2017 Uztaila

2017. 1

① Aztertu

a) Hurrengo proposizioa tautologia bada:

$$[\neg(p\vee s)\to(s\wedge q)]\vee(p\to s)\overset{(22)}{\equiv}[(p\vee s)\vee(s\wedge q)]\vee(\neg p\vee s)\overset{(14)}{\equiv}$$

$$\equiv(\underbrace{p\vee s\vee\neg p}_{p\vee\neg p\equiv T}\vee s)\vee(s\wedge q)\overset{(9)}{\equiv}(T\vee s)\vee(s\wedge q)\overset{(5)}{\equiv}T\vee(s\wedge q)\overset{(5)}{\equiv}T$$

b) Hurrengo proposizioa kontraesana dela:

$$(\neg r\to s)\wedge(p\wedge q)\wedge\neg[(p\wedge\neg q)\to(q\wedge s)]\overset{(22)}{\equiv}$$

$$\equiv(r\vee s)\wedge(p\wedge q)\wedge\neg[\neg(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge s)]\overset{(10)}{\equiv}$$

$$\equiv(r\vee s)\wedge(p\wedge \underbrace{q)\wedge(p\wedge\neg q}_{p\wedge\neg p\equiv c})\wedge\neg(q\wedge s)\overset{(15)}{\equiv}$$

$$\equiv(r\vee s)\wedge p\wedge c\wedge\neg(q\wedge s)\overset{(10)}{\equiv}c$$

② Aztertu arrazonamenduaren baliozstasuna:

p = "Nora ezkondu"
q = "eztei-jantzia erosi"
r = "eskontzaren eguna zehaztu"
s = "jatetxea erreserbatu"

arrazonamendua

$$(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(q\vee r)\wedge p\Rightarrow q$$

$$(p\to Q)\wedge P\Rightarrow Q$$

ponendo-ponens

$$(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(q\vee r)\wedge p\overset{(13)}{\equiv}\underbrace{(p\to q)\wedge p}\wedge(r\to s)\wedge(q\vee r)\overset{(33)}{\Longrightarrow}q$$

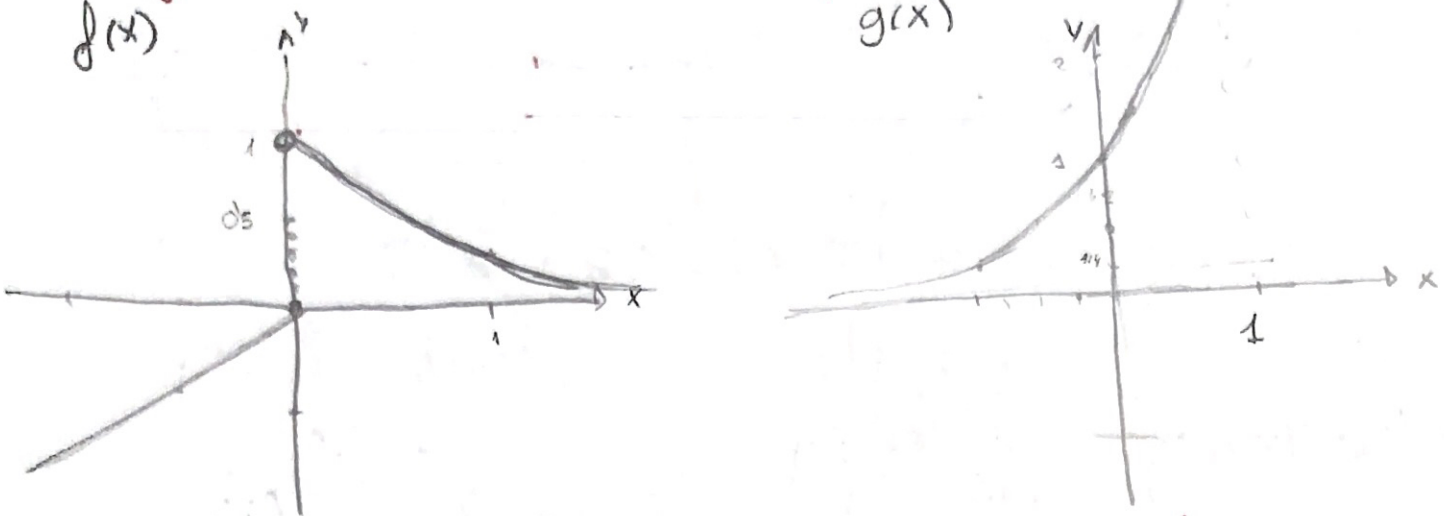
Korrespondentziak: 2017. 2

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Big\}$ $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$

