2. gaia: Boole aljebraren oinarriak eta ate logikoak

Aljebra boolearra

- 1938an, Shannon-ek proposatu zuen zirkuitu digital diseinuari metodo matematiko bat aplikatzea, funtzio digitalak sortzeko
- Metodo hori, George Boole-k proposatu zuen XIX. mendean, Egia/Gezurra moduko proposaketa logikoak ikertzeko: Boole aljebra

Funtzio logikoen adierazpena

- Metodo honen oinarriak bi balioko aldagai eta aldagai horren arteko hiru eragiketak dira
- Erlazioak, aldagai eta funtzioen arteko balio guztiak jasotzen dituzten taulen bidez definitzen dira➔Egia-taulak

AND

X	Y	$Z = X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

X	Y	$Z = X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

X	$Z = \overline{X}$
0	1
1	0

Boole aljebraren postulatuak

- Abiapuntua da egiaztatu beharrik ez dagoen zenbait baieztapen ➔ Postulatuak
- Baieztapen hori (aljebra honetako zenbaki eta eragiketaren definizioak direla) erabiliz, erlazio eta baieztapen berriak sortu ditzakegu

$X \neq 1 \text{denean} \ \ X = 0$ $\qquad$ $X \neq 0 \text{ denean} \ \ X = 1$

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$
$$1 + 1 = 1 \qquad 0 \cdot 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0$$
$$1 + 0 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 0$$

$X = 1 \text{ denean} \ \ \overline{X} = 0$ $\qquad$ $X = 0 \text{ denean} \ \ \overline{X} = 1$

Boole aljebraren oinarrizko identitateak

1.	$X+0=X$	2.	$X\cdot 1=X$	
3.	$X+1=1$	4.	$X\cdot 0=0$	
5.	$X+X=X$	6.	$X\cdot X=X$	
7.	$X+\overline{X}=1$	8.	$X\cdot\overline{X}=0$	
9.	$\overline{\overline{X}}=X$			
10.	$X+Y=Y+X$	11.	$XY=YX$	Trukakorra
12.	$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$	13.	$X(YZ)=(XY)Z$	Elkartzea
14.	$X(Y+Z)=XY+XZ$	15.	$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$	Banatzea
16.	$\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$	17.	$\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$	De Morgan

$(X+Y)\cdot\left(X+\overline{Y}\right)=X$ Konbinazioa $X\cdot Y+X\cdot\overline{Y}=X$

Erlazio hauek egiazkoak dira, postulatuak betetzen badituzte

Boole aljebraren oinarrizko identitateak

- Identitateak frogatzeko, berdintasuneko bi aldeko funtzioaren egia taulak osatuko ditugu, eta berdinak direla egiaztatu

- Banatze (biderketa batuketan) propietatearen froga hemen daukazue:

X	Y	Z	Y+Z	X·(Y+Z)	X·Y	X·Z	X·Y+X·Z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Boole aljebraren oinarrizko identitateak

- Oinarrizko eragiketa bat ez bada ere, badago definituta beste eragiketa bat: batuketa esklusiboa (XOR)

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Emaitza 1 da, eragigaiak ezberdinak badira

Boole aljebraren oinarrizko identitateak

•Batuketa esklusiboak ere bai elkartze propietatea dauka

•Horrela, hiru edo aldagai gehiago daukan funtzioa da, non irteera 1 da bere sarreran 1eko kopurua bakoitia denean➔Funtzio bakoitia

X	Y	Z	$Y \oplus Z$	$X \oplus (Y \oplus Z)$	$X \oplus Y$	$(X \oplus Y) \oplus Z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Funtzio baten adierazpen kanonikoa

- Identitate eta postulatuen bidez, aldagai logikoen arteko erlazio berriak asmatu ditzakegu
- Funtzio logiko baten egia tauletik atera dezakegu adierazpen aljebraikoa➔ Adierazpen kanonikoa
- Adierazpen kanonikoak funtzioaren aldagai guztiak ditu bere gai guztietan
- Adierazpen kanonikoaren gaiak, bidergaiak (minterminoak) edo batugaiak (maxterminoak) izan daitezke

Funtzio baten adierazpen kanonikoa

X	Y	Z	Biderkadura gaia	Ikurra	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

- Minterm-a biderketa bat da, emaitza 1 balio duena aldagaiko konbinazio bakar baterako eta besterako 0 ematen duena
- Minterm-ko adierazpenean, 1 ematen duen aldagaia 1 balioa badauka, ezeztatu gabe agertuko da, eta 0 baliokoa bada, ezeztatua

