KUDEAKETA ETA INFORMAZIO SISTEMEN INGENIARITZA

INFORMATIKAKO GRADUA

MATEMATIKA DISKRETUA

2017ko ekainaren 16a

1. ORRIA

1.- Baliokidetasun logikoaren propietateak erabiliz, aztertu:

a) hurrengo proposizioa tautologia bada:

$$\left[\left((q \wedge s) \vee \left(q \wedge (s \rightarrow r)\right)\right) \wedge \neg q\right] \rightarrow p$$

Ebazpena:

$$\left[\left((q \wedge s) \vee \left(q \wedge (s \rightarrow r)\right)\right) \wedge \neg q\right] \rightarrow p \equiv \neg\left[\left((q \wedge s) \vee \left(q \wedge (s \rightarrow r)\right)\right) \wedge \neg q\right] \vee p \equiv$$

$$\equiv p \vee \neg\left[\left((q \wedge s) \wedge \neg q\right) \vee \left(q \wedge (s \rightarrow r) \wedge \neg q\right)\right] \equiv p \vee \neg\left[(s \wedge C) \vee \left((s \rightarrow r) \wedge C\right)\right] \equiv$$

$$\equiv p \vee \neg C \equiv p \vee T \equiv T$$

b) hurrengo proposizioa kontraesana bada:

$$\neg\left[\neg\left((p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\right) \vee (r \rightarrow s)\right] \wedge r$$

Ebazpena:

$$\neg\left[\neg\left((p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\right) \vee (r \rightarrow s)\right] \wedge r \equiv r \wedge \neg\left[\neg\left((p \wedge q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)\right) \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv$$

$$\equiv r \wedge \neg\left[\neg\left((p \wedge q) \wedge \neg(q \vee \neg p)\right) \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv r \wedge \neg\left[\neg(p \wedge q \wedge \neg q \wedge p) \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv$$

$$\equiv r \wedge \neg\left[\neg(p \wedge C) \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv r \wedge \neg\left[\neg C \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv$$

$$\equiv r \wedge \neg\left[T \vee (r \rightarrow s)\right] \equiv r \wedge \neg T \equiv r \wedge C \equiv C$$

(4 puntu)

2.- Aztertu hurrengo arrazonamenduaren baliotasuna, baliokidetasun logikoaren propietateak edota inferentzia logikoaren erregelak erabiliz:

"Luismak etxe bat erosten badu, orduan mailegu bat eskatzen du. Luismak ez ditu altzariak erosten edo telebista bat erosten du. Etxe bat erosten badu, altzariak erosten ditu. Luismak ez du mailegua eskatzen. Beraz, Luismak ez du etxea erosten."

Ebazpena:

p = "Luismak etxe bat erosten du"
q = "Luismak mailegua eskatzen du"
r = "Luismak altzariak erosten ditu"
s = "Luismak telebista bat erosten du"

$$(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \to r) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

$$(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \to r) \wedge \neg q \equiv (p \to q) \wedge \neg q \wedge (p \to r) \wedge (r \to s) \equiv$$
$$\Rightarrow \neg p \wedge (p \to s) \Rightarrow \neg p$$

(4 puntu)

3.- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi korrespondentzia hurrengo eran definituta daudenak:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x>0 \\ x+3 & x\le 0 \end{cases} \qquad g(x) = |x+1|$$

Grafikoki adierazi bi korrespondentziak eta hurrengo galderak erantzun:

a) Aplikazioak dira? Baiezkoan, aplikazio horiek sailka itzazu.

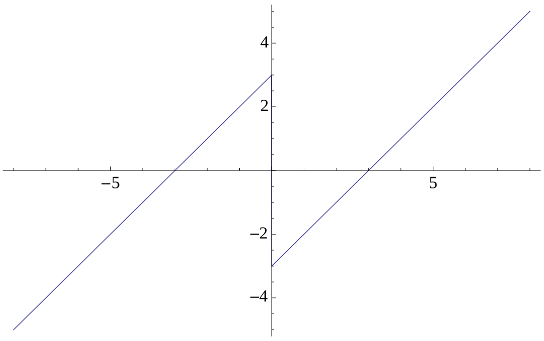
b) Kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$

c) Posiblea denean alderantzizko funtzioa kalkulatu.

