EDA

1.- Sarrera

2.- Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

- Existentzia teoremaren enuntziatua
- Aldagai banagarrien ekuazioak eta ekuazio laburgarriak
- Ekuazio diferentzial homogeneoak
- Homogeneoen kasura sinplifika daitezkeen ekuazio diferentzialak
- Ekuazio diferentzial zehatzak
- Ekuazio zehatzen kasura sinplifika daitezkeen ekuazioak.
- Ekuazio diferentzial linealak
- Ekuazio linealen kasura sinplifika daitezkeen ekuazioak

Sarrera

Zer da ekuazio diferentziala?

Deribatuak edo diferentzialak dituen edozein ekuaziori, ekuazio diferentzial deritzogu.

Deribatu partzialak agertzen badira, deribatu partzialezko ekuazioak (**DPE**) deritze; bestela, ***ekuazio diferentzial arruntak*** (**EDA**).

Ekuazio diferentzialaren ***ordena***

Ekuazioan agertzen den deribatuaren ordena handienari deritzo. Adibidez, $8y''+xy'-13y=1$ ekuazioak 2. ordenako ekuazio diferentziala da.

Sarrera

<u>Ekuazio diferentzialaren ***gradua***</u>

Ekuazioan agertzen den ordenarik handieneko deribatuaren berretzaileari deritzo.

Adibidez, $(y'')^3+8xy'-13y=1$ ekuazioak 3. gradukoa da.

<u>n ordenako ekuazio diferentzial baten era orokorra hauxe da</u>

$$f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

Sarrera

Interes berezikoak dira honako eredu honi jarraitzen dioten ***EDA linealak:***

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Gai honetan **1. ordenako EDA**-k ikusiko ditugu, hau da bakarrik lehenengo deribatua agertuko da.

EDA-k motibatzen dituzten kasurik interesgarrienak

1. adibidea: ***Newtonen hozte legeak*** adierazten duenez, tenperatura konstanteko ingurune batean murgildutako gorputz baten tenperaturaren aldakuntza indizea, une oro gorputzaren eta ingurunearen tenperaturen arteko diferentziaren zuzenki proportzionala da.

Printzipio hau adierazten duen ekuazio diferentziala hauxe da:

$$T'(t) = K(T - T_0)$$

EDA-k motibatzen dituzten kasurik interesgarrienak

2. adibidea: ***Ohm-en legeak*** adierazten duenez, zirkuitu bati aplikatutako $e(t)$ tentsioa zirkuitu hori osatzen duten tresnetan gertatutako tentsio jaitsieraren batura da. *LRC* zirkuitu sinple baterako, tentsio jaitsierak hauexek dira:

Autoindukzioa (L henry): $Li'(t)$

Erresistentzia (R ohm): $Ri(t)$

Kapazitatea (C farad): $\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

Sistema elektrikoaren koordenatu bezala zirkuituko korrontearen $i(t)$ intentsitatea hartzean, Ohm-en legearen arabera, honako ekuazio integro-diferentziala daukagu:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt = e(t)$$

Ekuazio diferentzial arrunt baten soluzioak

$y = g(x)$ funtzioa $f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ ekuazioaren soluzioa dela esaten da, baldin ekuazio hau betetzen badu, hots, baldin bere deribatuekin batera ekuazioaren barnean sartu eta gero identitatea badaukagu.

Soluzioak mota hauetan klasifikatzen dira:

Jatorrizkoa, soluzio orokorra edo sorta (haz) integrala, baldin n konstante arbitrario baldin badauzka.

Era esplizituan: $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n)$

Era inplizituan: $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n) = 0$

Soluzio partikularrak edo kurba integralak, soluzio orokorretik konstante arbitrarioei balioak emanez lortzen direnak.

Soluzio singularrak edo integral singularrak, soluzio orokorretik, konstanteak zehaztuz, ezin lor daitezkeenak.

1. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Hauek adierazteko hainbat era daude:

Era orokorra:

$$f(x, y, y') = 0 \ \text{(lehen gradua } y' \text{-n)}$$

Era diferentziala:

$$X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy = 0$$

Era normala:

$$y' = g(x,\ y)$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

<u>Existentzia teoremaren enuntziatua</u>: Izan bedi $y' = g(x,y)$ ekuazio diferentziala bere era normalean adierazita:

"*Baldin g(x,y) eta (∂g/∂y) bere deribatua M (a,b) puntuaren ingurune batean funtzio jarraituak badira, orduan ekuazio diferentziala betetzen duen funtzio bakar bat existitzen da, x = a denean, y=b balioa hartzen duena*".