$e = 2'71 \ldots$

$g(x) = 4^x$

Grafikoki adierazi bi korrespondentziak eta hurrengo galderak erantzun:



a) Aplikazioak dira? Baiezkoan, sailkatu.

$f(x)$ aplikazioa da. $Im(f) = (-\infty, 1]$

$D(f) = \mathbb{R} \wedge \forall x \in D(f) : \exists! \, y \in Im(f) \, / \, f(x) = y$

- **Injektibo?** BAI

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, / \, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ez dut aurkitu hau betetzen ez duen punturik

- **Suprajektibo?**

$Im(f) = [-\infty, 1] \neq \mathbb{R}$ denez EZ da.

- **Bijektibo?** EZ

⚠ Sólo si es bijektibo existe el alderantzizko

Ez da bijektibo, injektiboa delako baina ez suprajektibo.

$g(x)$ aplikazioa da. $Im(g) = (0, \infty)$

$D(g) = \mathbb{R} \wedge \forall x \in D(g) : \exists! \, y \in Im(g) \, / \, g(x) = y$

- **Injektibo?**

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, / \, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Betetzen ez duen punturik. BAI

Ez dut aurkitzen hau betetzen ez duen punturik.

- **Suprajektibo?**

$Im(g) = (0, \infty) \neq \mathbb{R}$ denez EZ da suprajektibo

- **Bijektibo?** Ez, ez delako suprajektibo eta injektibo aldi berean.

③ JARRAIPENA

2017. 3

b) Kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$:

- $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(4^x) = e^{-4^x}$

- $g \circ f(x) = g[f(x)] = \begin{cases} 4^{e^{-x}} & x > 0 \\ 4^x & x \leq 0 \end{cases}$

c) Posiblea denean alderantzizko funtzioa kalkulatu.

Ezin da alderantzizkoa kalkulatu bi aplikazioak ez direlako bijektiboak.

④ $(\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R}$ multzoan honela definitutako $\mathcal{R}$ erlazio bitarra definitzen da:

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

a) $\mathcal{R}$-ren propietateak aztertu

- Bihurkor ✓
- Simetriko ✗
- Antisimetriko ✓
- Iragankor ✓

Ordena Erlazioa:
- Bihurkor
- Antisimetriko
- Iragankor

- Bihurkorra?

$\forall (x_1, y_1) \in (\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R} \quad (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_1, y_1)$

$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_1, y_1) \iff x_1 \leq x_1 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{x_1}$ $\boxed{\text{BAI}}$

- Simetriko?

$\forall x \in (\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R} \quad (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Rightarrow (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1)$

$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

$(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1) \iff x_2 \leq x_1 \wedge \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$

$\boxed{\text{EZ}}$ da simetrikoa bakarrik betetzen delako $(x_2 = x_1)$ denean.

- Antisimetriko?

$\forall x \in (\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R} \quad (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

$(x_2, y_2) \mathcal{R} (y_1, y_1) \iff x_2 \leq x_1 \wedge \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$

soilik betetzen da $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ denean, beraz $\boxed{\text{BAI}}$

④ JARRAIPENA 2017 - 4

a)

* Iragankorra?

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in (\mathbb{R}-\{0\}) \times \mathbb{R} \quad (x_1,y_1) R (x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2) R (x_3,y_3) \Rightarrow (x_1,y_1) R (x_3,y_3)$

$$(x_1,y_1) R (x_2,y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$(x_2,y_2) R (x_3,y_3) \iff x_2 \leq x_3 \wedge \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$$

$(x_1,y_1) R (x_3,y_3) \iff x_1 \leq x_3 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_3}{x_3}$, orduan erlazioa iragankorra da.

