Aldagai erreal bakarreko funtzio errealak

1. Sarrera
2. Kurba lauen ekuazioak
3. Funtzio Hiperbolikoak
4. Limiteak
5. Jarraitutasuna
6. Deribatuak
7. Muturrak

Sarrera

Definizioak:

y x-ren **funtzioa** dela esaten da, baldin D multzoan dagoen aldagaiaren balio bakoitzari y-ren balio bakar bat badagokio. $y = f(x)$ adierazten da

$D=\{x/ \quad y, y = f(x) \quad \}$ multzoari **domeinua** edo **existentzia eremua** edo **definizio eremua** deritzo

Sarrera

Domeinua determinatzerakoan, gogora bedi ezen:

- Funtzio **polinomioak** $\forall x \in \mathbb{R}$ definituta daudela.
- Funtzio **arrazionalak** izendatzailea nulua egiten ez den $\mathbb{R}$-ko puntu
- guztietan definituta daudela.
- **Indize bikoitiko erroak** dauzkaten funtzioak errokizuna negatiboa ez den $\mathbb{R}$-ko puntu guztietan definituta daudela.
- **Funtzio logaritmikoak**, logaritmoaren argumentua positiboa den $\mathbb{R}$-ko puntu guztietan definituta daudela.
- u^x funtzio **esponentzialak** eta *sinx* eta *cosx* trigonometrikoak $\forall x \in \mathbb{R}$ definituta daudela.

Sarrera

Izan bedi $I=D(f)\subseteq A$, $E=D(g)\subseteq B$, $f(I)\subseteq E$. $g\circ f$ idazten den f-ren g-rekiko **funtzio konposatuari,** $\forall x\in$ I definitutako $h(x) = g\circ f(x) = g[f(x)]$ funtzioari deritzo. Funtzioen konposizioa elkarkorra halere, **ez da trukakorra**.

Definizioak:

- f **gorakorra** da **zentzu zabalean**, baldin
$$\forall x_1, x_2 \in D \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- f **beherakorra** da **zentzu zabalean**, baldin
$$\forall x_1, x_2 \in D \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- f **gorakorra** da **zentzu hertsian**, baldin
$$\forall x_1, x_2 \in D \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- f **beherakorra** da **zentzu hertsian**, baldin
$$\forall x_1, x_2 \in D \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Baldin f D eremuan gorakorra edo beherakorra bada, orduan **monotonoa** dela esaten da.

Sarrera

f **goitik bornatuta** dago, baldin

$$\exists k \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D \;:\; f(x) \leq k$$

f **behetik bornatuta** dago, baldin

$$\exists k \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D \;:\; f(x) \geq k$$

Goitik eta behetik bornatuta dagoen funtzio bat **bornatuta** dagoela esaten da.

Funtzio bat **bikoitia** da baldin $f(-x) = f(x)$. Haren grafikoa simetrikoa da OY ardatzarekiko.

Funtzio bat **bakoitia** da, baldin $f(-x) = -f(x)$. Haren grafikoa simetrikoa da jatorriarekiko.

Funtzio bati **periodikoa** deritzo, baldin $f(x+c)= f(x)$; hau betetzen duen $c > 0$ baliorik txikienari **periodoa** deritzo.

Kurba lauen ekuazioak

Zuzenaren ekuazioa:

Ekuazio esplizitua: $y = mx + n$ non $\begin{cases} m & : \text{zuzenaren malda} \\ n & : \text{jatorriaren ordenatua} \end{cases}$

Puntu-malda ekuazioa (puntu batetik igarotzen den zuzen-sorta):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ekuazio kanoniko edo segmentuzkoa: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (a eta b dira koordenatuen ardatzetan zuzena determinatzen duten segmentuak).