Integrazio teknikak aplikatuz, $F(x,y,C) = 0$ soluzio orokorra lortzen da. Soluzio partikular bat lortzeko, $y(a) = b$ hasierako baldintza bat eman behar da, C zehazten ahalbidetzen duena.

eman ta zabal zazu

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Aldagai banagarrien ekuazioak eta ekuazio laburgarriak:

1) Kasurik sinpleena, era diferentzialean emanda, hauxe da:

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

Operatzaile integrala aplikatuz: $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$

2) Bigarren kasu baten ekuazioa hauxe izan daiteke:

$$f(x)G(y)\,dx + g(y)F(x)\,dy = 0$$

F(x)G(y)-z zatituz, hurrengo ekuazioa lortzen da:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}\,dy = C$$

Hala ere, soluzio orokorraren barnean ez dauden soluzioak kontsideratu behar dira, *F(x)G(y)* zerora berdintzean sortu direnak

2. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio diferentzial homogeneoak: $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$

EDA homogeneoa dela esaten da, baldin $X(x, y)$ eta $Y(x, y)$ m gradu berdineko funtzio homogeneoak direnean. Beraz, hurrengoa bete behar da:

$$X(xt,\ yt) \;=\; t^m X(x,\ y), \quad Y(xt,\ yt) = t^m Y(x,y)$$

Ekuazioa era normalean adierazten bada:

$$y' = \frac{-X(x,y)}{Y(x,y)} \equiv f(x,y),$$

$f(x, y)$ zero graduko funtzio homogeneo bat dela ondorioztatzen da, gradu berdineko funtzio homogeneoen zatidura delako.

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio diferentzial homogeneoak:

$$y' = f(x,y) = t^0 (xt, yt) = f(xt, yt) \quad \rightarrow \quad y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ekuazio hau aldagai banagarrien kasura murrizten da, soluzio orokorra hauxe izanik:

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} - \ln x = C, \quad \text{non} \ \ z = \frac{y}{x}$$

3. Adibidea

eman ta zabal zazu

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Homogeneoen kasura sinplifika daitezkeen ekuazio diferentzialak: Izan bitez hurrengo erako ekuazioak:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Haiek hurrengo ordezkapenarekin homogeneo bihur daitezke

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

non (x_0 , y_0) zuzen hauen ebakidura puntua baita:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Baina, baldin $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$, zuzenak paraleloak dira (sistema bateraezina da) eta aurreko ordezkapenak ez du balio. Kasu horretan: $a_1x+b_1y+c_1=\lambda(a_2x+b_2y)+c_1$

Orduan: $z=a_2x+b_2y$ ordezkapenak aldagai banagarrien ekuazio bihurtzen du, zeren eta:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)=g(z)$$

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2\cdot g(z)$$

4. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio diferentzial zehatzak: $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ ekuazio diferentziala D eremu lau batean ***zehatza*** da, baldin $U(x,y)$ funtzio erreal bat existitzen bada, eremu hartan hurrengoa betetzen duena:

$$d[U(x,y)] = X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Kasu honetan, ekuazioa $d[U(x,y)]=0$ idazten da, bere soluzioa hauxe izanik:

$$d\left[U(x,y)\right] = 0 \xrightarrow{\int} U(x,y) = C$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Teorema: Baldin $X(x,y), Y(x,y)$ eta $(\partial Y/\partial x)$ eta $(\partial X/\partial y)$ beren deribatuak D-n funtzio jarraituak badira, ekuazio diferentziala zehatza izan dadin baldintza beharrezko eta nahikoa $\boldsymbol{\partial Y/\partial x=\partial X/\partial y}$ betetzea da (deribatu gurutzatuen berdintza).

$$\boxed{\exists U(x,y) : dU = Xdx + Ydy \quad \Leftrightarrow \quad \partial Y / \partial x = \partial X / \partial y}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Baldintza beharrezkoa (⇒)

Hipotesiagatik: $dU = Xdx + Ydy$.

Definizioz: $dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$.