BH $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bihurkor} \\ \text{Simetriko} \\ \text{Iragankor} \end{array} \right.$

b) $\boxed{\text{Baliokidetasun erlazioa}}$ da? Ez, erlazioa bihurkorra eta iragankorra delako baina ez simetrikoa.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bihurkor} \\ \text{Antisimetriko} \\ \text{Iragankor} \end{array} \right.$

c) $\boxed{\text{Ordena-erlazioa}}$ da?

⚠ **Ordena-erlazioa**

- Bihurkor
- Antisimetriko
- Iragankor

* Guztiz ordenatua: $x \leq y$ edo $y \leq x$ egiaztatzen bada (x erlazionatuta y; y erlazionatuta x)
* Ordena partziala: guztiz ordenatua izateko baldintza ez denean betetzen

Ordena erlazioa da, bihurkorra, antisimetriko eta iragankorra delako.

Zein ordenatakoa da?

$(x_1,y_1) R (x_2,y_2) \vee (y_2,y_2) R (x_1,y_1)$ bete behar da guztiz ordenatua izateko badakigu bakarrik betetzen dela $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ denean, beraz kontrako adibidearekin ordena partzialekoa dela froga dezakegu.

adibidez $\overset{x_1\ y_1}{(1,2)} R \overset{x_2\ y_2}{(3,4)} \iff 1 \leq 3 \wedge \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$ Ez da betetzen

$\overset{x_1\ y_1}{(3,4)} R \overset{x_2\ y_2}{(1,2)} \iff 3 \leq 1 \wedge \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$ Ez da betetzen

Argi ikusten da ez dela betetzen, beraz ordena partzialekoa da.

4) ZABALPENA 2017. 5

d) Zeintzuk dira (1,1) elementuarekin erlazionatutako elementuak.

$(x_1, y_1) R (1,1) \iff x_1 \le 1 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{1} = 1$, hau da,

$(x_1, y_1) R (1,1) \iff x_1 \le 1 \wedge y_1 = x_1$

(1,1) elementuarekin erlazionatutako elementuak (y_1, y_1) dira eta y_1 txikiagoa edo berdin bat izango da, baina 0-ren desberdina multzoa $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ delako.

1) 12 ikasle < 7 neska, 5 mutil

5 irakasle

_ _ _ _ _ } 5 irakasle . (errepikapen gabeko permutazioa

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ } 12 ikasle

Zenbat eratan koka daitezke irakasle/ikasleen talde hau argazkia ateratzeko?

Biderkaduraren erregela

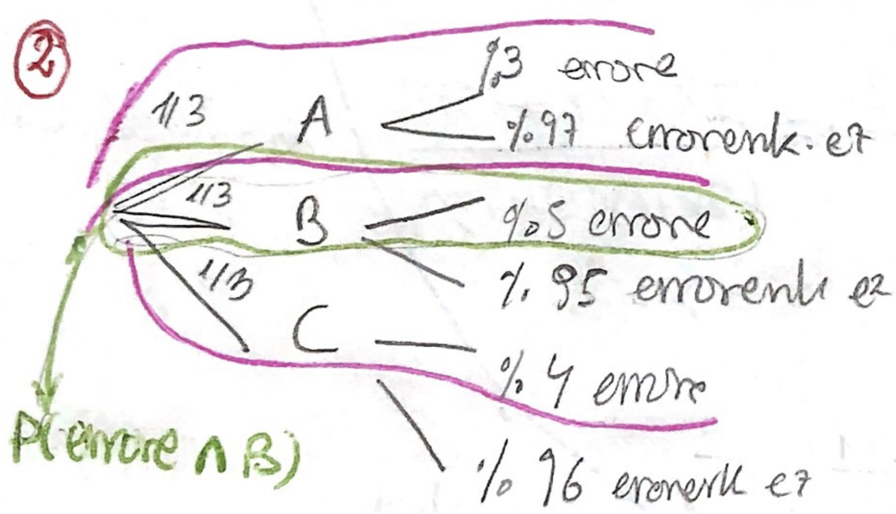
Zeregin osoa burutzeko 2 azpi zereginetan banatzeko dugu, azpizeregin horiek egiteko n eta m era desberdin daude, orduan zeregin osoa burutzeko $m \cdot n$ era daude.

n = irakasleen permutazio sinpleak $= P_5 = 5!$ era desberdin

m = ikasleen " " $= P_{12} = 12!$ era desberdin

Beraz $n \cdot m = 5! \cdot 12!$ eratan koka daiteke taldea argazkia ateratzeko.

