Matrizeak eta determinanteak
Ekuazio linealetako sistemak

1.- Matrize baten definizioa

2.- Matrizeekin erlazionatutako funtzioak

3.- Eragiketak matrizeekin

4.- Determinantea, alderantzizkoa eta eragiketa elementalak

5.- Ekuazio linealetako sistemak

- Solve (NSolve)
- LinearSolve
- Reduce

Matrizeak eta determinanteak

1. MATRIZE BATEN DEFINIZIOA:

Matrizeak errenkaden zerrendak bezala adierazten dira:

```
In[1]:=  a = {{1, 2, 4}, {0, 5, 1}}
Out[1]=  {{1, 2, 4}, {0, 5, 1}}
```

lehenengo errenkada

bigarren errenkada

Matrize eran ikusteko:

```
In[2]:=  MatrixForm[a]
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereiztu beharrekoak:

- Bektoreak: {1,2,3}
- Errenkada matrizeak: {{1,2,3}}
- Zutabe matrizeak: {{1},{2},{3}} edo {1,2,3}

Matrizeak eta determinanteak

2. FUNTZIO BATZUK:

Table[funtzioa,{i,i_{min},i_{max}},{j,j_{min},j_{max}}] Lehenengo argumentuan adierazitako espresioaren arabera kalkulatutako elementuekin mxn ordenako matrizea sortzen du. Elementu horiek sortzeko erabiltzen diren indizeak ere argumentu bezala zehazten dira.

```
In[3]:=  Table[10*i + j, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]

Out[3]=  {{11, 12, 13}, {21, 22, 23}, {31, 32, 33}}
```

Array[funtzioa,{n_1, n_2,...}] Lehenengo argumentuan emandako adierazpenaren arabera kalkulatutako elementuez osatutako mxn ordenako matrizea sortzen du. Adierazpen hau bigarren argumentuan eta giltzen artean adierazitako indizeen balioen menpekoa izanik.

```
In[38]:=  mat = Array[#1 + #2 &, {3, 2}]

Out[38]=  {{2, 3}, {3, 4}, {4, 5}}

In[39]:=  MatrixForm[mat]

Out[39]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrizeak eta determinanteak

2. FUNTZIO BATZUK:

Flatten[zerrenda] $m\times n$ ordenako matrizea $m\times n$ koordenatuko bektorea bihurtzen duen funtzioa.

In[40]:=
```
mat2 = Array[#1 &, {3, 3}]
```
Out[40]=
```
{{1, 1, 1}, {2, 2, 2}, {3, 3, 3}}
```

In[41]:=
```
m2 = MatrixForm[mat2]
```
Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

In[42]:=
```
b2 = Flatten[mat2]
```
Out[42]=
```
{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3}
```

Matrizeak eta determinanteak

2. <u>FUNTZIO BATZUK:</u>

DiagonalMatrix[zerrenda] Matrize diagonal bat sortuko du, non diagonal nagusiko elementuak datu bezala erabilitako zerrendako elementuak diren.

```
In[4]:= a = DiagonalMatrix[{2, 5, 7}];

In[5]:= MatrixForm[a]

Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

IdentityMatrix[n] n ordenako unitate matrizea sortuko du.

Transpose[a] a matrizearen matrize iraulia sortuko du.

Dimensions[a] a matrizearen dimentsioa, hau da, errenkada eta zutabe kopurua adieraziko du.

Matrizeak eta determinanteak

KONTUZ: MatrixForm funtzioaren emaitza adierazpen grafikoa da

3. ERAGIKETAK MATRIZEEKIN:

Matrizeen batura: a **+** b

Matrize baten eta eskalar baten arteko biderkadura: 3 a edo 3*a

Matrizeen biderkadura: a**.**b **Kontuz!! (Ez a*b , ezta a b)**

Matrizeen berredura: **MatrixPower[a, n]** "a" matrizea n. potentziara berretuko du

4. MATRIZE BATI BURUZ INFORMAZIOA LORTZEKO:

```
In[6]:= a = {{1, 2, 4}, {0, 5, 1}, {2, 2, 1}};
```

Matrizea definitzeko

```
In[7]:= MatrixForm[a]
Out[7]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a[[i,j]] : a matrizearen a_{ij} elementua lortzeko (edo **Part[a,i,j]**)

```
In[8]:= a[[2, 2]]
Out[8]= 5
```

```
In[62]:= Part[a, 2, 2]
Out[62]= 5
```

Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrizeak eta determinanteak

a[[i]] : a matrizearen *i*-garren errenkada lortzeko (edo **Part[a,i]**)

```
In[9]:=  a[[3]]
Out[9]= {2, 2, 1}
```

```
In[61]:=  Part[a, 3]
Out[61]= {2, 2, 1}
```

