_{n,s}$
    - → ORDEZKAPENAREKIN ⇒ $VR_{n,s} = V^R_{n,s} = n^s$
  - → permutazioa ($n=s$)
    - → ORDEZKAPEN GABE ⇒ $P_n = n!$ $\boxed{0! = 1}$ ⚠
    - → ORDEZKAPENAREKIN ⇒ $P_n^{n_1, n_2, \dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$
    - → ZIRKULAR
      ↳ $P'_n = (n-1)!$ posizio erlatiboa aldakuntza talde ⊗ da.
- → EZ-ORDENATUA
  - → ORDEZKAPEN GABE
    ↳ $C_{n,s} = C_n^s = \binom{n}{s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)!}$
  - → ORDEZKAPENAREKIN
    ↳ $C^R_{n,s} = C_{n+s-1,s}$

⊗ s-naka hartutako n elementuen aldakuntza sinpleak (ORDEZKAPEN GABEKO LAGIN ORDENATUA):

ⓝ elementu desberdin dituen multzoa. Eskuragai dauden ⓝ elementuetatik, ⓢ elementuz osatutako talde desberdinei, s-naka hartutako n elementuen aldakuntza sinple deritzo. Talde horietako bi desberdinak izango dira elementu desberdinak badituzte, edo bestela, elementu berdinak izanda ordena desberdinean kokatuta badaude ($n>s$).

- Biderkaduraren erregelaren arabera, saioak: $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-s+1)$ aukera posible ditu.
- aldakuntza sinpleen kopurua:

$$V_{n,s} = V_n^s = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-s+1) = \boxed{\frac{n!}{(n-s)!}}$$

s-naka hartutako n elementuen errepikatuzko aldakuntzak (Lagin ordenatua ordezkapenarekin)

s-naka hartutako n elementuen aldakuntzan elementuak errepikatzea posiblea da, kasu honetan gerta daiteke $s>n$ izatea.

- aldakuntzen kopurua:

$$\boxed{VR_{n,s} = V^{R}_{n,s} = n^{s}}$$

n elementuen permutazio sinpleak

Aldakuntza sinpleetan, $n=s$ bada, hots, selekzio bakoitzak eskuragai dauden n elementuak baditu, aldakuntza sinpleei n elementuen permutazio sinple deritze.

- Permutazio sinpleen kopurua:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Definizioz $0! = 1$ izango da

n elementuen errepikatuzko permutazioak $(n=s)$

n elementuz osatutako multzo bat, non n_1 elkarren artean berdinak diren eta era batekoak, n_2 berdinak diren ere baina beste era batekoak eta horrela jarraituz n_k elementu berdinak elkarren artean eta aurrekoekin desberdinak. Beraz $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ egiaztatuko da. n elementu horiek konbinatzeko aukera guztiei n elementuen errepikatuzko permutazioa deritze.

↳ Kopurua $P_n^{n_1,n_2,\dots n_k}$ deutatuko da eta honakoa da:

$$\boxed{P_n^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}}$$

- Permutazio zirkularra (P'_n) $(n=s)$

n elementu dituen multzo bat. n elementu horien taldekatze bat izango da, non edozein taldekatze honetako bat beste taldekatze batetik desberdinduko den, osotzen duten elementuen posizio erlatiboa aldatuta dutelako.

- Permutazio zirkularren kopurua:

$$\boxed{P'_n = (n-1)!}$$

⊛ s-naka hartutako n elementuen konbinazioak

(ORDENATU GABEKO LAGINA ORDEZKAPEN GABE)

n elementu dituen multzo bat. Emandako multzoarekin s elementu dituzten taldeak osatuko ditugu. Talde horietako bi, gutxienez elementu batean desberdintzen dira; eta berdinak balira bezala hartuko dira elementu berdinak badituzte, nahiz eta ordena desberdinean egon.

Selekzio horiei s-naka hartutako n elementuen konbinazio sinple deritze: $C_{n,s} = C_n^s$

- s-naka hartutako n elementuen konbinazio sinpleen kopurua:

$$\boxed{C_{n,s} = C_n^s = \binom{n}{s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)!}}$$

⊛ Errepikapenezko konbinazioak

(ORDENATU GABEKO LAGINA ORDEZKAPENAREKIN)

n elementu dituen multzo bat. Emandako multzoarekin s elementu dituzten taldeak osatuko ditugu, baina elementu $=$ edo errepikatuak kontsideratuko dira eta ez bakarrik $\neq$ direnak. Selekzio bakoitza s ordenako errepikapenezko konbinazio deritzo: $C_{n,s}^R$

- Konbinazioen kopurua:

$$\boxed{C_{n,s}^R = C_{n+s-1,\,s}}$$

3. Probabilitate diskretua

(5)

- Zorizko saio: igarri ezin den saioa, emaitza zoriaren menpe.
- E: lagin-espazioa. Zorizko saio baten emaitza guztien multzoa.
- E-ko edozein azpimultzoari, gertaera deritzo. E, (n) elementu dituen multzo finitua bada, orduan 2^n gertaera posible daude.
- Gertaera elemental: elementu bakarrez osatutako gertaera.
- E multzoa gertaera segurua da.
- ∅ multzoa ezinezko gertaera da.

4. Eragiketak gertaerekin

- A' edo $\bar{A} = E - A$ gertaerari, A gertaeraren aurkako gertaera deritzo.
- A eta B bi gertaera disjuntuak, $A \cap B = \emptyset$, bateraezinak dira.
- Bi gertaera bateraezin ezin dira aldi berean egiaztatu.
- Laplaceren erregela:
  Zenbait saiotan gertaera elemental guztiek probabilitate berdina dutela suposa dezakegu. Haietan gertaera baten probabilitatea: $\boxed{p(S) = \frac{\text{aldeko kasuak}}{\text{kasu posibleak}}}$ kalkulatuko da.

1. S gertaera edozein izanda: $p(S) \geq 0$.
2. Bi gertaera bateraezin $(A \cap B = \emptyset)$ badira, haien bildduraren probabilitatea: $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$
3. Probabilitate osoa 1 da: $p(E) = 1$.
4. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
5. $p(\emptyset) = 0$
6. $A \subset B$, $p(B) = p(A) + p(B - A)$
7. $A \subset B$, $p(A) \leq p(B)$
8. $A_1, A_2, \dots, A_k$ gertaera bateraezinak binaka: $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$
9. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
10. $S = \{x_1, x_2, \dots x_k\}$ bada, orduan $p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \dots p(x_k)$
11. $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eta $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n)$ badira, orduan S gertaera baten probabilitatea: $p(S) = \frac{\text{S-ren elementu kopurua}}{n}$

5. Probabilitate baldintzatua

* Izan bitez A eta B bi gertaera. A-rekiko B-ren probabilitate baldintzatua:

$$\boxed{p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$$

- A eta B independenteak direla diogu baldin:

$$\boxed{p(B/A) = p(B)}$$

- $A_1, A_2, \dots, A_n$, n gertaera bateraezinak binaka, honako baldintza egiaztatuz $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$, eta S gertaera bat:

$$\boxed{p(S) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(S/A_i)}$$

* Bayes-en formula:

non $p(S) \neq 0$ den.

- Aurreko familiako A_k edozein gertaera izanik:

$$\boxed{p(A_k/S) = \frac{p(A_k) \cdot p(S/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(S/A_i)}}$$