Funtzio baten adierazpen kanonikoa

X	Y	Z	Batuketa gaia	Ikurra	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

- Maxterm-a batuketa bat da, emaitza 0 balio duena aldagaiko konbinazio bakar baterako eta besterako 1 ematen duena
- Maxterm-eko adierazpenan, 0 ematen duen aldagaia 1 balioa badauka, ezeztatua agertuko da, eta 0 baliokoa bada, ezeztatu gabe
- Maxterm-ak, bere minterm-eko ezeztapenak dira➔$M_i=m'_i$

Funtzio baten adierazpen kanonikoa

- Funtzioaren balioa 1 egiten dituzten aldagai balioen konbinazioei dagozkien **minterm-eko batuketa** da adierazpen kanonikoa
- Funtzioaren balioa 0 egiten dituzten aldagai balioen konbinazioei dagozkien **maxterm-eko biderketa** ere bai da adierazpen kanonikoa
- Funtzio bakoitzari bi adierazpen kanoniko dagokio➔**Minterm-eko batuketa/Maxterm-eko biderketa**
- Bi adierazpen kanonikotik edozein funtzio betetzen dituzten zirkuitu digitalak atera daitezke, behin bere egia-taula ezagututa (baina oso luzeak izan daitezke...)

Funtzio baten adierazpen kanonikoa

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,Z$$

$$= m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

$$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,Y\,\overline{Z}$$

$$= m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

$$F = \overline{m_1 + m_3 + m_4 + m_6} = \overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_6}$$

$$M_i = \overline{m_i}$$

$$F = M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6$$

De Morgan teoremaren bidez ikus daiteke bi adierazpenak berdinak direla

Funtzio logikoen sinplifikazioa

- Adierazpen kanonikoen bidez edozein funtzio logikoen adierazpen aljebraikoa lortu dezakegu
- Adierazpen hauek oso luzeak izan daitezke
- Aljebra boolearraren bidez, gai gutxiago daukan eta, beraz, gauzatzeko errezagoa den, adierazpen baten bihur daiteke adierazpen kanonikoa➔ Sinplifikazioa
- Karnaugh mapen metodoaren bidez, funtzioaren sinplifikazioa sistematiko bihurtuko dugu

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

- Karnaugh mapa, sarrera bikoitzeko taula bat gisa egia-taularen adierazpen bat da
- Errenkada eta zutaberen gurutzagune (mapen laukia) bakoitza, funtzioaren balio bat da
- Lauki bakoitzari, minterm bat dagokio, funtzioaren minterm-eko laukietan, 1 idazten da

m_0	m_1
m_2	m_3

$x \backslash y$	0	1 (y)
0	$x'y'$	$x'y$
x 1	xy'	xy

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

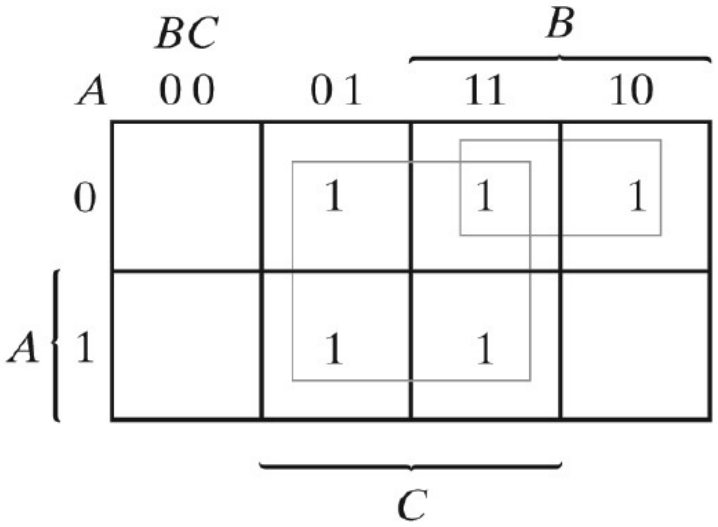
- Funtzioaren aldagai kopuruaren arabera, Karnaugh mapek 4 lauki (bi aldagai), 8 lauki (hiru aldagai), 16 lauki (lau aldagai),... daukate
- Lauki auzokideei dagozkien minterm-ak, gai bakarren bildu daitezke (konbinazioa)
- Gai (inplikatzailea) horren adierazpenean bakarrik agertzen dira lauki guztientzat balio amankomuneko aldagaiak

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01 (z)	11 (y, z)	10 (y)
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
x 1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

- m_1, m_3, m_5 eta m_7 implikatzaile bakarrean biltzen dira: *C*
- m_3 eta m_2 $A'{\cdot}B$ implikatzailean biltzen dira
- *Bi implikatzaile honen batuketa, funtzioko minterm guztiak ditu barne, beraz adierazpen kanonikoaren baliokidea da*➔$F=C+A'{\cdot}B$



$F=m_1+m_2+m_3+m_5+m_7$

$F=C+A'{\cdot}B$

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

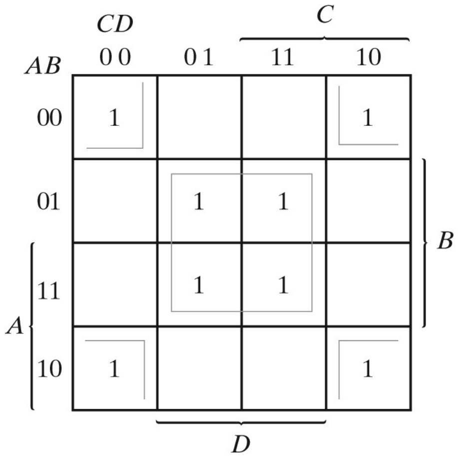
- Gai gutxien eta gai bakoitzean aldagai kopuru txikien, baina funtzio baten minterm guztiak barne dauzkan batuketa, **funtzio baten batuketa minimoa** da
- Lauki kopuru (2ko berredurak) handien daukan inplikatzailea, guztiak funtzioaren mintermak direnak, **inplikatzaile lehena** da

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

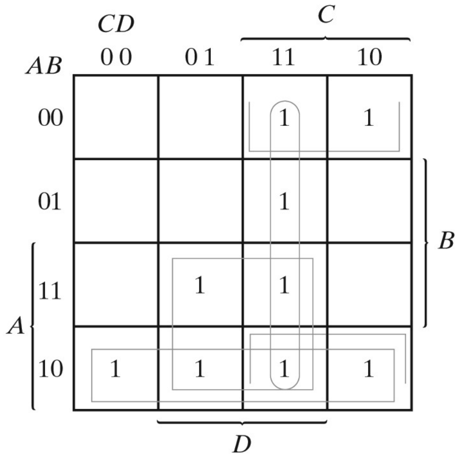
wx \ yz	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

- Inplikatzaile lehen bakar bati dagozkion laukiak, **lauki berezia**k dira
- Lauki bereziak dauzkaten inplikatzaile lehenak, **funtsezko lehen inplikatzaileak** dira
- Funtzio baten **batuketa minimoa**, funtzioaren inplikatzaile leheneko batuketa bat da, eta barnean beti **funtsezko inplikatzaile lehen guztiak**



Funtsezko lehen inplikatzaileak:
BD y B'D'



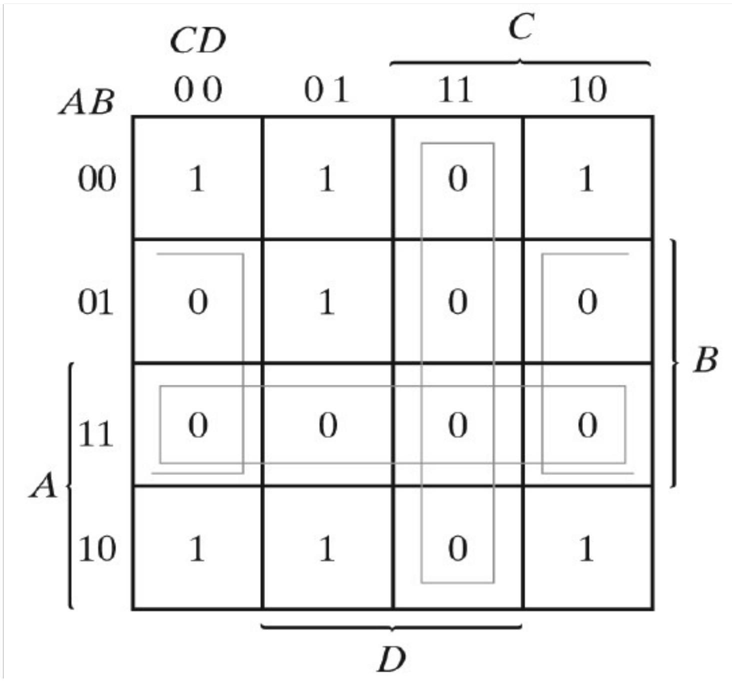
Funtsezko lehen inplikatzaileak:
CD, B'C, AD y AB'

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa: zeroak erabiliz

- Hutsik diren laukiak (funtzioaren zeroak), maxterm-ak irudikatzen dituzte
- Zero lauki auzokideei dagozkien maxterm-ak, gai bakarren bildu daitezke (konbinazioa), inplikatzaile hori batuketa da
- Inplikatzaile horren adierazpenean bakarrik agertzen dira lauki guztientzat balio amankomuneko aldagaiak
- Zero inplikatzaileren biderketa, funtzioaren maxterm guztiak daukana, adierazpen kanonikoaren baliokidea da
- Gai gutxien eta gai bakoitzean aldagai kopuru txikien, baina funtzio baten maxterm guztiak barne dauzkan biderketa, **funtzio baten biderketa minimoa** da

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa: zeroak erabiliz

- M_4, M_6. M_{12} y M_{14} biltzen dira inplikatzaile bakar baten: *B'+D*
- *Beste biak A'+B' eta C'+D' dira*
- *Inplikatzaile guztiak funtsezkoak direnez, biderketa minimoa da: F=(B'+D)·(A'+B')·(C'+D')*



F funtzioaren mapa: F(A, B, C, D)=Σ (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)

Karnaugh mapen bidezko sinplifikazioa

- Adierazpen kanonikoaren lekuan, adierazpen minimoa (**batuketa edo biderketa, bien arteko sinpleena**) erabiliz, sinplifikazioa lortzen da

- Funtzioaren aldagai kopurua lau baino handiagoa denean, sinplifikazioa egiteko ez dira erabiltzen Karnaugh mapak, konputagailuren bidezko metodo iteratiboak baizik

Zehazpen osagabeko funtzioaren sinplifikazioa

- Sarrerako aldagai konbinazio guztietarako, **funtzioaren balioa definituta ez denean, zehazpen osagabeko funtzioak** dira
- Sarrerako aldagaien zenbait konbinazio ezinezkoak direnean, ez da definitzen horretarako funtzio balioa, **X-ren bidez** aipatzen da hori
- Gai honi "berdin zaigu" deitzen da eta horrela adierazten da: d eta funtzio zehaztuta ez den sarrera konbinazio zenbakiaren azpiindizea
- Kasu honetan, sinplifikazioa egiteko **aukeratuko dugu inplikatzaile handien lortzen den balioa: 0 edo 1**

Zehazpen osagabeko funtzioaren sinplifikazioa

$$F=\sum m(1, 3, 7, 11, 15)+\sum d(0, 2, 5)$$

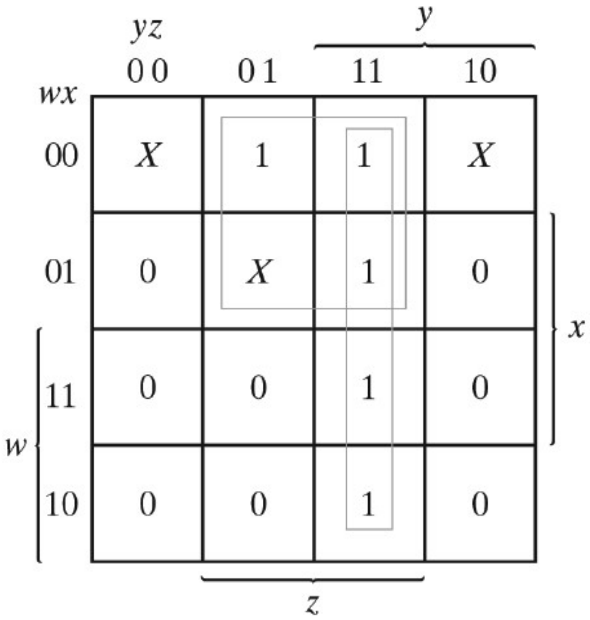
wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

- 0, 2 eta 5 funtzioaren zeroak badira, inplikatzaile lehenaren barruan bakarrik daude 1 eta 3: w'·x'·z
- 0 eta 2 hartu dezakegu 1 bezala, inplikatzaile lehen berria osatzeko: w'·x'
- 5 bada 0, a) batuketa minimoa da

a) $F=y\cdot z+w'\cdot x'$

Zehazpen osagabeko funtzioaren sinplifikazioa

$F=\sum m(1, 3, 7, 11, 15)+\sum d(0, 2, 5)$



b) $F=y\cdot z+w'\cdot z$

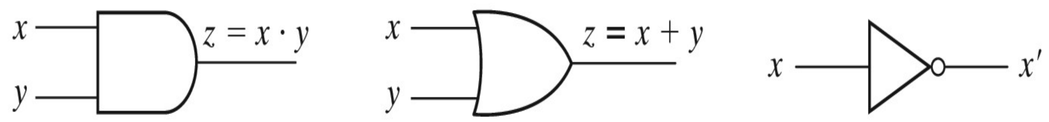
- 0 eta 2 zero eta 5 bat hartuta, inplikatzaile lehena da: w'·z
- b) batuketa minimoa da orain
- Funtzio hau eta a) **ezberdinak dira, baina F osagabeko definizioarekin bat datoz biak**

Ate logikoak

- Aljebra boolearraren bidez, funtzioak diseinatu ditzakegu
- Diseinu digitalean funtzio horiek erabiltzeko, eragiketa boolearrak betetzen dituzten zirkuituak behar ditugu
- Ate logikoak dira zirkuitu horiek

Ate logikoak

- Oinarrizko ate logikoei, aljebra boolearraren hiru eragiketak dagozkie



Funtzio logikoa ETA (AND) Funtzio logikoa EDO (OR) Funtzio logikoa EZ (NOT)

AND

X	Y	Z = X·Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

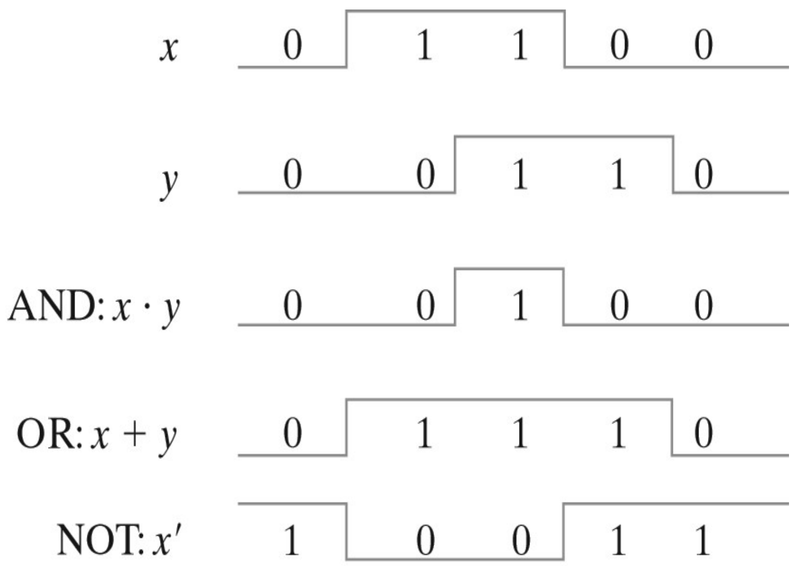
X	Y	Z = X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

X	$Z = \overline{X}$
0	1
1	0

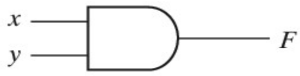
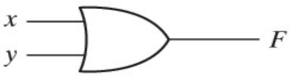
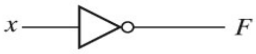
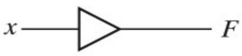
Ate logikoak

- Aldagai boolearraren lekuan, tentsio seinaleak jarriko ditugu
- 0-ri tentsio baxua (L) dagokio, eta tentsio altua (H) 1-i



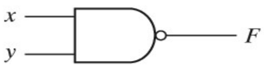
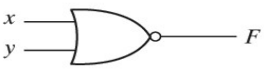
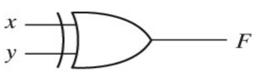
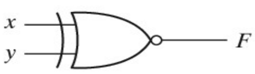
Zirkuitu digitalen sarrera eta irteerako seinaleak

Ate logikoak

Izena	Ikurra	Adierazpen aljebraikoa	Egia-taula
AND		$F = xy$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$F = x + y$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Inbertsorea (NOT)		$F = x'$	$x \mid F$ 0 | 1 1 | 0
Buffer		$F = x$	$x \mid F$ 0 | 0 1 | 1

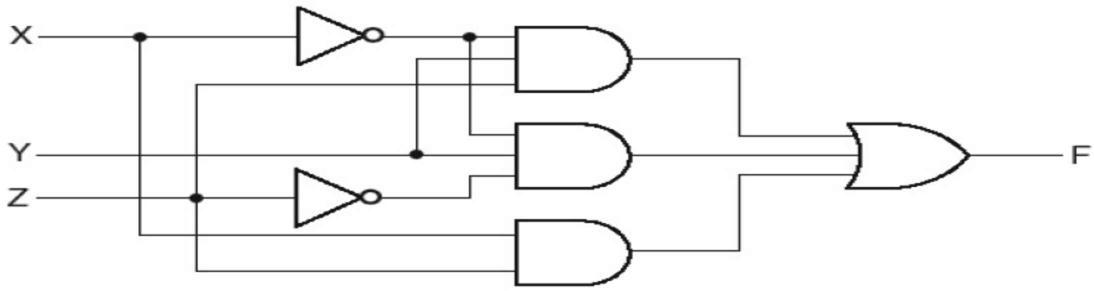
Tentsio eta korronte balioak mantentzeko erabiltzen da buffer-a

Ate logikoak

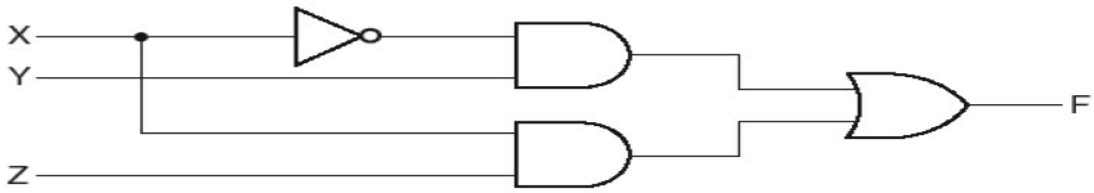
Izena	Ikurra	Adierazpen aljebraikoa	Egia-taula
NAND		$F = (xy)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = (x + y)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
OR esklusiboa (XOR)		$F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR esklusiboa (XNOR)		$F = xy + x'y'$ $= (x \oplus y)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Erabilgarritasunagatik edo ekoizpen erraztasunagatik, beste ate logikoak diseinatu dituzte, nahiz eta ez dira Boole aljebrako eragiketak

Zirkuitu logikoen sintesia



(a) $F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ$

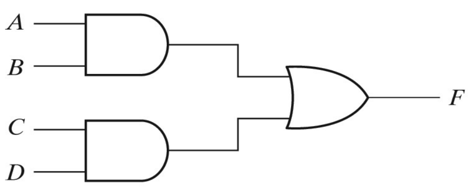


(b) $F = \overline{X}Y + XZ$

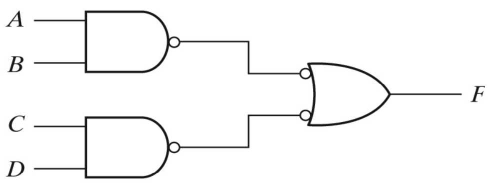
- Boole aljebrako adierazpen guztiak zirkuituan bihurtu daitezke, eragiketa bakoitzaren lekuan dagokion ate logikoa kokatuz
- Gero eta adierazpen sinpleago, zirkuituaren osagarrien kopurua txikiago➔Zirkuitua azkarragoa eta ekonomikoagoa

2 mailetako zirkuituak

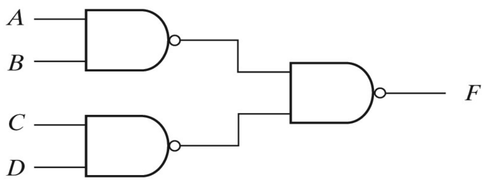
- Adierazpen aljebraikoa biderketako batuketa edo batuketako biderketa bada, zirkuituaren sarrera eta irteeraren artean bi ate logiko baino ez dago➔2 mailetako zirkuituak
- Kasu honetan, zirkuitu osoa gauzatu daiteke bakarrik NAND ate edo bakarrik NOR ate erabiliz



(a)



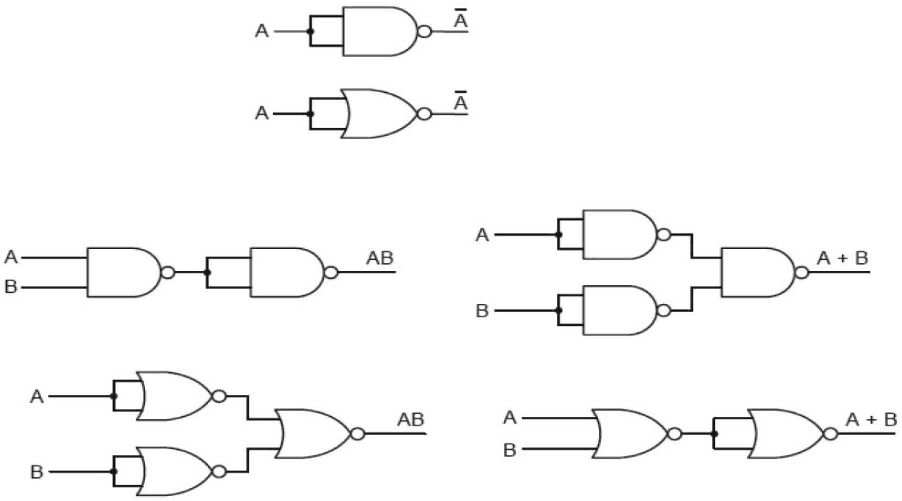
(b)