Transpose[a][[j]] : a matrizearen *j*-garren zutabea lortzeko (edo P**art[Transpose[a],j]**)

```
In[10]:=  Transpose[a][[3]]
Out[10]= {4, 1, 1}
```

```
In[59]:=  Part[Transpose[a], 3]
Out[59]= {4, 1, 1}
```

edo

```
In[56]:=  at = Transpose[a];
          at[[3]]
Out[57]= {4, 1, 1}
```

```
In[60]:=  Part[at, 3]
Out[60]= {4, 1, 1}
```

Matrizeak eta determinanteak

a[[{e_1, e_2, ..., e_m},{z_1, z_2, ..., z_n}]] : a matrizean e_1, e_2, ..., e_m errenkadak eta z_1, z_2, ..., z_n zutabeak aukeratuz lortutako azpimatrizea lortzeko:

```
In[11]:= b = a[[{1, 2}, {2, 3}]]
Out[11]= {{2, 4}, {5, 1}}

In[12]:= MatrixForm[b]
Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizeak eta determinanteak

5. DETERMINANTEA, ALDERANTZIZKOA ETA ERAGIKETA ELEMENTALAK

Det[a] a matrizearen determinantea lortuko du
Inverse[a] a matrizearen alderantzizkoa lortuko du
MatrixRank[a] a matrizearen heina kalkulatuko du. **Ez erabili parametroak daudenean.**

In[13]:=
```
a = {{1, 2, 4}, {0, 5, 1}, {1, 2, 5}}
```
Out[13]=
```
{{1, 2, 4}, {0, 5, 1}, {1, 2, 5}}
```
Matrizea definitzeko

In[14]:=
```
Det[a]
```
Out[14]=
```
5
```
Determinantea kalkulatzeko

In[15]:=
```
Inverse[a]
```
Out[15]=
$$\left\{\left\{\frac{23}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{18}{5}\right\}, \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}, \{-1, 0, 1\}\right\}$$
Matrize alderantzizkoa aurkitzeko

In[16]:=
```
MatrixRank[a]
```
Out[16]=
```
3
```
Matrizearen heina kalkulatzeko

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matrizeak eta determinanteak

RowReduce[a] eragiketa elementalen bidez matrizearen baliokide bat lortuko du, hau bere adierazpen errazenean agertuko delarik. **Ez erabili parametroak badaude**.

```
In[17]:= a = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}
Out[17]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