Bi puntuetatik igarotzen den zuzena: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

Kurba lauen ekuazioak

Zirkunferentziaren ekuazioak:

Zirkunferentzia, zentroa deritzon puntu finko batetik distantzia berdinera dauden planoko puntuen leku geometrikoa da. Baldin $C(a,b)$ zentroa eta r erradioa badira, honako hau daukagu:

Ekuazio orokorra: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Ekuazio kanonikoa edo murriztua (zentrua jatorria denean): $x^2+y^2=r^2$

Kurba lauen ekuazioak

Elipsearen ekuazioak:

Fokoak deitzen zaien bi puntu finkoetarako distantzien batura konstantea eta berdin *2a* duten planoko puntu guztien leku geometrikoa da. $F_1(-c,0)$ eta $F_2(c,0)$ elipsearen fokoak, *a* erdi-ardatz erreala eta *b* erdi-ardatz irudikaria badira, orduan hauxe daukagu:

Ekuazio kanonikoa [$(0,0)$ puntuan zentratutako elipsea]: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(x_0, y_0) **puntuan zentratutako elipsea:** $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Kurba lauen ekuazioak

Hiperbolaren ekuazioak:

Hiperbola, planoko puntuen leku geometrikoa da non fokuetarako distantzien kendura balio finkoa eta berdin *2a* den. $F_1(-c,0)$ eta $F_2(c,0)$ hiperbolaren fokoak, *a* erdi-ardatz erreala eta *b* erdi-ardatz irudikaria badira, orduan hauxe daukagu:

Ekuazio kanonikoa $[(0,0)$ puntutan zentratutako hiperbola]: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(x_0, y_0) **puntuan zentratutako hiperbola:** $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Kurba lauen ekuazioak

Parabolaren ekuazioak :

Parabola, planoko puntuen leku geometrikoa da non fokurako distantzia eta zuzentzailerako distantzia bera diren.

Baldin fokoa $F(p/\,2,0)$ bada eta zuzentzailearen ekuazioa $d \equiv x + p/2 = 0$ bada, orduan honako hau daukagu:

Ardatza OX-ren paraleloa duen parabola:

Erpina (0,0) puntuan: $y^2 = 2px$

Erpina (x_0, y_0) puntuan: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$

Erpina $x' = 0$ eginez kalkulatzen da.

$p > 0$ bada, orduan parabola eskuinerantz irekita dago eta $p < 0$

bada, orduan ezkerrerantz.

Kurba lauen ekuazioak

Parabolaren ekuazioak :

Ardatza OY-ren paraleloa duen parabola:

Erpina (0,0) puntuan: $x^2 = 2py$

Erpina (x_0, y_0) puntuan: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Erpina $y' = 0$ eginez kalkulatzen da, hauxe lortuz:

$(x_0, y_0) = (-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$

$a > 0$ bada, parabola gorantz irekita dago eta $a < 0$ bada, beherantz.

Funtzio hiperbolikoak

Definizioak:

Kosinu hiperbolikoa eta sinu hiperbolikoa hurrengo funtzioei deritze:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad [1]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad [2]$$

Definiziotik hurrengo simetriak dauzkagu:

$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh 0 = 1 \qquad \sinh 0 = 0$$

Beraz, kosinu hiperbolikoa funtzio bikoitia da eta sinu hiperbolikoa funtzio bakoitia da. Gainera, $\cosh(x) \geq 1$ da.

Funtzio hiperbolikoak

[1] eta [2] adierazpenen arteko batura eta kendura eginez gero:

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{cases}$$

Azken bi adierazpenak biderkatuz gero, **trigonometria hiperbolikoaren oinarrizko formula lortzen dugu:**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Halaber, hurrengo funtzioak definituko ditugu:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

non:

bakoitiak

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \tanh 0 = 0$$

$$\coth(-x) = -\coth x \qquad \nexists \coth 0$$

Funtzio hiperbolikoak

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ekuazioa erabiliz, hauxe lortzen dugu:

$$\boxed{\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}}$$

Beti positiboa da

$$\boxed{\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

Positiboa edo negatiboa izan daiteke

Funtzio hiperbolikoak

Oinarrizko erlazioak:

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$
$$\cosh(x-y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$
$$\sinh(x-y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

Funtzio hiperbolikoak

Oinarrizko erlazioak:

Sinuan zein tangente hiperbolikoan arreta berezia eman behar zaie zeinuei. (+) hartzen da x > 0 denean eta (−) hartzen da x < 0 denean.

$$\cosh x = \sqrt{\frac{\cosh 2x + 1}{2}} \qquad \sinh x = \pm\sqrt{\frac{\cosh 2x - 1}{2}} \qquad \tanh x = \pm\sqrt{\frac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}}$$

Funtzio hiperbolikoak

Alderantzizko funtzio hiperbolikoak:

Sinu hiperbolikoaren alderantzizko funtzioa **argumentu sinu hiperbolikoa da eta *y*=argsh*x*** idazten da. Alderantzizko funtzioak adierazpen logaritmikoak bezala defini daitezke. Izan ere:

$$y = \arg\sinh x \quad \Rightarrow \quad x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = e^y - \frac{1}{e^y}$$

$$z = e^y \text{ idatziz, } z^2 - 2xz - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} = e^y > 0$$

Funtzio esponentziala beti positiboa denez, erroaren zeinu negatiboa ez da onargarria, beraz *y* askatuz:

$$\boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \arg\sinh x} \qquad D = (-\infty, \infty)$$

Funtzio hiperbolikoak

Alderantzizko funtzio hiperbolikoak:

Kosinuaren alderantzizko funtzioa **argumentu kosinu hiperbolikoa da** eta ***y*=argch*x***. Lehenago egin dugunaren antzera:

$$y = \arg\cosh x \quad \Rightarrow \quad x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = e^y + \frac{1}{e^y}.$$

$$z = e^y \text{ idatziz, } z^2 - 2xz + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = e^y > 0$$

Kasu honetan, erroaren bi zeinuak onargarriak dira; handik, *y* askatuz:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \arg\cosh x \\ y &= \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \arg\cosh x \end{aligned}}$$

$$D = [1, \infty)$$

Funtzio hiperbolikoak

Alderantzizko funtzio hiperbolikoak:

Tangente hiperbolikoaren alderantzizko funtzioa ***argumentu tangente hiperbolikoa da*** eta ***y*= argtanh*x*** idazten da. Aurreko kasuetan bezala jardunez:

$$y = \arg\tanh x \quad \Rightarrow \quad x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$z = e^y \text{ idatziz, } x = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad xz^2 + x = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad z^2(x-1) = -1 - x$$

$$z^2 = \frac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = e^y > 0$$

Erroaren zeinu positiboa baino ez da onargarria; handik *y* askatuz:

$$\boxed{y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \arg\tanh x} \qquad D = (-1,1)$$

Limiteak

Definizioa:

l zenbaki erreal bat x_0 puntuan *f* funtzioaren limitea izango da, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Hau da, *l* zenbaki erreal bat x_0 puntuan *f* funtzioaren limitea izango da, baldin eta *l*-ren E_l ingurune bakoitzerako x_0-ren E_{x0} ingurune bat existitzen da non

$$x \in (E_{x_0} - \{x_0\}) \cap D \text{ badago, } f(x) \in E_\ell \text{ baitago}$$

f funtzioaren limitea x_0 puntuan *l* zenbaki erreala bada, honela adieraziko da:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

limitearen kontzeptua definitzeko ez da beharrezkoa *f* funtzioa x_0 puntuan definituta egotea.

Limiteak

Eskuineko limitea: l_d zenbaki erreal bat x_0 puntuan f funtzioaren eskuineko limitea izango da, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in D : 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - \ell_d \right| < \varepsilon$$

eta honela adierazten da: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_d$

Ezkerreko limitea: l_i zenbaki erreal bat x_0 puntuan f funtzioaren ezkerreko limitea izango da, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in D : 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - \ell_i \right| < \varepsilon$$

eta honela adierazten da: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_i$

Limiteak

f funtzioaren limitea x_0 puntu batean existitzen bada, limite hori bakarra da. Gainera, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ existituko da, baldin eta soilik baldin:

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_d$ eta $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_i$ existitzen badira
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ betetzen bada