Ebazpena:

a)

f(*x*) grafikoki adierazten dugu:



f aplikazio bat da zeren:

$D(f) = \mathbb{R}$ eta $x \in D(f)$ bakoitzarentzat $\exists!\ y \in Im(f) / f(x) = y$

$Im(f) = \mathbb{R}$

EZ da injektiboa hurrengoa betetzen ez delako:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

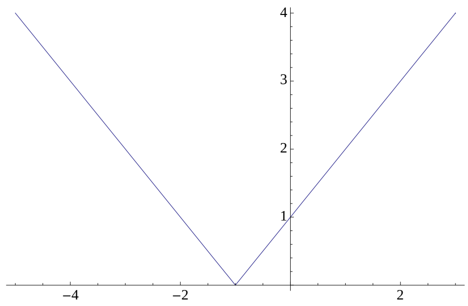
$$\begin{cases} x_1 = 3 & \Rightarrow \quad f(x_1) = 0 \\ x_2 = -3 & \Rightarrow \quad f(x_2) = 0 \end{cases}$$

Suprajektiboa da zeren:

$Im(f) = \mathbb{R}$

Beraz, EZ da bijektiboa, suprajektiboa izan arren ez baita injektiboa.

$g(x)$ grafikoki adierazten dugu:



g aplikazio bat da zeren:

$D(g) = \mathbb{R}$ eta $x \in D(g)$ bakoitzarentzat $\exists!\ y \in \mathrm{Im}(g) / g(x) = y$

$\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$

EZ da injektiboa hurrengoa betetzen ez delako:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \Rightarrow \quad g(x_1) = 1 \\ x_2 = -2 & \Rightarrow \quad g(x_2) = 1 \end{cases}$$

EZ da suprajektiboa zeren:

$\mathrm{Im}(g) \neq \mathbb{R}$

Beraz, EZ da bijektiboa, ez da injektiboa ezta suprajektiboa ere ez delako.

b)

$f \circ g = f[g(x)] = f[|x+1|] = |x+1| - 3$

$$g \circ f = g[f(x)] = \begin{cases} g[f(x)] & x > 0 \\ g[f(x)] & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} |x-3+1| = |x-2| & x > 0 \\ |x+3+1| = |x+4| & x \leq 0 \end{cases}$$

c) Ezin da alderantzizkorik kalkulatu aplikazioak bijektiboak ez direlako.

(6 puntu)

4.- $\mathbb{R}-\{0\}$ multzoan hurrengo eran definitutako $\mathcal{R}$ erlazio bitarra definitzen da:

$$x\Re y \Leftrightarrow x^2 = xy$$

a) $\mathcal{R}$ –ren propietateak aztertu.

b) Baliokidetasun-erlazio bat da? Ordena-erlazioa da?

Ebazpena:

a)

BIHURKORRA: BAI

$\forall x \in \mathbb{R}-\{0\} \qquad x\Re x$

$$x\Re y \Leftrightarrow x^2 = x^2$$

SIMETRIKOA EZ

$\forall x, y \in \mathbb{R}-\{0\} \qquad x\Re y \Rightarrow y\Re x$

$$x\Re y \Leftrightarrow x^2 = xy$$
$$y\Re x \Leftrightarrow y^2 = yx$$

Soilik betetzen da x=y denean. Horrek esan nahi du erlazioa antisimetrikoa dela, ondoren frogatzen den bezala:

ANTISIMETRIKOA: BAI

$\forall x, y \in \mathbb{R}-\{0\} \qquad x\Re y \wedge y\Re x \Rightarrow x = y$

$$x\Re y \Leftrightarrow x^2 = xy$$
$$y\Re x \Leftrightarrow y^2 = yx$$

Soilik betetzen da:
$x = y$
Beraz, erlazioa antisimetrikoa da.

IRAGANKORRA: BAI

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}-\{0\} \qquad x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$

$$\left.\begin{array}{l} x\Re y \Leftrightarrow x^2 = xy \\ y\Re z \Leftrightarrow y^2 = yz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\Re y \Leftrightarrow x^2 = xy \\ y\Re z \Leftrightarrow y = z \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = xz \Leftrightarrow x\Re z$$

Beraz, erlazioa iragankorra da.