In[18]:= RowReduce[a]
Out[18]= {{1, 0, -1}, {0, 1, 2}, {0, 0, 0}}
```

Matrizearen heina 2 izango da, bi errenkada ez-nulu daudelako

Matrizeak eta determinanteak

Minors[a,n] a matrizearen n-ordenako minore guztiak kalkulatzen ditu

In[19]:=
```
a = {{1, 2, 4}, {0, 5, 1}, {1, 2, 5}}
```
Out[19]=
```
{{1, 2, 4}, {0, 5, 1}, {1, 2, 5}}
```

In[20]:=
```
MatrixForm[a]
```
Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

In[21]:=
```
Minors[a, 2]
```
Out[21]=
```
{{5, 1, -18}, {0, 1, 2}, {-5, -1, 23}}
```

Minore bat kalkulatzeko, **Det[ ]** funtzioa eta azpimatrizeak erabil dezakegu:

In[22]:=
```
Det[a[[{1, 2}, {1, 2}]]]
```
Out[22]=
```
5
```

Matrizeak eta determinanteak

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Heina kalkulatzeko parametroak daudenean:

In[23]:=
```
a = {{1, 1, 1, m}, {1, 1, m, 1}, {1, m, 1, 1}, {1, 1, 1, 1}};
```

In[66]:=
```
Det[a]
```
Out[66]= $-1 + 3m - 3m^2 + m^3$

Determinantea kalkulatu

In[67]:=
```
s = Solve[Det[a] == 0, m]
```
Out[67]= $\{\{m \to 1\}, \{m \to 1\}, \{m \to 1\}\}$

Determinantea 0 noiz den aztertu

In[68]:=
```
Det[a /. m → 1]
```
Out[68]= 0

Determinantea 0 egiten da m=1 denean

Matrizeak eta determinanteak

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In[69]:=
```
MatrixRank[a /. s[[1]]]
```
Out[69]= 1

In[70]:=
```
MatrixRank[a /. m → 1]
```
Out[70]= 1

Kasu honetan matrizearen heina 1 da

Hortaz, soluzioa

1. $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow h(A)=4$
2. $m=1 \Longrightarrow h(A)=1$

Matrizeak eta determinanteak $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & m & 1+2m & m^2 \end{pmatrix}$

Heina kalkulatzeko parametroak daudenean:

In[29]:=
```
a = {{1, 3, 1, 1}, {1, 1, 3, 1}, {1, m, 1 + 2 m, m ^ 2}};
```

In[30]:=
```
minoreak = Minors[a, 3]
```
Out[30]= $\{\{6 - 6m, 2 - 2m^2, -2 + 2m^2, -2 - 6m + 8m^2\}\}$

Minors funtzioarekin minore guztiak kalkulatu

In[31]:=
```
zerrenda = Flatten[minoreak]
```
Out[31]= $\{6 - 6m, 2 - 2m^2, -2 + 2m^2, -2 - 6m + 8m^2\}$

Minoreak bektore bezala jarri

In[32]:=
```
sol = Solve[Table[zerrenda[[i]] == 0, {i, Length[zerrenda]}], m]
```
Out[32]= $\{\{m \to 1\}\}$

Noiz egingo dira minore guztiak 0??

Minore guztiak nuluak noiz diren aztertzeko beste era bat:

In[79]:=
```
sol = Solve[zerrenda == {0, 0, 0, 0}, m]
```
Out[79]= $\{\{m \to 1\}\}$

Matrizeak eta determinanteak

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & m & 1+2m & m^2 \end{pmatrix}$$

Heina kalkulatzeko parametroak daudenean:

In[33]:=
```
a1 = a /. sol[[1]]
```
Out[33]=
```
{{1, 3, 1, 1}, {1, 1, 3, 1}, {1, 1, 3, 1}}
```

Matrizea m=1 denean

In[34]:=
```
MatrixRank[a1]
```
Out[34]=
```
2
```

m=1 denean heina=2

Hortaz, soluzioa

1. $m \neq 1 \Longrightarrow h(A) = 3$
2. $m = 1 \Longrightarrow h(A) = 2$

Ekuazio linealetako sistemak

Ekuazio linealetako sistemak ebazteko:
Sintaxis-a: **Funtzioa**[{**ekuazioa1,ekuazioa2, ekuazioa3**} , {x1,x2,x3}]

Solve[ ] : Ekuazio bat edo ekuazio linealetako sistema bat ebazten du. **Parametrorik ez dagoenean erabili.**

Nsolve[ ]: Solve funtzioaren analogoa, hala ere, soluzio hurbildua lortzeko zenbakizko metodoak erabiltzen ditu,beraz, ahaltsuagoa da. **Parametrorik ez dagoenean erabili.**

Solve eta **Nsolve** funtzioek sistema bateragarri determinatua denean emaitza ematen dute. Sistema bateragarri indeterminatua denean, berriz, emaitzak ematen dituzte, eta ezezagun bat(zuk) beste bat(zu)en menpe jarri dituztela jakinarazteko mezu bat bueltatzen dute.

LinearSolve[ ] Era matrizialean emandako ekuazio linealetako sistema ebazten du. **Parametrorik ez dagoenean eta sistema bateragarri determinatua denean erabili.**

Reduce[ ] Ekuazio bat edo ekuazio linealetako sistema bat ebazten du. **Parametroak daudean erabili.** Sistema bateragarria (determinatua edo/eta indeterminatua) deneko emaitza guztiak ematen ditu. (**|| = edo , &&= eta**)

Ekuazio linealetako sistemak

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

In[35]:=
```
Solve[{x1 + 2 x2 - x3 + x4 == 1, 2 x1 + x2 + 2 x3 - x4 == 2,
  x1 + 5 * x2 - 5 x3 + 4 x4 == 1}, {x1, x2, x3, x4}]
```
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[35]=
```
{{x3 → 3 - 3 x1 - 3 x2, x4 → 4 - 4 x1 - 5 x2}}
```

Soluzioa: $x_3 = 3 - 3x_1 - 3x_2$ eta $x_4 = 4 - 4x_1 - 5x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
Sistema bateragarri indeterminatua da, izan ere, h(A)=h(AM)=2<3 =ezez. kop.

In[36]:=
```
a = {{1, 2, -1, 1}, {2, 1, 2, -1}, {1, 5, -5, 4}};
```
In[37]:=
```
am = {{1, 2, -1, 1, 1}, {2, 1, 2, -1, 2}, {1, 5, -5, 4, 1}};
```
In[38]:=
```
MatrixRank[a]
```
Out[38]=
```
2
```
In[39]:=
```
MatrixRank[am]
```
Out[39]=
```
2
```


Euskal Herriko Unibertsitatea

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + px_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= p \end{aligned}$$

Ekuazio linealetako sistemak

In[40]:=