Limiteak

Propietateak: Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzioa, non $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, orduan:

- $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) g(x)] = L_1 L_2$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x)/g(x)] = L_1/L_2$, L_2 ez nulua denean
- $\lim_{x\to x_0} [f(x)^{g(x)}] = L_1^{L_2}$, baldin eta $L_1 > 0$ bada

Limiteak

$a>1$, $k>1$ eta $p>0$ badira emaitza hauek egiaztatuko dira:

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ eta $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\boldsymbol{x^x \gg x! \gg a^x \gg x^b \gg \ln x^p}$

$\lim_{x\to x_0}[f(x)] = L$ bada, orduan:

- $\lim_{x\to x_0}[|f(x)|] = |L|$
- $\lim_{x\to x_0}[a^{f(x)}] = a^L$
- $\lim_{x\to x_0}[\ln(f(x))] = \ln(L)$
- $\lim_{x\to x_0}[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}] = e$

f funtzioa bornatuta badago x_0 puntuaren ingurune batean eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ bada, orduan $\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = 0$ egiaztatuko da.

Limiteak

f funtzioa x_0 puntuan **infinitesimo** bat dela diogu, baldin eta hau egiaztatzen bada:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)] = 0$$

$\frac{1}{f(x)}$ funtzioa x_0 puntuan **infinitu** bat dela diogu, baldin eta $f(x)$ funtzioa infinitesimo bada x_0 puntuan.

f eta g funtzioa x_0 puntuan infinitesimoak badira, **infinitesimo baliokideak** direla esango dugu baldin:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Eta honela adierazten da: $\boldsymbol{f(x) \sim g(x)}$

Limiteen kalkuluan zenbait indeterminazio ager daiteke. Kasu hauetan oso baliagarria izango da, ahal bada, **segida baliokideak erabiltzea**.

Limiteak

L'Hopital-en erregela: Izan bitez x_0-ren ingurune batean f eta g bi funtzio deribagarri. Baldin:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ edo
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

Orduan, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existitzen bada, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ egiaztatzen da.

Jarraitutasuna

Definizioak: Izan bedi *f (x)* $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ tartean definitutako funtzio bat. $x_0\in(a,b)$ puntuan ***jarraitua*** dela esaten da, baldin

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Funtzio bat (*a*,*b*) ***tarte batean jarraitua*** dela esaten da, baldin tartearen puntu guztietan jarraitua bada.

Praktikan, aldagai errealeko funtzio bat puntu batean jarraitua den ala ez ebazteko, hauxe frogatu behar da:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

Jarraitutasuna

Baldin $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *f (x)* **eskuinetik jarraitua** dela esaten da.

Baldin $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ *f (x)* **ezkerretik jarraitua** dela esaten da.

Funtzio bat [*a*,*b*] ***tarte batean jarraitua*** dela esaten da, baldin (*a*,*b*) tartean jarraitua bada eta *a* puntuan eskuinetik eta *b* puntuan ezkerretik jarraitua bada.

Jarraitutasuna

Eten motak puntu batean:

Eten **gaindigarria**: Baldin $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

Gaindigarria deitzen da $f(x)$ jarraitutasunez luzatu ahal delako, horrela etena "saihestuz". Jarraitutasunez luzatutako funtzioa honela geratzen da:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Lehen mailako eten gaindiezina: Baldin $\lambda_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda_2$

$\lambda_2 - \lambda_1$ kendurari $f(x)$-ren jauzia x_0 puntuan deritzo (finitua edo infinitua izan daiteke).

Bigarren motako eten gaindiezina: bi albo-limiteetako bat existitzen ez bada.

Jarraitutasuna

Funtzio errealei buruzko teoremak:

Eragiketen jarraitutasuna*:* x_0 puntuan jarraituak diren funtzio errealen ***batura*** edo ***biderkadura*** puntu horretan jarraitua den beste funtzio bat da. x_0 puntuan jarraituak diren bi funtzioen arteko **zatidura** x_0 puntuan jarraitua da baldin izendatzailea puntu horretan nulua ez bada. Baldin $z=f(y)$ funtzioa $y_0=g(x_0)$ puntuan jarraitua bada eta $g(x)$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua bada, orduan $z=f[g(x)]=$ funtzio konposatua jarraitua da x_0 puntuan.