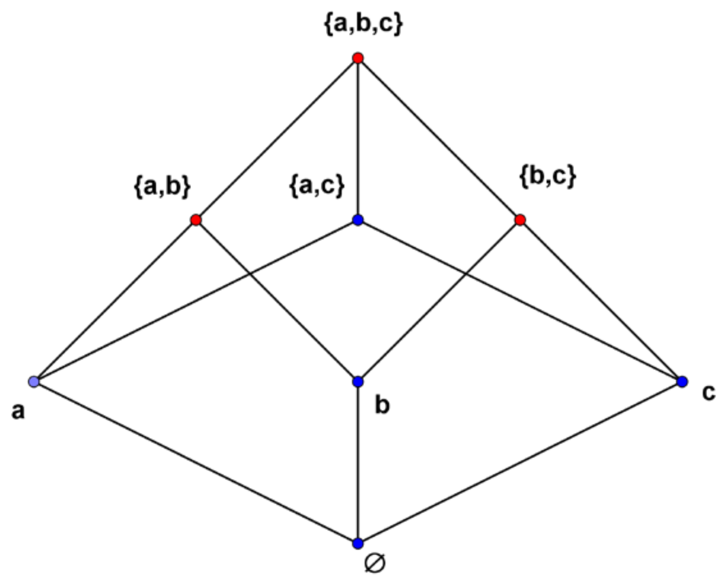
c) Ordena-erlazioa da, bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra delako.

(4 puntu)

5.- Izan bedi $P=\{a,b,c\}$ multzoa. P-ren azpimultzoa guztiak lortu eta jakinda "azpimultzo", $\subseteq$, erlazio bitarra ordena erlazioa dela, bere Hasse diagrama irudikatu eta $C=\{(a,b,c),(a,b),(b,c)\}$ azpimultzoaren elementu nabarmenak kalkulatu.

Ebazpena:

Hasse diagrama hurrengo eran geratuko litzateke:



C-ren elementu nabarmenak hurrengoak dira:

Behe borneak=$\{\varnothing,b\}$

Infimoa(C)=$b\notin C$ $\rightarrow$ EZ dago MINIMORIK

Goi borneak=$\{(a,b,c)\}$

Supremoa(C)=$(a,b,c)\in C$ $\rightarrow$ $\text{Maximoa}(C)=(a,b,c)$

(2 puntu)

2. ORRIA

1.- Saskibaloiko talde baten 8 jokalarik hotel batean hartuko dute ostatu. Hotelak logela hirukoitz bat, bikoitz bi eta indibidual bakarra ditu. Zenbat era desberdinetan banatu daitezke logelak?

Suposa dezagun, 8 jokalarien artean bi anaiak direla eta beti logela berdinean hartzen dutela ostatu. Zenbat era desberdinetan banatu daitezke logelak orain?

Ebazpena

$C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{3,2} \cdot 1 = 1680$ era desberdin.

Bi anaiek logela berdinean hartzen badute ostatu:

Anaiek logela hirukoitzan hartzen badute ostatu: $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,2} \cdot 1$

Anaiek logela bikoitz batean hartzen badute ostatu: $C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot 1$.

Orduan,

$C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,2} \cdot 1 + 2 \cdot C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot 1 = 300$ era desberdinetan bana daitezke logelak.

(5 puntu)

2.- Javierren iratzargailua ez dabil oso ondo, jo behar duen aldien %20an ez du funtzionatzen. Jotzen duenean, Javier klasera berandu heltzearen probabilitatea 0.2 da, baina jotzen ez badu berandu heltzearen probabilitatea 0.9 da.

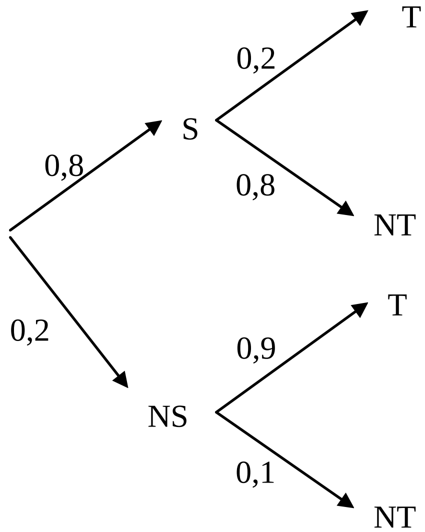
a) Klasera berandu heldu eta iratzargailua jo izanaren probabilitatea lortu.

b) Garaiz heltzearen probabilitatea zehaztu.

c) Javier berandu heldu da klasera, zein da iratzargailua jo izanaren probabilitatea?