(c)

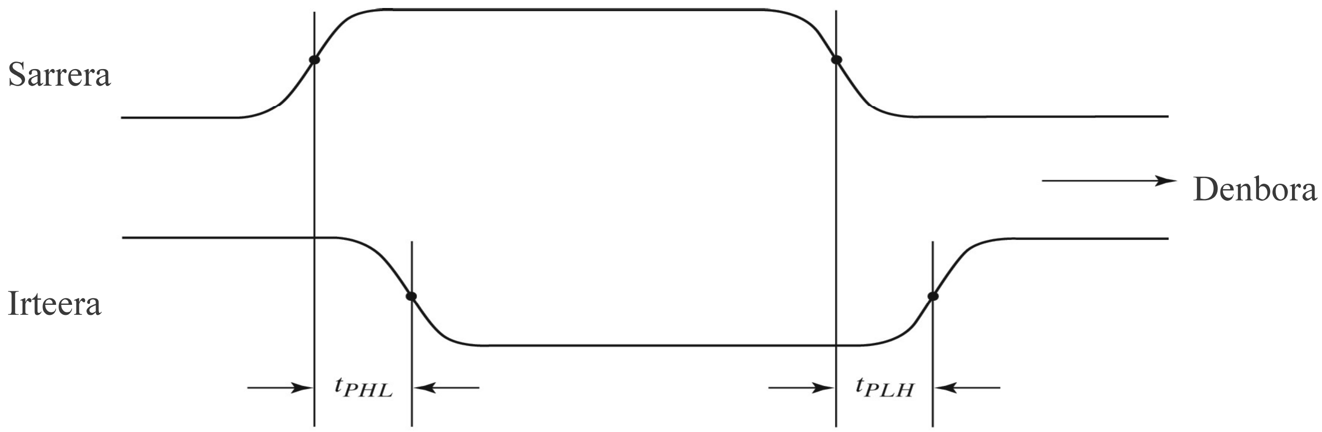
2 mailetako zirkuituak

- Aurrekoa ere bai aplikatu daiteke batuketako biderketa batera, NOR funtzioak sortzeko
- NAND eta NOR-en bidez, Boole aljebrako eragiketa guztiak gauzatu daitezke



Atzerapen denbora

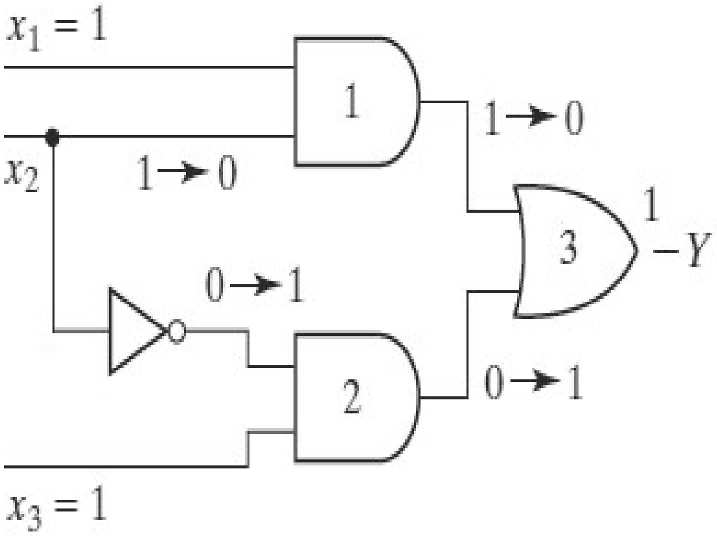
- Benetako zirkuituetan, sarrera aldatzen denetik denbora-tarte bat pasatuko da irteera aldatu arte
- Sarrera aldatu denetik irteera aldatu arte pasatutako denbora, atzerapen denbora t_P deitzen da



