INTEGRAL HIRUKOITZA

1.- Sarrera

2.- Integral hirukoitzaren kontzeptua

3.- Integral hirukoitzaren interpretazioa

4.- Funtzio integragarriak

5.- Integral hirukoitzaren kalkulua

6.- Integral hirukoitzaren aplikazio nagusiak

eman ta zabal zazu

Sarrera

Zuzenaren tarteen gainean (integral definitua) edo eremu lauen gainean (integral bikoitza) hartutako integralen kontzeptua, propietateak eta kalkulua $\mathbb{R}^3$-ko eremu bornatuen kasura (integral hirukoitza) hedatzen dira, hiru aldagaiko funtzioak kontsideratzean.

Funtzioa	***Domeinua***		***Integrala***
$f(x)$	$[a,b] \in \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$\int_a^b f(x)dx$
$f(x,y)$	$[D] \in \mathbb{R}^2$	$\rightarrow$	$\iint_D f(x,y)dxdy \equiv \iint_D f(P)dA$
$f(x,y,z)$	$[V] \in \mathbb{R}^3$	$\rightarrow$	$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \equiv \iiint_V f(P)dV$

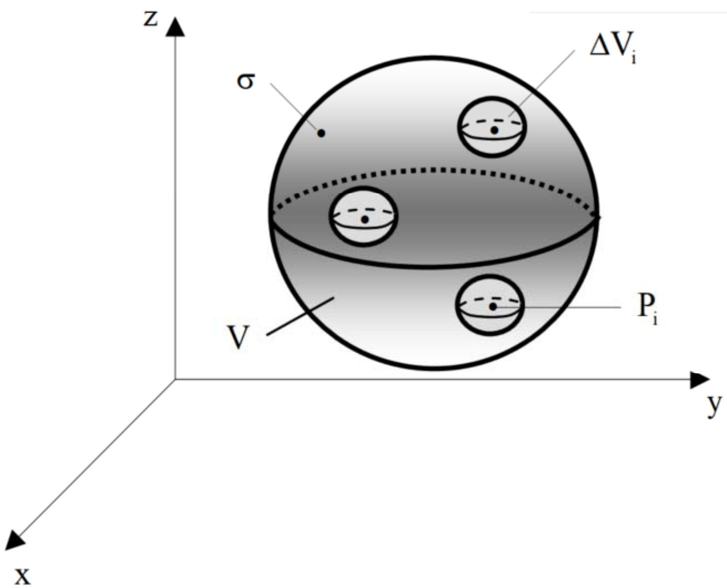
eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral hirukoitzaren kontzeptua

Kontzeptua:

Izan bedi $\mathbb{R}^3$-ko $[V]$ eremu bornatu bat, $[\sigma]$ muga izanik, eta $[V]$-n bornatutako $f(x,y,z)$ funtzio uniforme bat, $[V]$-ko $P(x,y,z)$ puntu orori $f(P)$ zenbakizko balio bat esleitzen duena.



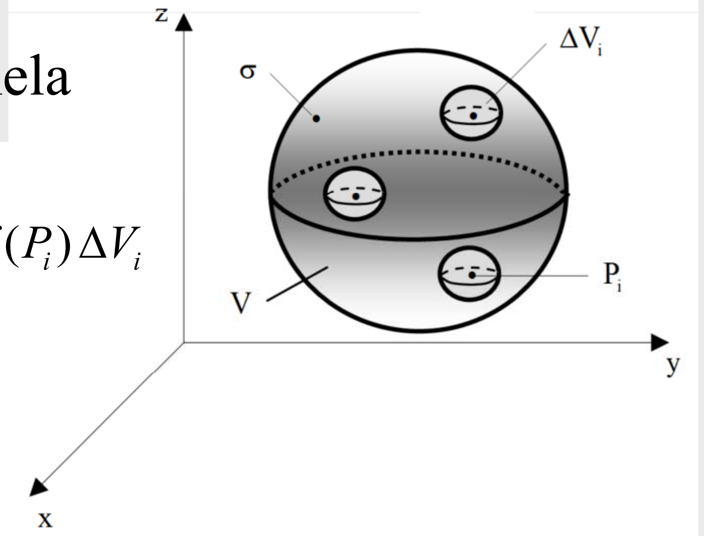
Integral hirukoitzaren kontzeptua

[V]-ren partiketa arbitrario bat egiten bada, *n* bolumen partzial kontsideratuz, eta bolumen bakoitzean puntu arbitrario bat aukeratuz.

