Zenbaki Konplexuak

1. Sarrera
2. Adierazpide geometrikoa eta oinarrizko definizioa
3. Zenbaki konplexuen arteko eragiketak
4. Euler-en formula
5. Zenbaki konplexu baten era esponentziala
6. Zenbaki konplexu baten logaritmo nepertarrak
7. Zenbaki konplexuen berreturak
8. Aljebraren oinarrizko teorema

Sarrera

$x^2+1=0$ ekuazioa ebaztean $x=\pm\sqrt{-1}$ lortzen dugu, eta, beraz, ez dauka soluziorik eremu errealean. Hala ere, *i* unitate irudikaria ($i^2 = -1$) sartzen badugu, orduan aska dezakegu $x=\pm i$

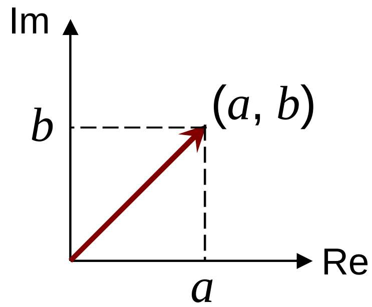
z zenbaki konplexu bat *a* eta *b* zenbaki errealen pare ordenatu bat da non $z=a+bi$ den

Adibideak:

$$z_1 = 2+3i$$
$$z_2 = \sqrt{3}-4i$$

Adierazpide geometrikoa eta oinarrizko definizioak

z = $(a,b)=a+bi$ zenbaki konplexu baten adierazpide geometrikoa jatorritik *(a,b)* punturaino doan bektorea da



- z-ren **aurkakoa**: $-z=-a-bi$
- z-ren **konjugatua**: $\overline{z}=a-bi$
- z-ren **modulua**: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\rho$
- z-ren **argumentua**: $\arg(z)=\alpha=\arctan(b/a)$; $\arg(z)=\alpha+2k\pi$ (k=0 argumentu nagusia)

Jatorriaren eta (a,b) puntuaren arteko distantzia da

Adierazpide geometrikoa eta oinarrizko definizioak

Moduluaren eta konjugatuaren propietateak:

$$|z| > 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0$$

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad z_2 \neq 0$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Adierazpide geometrikoa eta oinarrizko definizioak

Zenbaki konplexu bat adierazteko lau era baliokide daude:

- Era **binomikoa**: $a+bi$
- Era **kartesiarra**: (a,b)
- Era **polarra**: ρ_α
- Era **trigonometrikoa**: $\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak

Kalkuluak era binomikoan:

- Batuketa:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

- Biderketa:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

- Zatiketa($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2+d^2)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak

- Berreketa: Newton-en binomioa erabiliz

$$z^n = (a+bi)^n = \binom{n}{0} a^n (bi)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} (bi)^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 (bi)^n =$$

$$= a^n + na^{n-1}bi - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n i^n$$

- Interesatzen zaigu ***i*-ren berreturak** azkartasunez eta eraginkortasunez kalkulatzea, asko agertzen direlako ***:***

$$i^0 = 1 = i^4$$

$$i^1 = i = i^5$$

$$i^2 = -1 = i^6$$

$$i^3 = -i = i^7$$

$$i^4 = 1$$

$$\boxed{i^n = i^{4c+r} = i^{4c} i^r = 1^c i^r = i^r}$$

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak

Kalkuluak era polarrean:

- Biderketa: $z_1 \cdot z_2 = (\rho_\alpha) \cdot (\rho'_{\alpha'}) = (\rho \cdot \rho')_{\alpha+\alpha'}$

- Zatiketa: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_\alpha}{\rho'_{\alpha'}} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\alpha-\alpha'}$

- Berreketa: $z^n = (\rho_\alpha)^n = (\rho^n)_{n\alpha}$

- Erroketa: $\sqrt[n]{\rho_\alpha} = r_\theta \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}; k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \end{cases}$

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak

$(1_\alpha)^n = (1^n)_{n\alpha}$ ekuazioa era trigonometrikoan idaztean ***Moivre-ren formula*** lortzen da:

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)}$$

Euler-en formula

e^{ix}, *sinx* eta *cosx* funtzioen Maclaurinen seriezko garapenak kontuan hartuz, Euler-ren fomulak direlakoak frogatzen dira

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$$\boxed{e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi}$$

Euler-en formula

Euler-en formula erabiliz, lor ditzakegu sinuaren eta kosinuaren era esponentzialak:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$$

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

Zenbaki konplexu baten era esponentziala

Zenbaki konplexu baten adierazpen orokorrari Euler-ren formula aplikatzen zaio:

$$z = \rho\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right] \equiv \rho \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} \equiv |z| e^{i(\varphi+2k\pi)}$$

$$z = e^{\ln|z|} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} \Rightarrow z = e^{\ln|z| + i(\varphi+2k\pi)}$$

k=0 (Determinazio nagusia)

Zenbaki konplexuen logaritmo nepertarrak

Era esponentzialaren logaritmoak hartuz lortzen da :

$$z = e^{\ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)} \Rightarrow \ln(z) = \ln\left[e^{\ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)}\right]$$

$$\ln(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$$

k=0 (Determinazio nagusia)

Zenbaki konplexuen berreturak

Izan bedi *z* eta *z'* zenbaki konplexuak non :

$$z = a + ib$$

$$z' = a' + ib'$$

$$z^{z'} = \left[e^{\ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)} \right]^{(a' + ib')} = e^{\left[\ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)\right] \cdot (a' + ib')}$$

k=0 (Determinazio nagusia)

Aljebraren oinarrizko teorema

n. graduko polinomio orok:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

n erro erreal edo konplexu dauzka. Gainera, polinomioaren koefizienteak errealek badira, orduan baldin $z=a+ib$ $P(z)$-ren soluzioa bada, orduan $\bar{z}=a-ib$ ere soluzioa da