Bi diferentzialak identifikatzean:

$$X(x,y) = \partial U/\partial x \; [1], \qquad Y(x,y) = \partial U/\partial y \; [2]$$

[1] y-rekiko eta [2] x-rekiko deribatuz, Schwarz-en teorema aplikatzean:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Baldintza nahikoa (⇐)

Hipotesiagatik: $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$ [3]

Nahikoa da, [3] hipotesitik, $U(x,y)$ funtzio bat lor daitekeela frogatzea, non: $dU = Xdx + Ydy$

Gainera, $U(x,y)$-k [1] eta [2] bete behar ditu. [1] kontutan hartuz:

$$U(x,y) = \int_a^x X(x,y)dx + \varphi(y) \qquad [4]$$

non $\phi(y)$ [2] bete behar duen funtzio laguntzaile bat baita.

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Hortaz, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y) = \displaystyle\int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}dx + \varphi'(y)$

[3] hipotesia kontutan hartuz:

$$Y(x,y) = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \varphi'(y) = \left[Y(x,y)\right]_a^x + \varphi'(y) \rightarrow Y(x,y) = Y(x,y) - Y(a,y) + \varphi'(y)$$

$$\rightarrow \quad \varphi'(y) = Y(a,y) \quad \rightarrow \quad \varphi(y) = \int_b^y Y(a,y)dy \quad [6]$$

[6] ekuazioa [4] ekuazioan sartuz, $U(x,y)$ zehaztuta geratzen da:

$$U(x,y) = \int_a^x X(x,y)dx + \int_b^y Y(a,y)dy$$

non $M(a,b)$, $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$-ren jarraitutasun domeinuan dagoen puntu arbitrario bat baita. Puntu hori nahi bezala finka daiteke integralen kalkuluak errazteko.

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazioaren soluzio orokorra hauxe da:

$$\boxed{\int_a^x X(x,y)dx + \int_b^y Y(a,y)dy = C}$$

Beste aukera bat bezala, aldagaiak elkartrukatzetik sortzen den formula baliokidea aplikatzea praktikoa izan daiteke:

$$\boxed{\int_b^y Y(x,y)dy + \int_a^x X(x,b)dx = C}$$

5. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio zehatzen kasura sinplifika daitezkeen ekuazioak.

Faktore integratzailearen teoria:

Izan bedi $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ ekuazio diferentzial ez zehatza; $(\partial Y/\partial x)$ eta $(\partial X/\partial y)$ D eremu batean funtzio jarraituak direla suposatuko dugu.

$z=f(x,y)$, ekuazioaren ***faktore integratzaile*** bat dela esaten da, baldin $z(x,y)X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy=0$ ekuazio diferentzial zehatz bat bada.

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Faktore integratzaileen determinazioa. Hurrengoa bete behar da:

$$\frac{\partial(zX)}{\partial y}=\frac{\partial(zY)}{\partial x} \rightarrow X\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial X}{\partial y}=Y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \Rightarrow Y\frac{\partial z}{\partial x}-X\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

Zehatza izateko

Beraz, lehen ordenako deribatu partzialezko ekuazio bat daukagu; haren integrazioak kontsideratutako ekuazioaren $z=z(x,y)$ faktore integratzaileen multzoa ematen du.

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Faktore integratzaile errazak. Batzuetan, deribatu partzialezko integrazioa ebatzi gabe, $X(x,y)dx+Y(x,y)dy$ adierazpen diferentziala aztertuz faktore integratzaileak lor daitezke. Hurrengoak dira diferentzial errazen adibideak:

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}; \qquad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}; \qquad d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}; \qquad d\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{xy}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Esaterako, $ydx-xdy=0$ ekuazio erraza kontsideratuz gero, aurreko ereduei jarraituz, hurrengo faktore integratzaileak lortzen dira:

$$z(x,y)=\frac{1}{y^2};\quad \frac{-1}{x^2};\quad \frac{\pm 1}{x^2+y^2};\quad \frac{\pm 1}{xy}$$

aukera interesgarri bat izan daiteke aldagai bakar baten menpekoak diren faktore integratzaileen existentzia ikertzea. Bi kasu kontsideratzen dira:

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

z = z(x) moduko faktore integratzaileak

z *y*-ren menpekoa ez bada, orduan:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{dz}{dx}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Deribatu partzialezko ekuazioa hurrengo ekuazio arruntera murrizten da:

$$\frac{dz}{dx} = z\frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}, \quad \text{baldin} \quad \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y} \equiv \phi(x)$$