2)



Fotokopiak errore bat dauka. Zein da fotokopia hori B fotokopiagailuan egin izanaren probabilitatea?

→ probabilitate baldintzatua → jakinda errorea B izatearen probabilitatea

$$P = (B/\text{errore}) = \frac{P(\text{errore} \cap B)}{P(\text{errore})} = \frac{(1/3)\%5}{(1/3)\%12} = \frac{\%5}{\%12} = \frac{5}{12}$$

$P(\text{errore} \cap B) = 1/3 \cdot \%5$

$P(\text{errore}) = 1/3 \cdot \%3 + 1/3 \cdot \%5 + 1/3 \cdot \%4 = 1/3(\%3 + \%5 + \%4)\ 1/3 \cdot \%12$

③ Indukzio metodoa erabiliz, hurrengoa egiaztatu: 2017. 6

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Pausuak

1) $n=1$ kasua egia dela egiaztatu.
2) $n=k$ " " " .
3) $n=k+1$ kasurako formula egia dela konprobatu

1) $n=1$ kasua:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}\quad ✓$$

2) $n=k$ kasua:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}\quad ✓$$

③ $n=k+1$ kasua frogatu:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{\underbrace{2(k+1)+1}_{2k+2+1}}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\Rightarrow \text{Sinplifikatu}$$

$2k^2+3k+1=(2k+1)(k+1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{(2k+1)(k+1)}{(\cancel{2k+1})(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

egiaztatzen da formula betetzen dela $\forall n\in\mathbb{N}$.

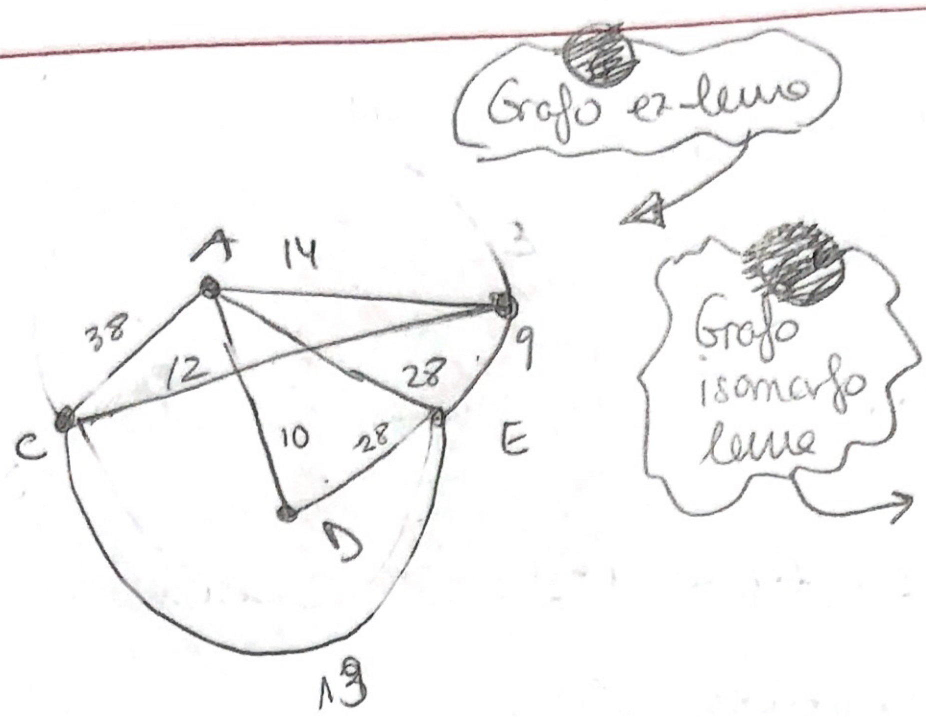
4) A, B, C, D eta E letrak dituen trenbidea eraiki nahi da. Kostua, bide posible bakoitzarena taulan adierazita dago: 2017.7

