

**KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN
INGENIARITZAKO GRADUA**

MATEMATIKA DISKRETUA

2012-ko urtarrilaren 27a

1. ARIKETA

1.- Aztertu honako proposizio hauek tautologiak diren ala ez:

$$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$$

2.- Estatistikako azterketa batera 4 talde desberdineko ikasleak aurkeztu dira:

A taldea: 80 ikasle, hauetariko %35 emakumeak dira

B taldea: 72 ikasle, hauetariko %25 emakumeak dira

C taldea: k ikasle, hauetariko %80 gizonak dira

D taldea: 60 ikasle, hauetariko %85 gizonak dira

Areto nagusian biltzen dira eta zoriz bat aukeratzen da azterketa banatzeko, hau emakumea suertatuz. D taldekoa izateko probabilitatea $9/68$ bada, zenbat ikasle daude C taldean?

3.- Kontsidera dezagun $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441, 1323\}$ multzoa, non honako erlazioa definitu baita:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \text{ eta } y \text{ zenbakiek zatitzaile lehen berdinak dituzte}$$

Froga ezazue \mathcal{R} baliokidetasun-erlazioa dela A multzoan eta lortu baliokidetasun-klaseak.

4.- Izan bitez $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioak honela definituta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 2$$

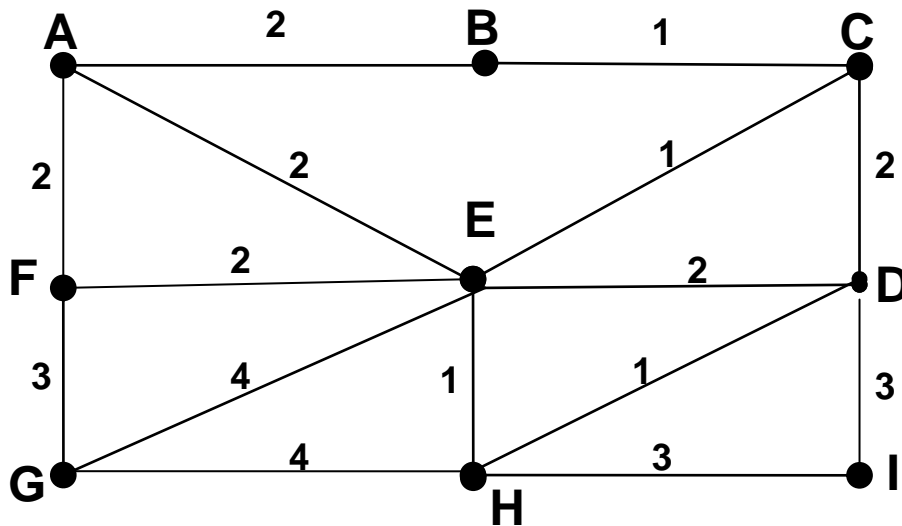
- Aurkitu f eta g funtzioen izate-eremuak eta irudi-multzoak.
- Sailkatu f eta g .
- Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$, eta hal bada, f^{-1} , g^{-1} .

2. ARIKETA

1.- Indukzio-metodoa erabiliz, frogatu ezazue honako hau:

$$3 + 3.5 + 3.5^2 + \dots + 3.5^n = \frac{3 \cdot 5^{n+1} - 1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.- Izan bedi G grafo haztatua honela adierazita:



A) Arkuen pisuak kontuan izan gabe:

- Arrazoitu g leuna bada, eta baieztatu Euler-en formula.
- Aurkitu A-tik I-rako bide bat bidezidorra ez dena, A-tik I-rako bidezidor bat ibilbidea ez dena eta A-tik I-rako ibilbide bat.
- Aurkitu A-tik A-rako bide itxi bat zirkuitua ez dena, A-tik A-rako zirkuitu bat zikloa ez dena eta A-tik A-rako ziklo bat.
- Eraiki 8 erpin dituen G-ren H azpigrafo bat, E erpina barnean duena, eta bidezidor eulertarra duena. Zehaztu bidezidor hori.

B) Kruskal-en algoritmoa erabiliz, kalkulatu G grafo haztatuaren T zuhaitz estaltzaile minimala.

3.- Kontsidera dezagun honako diferentzietako ekuazio hau:

$$y(k+4) - 3y(k+3) - 3y(k+2) + 11y(k+1) - 6y(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

a.- Aurkitu aurreko ekuazioaren soluzioen funtsezko multzo bat.

b.- Aurkitu (1)-en soluzio orokorra.

c.- Aurkitu $y(0) = 2$, $y(1) = -1$, $y(2) = 5$, $y(3) = -7$ hastapen-baldintzak egiaztatzen dituen soluzio partikularra.

KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN

INGENIARITZAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2013-ko urtarrilaren 14a

1. ARIKETA

1.- Frogatu honako baliokidetasuna propietateak erabiliz eta egia-taularen bidez:

$$q \wedge [(p \vee q) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg p)] \equiv q \wedge (q \vee p)$$

(6 puntu)

2.- aztertu honako arrazonamendu logikoaren baliagarritasuna:

$$((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), r \rightarrow t, \neg t ; \neg p)$$

(5 puntu)

3.- Utopiako Unibertsitateko konputagailu-zientzien saileko lehen kurtso 100 ikasleetako bakoitzak honako irakasgaietako bat gutxienez ikasten dute. matematika, elektronika eta kontabilitatea. Jakinda 65 ikaslek matematika ikasten dutela, 45 ikaslek elektronika, 42 ikaslek kontabilitatea, 20 ikaslek matematika eta elektronika, 25 ikaslek matematika eta kontabilitatea eta 15 ikaslek elektronika eta kontabilitatea, aurkitu:

- a.- Hiru irakasgaiak ikasten duten ikasle kopurua.
- b.- Matematika eta elektronika, baina ez kontabilitatea ikasten duten ikasle kopurua.
- c.- Elektronika bakarrik ikasten duen ikasle kopurua.

(7 puntu)

4.- Kontsidera dezagun honako erlazioa \mathbb{R}^2 multzoan:

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

Aztertu \mathcal{R} erlazioak egiaztatzen dituen propietateak.

\mathcal{R} baliokidetasun-erlazioa al da?

Baiezkoan, aurkitu $C[(0,0)]$.

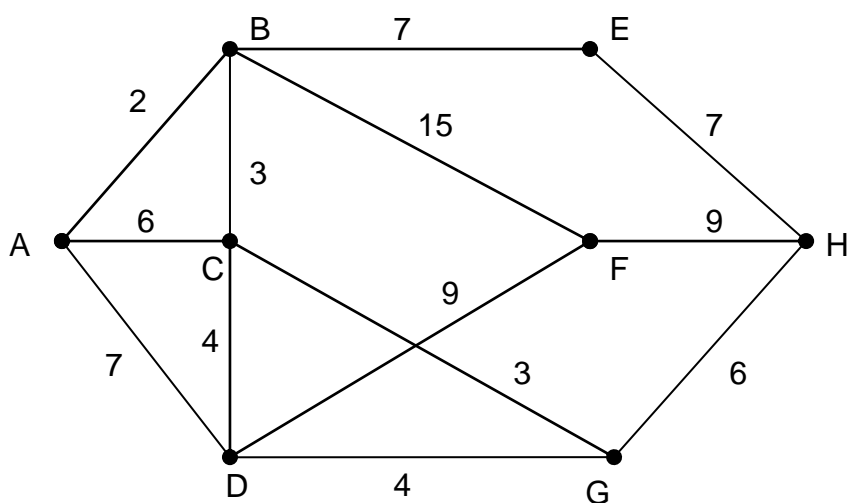
(7 puntu)

2. ARIKETA

1.- Indukzio-metodoa erabiliz, frogatu:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 1 \quad (5 \text{ puntu})$$

2.- Izan bedi honako G grafo haztatu hau:



A) Arkuen pisuak kontuan izan gabe:

a) Aurkitu A-tik H-rako bide bat bidezidorra ez dena, A-tik H-rako bidezidor bat ibilbidea ez dena eta A-tik H-rako ibilbide bat.

b) Aurkitu A-tik A-rako bide itxi bat zirkuitua ez dena, A-tik A-rako zirkuitu bat zikloa ez dena eta A-tik A-rako ziklo bat.

c) Eraiki 6 erpin dituen G-ren H azpigrafo bat, E erpina barnean duena, eta bidezidor euleriarra duena. Zehaztu bidezidor hori.

B) Dijkstra-ren algoritmoa erabiliz, lortu A erpinetik grafoaren beste erpinetara dagoen distantzia minimoa. (15 puntu)

3.- 40 karta dituen karta-sorta batetik 4 hartzen dira. Zein da palo desberdinetakoak izatearen probabilitatea? (5 puntu)

KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN INGENIARITZAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2013-ko uztailak 3

1. ARIKETA

1.- Egia al da $[(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg q)] \leftrightarrow [q \rightarrow (\neg q \wedge p)]$ adierazpena?

(6 puntu)

2.- Aztertu honako arrazonamendu logikoaren baliagarritasuna:

$$(p \rightarrow \neg q, p \wedge r, q \vee r; r)$$

(6 puntu)

3.- Inkesta bat egin da 60 pertsonako talde baten zein umorezko aldizkari irakurtzen duten jakiteko, honako emaitza hauek lortuz::

25 pertsonak "El jueves" irakurtzen dute

26 pertsonak "La Kodorniz" irakurtzen dute

26 pertsonak "La Rotativa" irakurtzen dute

8 pertsonak ez dute aldizkaririk irakurtzen

9 pertsonak "El jueves" eta "La Rotativa" irakurtzen dituzte

11 pertsonak "El jueves" eta "La Kodorniz" irakurtzen dituzte

8 pertsonak "La Kodorniz" eta "La Rotativa" irakurtzen dituzte

a. Zenbat pertsonak irakurtzen dituzte hiru aldizkariak?

b. Zehaztu aldizkari bakarra irakurtzen dutenen kopurua.

(6 puntu)

4.- $A = \{12, 16, 17, 26, 29, 35, 52, 53\}$ multzoan honako erlazioa definituko da:

$aRb \Leftrightarrow a$ – ren zifren batura eta b – ren zifren batura berdinak dira,

a eta b A – ren edozein elementu izanik

a. Frogatu baliokidetasun-erlazio bat dela .

b. Zenbat baliokidetasun-klase daude? Zehaztu zeintzuk diren.

(7 puntu)

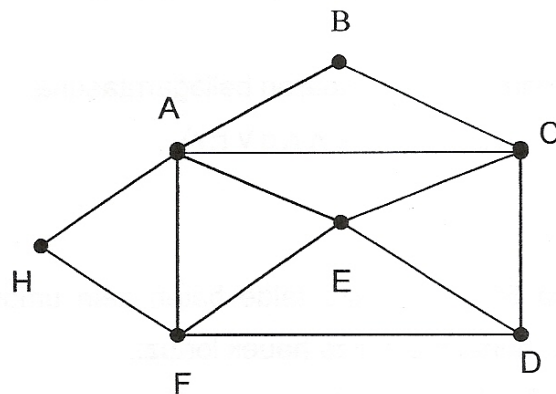
2. ARIKETA

1.- Frogatu honako berdintza hau, indukzio metodoa erabiliz:

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(8 puntu)

2.- Kontsidera dezagun honako G grafo hau:



- Arrazoitu G grafo leuna den ala ez eta baiezkotan konprobatu Euler-en formula.
- G grafo euleriarra al da?
- G-ren arku guztiek 4 pisu berdina dutela suposatuz, **Kruskal-en algoritmoa erabiliz**, kalkulatu G-ren zuhaitz estaltzaile minimal bat.

(9 puntu)

3.- Unibertsitate baten %80a emakumeak dira. Hauen artean %60 autobusez doa unibertsitatera, eta besteak beste garraiobide batzuen bidez. Gizonen artean erdiak doaz autobusez.

- Zoriz unibertsitateko pertsona bat aukeratuz gero, zein da emakumea izateko eta unibertsitatera autobusez joateko probabilitatea?
- Unibertsitateko pertsona bat aukeratu eta autobusean joaten ez dela jakinda, zer probabilitate dago pertsona hori gizona izateko?

(8 puntu)

KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN

INGENIARITZAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2014-ko urtarrilaren 14a

1. ARIKETA

1.- Frogatu, propietatek erabiliz, honako proposizio honen egitasuna:

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$$

(6 puntu)

2.- Honako hau dakigu:

- a) Luis Londresera badoa, Logroñora ere joango da.
- b) Luis Londresera doa edo dirua beste gauza baten gastatuko du.
- c) Luis Logroñora badoa Maria ikusiko du.
- d) Luisek dirua beste gauza baten gastatzen badu, Maria ikusiko du.

Frogatu Luisek Maria ikusiko duela.

(6 puntu)

3.- Ikerketa-talde baten 50 pertsona daude. Hauetariko 40 ezkontuta daude, 24 arraza zurikoak eta 34 amerikarrak. Gainera honako hau dakigu: 24 pertsona ezkondu amerikarrak dira, 16 pertsona ezkondu arraza zurikoak dira, 22 amerikar zuriak dira eta taldean ez dago inor amerikarra, ezkontua edo zuria ez dena.

- a) Zenbat amerikar zuri eta ezkondu daude?
- b) Zenbat amerikar ezkondu daude zuriak ez direnak? Eta, zenbat amerikar zuri ez daude ezkontuta?

(8 puntu)

4.- \mathbb{Z} multzoan honako \mathcal{R} erlazio bitarra definitu da:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^3 - a = b^3 - b$$

- a) Aztertu \mathcal{R} erlazioak egiaztatzen dituen propietateak.
- b) Zer elementu dago 1-ekin erlazionatuta?

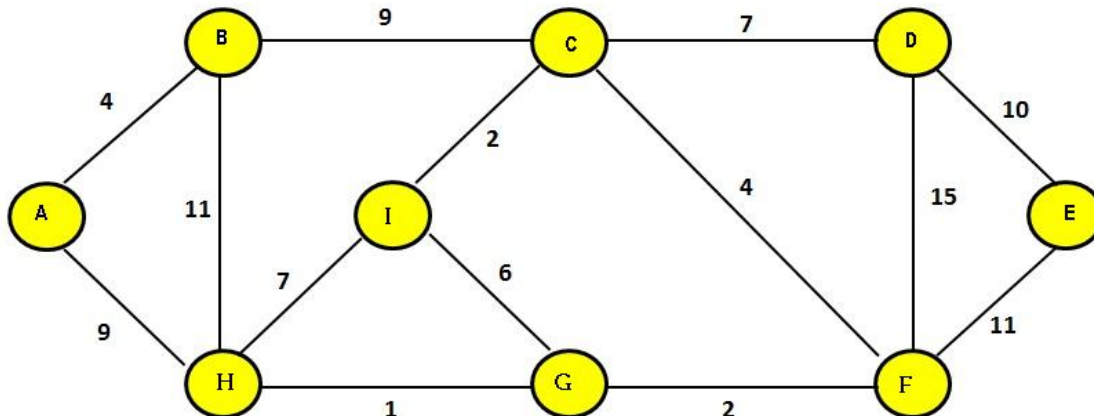
(5 puntu)

2. ARIKETA

1.- Indukzio-metodoa erabiliz, frogatu honako hau:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5 \text{ puntu})$$

2.- Izan bedi honako G grafo haztatu hau:



A) Arkuen pisuak kontuan hartu gabe:

- Aurkitu B-tik I-rako bide bat bidezidorra ez dena, B-tik I-rako bidezidor bat ibilbidea ez dena, eta B-tik I-rako ibilbide bat.
- Frogatu Euler-en formula egiaztatzen dela.
- Kalkulatu zenbaki kromatikoa eta koloreztatu erpinak.

B) Kruskal-en algoritmoa erabiliz, kalkulatu grafoaren zuhaitz estaltzaile minimal bat. (15 puntu)

3.- Gautxori batek giltzarrian iluntasunean guztiz bereizezinak diren hiru giltza ditu, eta hauetariko batek baino ez du zabaltzen bere etxeko atea. Esandako giltza aurkitzeko bi metodo ditu:

1. metodoa: Giltzak bata bestearen hatzetik aprobaten ditu giltza berdina ez aukeratzeko arreta izanik.

2. metodoa: Giltza batekin saiutzen da eta egokia ez bada, giltzarria astintzen du eta berriro saiutzen da, ondorioz berriro giltza berdina hartzeko arriskua du.

Zein da hirugarren saiakeran atea zabaltzeko probabilitatea 1. metodoa erabiltzen badu? Eta bigarren metodoa erabiltzen badu? (5 puntu)

**KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN
INGENIARITZAKO GRADUA**

MATEMATIKA DISKRETUA

2012-ko ekainaren 27a

1. ARIKETA

1.- Frogatu:

a) $[q \wedge \neg p \wedge (q \wedge \neg p \rightarrow p \vee q)] \rightarrow p \vee q \equiv T$

b) $\neg(r \vee q \rightarrow \neg r \wedge q) \wedge \neg r \wedge q \equiv C$

(6 puntu)

2.- Ingeniaritza eskola baten Matematika diskretua eta Aljebrako irakasgaietan matrikulatutako 200 ikasletik otsaileko deialdian Matematika diskretua % 35ak gainditu du, Aljebra %30ak eta biak %10ak. Zer ikasle-portzentaiak ez du bi irakasgaietatik bat ere gainditu? Zenbat ikaslek gainditu du bietako bat gutxienez?

(5 puntu)

3.- Indukzio metodoa erabiliz, frogatu honako hau:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

(7 puntu)

4.- Konstidera dezagun honako erlazio hau \mathbb{R} gainean:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

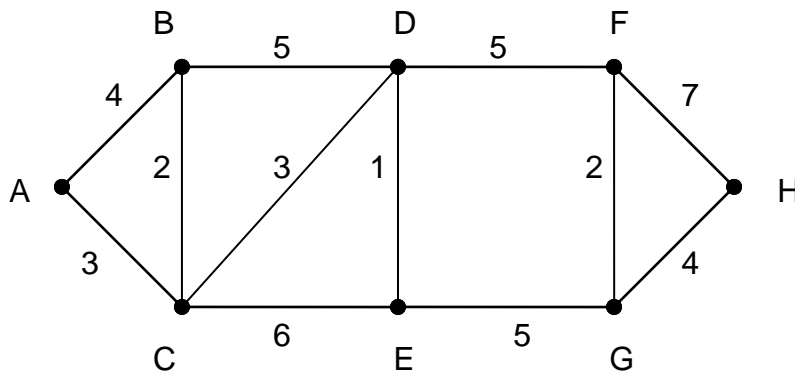
\mathcal{R} baliokidetasun erlazioa al da? Arrazoitu erantzuna.

Baiezkoan, kalkulatu $[2]$ eta $[1/3]$.

(7 puntu)

2. ARIKETA

1.- Izan bedi honako G grafo haztatua:



Djisktra-ren algoritmoa erabiliz aurkitu A eta H-ren arteko distantzia minimoa.

(15 puntu)

2.- **A]** Kontsidera dezagun honako diferentzietako ekuazio hau:

$$y(k+2) - y(k+1) - 6y(k) = 15 \cdot 3^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

a.- Aurkitu (1) ekuazioari dagokion ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra.

b.- Aurkitu (1) ekuazioaren soluzio orokorra.

c.- Aurkitu $y(0) = 0$, $y(1) = 8$ hastapen-baldintzak egiaztatzen dituen (1) ekuazioaren soluzio partikularra.

B] Kalkulatu koefiziente konstantedun diferentzietako ekuazio lineal homogeneoaren ekuazio jakinda haren ekuazio karakteristikoak honako soluzioak dituela: $r_1 = 3$, $k_1 = 2$ anizkoitzasunarekin, $r_2 = i$, $k_2 = 1$ anizkoitzasunarekin eta $r_3 = -i$, $k_3 = 1$ anizkoitzasunarekin.

(10 puntu)

KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN

INGENIARITZAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2014-ko ekainaren 25a

1. ARIKETA

1.- Aztertu proposizio hau tautologia bat bada:

$$[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

(6 puntu)

2.- Izan bedi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ multzoa. Zehaztu honako enuntziatu hauen egiazko balioa:

- a) $\exists x \in A / x^2 - 1 = 0$
- b) $\exists x \in A / 2x^2 + x = 15$
- c) $\forall x \in A : x + 3 > 2$

(6 puntu)

3.- Denaikasita B. I. ko lehen ikasturteko 60 ikasletik 15ek errusiera baino ez dute ikasten, 11k errusiera eta ingelesa, 12k alemana baino ez, 8k errusiera eta alemana, 10ek ingelesa baino ez, 5ek ingelesa eta alemana eta 3k hiru hizkuntzak. Zehaztu:

- a) Zenbatek ez dute hizkuntza bat ere ikasten?
- b) Zenbatek ikasten duten alemana?
- c) Zenbatek ikasten dute alemana eta ingelesa?
- d) Zenbatek ikasten dute errusiera?

(8 puntu)

4.- Kontsidera dezagun $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ multzoa honako erlazio bitar honekin:

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b < 12$$

- a) Aztertu \mathcal{R} erlazioak egiaztatzen dituen propietateak.
- b) Baliokidetasun-erlazioa al da?
- c) Ordena-erlazioa al da?
- d) Aurkitu 1ekin erlazionatuta dauden elementuak.