Integratzean:

$$z(x) = A\exp\int \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}\,dx = A\exp\int \phi(x)\,dx$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

z = z(y) moduko faktore integratzaileak

z x-ren menpekoa ez bada, orduan:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dy}$$

Deribatu partzialezko ekuazioa hurrengo ekuazio arruntera murrizten da:

$$\frac{dz}{dy} = z\frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}, \quad baldin \quad \frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X} \equiv \varphi(y)$$

Integratzean:

$$z(y) = A\exp\int\frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}dy = A\exp\int\varphi(y)\,dy$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio homogeneoetarako faktore integratzaileak.

Baldin $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ ekuazioa homogeneoa bada, hurrengo faktore integratzailea onartzen du:

$$z(x,y)=\frac{1}{xX(x,y)+yY(x,y)}$$

6. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio diferentzial linealak:

Lehen ordenako kasuan, honako itxura hau daukate:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

y'-ren koefizienteaz zatituz [$a_0(x) \neq 0$], honela adieraz dezakegu:

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)} \quad \rightarrow \quad \boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \quad [1]$$

Integrazio teknika errazena $z(x)$ faktore integratzaile bat lortzea da. Horretarako, ekuazioa era diferentzialean idazten dugu, honako hau lortuz:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \rightarrow \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y} = P(x) \Rightarrow z(x) = \exp\left[\int P(x)dx\right]$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

[1] ekuazioa faktore integratzaileaz biderkatu eta gero:

$$y' \exp\left[\int P(x)dx\right] + P(x)\,y \exp\left[\int P(x)dx\right] = Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]$$

Ikus daitekeenez, berdintzaren ezkerraldea $y \cdot \exp\left[\int P(x)dx\right]$ biderkaduraren deribatua da. Beraz, integratuz:

$$\left(y \exp\left[\int P(x)dx\right]\right) = \int \left[Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]\right]dx + C$$

y askatzen badugu, soluzio orokorrera heltzen gara:

$$\boxed{y = \exp\left[-\int P(x)dx\right]\left(\int \left[Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]\right]dx + C\right)}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio diferentzialaren menpeko aldagaia x bada, hots,

$$x' + P(y)x = Q(y)$$

bere soluzio orokorra, aldagaiak elkartrukatuz, hauxe da:

$$\boxed{x = \exp\left[-\int P(y)dy\right]\left(\int \left[Q(y)\exp\left[\int P(y)dy\right]\right]dy + C\right)}$$

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

$y'+P(x)y=Q(x)$ ekuazio linealaren soluzio partikular bat ezagutzen bada, koadratura bat baino ez da behar soluzio orokorrera heltzeko.

Izan ere, baldin $y_1(x)$ soluzioa bada, orduan: $y_1'+P(x)y_1=Q(x)$

Ekuazioen kendura atalka eginez eta integratuz:

$$y'-y_1'+(y-y_1)P(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{d(y-y_1)}{dx}+(y-y_1)P(x)=0 \quad\xrightarrow{\int}$$

$$\ln(y-y_1)=-\int P(x)dx+C \quad\rightarrow\quad (y-y_1)=A\exp\left[-\int P(x)dx\right]$$

7. Adibidea

Lehen ordenako eta lehen graduko ekuazioak

Ekuazio linealen kasura sinplifika daitezkeen ekuazioak:

(a) Bernoulliren ekuazioa: $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ erakoa da.

Lineal bihurtzen da hurrengo aldaketarekin:

$$y^{(1-n)}=z \xrightarrow{D} (1-n)y^{-n}y'=z' \rightarrow y^{-n}y'=\frac{z'}{1-n}$$

Orain, ekuazioa (y^{-n})-z biderkatuz eta ordezkatuz:

$$y^{-n}y'+P(x)y^{(1-n)}=Q(x) \rightarrow z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

eta hurrengo soluzio orokorra daukan ekuazio lineal bat daukagu:

$$\boxed{z=y^{(1-n)}=\exp\left[\int(n-1)P(x)dx\right]\left(\int\left[(1-n)Q(x)\exp\left[\int(1-n)P(x)dx\right]\right]dx+C\right)}$$

8. Adibidea