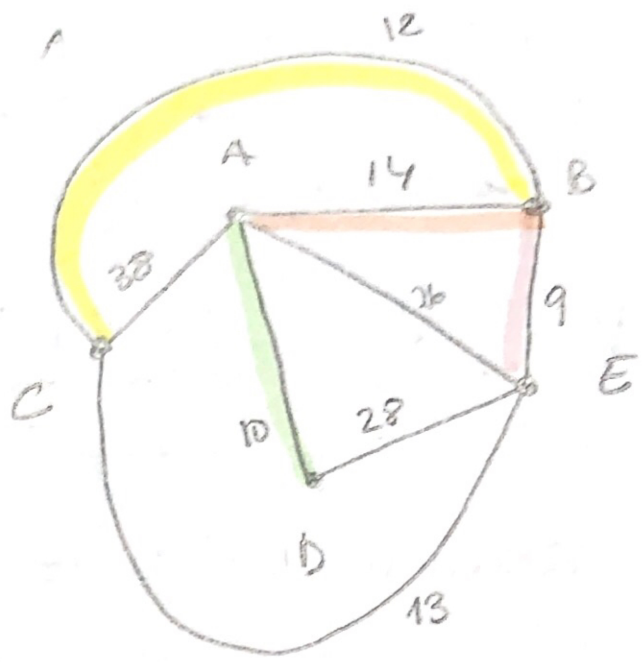
	A	B	C	D	E
A	∅	14	38	10	26
B	14	∅	12	∅	9
C	38	12	∅	∅	13
D	10	∅	∅	∅	28
E	26	9	13	28	∅

a) Bide posible guztiak barne hartzen dituen grafo laua irudikatu.
↳ grafikoki adierazi daiteke eta bere arkuak soilik erpinetan ebakitzen dira.

b) Algoritmo egokia erabiliz, zehaztu zein bide eraiki behar diren kostua minimizatzeko.
Lortutako kostu minimoa adierazi.

(a)





(b) Kruskal algoritmoa: $G(V, A, \varphi)$ grafo ez-zuzendu konektatua dugulako, non $n(V) = 5$ den eta G' G grafoaren zuhaitz estaltzaile minimoa lortu nahi dugu.
$G'\{V, A', \varphi\}$

Lehenengo iterazioa:

$i = \cancel{0}$

$p(a_1) = \min\{p(a_h) \,/\, a_h \in A\}$

$p(a_1) = 9$

$\varphi(a_1) = (B, E)$ $A' = \{a_1\}$

! Gehitutako azpigrafoak ezin dezake ziklorik izan
↳ bidezidor itxi (arku ⊕)

$i{+}{+} \Rightarrow \boxed{i = 1} < n(V) - 1 = 4$ ✓, orduan hurrengo iterazioa

Bigarren iterazioa

$p(a_2) = \min\{p(a_2) \,/\, a_2 \in A - A'\}$

$p(a_2) = 10$

$\varphi(a_2) = (A, D)$ $A' = \{a_1, a_2\}$

$i{+}{+} \Rightarrow i = 2 < 4$ ✓ orduan hurrengo iterazioa

2017. 8

⊛ Hirugarren iterazio:

$p(a_3) = \min \{ p(a_3) \ / \ a_3 \in A - A' \}$

$p(a_3) = 12$

$\phi(a_3) = (B, C)$ $A' = \{a_1, a_2, a_3\}$

$i{+}{+} \Rightarrow i = 3 < n(V) - 1 = 4$ ✓, orduan hurrengo iterazioa

⊛ Laugarren iterazio:

$p(a_4) = \min \{ p(a_4) \ / a_4 \in A - A' \}$

$p(a_4) = 14$

$\phi(a_4) = (A, B)$

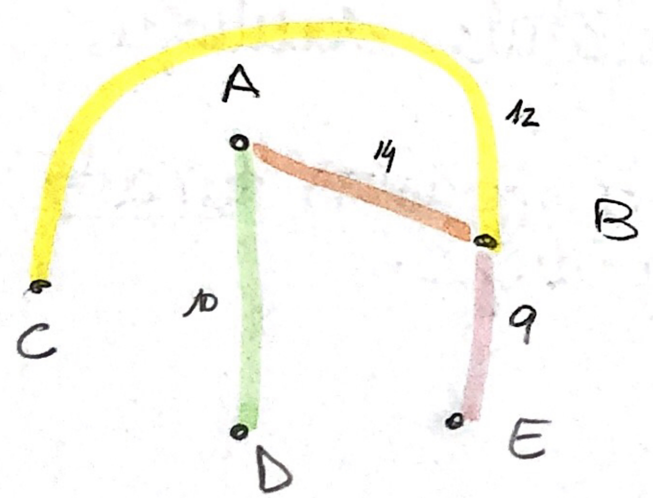
$A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$i{+}{+} \Rightarrow i = 4 < 4$ ✗ orduan iterazioak amaitu dira