$$[V] \xrightarrow[\text{arbitrarioa}]{\text{Partiketa}} \Delta V_i \text{ (bolumen neurria)} \xrightarrow[\text{arbitrarioa}]{\text{Hautaketa}} P_i \in \Delta V_i$$

[*V*]-ko $f(x,y,z)$-ren batura integrala honela definitzen da:

$$S_n = f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \ldots + f(P_n)\Delta V_n = \sum_1^n f(P_i)\Delta V_i$$



eman ta zabal zazu
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral hirukoitzaren kontzeptua

Bolumen partzial baten diametroa kalkulatzeko, hartako edozein bi punturen arteko distantzien multzoaren goiko muturra hartzen da, hots, bi punturen arteko distantziarik handiena. [V]-ko P partiketa baten diametroa, ($diam\ P$), partiketako bolumen partzialen diametrorik handiena da.

Integral hirukoitzaren kontzeptua

Definición de integral triple:

"f(x,y,z) funtzioa [V] bolumenean integragarria dela esaten da, baldin batura integralaren limitea existitzen bada, partiketaren diametroak zerora jotzen duenean, egindako partiketaren mota eta P_i erdiko puntuen aukeraketa kontutan hartu gabe."

Aipatutako limiteari $f(x,y,z)$-ren bolumenaren gaineko **integral hirukoitza** deritzo, hurrengo notazioa erabiliz:

$$\lim_{diam\ P\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f(P)\,dV \equiv \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Integral hirukoitzen interpretazioa

Interpretazio geometrikoa: hiru edo aldagai gehiagoko funtzioak kontsideratzean, grafikoa lau edo dimentsio gehiagoko espazio bateko puntuez osatuta dago. Horrela bada, ezin dugu hiru edo aldagai gehiagoko funtzioen integralen adierazpide geometriko bisualik eman, gure "intuizio geometrikoa" hiru dimentsioko mundura mugatzen delako.

Salbuespen moduan, integrakizun funtzioa unitatea den kasua daukagu, hots, $f(x,y,z)=1$, batura integrala $[V]$ integrazio-eremuaren bolumenaren neurria delako, balio hori integral hirukoitzaren berdina izanik:

$$V=\sum_{1}^{n}\Delta V_i \quad \rightarrow \quad V=\lim_{diam\, P\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\iiint_V dV=\iiint_V dx\,dy\,dz$$

Integral hirukoitzen interpretazioa

Interpretazio fisikoa:

Suposa dezagun $[V]$ eremua materia batek (gorputz baten kasua) hartzen dutela. $\rho(x,y,z)$ integrazio funtzioak banaketaren dentsitatea adierazten du. Integral bikoitzaren kasuan egindakoaren antzeko eran arrazoituz (xafla astunak), batukari integrala bolumen partzialaren gainean banatutako masaren estimaziotzat identifika daiteke, $\rho(P_i)$ dentsitate puntualtzat ΔV_{i} -ko batez besteko dentsitatea hartuz.

Beraz, batura integralak $[V]$-ren M masa totala hurbiltzen du:

$$\rho(P_i)\Delta V_i \cong \Delta m_i \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\,\Delta V_i \cong M_i$$

Estimazioa hainbat eta hobea izango da, zenbat eta bolumen partzialen kopuru handiagoa hartu. Horrela, $[V]$-ren gainean banatutako masa estimazioaren formularen limite moduan definitzen da, $diam\ P \to 0$ doanean:

$$M = \lim_{diam\ P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\,\Delta V_i = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Integragarritasun baldintza

Teorema justifikatzeko, integral definituen eta bikoitzen kasuan definitutako teoremaren baliokidea bete behar da

Teorema: *"f (x,y,z)-n integragarria izan dadin, baldintza beharrezko eta nahikoa hurrengoa da: V_n guztietako baturen limiteak existi daitezela eta berdinak izan daitezela, diam $P \to 0$ doanean."*.

$$\lim_{diam\ P \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta V_i = \lim_{diam\ P \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta V_i = L \quad \leftrightarrow \quad \iiint_V f(P) = L$$

Teorema justifikatzeko, integral definituen eta bikoitzen kasuan bezala egiten da.

