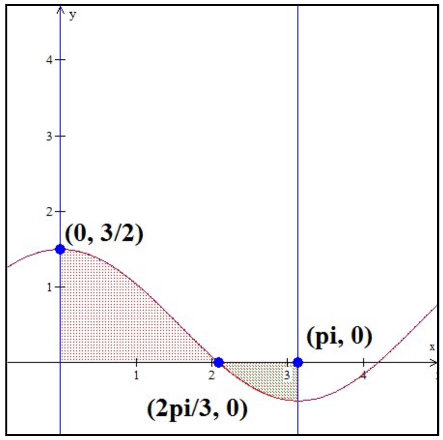
D) $y=\dfrac{1}{2}+\cos x$, absiza-ardatzak eta hurrengo zuzenek $x=0$ eta $x=\pi$ mugatzen duten azalera kalkulatu.

(6 puntu)

Ebazpena



Bere azalera integralen bidez kalkulatuko dugu:

$$A=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx=\left.\left(\frac{1}{2}x+\operatorname{sen}x\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}-\left.\left(\frac{1}{2}x+\operatorname{sen}x\right)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\quad u^2$$

---

2. ORRIA (20 puntu)

A) Izan bitez $O=(0,0)$, $A=(0,2)$, $B=(2,2)$, $C=(4,2)$ eta $E=(6,0)$ puntuak. $[D]$ domeinua hurrengo eran mugatuta dago:

- $\overline{OA}$ zuzenaren segmentua zeinak *O* eta *A* puntuak lotzen dituen.
- $\overline{AB}$ zuzenaren segmentua zeinak *A* eta *B* puntuak lotzen dituen.
- $(3,2)$ zentrodun eta 1 erradiodun zirkunferentziaren beheko erdi-zirkulua.
- $\overline{CE}$ zuzenaren segmentua zeinak *C* eta *E* puntuak lotzen dituen.
- $\overline{EO}$ zuzenaren segmentua zeinak *E* eta *O* puntuak lotzen dituen.

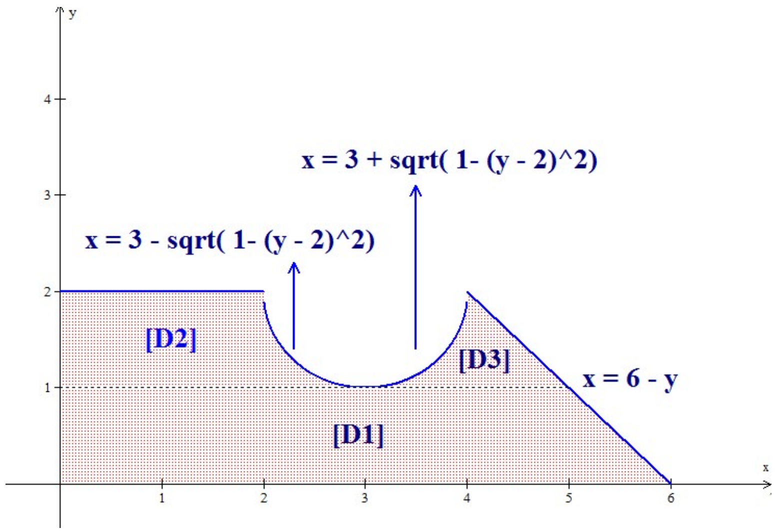
1.- $I=\iint_{[D]}f(x,y)\,dx\,dy$ integralean integrazio-limiteak bi era desberdinetan planteatu.

2.- Integral bikoitzak erabiliz, $[D]$ domeinu lauaren azalera kalkulatu, eta emaitza egiaztatu oinarrizko geometria erabiliz.

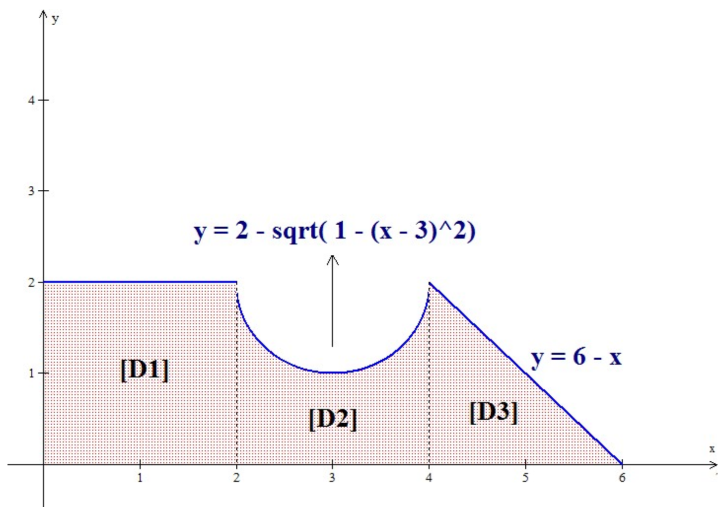
(6 puntu)

Ebazpena

Integralaren limiteak



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{6-y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{3-\sqrt{1-(y-2)^2}} f(x,y)\,dx \quad + \int_1^2 dy \int_{3+\sqrt{1-(y-2)^2}}^{6-y} f(x,y)\,dx$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^2 f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx \int_0^{2-\sqrt{1-(x-3)^2}} f(x,y)\,dy \quad + \int_4^6 dx \int_0^{-x+6} f(x,y)\,dy$$

Azaleraren kalkulua

$$A = \iint_D dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^2 dy + \int_2^4 dx \int_0^{2-\sqrt{1-(x-3)^2}} dy \quad + \int_4^6 dx \int_0^{-x+6} dy \quad =$$

$$= \int_0^2 2\,dx + \int_2^4 \left(2 - \sqrt{1-(x-3)^2}\right) dx + \int_4^6 \left(-x+6\right) dx =$$

$$\underset{*}{=} 2x\Big]_0^2 + \left(2x - \frac{1}{2}\left((x-3)\sqrt{1-(x-3)^2} + \operatorname{arcsen}(x-3)\right)\right)\Bigg]_2^4 + \left(-\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg]_4^6 =$$

$$= 4 + \left(\left(8 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(4 + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \left((-18+36) - (-8+24)\right) = 10 - \frac{\pi}{2} \quad u^2$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right) + C \qquad (*)$$

Geometrikoki

$$A_D = A_{\text{cuadrado}} + \left(A_{\text{cuadrado}} - \frac{1}{2}A_{\text{círculo}}\right) + A_{\text{triángulo}} = 2\cdot 2 + \left(2\cdot 2 - \frac{\pi\cdot 1^2}{2}\right) + \frac{2\cdot 2}{2} = 10 - \frac{\pi}{2} \quad u^2$$

B) Hurrengo EDA sailkatu eta ebatzi: $\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+1} - 2y\right)dx + \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+1} - 2x\right)dy = 0$

(4 puntu)

<u>*Ebazpena*</u>

$$\begin{cases} X(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} - 2y \\ Y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} - 2x \end{cases}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} - 2 = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Beraz, EDA **zehatza** da.

Ebazpen orokorra hurrengoa da:

$$\int_a^x \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 2y\right)dx + \int_b^y \left(\frac{2y}{a^2+y^2+1} - 2a\right)dy = C$$

Kalkuluak sinplifikatzeko hurrengo erabiliko dugu: $a = 0$; $b = 0$:

$$\int_0^x \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 2y\right)dx + \int_0^y \frac{2y}{y^2+1}dy = C$$

$$\left[\ln\left|x^2+y^2+1\right| - 2xy\right]_0^x + \left[\ln\left|y^2+1\right|\right]_0^y = C$$

$$\ln\left|x^2+y^2+1\right|-2xy-\ln\left|y^2+1\right|+\ln\left|y^2+1\right|=C \quad \rightarrow \quad \boxed{\ln\left|x^2+y^2+1\right|-2xy=C}$$

C) Hurrengo EDA ebatzi**:** $y''-y=xe^x$

(5 puntu)

<u>*Ebazpena*</u>

1.- Koefiziente indeterminatuen metodoa

<u>Elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra</u>:

$$r^2-1=0 \quad \rightarrow \quad r=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad y_h=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

<u>Ekuazio osoaren soluzio partikularra:</u>

$$f(x)=xe^x \quad \rightarrow \quad Y=x(Ax+B)\,e^x$$

$x(Ax+b)\,e^x$ erabiliko dugu $(Ax+B)\,e^x$ erabili beharrean. Horrela, ekuazio homogeneoaren soluzioetako batekin sortuko litzatekeen bikoiztasuna ekiditen da. (Y)-ren koefizienteak identifikatzeko, (Y) eta bere deribatuak ekuazio osoan ordezkatzen dira.:

$$Y=(Ax^2+Bx)\,e^x \quad \rightarrow \quad Y'=(2Ax+B)\,e^x+(Ax^2+Bx)\,e^x=[Ax^2+(2A+B)\,x+B]e^x \quad \rightarrow$$

$$Y''=(2Ax+2A+B)\,e^x+[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x=[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B)]e^x$$

$$Y''-Y=[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B)]e^x-(Ax^2+Bx)\,e^x=(4Ax+2A+2B)\,e^x\equiv x\,e^x$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4A=1 \\ 2A+2B=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \end{cases} \rightarrow \quad Y(x)=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\right)e^x$$

<u>Ekuazio osoaren soluzio orokorra</u>:

$$y=y_h+Y \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{4}(x^2-x)\,e^x}$$

2.- Parametroen aldakuntzaren metodoa

Parametroen aldakuntzaren metodoa erabiliz, ekuazio osoaren soluzio orokorra planteatzen da:

$$y=L_1(x)e^{-x}+L_2(x)e^x$$

(L_1') eta (L_2') hurrengo sisteman egonda:

$$\begin{cases} e^{-x}\, L_1'(x) + e^{x}\, L_2'(x) = 0 \\ -e^{-x}\, L_1'(x) + e^{x}\, L_2'(x) = x\, e^{x} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$L_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ xe^{x} & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{-x\, e^{2x}}{1+1} = -\frac{x}{2} e^{2x}$$

$$L_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & xe^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2}$$

$\int$ eragilea aplikatuz:

$$\boxed{L_1(x)} = \int L_1'(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int xe^{2x} dx = \left\{ \begin{matrix} x = u & \Rightarrow & du = dx \\ e^{2x}\, dx = dv & \Rightarrow & v = e^{2x}/2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx \right] = \boxed{-\frac{x}{4} e^{2x} + \frac{e^{2x}}{8} + A}$$

$$\boxed{L_2(x)} = \int L_2'(x)\, dx = \int \frac{x}{2} dx = \boxed{\frac{x^2}{4} + B}$$

Soluzio orokorra lortzen dugu:

$$\boxed{y} = L_1(x) e^{-x} + L_2(x) e^{-x} = \left[\left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{8} \right) e^{2x} + A \right] \cdot e^{-x} + \left(\frac{x^2}{4} + B \right) \cdot e^{x} =$$

$$= Ae^{-x} + Be^{x} + e^{x} \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{x^2}{4} \right) = \boxed{Ae^{-x} + Ke^{x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)\, e^{x}}$$