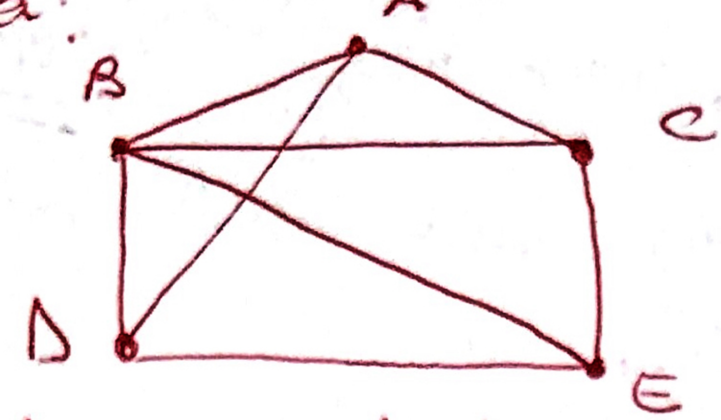
eta $G'(V, A', \phi')$ grafoa, G-ren zuhaitz estaltzaile minimala da.

Lortutako kostu minimoa $= 9 + 10 + 12 + 14 = 45$ milioi eurokoa da.

G' zuhaitz estaltzaile minimala honakoa da:



② G grafoa:



GRAFO EZ-LAUNA

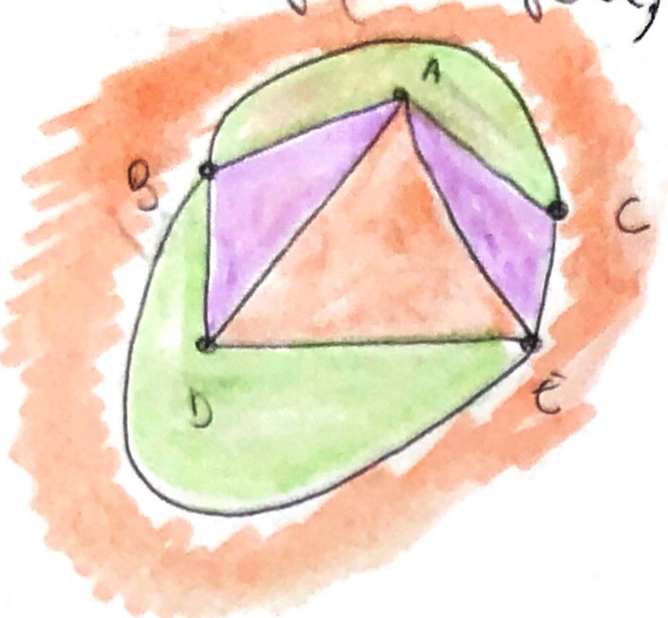
ⓐ Koloreztatu eremuak. Konprobatu EULEREN FORMULA BETETZEN BADA.

G ... erpin kop.   G-lauaren konexuaren adierazpen grafikoa

↳ $n(V) + n(R) = n(A) + 2$

↳ Maparen eremu kop

Grafo (isomorfoa) laua:



Grafoa 3 kolorestagarria da.