Ebazpena

Siendo
S: "iratzargailuak jotzen du"
NS: "iratzargailuak ez du jotzen"
T: "berandu heltzen da"
NT: "garaiz heltzen da"



a) $P(T \cap S) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$

b) $P(NT) = P(S \cap NT) + P(NS \cap NT) = 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,66$

c) $P(S/T) = \dfrac{P(S \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,16}{1 - P(NT)} = \dfrac{0,16}{0,34} = 0,47$

(5 puntu)

3.- Indukzio metodoa erabiliz, hurrengoa egiaztatu:

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2(2^n-1) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Ebazpena

1) $n=1$ denean formula egia dela konprobatzen da

$$2=2$$

2) n=k den kasurako egia dela suposatzen da:

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^k=2(2^k-1)$$

3) n =k+1 kasurako egia dela konprobatzen da:

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^k+2^{k+1}\stackrel{?}{=}2(2^{k+1}-1)$$

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^k+2^{k+1}=2(2^k-1)+2^{k+1}=$$
$$=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2\cdot(2^{k+1}-1)$$

$$\Rightarrow 2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2(2^n-1) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

(4 puntu)

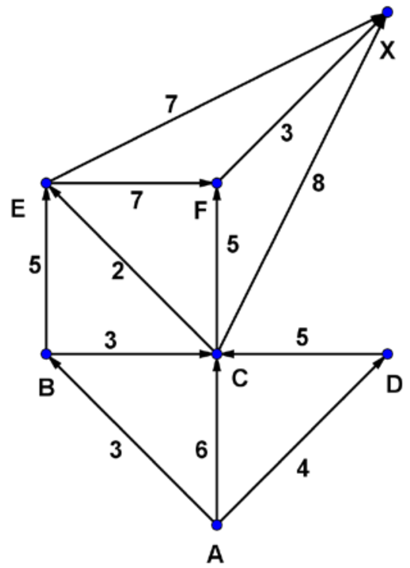
4.- Espioi bati misio arriskutsu bat egokitu zaio, A puntutik X puntura pertsonalki informazioa eraman behar du. Misio hau gauzatzeko, espioiak hurrengo taula jasotzen du non bide posibleak eta euren arriskugarritasuna (zein arriskutsua den bide hori hartzea) zehazten diren:

		Helmuga						
		A	B	C	D	E	F	X
Jatorria	A	-	3	6	4	-	-	-
	B	-	-	3	-	5	-	-
	C	-	-	-	-	2	5	8
	D	-	-	5	-	-	-	-
	E	-	-	-	-	-	7	7
	F	-	-	-	-	-	-	3
	X	-	-	-	-	-	-	-

a) Adierazi grafo baten bidez bide posibleen taula.
b) Algoritmo egokia erabili zehazteko zein den arrisku minimoa A-tik X-ra joateko. Adierazi zein/zeintzuk den/diren bide posible/posibleak.

Ebazpena

a) Adierazi grafo baten bidez bide posibleen taula.



b) Algoritmo egokia erabili zehazteko zein den arrisku minimoa A-tik X-ra joateko. Adierazi zein/zeintzuk den/diren bide posible/posibleak.

Dijkstra-ren algoritmoa erabiltzen da A-tik X-rako biderik laburrena kalkulatzeko.

1. pausua

Izan bedi $V=\{A,B,C,D,E,F,X\}$ erpinen multzoa, n(V) = 7.

$i=0$ eta $S_0=A$. Se etiqueta el vértice A erpinari (0,-) etiketa esleitzen zaio eta (∞,-) etiketa gainontzeko erpinei. n>1 denez algoritmoarekin jarraitzen dugu.

2. pausua

Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v\in V-\{S_0\}$

E(B)=min{E(B), E(A)+p(A, B)}=min{∞, 3} = 3→(3,A)

E(C)=min{E(C), E(A)+p(A,C)}=min{∞, 6} = 6→(6,A)

E(D)=min{E(D), E(A)+p(A,D)}=min{∞, 4}= 4→(4,A)

E(E)=min{E(E), E(A)+p(A,E)}= min{∞, ∞}=∞

E(F)=min{E(F), E(A)+p(A,F)}= min{∞, ∞}=∞

E(X)=min{E(X), E(A)+p(A,X)}= min{∞, ∞}=∞

3. pausua

Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_1=\{B\}$. $S_1=\{A,B\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=1<n-1 denez 2. pausura itzultzen gara.

2. pausua

Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v\in V-\{S_1\}$

E(C)=min{E(C), E(B)+p(B, C)}=min{6, 6} = 6→(6,B)

E(D)=min{E(D), E(B)+p(B,D)}=min{4, ∞} = 4→(4,A)

E(E)=min{E(E), E(B)+p(B,E)}=min{∞, 8}= 8→(8,B)

E(F)=min{E(F), E(B)+p(B,F)}= min{∞, ∞}=∞

E(X)=min{E(X), E(B)+p(B,X)}= min{∞, ∞}=∞

3. pausua

Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_2=\{D\}$. $S_2=\{A,B,D\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=2<n-1 denez 2. pausura itzultzen gara.

2. pausua

Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v\in V-\{S_2\}$.