Funtzio integragarriak

Aurreko teorema hurrengo funtzio motek betetzen dute:

a) $[V]$-ren gaineko funtzio jarraituak.

b) $[V]$-ren gaineko funtzio bornatuak, baldin gehienez eten uneen kopuru finitu bat badaukate (funtzio ia jarraituak).

Integral hirukoitzen kalkulua

Integral hirukoitza integral bikoitz batera murritz daiteke, integrazio eremua erreferentzia planoen gaineko [V]-ren hiru proiekzio ortogonaletako bat izanik.

Jarraian, hiru kasuak deskribatzen dira, [V]-k edozein norabidetan erregulartasuna daukala suposatuz, halako moldez non erreferentzia ardatzen paraleloak diren zuzenek [V] gehienez bi puntutan ebakitzen baitute.

Integral hirukoitzen kalkulua

(A) Integral bikoitz baterako murrizketa, *XOY* planoaren gaineko [*V*]-ren proiekzioaren gainean.

Izan bedi [V] koordenatu positiboetako oktantean (lehen oktantean) dagoen bolumen erregular bat, non XOY planoan proiektatzean [D_1] lortzen baita.

[V] OZ-ren araberako bolumen erregularra denez, ardatz horren paraleloak diren zuzenek [V]-ren [σ] muga bi puntutan ebatziko dute, halako moldez non [σ]-ren partiketa bat egitea posible baita, bi gainazal-zati lortuz, [σ_1] eta [σ_2] , [V] goitik eta behetik mugatzen dutenak.

Integral hirukoitzen kalkulua

(A) Integral bikoitz baterako murrizketa, *XOY* planoaren gaineko [*V*]-ren proiekzioaren gainean.

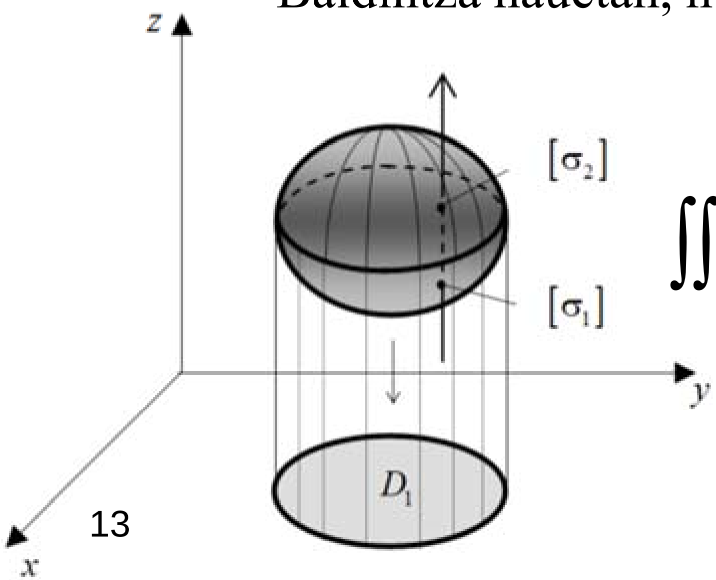
$[\sigma_1]$ eta $[\sigma_2]$-ren ekuazioak $[D_1]$-eko hurrengo funtzio uniformeak badira:

$$[\sigma_1]: \quad z = z_1(x, y) \; ; \quad [\sigma_2]: \quad z = z_2(x, y)$$

[*V*] bolumena, honela defini daiteke podrá definirse según:

$$[V] \equiv \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y) \; ; \quad \forall (x, y) \in [D_1] \right\}$$

Baldintza hauetan, hurrengo kalkulu formula frogatzen da :

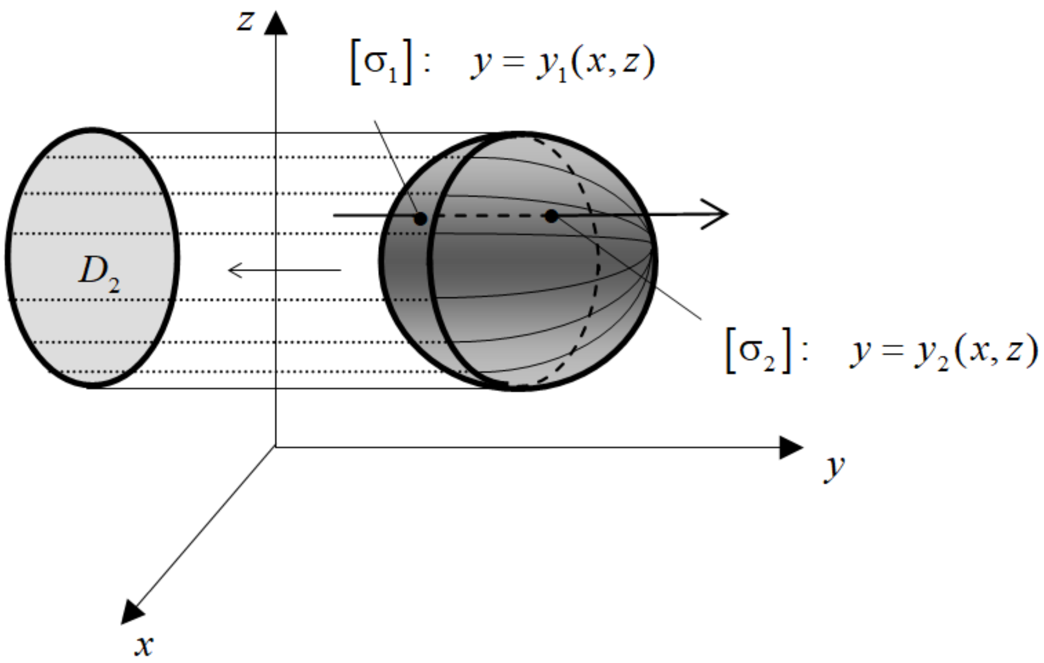


$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy$$

Integral hirukoitzen kalkulua

(B) Integral bikoitz baterako murrizketa, *XOZ* planoaren gaineko [*V*]-ren proiekzioaren gainean

Izan bedi [V] erregularra, OY norabidearen arabera:



Integral hirukoitzen kalkulua

(B) Integral bikoitz baterako murrizketa, *XOZ* planoaren gaineko [*V*]-ren proiekzioaren gainean

[*V*] honela idatz daiteke:

$$[V] \equiv \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z) \,; \quad \forall (x, z) \in [D_2] \right\}$$

$y=y_1(x,z)$ eta $y=y_2(x,z)$, $[D_2]$-ko funtzio uniformeak, $[D_2]$-tik marraztutako OY-ren zuzen paraleloek $[\sigma]$ muga ebakitzean ezkerrean eta eskuinean uzten dituzten muga-zatien ekuazioak izanik.

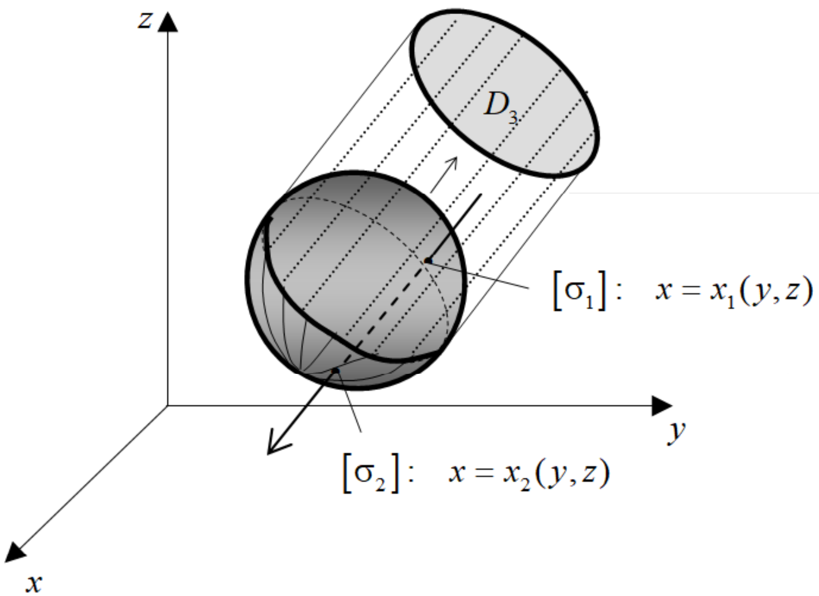
Kasu honetan, kalkuluaren formula hauxe da :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_2} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dx\, dz$$

Integral hirukoitzen kalkulua

(C) Integral bikoitz baterako murrizketa, *YOZ* planoaren gaineko [V]-ren proiekzioaren gainean

$$[V] \equiv \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\,; \quad \forall (y,z) \in [D_3] \right\}$$



$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_3} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dy\,dz$$

Integral hirukoitzen kalkulua

Aurreko formulak aplikatzean sortzen diren integral bikoitzak kalkulatzeko, bi aukera agertzen dira, kasu bakoitzean aldagaien ordena nola aukeratzen den. Beraz, integral hirukoitz bat kalkulatzeko, sei era desberdinetan ager daitezkeen hiru integral mugatu ebatzi behar dira. Oro har, [*V*]-ren forma eta integrakizun funtzioen klaseak iradokiko digu integrazio ordenarik errazena.

Baldin [*V*] norabide batean erregularra ez bada, era komenigarri batean zati daiteke eremu erregularretan; gero, integrazio eremuari dagokion propietate batukorra aplika daiteke.

1. adibidea

Integral hirukoitzen aldagai aldaketa

Hurrengo integralean agertzen diren *x*, *y* eta *z* aldagaiak:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

u, *v* eta *w* aldagaiez ordezkatu nahi dira, ondorengo erlazioei behatuz :

(1) $T: \quad x = x(u,v,w)\,; \quad y = y(u,v,w)\,; \quad z = z(u,v,w)$

erlazio horiek [R]-ko (*u,v,w*) puntuei [*V*] integrazio domeinuko (*x,y,z*) irudiak esleitzen dizkiote: $u = u(x,y,z)$

$$(u,v,w) \in [R] \xrightarrow{T} [x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \in [V]$$

(1) ekuazioa *u*, *v* eta *w* aldagaietan ebatziz, hurrengo alderantzizko aplikazioa daukagu:

(2) $T^{-1}: \quad u = u(x,y,z) \quad v = v(x,y,z) \quad w = w(x,y,z)$

Integral hirukoitzen aldagai aldaketa

Froga daitekeenez, [*T*]-ren bitartez [*V*] -ko puntu bakoitza [*R*]-ko puntu bakar baten irudia izan dadin, beharrezko eta nahikoa da aplikazioari lotutako $J\,(u,v,w)$ jakobiarra [*R*]-n ez-nulua izan dadila:

$$J(u,v,w) \equiv \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{ en } \ [R]$$

eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral hirukoitzen aldagai aldaketa

[*V*]-ren domeinu transformatua lortzeko, aski da **(1)** aplikatzea mugaren ekuazioei:

$$g_i(x,y,z)=0 \xrightarrow{T} g_i^{\#}(u,v,w)=0$$

Funtzioek [*R*]-n deribatu partzial jarraituak onartzen badituzte, *I* integralerako hurrengo transformazio formula betetzen da:

$$\boxed{I=\iiint_R f\,[x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)]\cdot \left| J(u,v,w) \right| du\,dv\,dw}$$

Integral hirukoitzen aldagai aldaketa

transformazioaren jakobiarra, balio absolutuan hartu beharrekoa, $[V]$ eta $[R]$ eremuen partiketa homologoen domeinu partzialen bolumen-neurriak erlazionatzen dituen anplifikazio-faktorea da:

$$dV \approx \left|J\left(u,v,w\right)\right| dR, \text{ edo, } dx\,dy\,dz \approx \left|J\left(u,v,w\right)\right| du\,dv\,dw$$

Zenbait kasutan, **(2)** erabiltzean, jakobiarraren kalkulua errazten da hurrengo propietatea erabiliz:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}}; \quad edo, \quad J(u,v,w) = \frac{1}{J(x,y,z)}$$

2. adibidea

Koordenatu zilindrikoak

Transformazioaren ohiko formulak, zuzenekoak eta alderantzizkoak, hauexek dira:

$$T: \quad x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad z \equiv z; \quad \rho > 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$T^{-1}: \; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\left(y/x\right), \quad z \equiv z$$

Jakobiarra honela geratzen da:

$$J(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = \rho$$

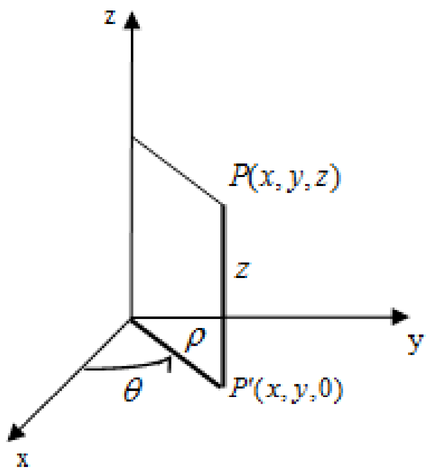
Koordenatu zilindrikoak

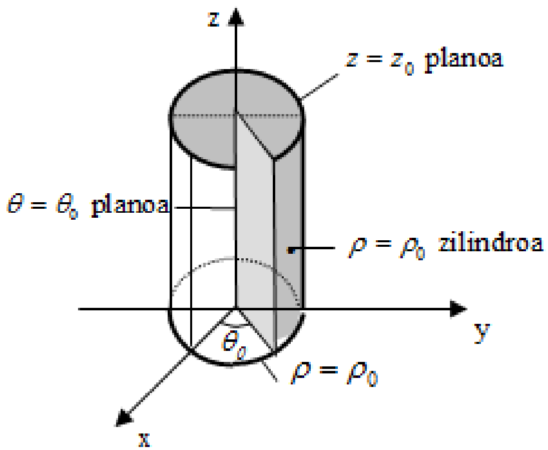
Aldagai aldaketako formulan ordezkatuz:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dydz = \iiint_R f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz}$$

Grafikoki, koordenatu zilindrikoetako puntu bat hurrengo gainazalen ebakidura moduan lor daiteke:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 & \text{(ardatzeko } \rho_0 \text{ erradioko zilindroa)} \\ \theta = \theta_0 & (XOY\text{-gaineko plano proiektantea)} \\ z = z_0 & (XOY\text{-ren plano paraleloa)} \end{cases}$$





Koordenatu zilindrikoak

Koordenatu zilindriko hauek bereziki baliagarriak dira [*V*] mugatzen duten gainazalak *OZ* ardatzeko biraketa gainazalak direnean, adierazpenak sinplifikatzen direlako, $g\left(x^2+y^2\right) \equiv g(\rho^2)$ izanik.

Adibide gisa, gainazal hauen artean hurrengo kasuak aipa ditzakegu:

- *OX* ardatzeko zilindroa : $x^2+y^2=R^2 \quad \to \quad \rho=R$
- *OX* ardatzeko paraboloidea : $x^2+y^2=a(b+z) \quad \to \quad z=\dfrac{\rho^2}{a}-b$
- *O* zentroko esfera $x^2+y^2+z^2=R^2 \quad \to \quad \rho=\sqrt{R^2-z^2}$
- α erdiangeluko konoa $x^2+y^2=(\mathrm{tg}^2\alpha)z^2 \quad \to \quad \rho=(\mathrm{tg}\alpha)z$
- *OZ*-tik igarotzen den planoa $ax-by=0 \quad \to \quad \theta=\mathrm{arctg}(a/b)$

Adibideak

Koordenatu zilindrikoak

Oharra: beste aukera moduan, beste koordenatu batzuk defini daitezke, x edo y aldagai kartesiarretako bat koordenatu zilindrikotzat mantenduz. Adibidez:

$$T_2: \quad x \equiv x, \quad y = \rho \cos\theta, \quad z = \rho \operatorname{sen}\theta; \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$T_3: \quad y \equiv y, \quad x = \rho \cos\theta, \quad z = \rho \operatorname{sen}\theta; \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Hauek erabiliko dira, hurrenez hurren, OX eta OY ardatzetako biraketa gainazaletarako.

Azpimarratu behar da koordenatu zilindrikoen erabileraz integral hirukoitza integral bikoitz batera murrizten dela, integrazio eremu berria lortzeko $[V]$ erreferentzia plano batean proiektatuz; integral bikoitz hori planoko koordenatu polarretan ebazten da.

Koordenatu esferikoak

Formulazioa ohikoena hurrengoa da:

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{con} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Alderantzizko transformaziorako:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \mathrm{arctg}\left(y/x\right); \quad \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

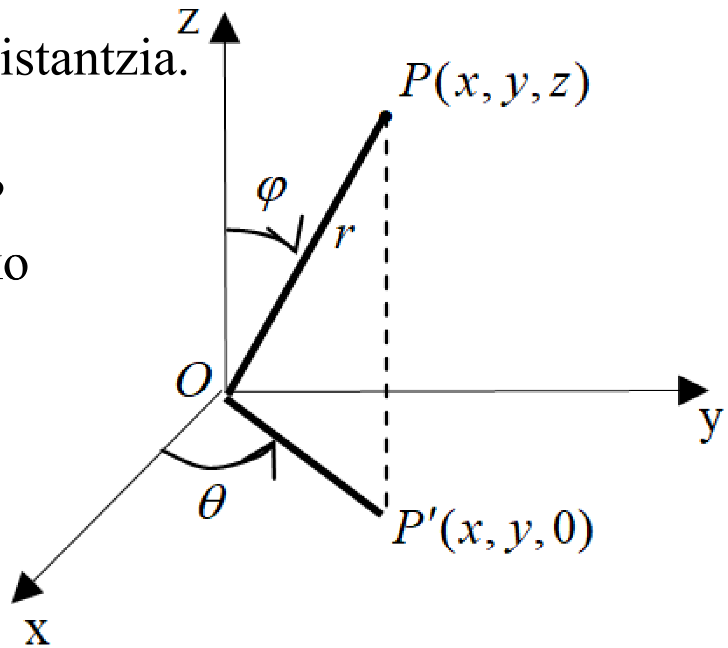
Koordenatu esferikoak

Hurrengo irudiaren arabera, *P(r,θ,φ)* puntu baten koordenatu hauen deskribapena hauxe da:

r: *P*-tik erreferentzia jatorrirainoko distantzia.

θ: *OX* erdiardatz positiboaren eta *OP* segmentuaren *XOY* planoaren gaineko *OP'* proiekzioaren arteko angelua (koordenatu zilindrikoetan bezalaxe)

φ: *OZ* erdiardatz positiboaren eta *OP* zuzenaren arteko angelua



Koordenatu esferikoak

$P(r_0,\theta_0,\varphi_0)$ puntu bat grafikoki hurrengo gainazalen ebakidura moduan lor daiteke:

$$\begin{cases} r = r_0 & (O \text{ zentruko eta } r_0 \text{ erradioko esfera}) \\ \theta = \theta_0 & (XOY\text{-ren gaineko plano proiektantea}) \\ \varphi = \varphi_0 & (OZ \text{ erdiardatzeko eta } \varphi_0 \text{ erdiangeluko konoa}) \end{cases}$$

Transformazio jakobiarrerako, hurrengoa lortzen da :

$$J(r,\varphi,\theta) \equiv \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\varphi$$

Koordenatu esferikoak

Aldagai aldaketako formulan ordezkatuz:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f[r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\varphi]\cdot r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr}$$

Koordenatu hauen erabilera bereziki gomendagarria da $[V]$ -ko mugan OZ ardatzeko gainazal esferikoak edota konikoak agertzen direnean, hauen ekuazioen sinpletasunagatik.

O zentroko esfera $\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad r = R$

α erdiangeluko konoa: $\quad x^2 + y^2 = (\mathrm{tg}^2\,\alpha)z^2 \quad \rightarrow \quad \varphi = \alpha$

3. adibidea

Integral hirukoitzaren aplikazioak

<u>Gorputz baten bolumena:</u> $f\,(x,y,z)$ integrakizun funtzioa berdin bat bada, orduan bornatutako [*V*] eremu baten gaineko *dxdydz* bolumen-elementu diferentzialaren integral hirukoitzak [*V*]-ren bolumenaren balioa adierazten du:

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

<u>Gorputz baten masa:</u> Integralaren interpretazio fisikoaren arabera, baldin [*V*]-n jarraitua den $f\,(x,y,z) = \rho\,(x,y,z)$ integrakizun funtzioak [*V*]-ren bolumena hartzen duen gorputz baten dentsitate puntuala (masa unitateak bolumen unitateko) adierazten badu, orduan gorputzaren masa honela ematen da:

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Integral hirukoitzaren aplikazioak

Masa zentroak: Gogora dezagun $P_i\,(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i)$ puntuetako m masa puntualen multzo baten masa zentroaren (barizentroaren) koordenatuak hauexek direla:

$$x_m = \frac{\sum_1^m x_i \Delta m_i}{\sum_1^m \Delta m_i} \quad ; \quad y_m = \frac{\sum_1^m y_i \Delta m_i}{\sum_1^m \Delta m_i} \quad ; \quad z_m = \frac{\sum_1^m z_i \Delta m_i}{\sum_1^m \Delta m_i}$$

Banaketa lauen kasuan bezalaxe arrazoituz, formula hauek [V]-ko materia banaketa jarraitu baterako estimazioak dira, baldin [V] partiketako bolumen partzialen masak $P_i\,(x_i,y_i,z_i)$ erdiko puntuetan kontzentratuta daudela suposatzen bada.

Integral hirukoitzaren aplikazioak

Bestaldetik, Δm_i-ren hurbilketa bat hauxe da

$$\Delta m_i \cong \rho(P_i)\,\Delta A_i \;;\quad \rho(P) \equiv \text{ dentsitate puntuala}$$

Handik, hurrengo estimazioetara heltzen da:

$$x_m = \frac{\sum_1^m x_i \rho(P_i)\,\Delta V_i}{\sum_1^m \rho(P_i)\,\Delta V_i} \;;\quad y_m = \frac{\sum_1^m y_i \rho(P_i)\,\Delta V_i}{\sum_1^m \rho(P_i)\,\Delta V_i} \;;\quad z_m = \frac{\sum_1^m z_i \rho(P_i)\,\Delta V_i}{\sum_1^m \rho(P_i)\,\Delta V_i}$$

Hauek hainbat zehatzagoak izango dira, zenbat eta finagoa izan partiketa. Partiketaren diametroa zerorantz doanean, [V]-n dagoen masa banaketaren zentroaren koordenatuak honela definitzen dira:

Integral hirukoitzaren aplikazioak

$$x_m = \frac{\iiint_V x\,\rho(P)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(P)\,dx\,dy\,dz};\; y_m = \frac{\iiint_V y\,\rho(P)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(P)\,dx\,dy\,dz};\; z_m = \frac{\iiint_V z\,\rho(P)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(P)\,dx\,dy\,dz}$$

Eta $M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dela kontutan hartuz:

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{1}{M}\iiint_V x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ y_m = \dfrac{1}{M}\iiint_V y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ z_m = \dfrac{1}{M}\iiint_V z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

Integral hirukoitzaren aplikazioak

Baldin [V]-ko banaketa homogeneoa bada [ρ (x,y,z)=k], orduan dentsitate funtzioa sinplifikatzen da eta masa zentroa [V]-ren funtzioa baino ez da. Gauza bera gertatzen da bolumenaren grabitate zentro geometrikoaren definiziorako [ρ (x,y,z)=1], hurrengo formula komun sinplifikatuak lortuz:

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V x\,dx\,dy\,dz \\ y_m = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V y\,dx\,dy\,dz \\ z_m = \dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint_V z\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

Neurriaren teoremaren arabera, irudi geometriko baten grabitate zentro baten koordenatuak irudiko puntuen koordenatuen batez besteko balioak direla ondorioztatzen da.