Atzerapen denbora: Arriskuak

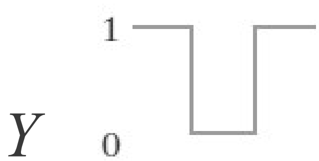
- Zirkutu baten irteera, besteen sarrera denean, bi zirkuituen atzerapen denborak batutzen dira
- Zenbait zirkuituko irteeretan balio okerrak agertu daitezke denbora-tarte txikien bitartean
- Halako balio iragankorrak **arriskuak** deitzen dira, eta sarreretarik irteera heltzeko ate kopuru ezberdineko bideak daudelako gertatzen dira➔bide ezberdina denean, atzerapen denbora ezberdina izango da

Atzerapen denbora: Arriskuak

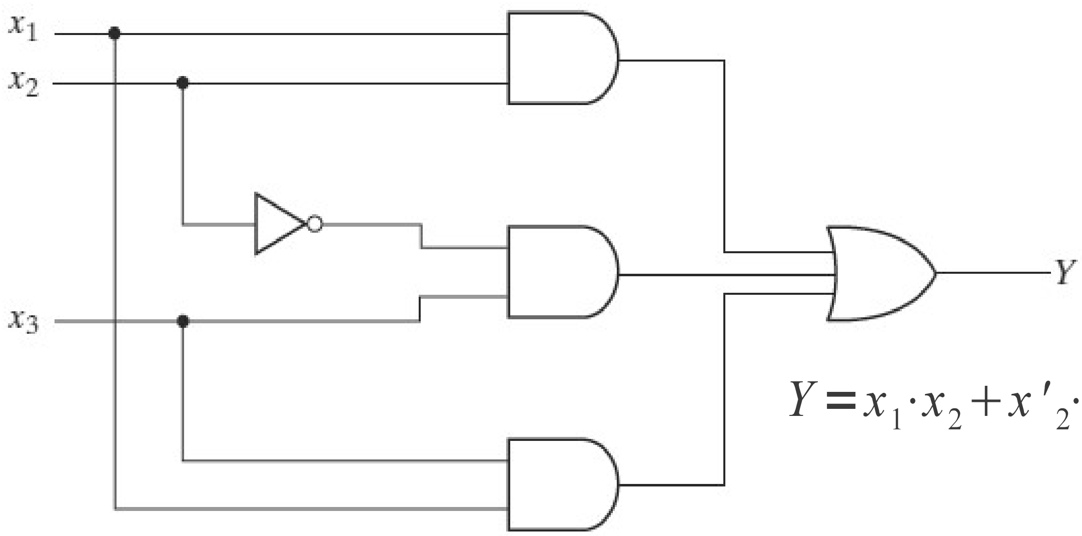


- x_2 1-tik 0-era aldatzen denean, OR ateko bi sarrerak atzerapen ezberdinak dituzte
- Denbora-tarte baten bitartean bi seinaleak dira 0➔ $Y = 0$

$$Y = x_1 \cdot x_2 + x'_2 \cdot x_3$$
$$x_1 x_2 x_3 = 111 \Rightarrow Y = 1$$
$$x_1 x_2 x_3 = 101 \Rightarrow Y = 1$$



Atzerapen denbora: Arriskuak



$$Y = x_1 \cdot x_2 + x'_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$$

- Arazoa konpontzeko batuketan beste gai bat sartzen da
- Gai berriaren balioa 1 da x_2 aldatzen den bitartean➔ $Y = 1$ denbora-tarte osoan

Hardware adierazpeneko lengoaia: VHDL

- Badago beste metodo bat zirkuitu digitalak irudikatzeko: hardware adierazpeneko lengoaia
- Testu bat da, non zenbait funtzio logikoak definitzen direla
- Testu fitxategia definitutako funtzioak betetzen dituen zirkuitu integratu baten programazio edo ekoizpenerako erabiltzen da
- Egun, hardware adierazpeneko lengoai erabiliena VHDL da (Verilog Hardware Description Language)

Hardware adierazpeneko lengoaia: VHDL

- VHDL testuko egitura bi atal du: entitatea eta arkitektura
- Entitatean bakarrik definitzen dira erabiliko ditugun aldagaiak, bere mota eta sarrera edo irteerakoak badira
- Arkitekturan entitatean definitutako aldagaien arteko funtzioak aipatzen dira

```
ENTITY example1 IS
PORT (       x1, x2, x3    : IN       BIT;
             f                  : OUT BIT );
END example1 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF example1 IS
BEGIN
f <= (x1 AND x2) OR (NOT x2 AND x3) ;
END LogicFunc ;
```