(5 puntu)

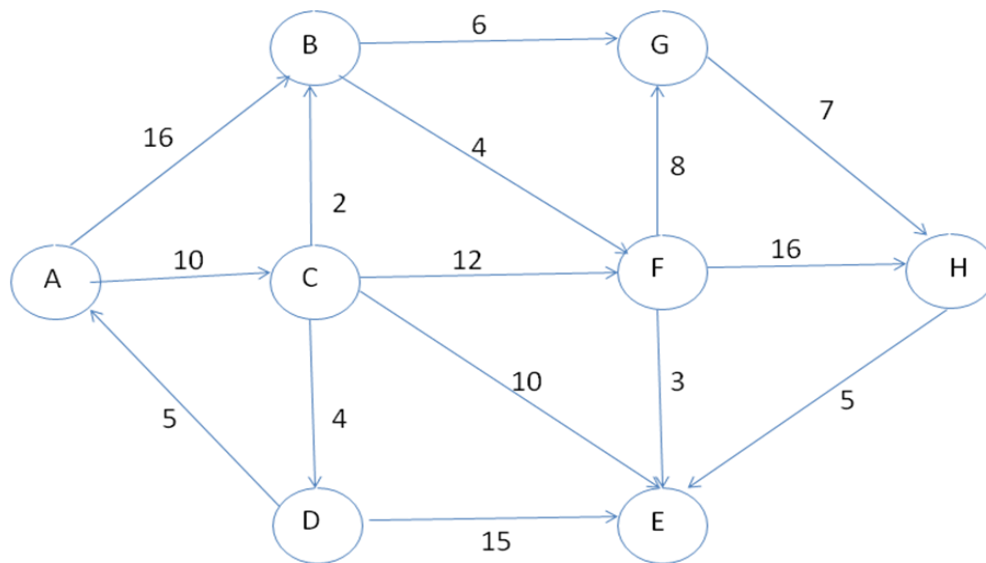
2. ARIKETA

1.- Indukzio-metodoa erabiliz, frogatu:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots + (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}(3 \cdot 2^n - 3 - 2n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(5 puntu)

2.- Izan bedi honako G grafo haztatu hau:



- Aurkitu erpin bakoitzaren irteera eta sarrera graduak.
- Aurkitu, existitzen badira grafoaren iturriak eta isurbideak.
- Aurkitu, existitzen badira, A-tik H-rako bide simple zuzendu bat eta beste bat H-tik A-rakoa.
- Dijkstra-ren algoritmoa erabiliz kalkulatu A erpinetik beste erpinetara dagoen distantzia minimoa.

(15 puntu)

3.- 5 gizon eta 4 emakume lerro baten kokatu behar dira non emakumeak toki bikoitietan baitaude. Zenbat era desberdinetan egin daiteke lerro hori?

(5 puntu)

**KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN
INGENIARITZAKO GRADUA**

MATEMATIKA DISKRETUA

2011-ko urtarrilaren 10a

1. ariketa

1.- Ikus ezazue honako proposizio hauek tautologiak diren ala ez:

$$((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$

$$((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$$

2.- Izan bedi $Q(x, y)$ honako sententzia hau: " $x + y = x - y$ ". Bi aldagaien izate-eremua zenbaki osoen multzoa bada, zein dira honako sententzien egia-balioak?

a.- $Q(1, 1)$

d.- $\exists x Q(x, 2)$

b.- $Q(2, 0)$

e.- $\exists y \forall x Q(x, y)$

c.- $\forall y Q(1, y)$

f.- $\forall x \forall y Q(x, y)$

3.- Celofania herrialdean hil-zigorra duten presoek azken aukera bat dute salbatzeko.

Honako konfigurazioa duten 3 kutxa jartzen dira: 1. kutxan 5 bola zuri eta beltz bat daude, 2. kutxan 4 bola zuri eta 2 beltz daude, eta 3. kutxan 3 bola zuri eta 3 bola beltz daude.

Begiak estalita kutxa bat aukeratuko du eta bola bat aterako du. Zuria den kasuan hil-zigorra saihestuko du. Zein da salbatzeko probabilitatea?

(10 puntu)

2. ariketa

1.- Kontsidera dezagun \mathbb{N} gainean definitutako honako erlazio bitar hau:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y \text{ bikoitia da}$$

Froga ezazue baliokidetasun-erlazioa dela.

Zenbat baliokidetasun-klase daude? Aurkitu, ahal bada.

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y$ bakoitia da, erlazioa kontsideratuz gero, baliokidetasun-erlazioa da?

2.- Izan bedi E multzoa 50 baino txikiagoak diren zenbaki arruntek osatzen dutena. Kontsidera ditzagun E-ren honako azpimultzo hauek:

$$A = \{x \in E / x \text{ bikoitia da}\}$$

$$B = \{x \in E / x \text{ 5-en multiploa da}\}$$

$$C = \{x \in E / 10 \leq x \leq 30\}$$

Aurkitu: $A \cap B$, A^c , $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $C^c \cap B$, $B - A$.

3.- Indukzio-metodoa erabiliz, frogatu ezazue $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ zenbakia 13-ren multiploa dela $\forall n \in \mathbb{N}$.

(15 puntu)

3. ariketa

1.- Familia bat aitak, amak, seme batek eta alaba batek osatzen dute. Erabakiak hartzerakoak honela jotzen dute:

a.- Aita ez badago, besteek boto bana dute, baina erabaki bat onartzeko amak baiezkota eman behar du eta botoen gehiengoak izan. Kalkulatu egoera hau adierazten duen funtzio boolear bat. Kalkulatu baita ere harekin elkartutako zirkuiturik sinpleena.

b.- Aita dagoenean egoera aldatu egiten da.

Erabaki bat onartzeko aitak eta amak baiezkota eman behar dute edo gehiengoak egon behar du ados. Kalkulatu egoera berria adierazten duen funtzio boolearra.

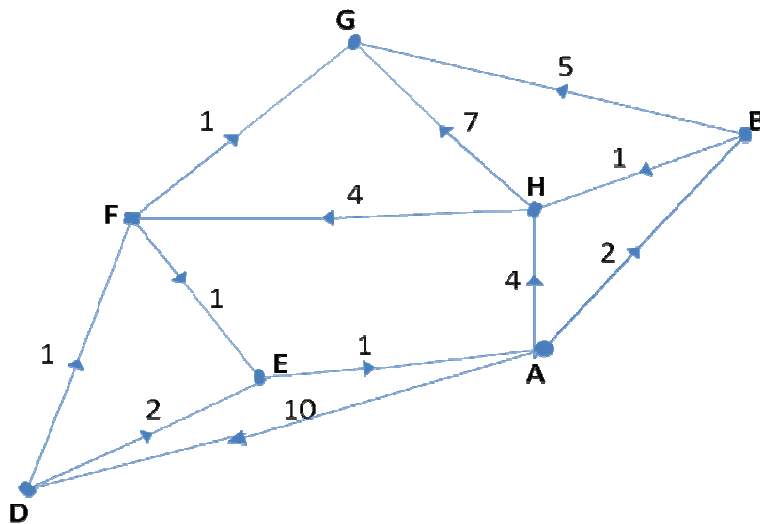
2.- Kalkulatu honako ekuazio boolearren sistema egiaztatzen duten x, y, z, t, u aldagaien balioak:

$$\begin{cases} x + y \cdot t + \bar{z} = 1 \\ x \cdot u + z + t \cdot \bar{y} = 0 \\ x \cdot \bar{z} + y = 0 \\ \bar{u} \cdot \bar{y} + x \cdot t = 0 \end{cases}$$

(10 puntu)

4. ariketa

Izan bedi G honako grafo hastatua eta zuzendua:



Grafoan hiri-bikoteen arteko bidaia-bideak adierazten dira eta (X, Y) arkuaren pisua X hiritik Y hirira joateko behar den egaldi-denbora izango da. Adibidez, B-tik G-ra joateko 5 ordu behar dira, baina B-tik E-ra ez dago hegaldi zuzena.

a.- Dijkstra-ren algoritmoa erabiliz kalkulatu A hiritik beste hiri guztietara dagoen bide laburrena.

b.- Adierazi G grafoaren iturriak eta isurbideak.

c.- Zein da G grafoaren zenbaki kromatikoa? (Arrazoitu erantzuna)

d.- Pisuak eta geziak kontuan hartzen ez badira :

1.- Arrazoitu G grafo leuna bada eta baiezkoan konprobatu Euler-en formula.

2.- Izan bedi G grafoan **A** erpina ezabatuz lortutako H azpigrafoa.

Arrazoitu H azpigrafoak zirkuitu edo bide euleriar bat badu eta baiezkoan aurkitu.

(15 puntu)

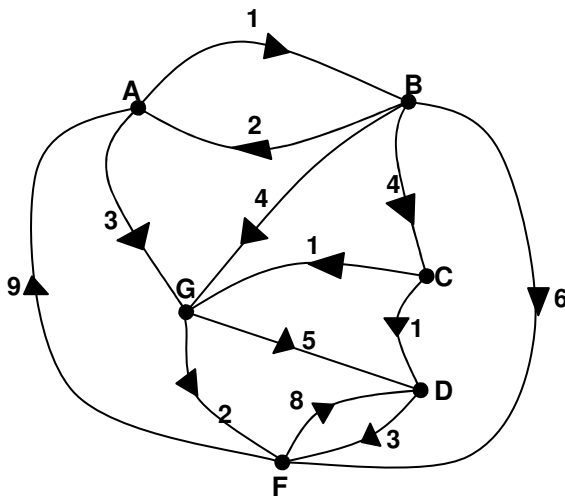
**KUDEAKETAREN ETA INFORMAZIO SISTEMEN INFORMATIKAREN
INGENIARITZAKO GRADUA**

MATEMATIKA DISKRETUA

2011-ko ekainak 13

1. ariketa

Izan bedi honako G grafo hastatu eta zuzendu hau:



Grafoan hiri-bikoteen arteko bidaia-bideak adierazten dira eta (X, Y) arkuaren pisua X hiritik Y hirira joateko behar den egaldi-denbora izango da. Adibidez, G-tik D-ra joateko 5 ordu behar dira, baina D-tik G-ra ez dago hegaldi zuzena.

A) Kalkulatu A hiritik beste hirietara dagoen bide laburrena.

B) Pisuak eta geziak kontuan hartzen ez badira:

1.- Arrazoitu G grafoa leuna bada eta baiezkoan egiaztatu Euler-en formula.

2.- Izan bedi G grafoan **B** erpina ezabatuz lortutako H azpigrafoa. Arrazoitu H azpigrafoak zirkuitu edo bide euleriar bat badu eta baiezkoan aurkitu.

(20 puntu)

2. ariketa

A) Frogatu honako baliokidetasun hauek:

a) $(p \vee \neg q) \vee [(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)] \equiv T$

b) $(r \wedge q) \rightarrow p \equiv (r \rightarrow p) \vee (q \rightarrow p)$

B) Izan bitez honako $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazio hauek:

f funtzioak zenbaki bakoitzari 7 zenbaki egokituko dio.

g funtzioak zenbaki bakoitzari haren bikoitza egokituko dio.

h funtzioak zenbaki positibo bakoitzari eta zerori bere karratua egokituko dio eta zenbaki negatiboek haien hirukoitza.

a) Adierazi matematikoki f, g eta h.

b) Aurkitu f, g eta h funtzioen izate-eremua eta irudi-multzoak.

c) Sailkatu f, g eta h.

d) Lortu : $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$

e) Aurkitu, ahal bada: f^{-1} , g^{-1} .

(15 puntu)

3. ariketa

A) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ multzoan honako grafoa duen \mathcal{R} erlazioa kontsideratuko dugu:

$G = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,6), (6,2), (2,3), (1,5), (5,2), (5,3), (4,3), (6,3), (1,2), (1,3)\}$
 \mathcal{R} ordena-erlazioa al da?. Arrazoitu erantzuna.

B) Izan bedi E multzoa 50 baino txikiagoak diren zenbaki arruntek osatzen dutena. Kontsidera ditzagun E-ren honako azpimultzo hauek:

$A = \{x \in E \mid x \text{ bikoitia da}\}$

$B = \{x \in E \mid x \text{ 5-en multiploa da}\}$

$C = \{x \in E \mid 10 \leq x \leq 30\}$

Aurkitu: $A \cap B$, A^c , $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $C^c \cap B$, $B - A$.

C) Indukzio-metodoa erabiliz, froga ezazue $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ zenbakia 13-ren multiploa dela $\forall n \in \mathbb{N}$.

(20 puntu)

4. ariketa

A) Familia bat aitak, amak, seme batek eta alaba batek osatzen dute. Erabakiak hartzerakoak honela jokatzeko dute:

a.- Aita ez badago, besteek boto bana dute, baina erabaki bat onartzeko amak baiezkota eman behar du eta botoen gehiengoa izan. Kalkulatu egoera hau adierazten duen funtzio boolear bat. Kalkulatu baita ere harekin elkartutako zirkuiturik sinpleena.

b.- Aita dagoenean egoera aldatu egiten da.

Erabaki bat onartzeko aitak eta amak baiezkoa eman behar dute edo gehiengoak egon behar du ados. Kalkulatu egoera berria adierazten duen funtzio boolearra.

B) Kalkulatu honako ekuazio boolearren sistema egiaztatzen duten x , y , z , t , u aldagaien balioak:

$$\begin{cases} x + y \cdot t + \bar{z} = 1 \\ x \cdot u + z + t \cdot \bar{y} = 0 \\ x \cdot \bar{z} + y = 0 \\ \bar{u} \cdot \bar{y} + x \cdot t = 0 \end{cases}$$

(15 puntu)