Deribatuak

Definizioa: Izan bedi D ⊆ R multzo irekian definitutako *f* funtzio erreal bat eta izan bedi $x_0 \in D$. *f* funtzioa $x = x_0$ puntuan **deribagarria** dela esaten da, baldin

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad [1]$$

limitea existitzen bada. Notazio asko existitzen dira; haien artean honako hauek aipatuko ditugu:

$$y'_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$D(y)_{x=x_0} \qquad D(f)_{x=x_0} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Deribatuak

Baldin [1] D-ren puntu guztietarako existitzen bada, $x_0 \in$ D puntu bakoitzari puntu horretako deribatuaren balioa esleitzen badiogu, $x_0 \rightarrow f'(x_0)$, **funtzio deribatua** lortuko dugu.

Interpretazio geometrikoa: Puntu bateko deribatua puntu horretan kurbaren zuzen ukitzailearen malda da.

Eskuin-deribatua: $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Ezker-deribatua: $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Funtzioa x_0 puntuan deribagarria da $\Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$

Baldin f funtzioa $[a,b]$ tartean definituta badago, orduan a puntuan eskuin-deribatua eta b puntuan ezker-deribatua hartzen dira.

Deribatuak

Aplikazio geometrikoak:

Kurba baten zuzen ukitzailearen ekuazioa (x_0, y_0) puntu batean:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Zuzen normalaren ekuazioa:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Bi kurbak elkarrekin ebaztean osatzen duten angelua:

$$\tan\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|$$

Deribatuak

Funtzio konposatuaren deribatua: Izan bedi $y = f(u)$, non $u=g(x)$ (u aldagaiari bitarteko aldagaia deritzo).

Katearen erregela: Baldin $g(x)$ $x=a$ puntuan deribagarria bada eta $f(u)$ $b=g(a)$ puntuan deribagarria bada, orduan y= $f \circ g(x) = f[g(x)]$ funtzio konposatua deribagarria da a puntuan eta bere deribatua honela geratzen da:

$$y'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$$

Alderantzizko funtzioaren deribatua: Izan bedi $y = f(x)$. Baldin $f^{-1}(x)$ existitzen bada, $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$ betetzen da edo $x = f[f^{-1}(x)]$. Deribatuz (katearen erregela kontutan hartuta):

$$1 = f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) \quad \Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Deribatuak

Funtzio inplizituaren deribatua:

y x-ren ***funtzio inplizitua*** dela esaten da, baldin honako era honetan definituta badago:

$$F(x,y)=0$$

$F(x,y)=0$ funtzio inplizitu bat emanda, ezin da beti $y= f(x)$ askatu, edo agian ez da interesgarria oso neketsua delako (adibidez $y+x-\sin y=0$).

Kasu hauetan, $F\,'(x,y)=0$ kalkulatuko dugu, y, x-ren funtzioa bat dela kontuan hartuta.

Deribatuak

Deribazio logaritmikoa: Izan bedi $y= f(x)$. Logaritmoak hartzen baditugu: $\ln y= \ln f(x)$. Azken adierazpena deribatuz, honako hau lortzen dugu:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = y\cdot\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$y=[f(x)]^{g(x)}$ erako funtzioen deribatuak kalkulatzeko erabiliko dugu:

$$\ln y = g(x)\cdot\ln f(x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = y\cdot\left[g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = [f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Deribatuak

Funtzio deribagarriei buruzko teoremak:

Rolle-ren teorema: Izan bedi honako baldintza hauek betetzen dituen f funtzioa:

1. f jarraitua da $[a,b]$ tartean
2. f deribagarria da (a,b) tartean
3. $f(a)=f(b)$

Orduan, $\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c)=0$.

Lagrange-ren teorema (batez besteko balioarena edo gehikuntza finituena): Izan bedi honako baldintza hauek betetzen dituen f funtzioa:

1. f jarraitua da $[a,b]$ tartean
2. f deribagarria da (a,b) tartean

Orduan $\exists c \in (a,b)$, non $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Deribatuak

Goi-ordenako deribatuak:
Izan bedi I ⊆ R tartean definitutako $f(x)$. Baldin $f'(x)$ x_0 puntuan deribagarria bada, orduan f x_0 puntuan bi aldiz deribagarria dela esaten da. Baldin f I–ko puntu guztietan bi aldiz deribagarria bada, I-n bi aldiz deribagarria dela esaten da.

f funtzioa x_0 puntuan n aldiz deribagarria dela esaten da, baldin $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$ existitzen badira; halaber, $f(x)$ I-ko puntu guztietan n aldiz deribagarria bada eta n funtzio deribatuak I-n jarraituak badira, I-n n aldiz deribagarria dela edo n klasekoa dela (hots, $C^n(I)$) esaten da. C^0(I) notazioak adierazten du, beraz, I-n jarraituak diren funtzioak.

Muturrak

Hazkunde eta beherapena:
Izan bedi $D=(a,b)\subseteq$R tartean definituta $f(x)$ funtzioa eta izan bedi $x_0 \in D$. Baldin $f(x)$ x_0 puntuan gorakorra eta deribagarria bada, orduan $f'(x_0) > 0$. Era berean, baldin $f(x)$ x_0 puntuan beherakorra eta deribagarria bada, orduan $f'(x_0) < 0$

Maximo eta minimoak:
Izan bedi $D=(a,b)\subseteq$R tartean definituta $f(x)$ funtzioa eta izan bedi $x_0 \in D$. $f(x)$ funtzioak $(x_0, f(x_0))$ puntuan **maximo erlatibo** bat duela esaten da, baldin:

$$\exists E(x_0,\varepsilon) / \forall x \in E(x_0,\varepsilon) \quad f(x) < f(x_0)$$

Era berean, $f(x)$ funtzioak $(x_0, f(x_0))$ puntuan **minimo erlatibo** bat duela esaten da, baldin: :

$$\exists E(x_0,\varepsilon) / \forall x \in E(x_0,\varepsilon) \quad f(x) > f(x_0)$$

Aurreko desberdintasuna $\forall x \in D$ betetzen badira, orduan **maximo edo minimo absolutuak** direla esaten da.

Muturrak

Maximo eta minimoak determinatzeko irizpideak:

1. **Funtzioaren aldakuntza**: $h > 0$ eta oso txikia bada:

$$f\,(x_0 \pm h) > f\,(x_0) \Rightarrow \text{minimo}$$
$$f\,(x_0 \pm h) < f\,(x_0) \Rightarrow \text{maximo}$$

2. **Lehenengo deribatuaren irizpidea:** x_0 puntuaren ingurune batean, lehengo deribatuaren zeinua aldatzen bada:

negatibotik positibora ⇒ minimo
Positibotik negatibora ⇒ maximo

Zeinua aldatzen ez bada, inflexio puntua izango da.

3. **Bigarren deribatuaren irizpidea :** Funtzioa x_0 puntuan bi aldiz deribagarria bada:

$$f\,''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{minimo}$$
$$f\,''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{maximo}$$

Muturrak

Beraz, **maximo eta minimo erlatiboak** determinatzeko, lehenengo eta behin **puntu kritikoak** kalkulatuko ditugu (lehenengo deribatua nulua den puntuak edo lehenengo deribatua existitzen ez den puntuak). Ondoren, puntu horiek aztertuko ditugu aurreko irizpideak erabiliz ea maximoak, minimoak edo inflexio puntuak diren jakiteko.

Maximo eta minimo absolutuak $[a,b]$ tarte itxi batean determinatzeko, lehenengo eta behin mutur erlatiboak (a,b) tartean kalkulatuko ditugu. Ondoren, funtzioaren balioak a eta b puntuetan kalkulatuko ditugu eta mutur erlatiboekin konparatuko ditugu.