E(C)=min{E(C), E(D)+p(D, C)}=min{6, 9} = 6→(6,B)

E(E)=min{E(E), E(D)+p(D,E)}=min{8, ∞}= 8→(8,B)

E(F)=min{E(F), E(D)+p(D,F)}= min{∞, ∞}=∞

E(X)=min{E(X), E(D)+p(D,X)}= min{∞, ∞}=∞

3. pausua
Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_3 = \{C\}$.
$S_3 = \{A,B,D,C\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=3<n-1 denez 2. pausura itzultzen gara.

2. pausua
Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v \in V - \{S_3\}$.

E(E)=min{E(E), E(C+p(C,E)}=min{8, 8}= 8→(8,B)

E(F)=min{E(F), E(C)+p(C,F)}= min{∞, 11}=11→(11,C)

E(X)=min{E(X), E(C)+p(C,X)}= min{∞, 14}=14→(14,C)

3. pausua
Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_4 = \{E\}$.
$S_4 = \{A,B,D,C,E\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=4<n-1 denez 2. pausura itzultzen gara.

2. pausua
Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v \in V - \{S_4\}$

E(F)=min{E(F), E(E)+p(E,F)}= min{11, 15}=11→(11,C)

E(X)=min{E(X), E(E)+p(E,X)}= min{14, 15}=14→(14,C)

3. pausua
Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_5 = \{F\}$.
$S_5 = \{A,B,D,C,E,F\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=5<n-1 denez 2. pausura itzultzen gara.

2. pausua
Erpin guztiei etiketak esleitzen dizkiegu $v \in V - \{S_5\}$

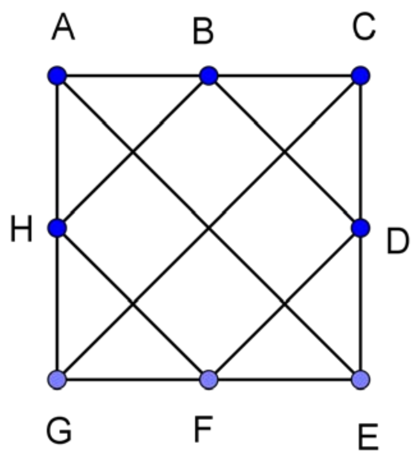
E(X)=min{E(X), E(E)+p(E,X)}= min{14, 14}=14→(14,F)

3. pausua
Etiketa baliorik txikiena duen erpina hautatzen dugu, $v_6 = \{X\}$.
$S_6 = \{A,B,D,C,E,F,X\}$ hartzen dugu. I-ren balioa handitzen dugu, i=6=n-1 denez algoritmoa amaitzen da.

A-tik X-rako distantzia minimoa 14 da. Bide posibleak:
ACX
ABCFX
ABCX
ACFX

(6 puntu)

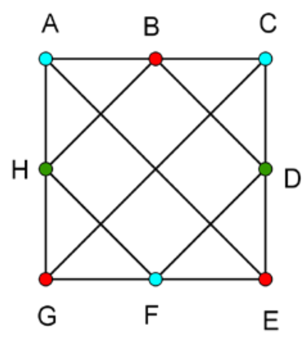
5.- izan bedi G hurrengo eran adierazitako grafoa:



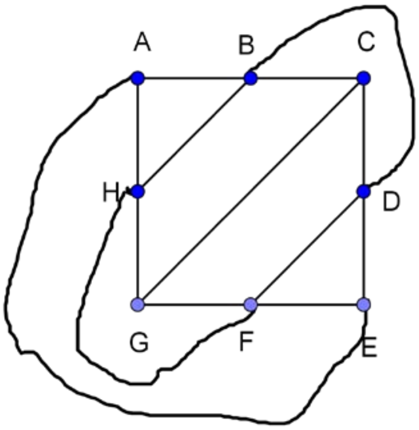
a) Zenbaki kromatikoa kalkulatu eta erpinak koloreztatu.
b) Grafo euleriarra da? Arrazoitu erantzuna.
c) Grafoaren irudikapen laua/leuna marraztu.
d) A-tik E-rako bide bat zehaztu ibilbidea dena eta A-tik E-rako bide bat bidezidorra dena baina ez ibilbidea.

Ebazpena

a) Zenbaki kromatikoa 3 da



b) Ez da grafo Euleriarra, konexua izan arren erpin guztiek ez dutelako gradu bikoitia..
c) Irudikapen laua/leuna



d) A-tik a E-rako bidea ibilbidea (erpin desberdinak) dena: ABDE

Bidezidorra (arku desberdinak) ibilbidea ez dena, orduan erpinak errepikatu behar dira: ABDCBHFE.

(5 puntu)