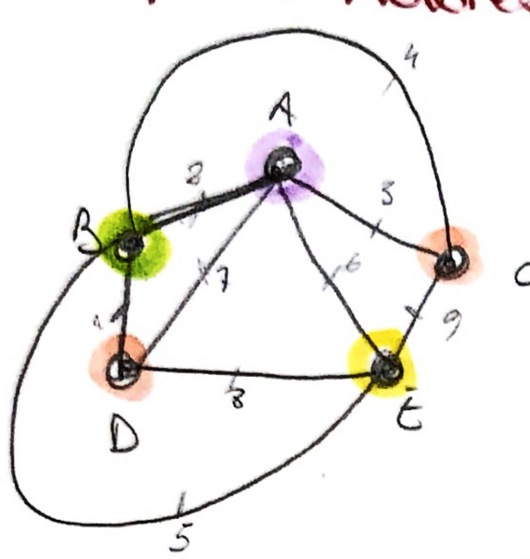
Euleren formula

$5 + 6 = 9 + 2$

$11 = 11$ ✓ Betetzen da.

ⓑ Erpinak kolorestatu eta zenbaki kromatikoa kalkulatu.

↳ $c(G)$ = G-ren koloreztaoa egiteko beharrezkoak diren kolore minimoen kopurua.



$gr(A) = 4 = gr(B) = gr(E)$

$gr(C) = gr(D) = 3$

Erpin bide 4-kolorestagarria da, beraz, $c(G) = 4$ da bere zenbaki kromatikoa.

ⓒ Grafo eulerrarra da? Grafo Hamiltoniarra da?

⊛ Grafo euleriar

- Zirkuitu euleriar existitzen bada eta erpin guztiak bikoitiak badira.

Erpin guztiak EZ direnez bikoitiak, EZ da grafo eulerarra, baina bide eulerarra existitu daiteke.

⊛ Bide euleriarra = G-ren arku guztiak barne dituen ibilbidea.

- Itxia bada zirkuitu euleriar deritzo.
- G konexua bada, bide euleriar ez itxi 1 izango du soilik 2 erpin bakoiti badaude. | $gr(C) = gr(D) = 3$

↳ Gure kasua. D B A C B E A D E C | $gr(A) = gr(B) = gr(E) = 4$

bide eulerarra da.

5 JARRAIPENA

2017. 10

Bidezidor itxia luzera ≥ 3 duena

* **Grafo hamiltoniarra** = Ziklo hamiltoniarra existitzen bada, G grafoa hamiltoniarra da.

  • G hamiltoniarra izango da baldin:
  $n(V) = m \geq 3$ eta $gr(v) \geq \frac{m}{2}$ $\forall v \in V$

* **Bide hamiltoniarra** = G-ren erpin guztiak barne dituen G-ren edozein ibilbide $\rightarrow$ erpin ≠

  • Izango da baldin:
  $n(V) = m \geq 2$ eta $gr(v) \geq \frac{m-1}{2}$ $\forall v \in V$

Grafo hamiltoniarra da?

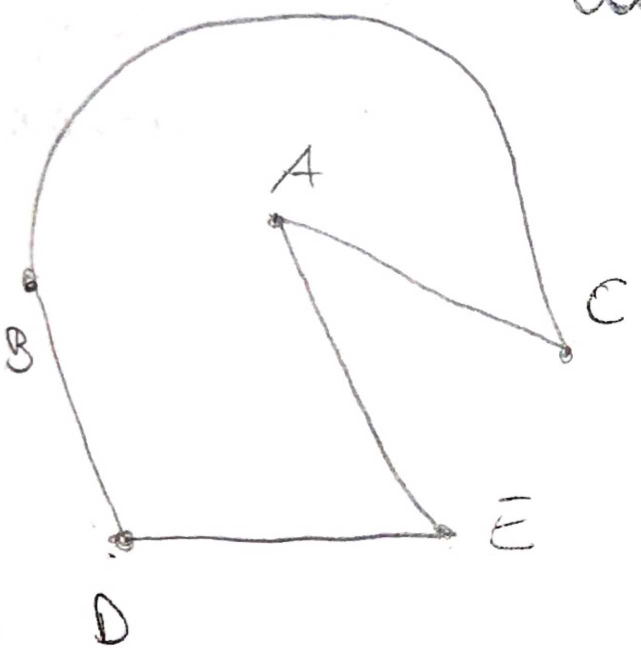
$n(V) = 5 \geq 3$ ✓

$\wedge$

$gr(v) \geq \frac{5}{2}$ $\forall v \in V$ ✓

$\Rightarrow$ Bai, Grafo hamiltoniarra da.

Ziklo Hamiltoniarra adibidez honakoa izan daiteke:



ACBDEA