```
Reduce[{p*x1 + x2 + x3 == 1, -x1 + p*x2 - x3 == 1, x1 + p*x2 + x3 == p}, {x1, x2, x3}]
```

Out[40]=

$$(p == 1 \&\& x2 == 1 \&\& x3 == -x1) \,||\, \left((-1+p)\, p \neq 0 \&\& x1 == \frac{1-p}{2p} \&\& x2 == \frac{1}{2}(3 - p + 2\,x1 - 2\,p\,x1) \&\& x3 == \frac{1}{2}(-1 + p - 2\,x1)\right)$$

Soluzioa:

1. $p=1$ bada $x_2=1$ eta $x_3=-x_1 \ \forall x_1 \in \mathbb{R}$, hau da, sistema bateragarri indeterminatua da.

2. $p \neq 1$ eta $p \neq 0$ badira $x_1 = \dfrac{1-p}{2p}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(3-p+2x_1-2px_1)$ eta $x_3 = \dfrac{1}{2}(-1+p-2x_1)$, hau da, sistema bateragarri determinatua da.

Sistema bateraezina da beste kasu guztietan!!

Ekuazio linealetako sistemak

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + px_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= p \end{aligned}$$

p=1 denean matrizeen heinak aztertuz, sistema bateragarri indeterminatua dela ikus daiteke, izan ere, h(A)=h(AM)=2<3=ezez. kop:

```
In[79]:= ap1 = {{p, 1, 1}, {-1, p, -1}, {1, p, 1}} /. p -> 1
Out[79]= {{1, 1, 1}, {-1, 1, -1}, {1, 1, 1}}

In[80]:= amp1 = {{p, 1, 1, 1}, {-1, p, -1, 1}, {1, p, 1, p}} /. p -> 1
Out[80]= {{1, 1, 1, 1}, {-1, 1, -1, 1}, {1, 1, 1, 1}}

In[81]:= MatrixRank[ap1]
Out[81]= 2

In[82]:= MatrixRank[amp1]
Out[82]= 2
```

Reduce komandoa erabiliz berriz, sistema p=0 denean bateraezina dela ikus daiteke:

```
In[45]:= Reduce[{p*x1 + x2 + x3 == 1, -x1 + p*x2 - x3 == 1, x1 + p*x2 + x3 == p}, {x1, x2, x3}] /. p -> 0
Out[45]= False
```

Ekuazio linealetako sistemak

Adibidea: $x_1 + x_2 + bx_3 = 1$

$ax_1 + x_2 + bx_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 + bx_3 = 1$

- Sailkatu eta ebatzi honako ekuazio linealetako sistema a eta b parametroen arabera

In[46]:=
```
Reduce[{x1 + x2 + b*x3 == 1, a*x1 + x2 + b*x3 == 1, x1 + 2 x2 + b*x3 == 1},
 {x1, x2, x3}]
```

Out[46]=
```
(a == 1 && x2 == 0 && b ≠ 0 && x3 == (1 - x1)/b) || (b == 0 && a == 1 && x1 == 1 && x2 == 0) ||
 (-1 + a ≠ 0 && x1 == 0 && x2 == 0 && b ≠ 0 && x3 == 1/b)
```

Soluzioa:

1. $a = 1 \wedge b \neq 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0$ eta $x_3 = \frac{1-x_1}{b}\ \forall x_1 \in \mathbb{R}$ sistema bateragarri indeterminatua

2. $a = 1 \wedge b = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\ x_2 = 0\ \forall x_3 \in \mathbb{R}$ sistema bateragarri indeterminatua

3. $a \neq 1 \wedge b \neq 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\ x_2 = 0\ x_3 = {}^1\!/_b$ sistema bateragarri determinatua

Sistema bateraezina da beste kasu guztietan!!

Ekuazio linealetako sistemak

Adibidea:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

• Sailkatu eta ebatzi honako ekuazio linealetako sistema a eta b parametroen arabera

In[47]:=
```
Reduce[{x1 + 2 x2 - x3 == 1, 2 x1 + 3 x2 - 3 x3 == 1, 3 x1 + 4 x2 - a * x3 == b},
 {x1, x2, x3}]
```

Out[47]=
$$\left(b == 1\ \&\&\ a == 5\ \&\&\ x2 == \frac{2 - x1}{3}\ \&\&\ x3 == \frac{1 + x1}{3}\right) \,||\, \left(-5 + a \neq 0\ \&\&\ x1 == \frac{8 - a - 3\,b}{-5 + a}\ \&\&\ x2 == \frac{2 - x1}{3}\ \&\&\ x3 == \frac{1 + x1}{3}\right)$$

Soluzioa:

1. $b = 1 \wedge a = 5 \Rightarrow \ x_2 = \dfrac{2 - x_1}{3}$ eta $x_3 = \dfrac{1 + x_1}{3}\ \forall x_1 \in \mathbb{R}$ sistema bateragarri indeterminatua
2. $a \neq 5 \Rightarrow \ x_1 = \dfrac{8 - a - 3b}{-5 - a},\ x_2 = \dfrac{2 - x_1}{3}$ eta $x_3 = \dfrac{1 + x_1}{3}$ sistema bateragarri determinatua

Sistema bateraezina da beste kasu guztietan!!

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea