# Azterketako ariketak

2019-12-09

① 

$\frac{60}{100}$ Neskak
- 20/100 menores de 24 meses
- 80/100 mayores " " "

$\frac{40}{100}$ mutilak
- 35/100 menores de 24 meses
- 65/100 mayores " " "

ⓐ Se elige uno al azar. ¿probabilidad de que sea menor de 24 meses?

$$p(\text{menor}) = \underbrace{p(N \cap \text{menor}) + p(M \cap \text{menor})}_{p(N)\cdot p(\text{menor}/N) + p(M)\cdot p(\text{menor}/M)} = \frac{60}{100}\cdot\frac{20}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{35}{100} = 0'26$$

b) Sabiendo que el paciente es menor de 24 meses, ¿cuál es la probabilidad de que sea niña?

$$p(N/\text{menor}) = \frac{\overbrace{p(N \cap \text{menor})}^{p(N)\cdot p(\text{menor}/N)}}{p(\text{menor})} = \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{20}{100}}{0'26} = \frac{0'18}{0'26} = \frac{6}{13}$$

② Indukzio metodoa erabiliz frogatu:

$P(n)$ $2\cdot 2! + 3\cdot 3! + n(n!) = (n+1)! - 2!$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $n \geq 2$

3. pausu:

① $P(n_0 = 2)$ EGIA DELA KONPROBATUKO DUT:

Ezkerreko partea hartuko dugu:

$P(n_0=2) \Rightarrow 2\cdot 2! = (2+1)! - 2!$

$4 = 3! - 2!$

$4 = 6 - 2$

$4 = 4$ ✓

② $n=k$ denerako $P(n=k)$ EGIA DELA SUPOSATZEN DUT:

$P(n=k) \Rightarrow 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots + k(k)! = (k+1)! - 2!$

③ $P(n=k+1)$ EGIA DELA KONPROBATUKO DUT ② pausuan egindako suposizioa kontuan hartuta:

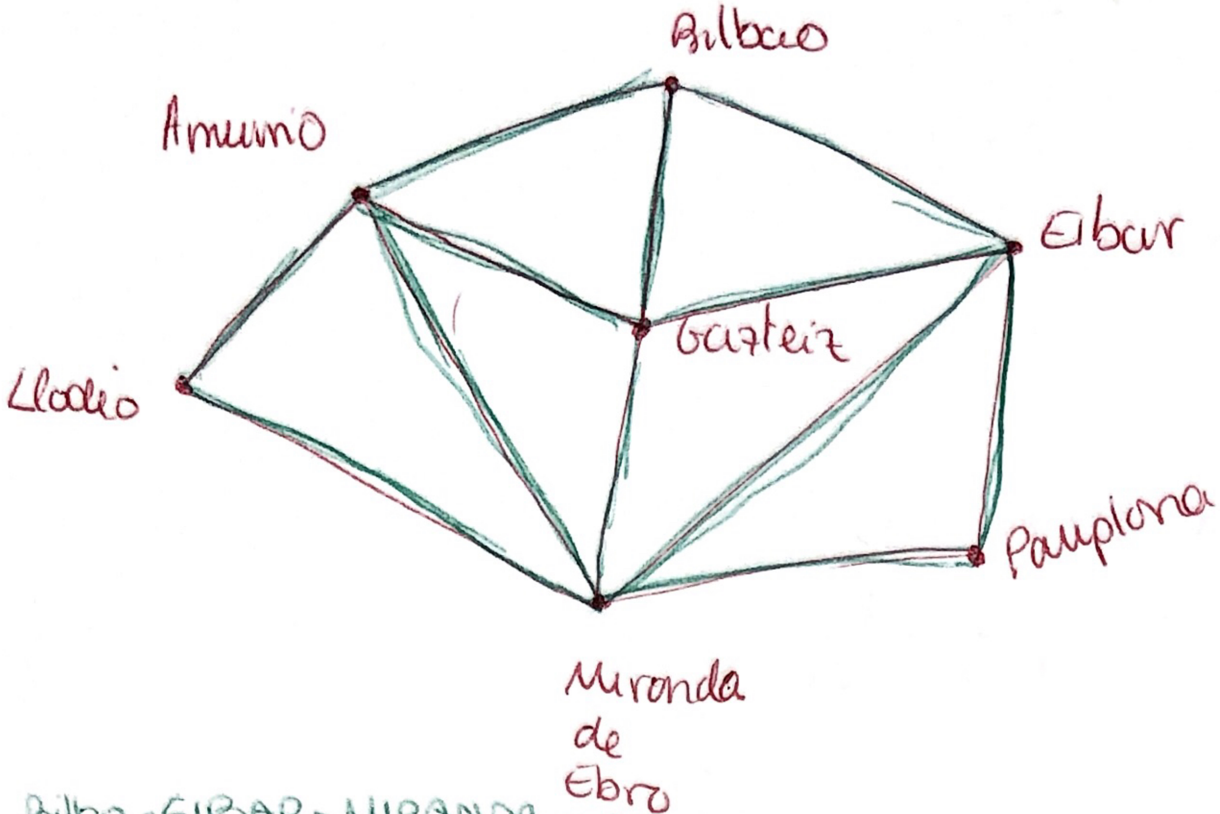
$P(n=k+1) \Rightarrow 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots + k(k!) + (k+1)[(k+1)!] = (k+2)! - 2!$

Aurrekoa ondorioztatuko dut ezkerreko aldetik abiatuz

$$\underbrace{2\cdot 2! + 3\cdot 3! \dots + k(k!)}_{P(n=k)} + (k+1)[(k+1)!] = (k+1)! - 2! + (k+1)[(k+1)!] =$$

$$= [(k+1)!](1 + k+1) - 2! = (k+2)[(k+1)!] - 2! = (k+2)! - 2!$$

③ a) Determina si es posible un recorrido que permite pasar por todas las carreteras una sola vez. Razona la respuesta.




Grafo ibilgarria? ⇒ Bai, bide eulerriarra baitu. Izan ere, grafoak bi erpin ditu, Hasiera Bilbo eta Bukaera Miranda, non haien graduak bakoitiak dira eta gainerako erpinak gradu bikoitia dute.

Hasiera eta bukaera gradu bakoitiko erpinak dira.

gr (Bilbo) = 3 ←
gr (Gasteiz) = 4
gr (Amurrio) = 4
gr (Llodio) = 2
gr (Eibar) = 4
gr (Miranda) = 5 ←
gr (Iruñea) = 2

BILBO - EIBAR - MIRANDA - AMURRIO - LAUDIO - MIRANDA - IRUÑEA - EIBAR - GASTEIZ - AMURRIO - BILBO - GASTEIZ - MIRANDA.

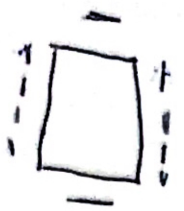
b) Bide sinplea, ibilbidea ez dena ⇒ Bilbotik Laudiora.
↳ Arkuak ≠ ↳ erpinak errepikatu

BILBO - AMURRIO - MIRANDA - GASTEIZ - EIBAR - MIRANDA - LAUDIO

c) Ibilbide bat Eibar eta Amurrio artean.
↳ erpinak ≠

EIBAR - IRUNEA - MIRANDA - AMURRIO

# 2018-2019 EKAINA $\boxed{\text{6. ARIKETA}}$



kalkulu zenbat era desberdinetan jesar daitezke:

a) Inolako baldintzarik gabe.

$P_{10} = 10!$

b) Aita eta ama nahi buruetan jesarri behar badira.

$P_8 \cdot P_2 \rightarrow$ aita/Ama kokatzeko erak

↳ seme-alabak kokatzeko era posibleak

c) Aita eta Ama mahai buruetan jesarri behar badira. eta bikote bakoitzeko emaztea eta senarra aurrez aurre jesarri behar badira.

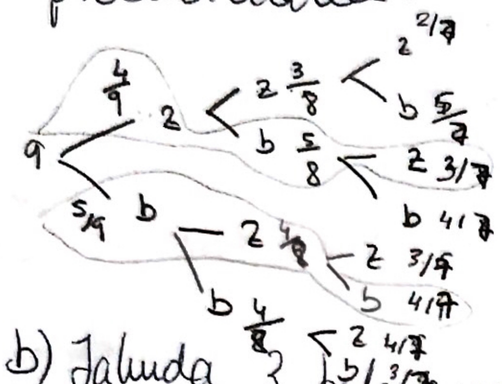
↱ aita/Ama kokatzeko erak.

$P_2 \cdot P_4 \cdot (P_2)^4$

bikoteen posizio erlatiboa ⟶ cada pareja (4) puede estar tanto a la izq. como a la drch.

$\boxed{\text{7. ARIKETA}}$ Ordezkapenik gabe 3 bola atera ⟨ 4 bola zuri, 5 bola beltz ⟩ barnean dituen kutxa batetik.

a) ateratako bola bakoitza, ateratako aurreko bolaren kolore desberdinekoa izatearen probabilitatea.




$$P(Z_1 \cap B_2 \cap Z_3) + P(B_1 \cap Z_2 \cap B_3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20 \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 8 \cdot 9} = \frac{5}{18}$$

$$\underbrace{P(Z_1) \cdot P(B_2/Z_1) \cdot P(Z_3/Z_1 \cap B_2)} + \underbrace{P(B_1) \cdot P(Z_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap Z_2)} = \frac{5}{18}$$

b) Jakinda 3. bola zuria dela, zein da probabilitatea lehenengo bola zuria izanaren probabilitatea.

$$P(Z_1/Z_3) = \frac{P(Z_3 \cap Z_1)}{P(Z_3)} = \frac{\overbrace{P(Z_3 \cap Z_2 \cap Z_1)}^{P(Z_1) \cdot P(B_2/Z_1) \cdot P(Z_3/Z_1 \cap Z_2)} + P(Z_3 \cap B_2 \cap Z_1)}{\underbrace{P(Z_3)}_{\text{todas las posibilidades}}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{12 \cdot 7}{4(6+15+20+15)} = \frac{3}{56} = \frac{3}{8}$$

→ komuna

# Partziala

## 1. Ariketa

Frogatu tautologia edo kontraesana dela:

$$\left[\neg\left((\neg p\vee\neg q)\vee\neg\overbrace{(\neg r\to s)}^{(r\vee s)}\right)\vee\left(\left(r\vee s\to(q\to r)\right)\to q\wedge r\wedge(r\vee s)\right)\right]\wedge\neg q\equiv$$

$$\equiv\left[\left((p\wedge q)\wedge(r\vee s)\right)\vee\left(\neg(r\vee s)\vee(\neg q\vee r)\right)\vee\left(q\wedge r\wedge(r\vee s)\right)\right]\wedge\neg q\equiv$$

$$\equiv\left[\left((p\wedge q)\wedge(r\vee s)\right)\vee\left(\left((r\vee s)\wedge(q\vee\neg r)\right)\vee\left(q\wedge r\wedge(r\vee s)\right)\right)\right]\wedge\neg q\equiv$$

$$\equiv\left[(r\vee s)\wedge\left((p\wedge q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)\right)\right]\wedge\neg q\equiv(r\vee s)\wedge\left((p\wedge q)\vee\left(q\wedge(\neg r\vee r)\right)\right)\wedge\neg q\equiv$$

$$\equiv(r\vee s)\wedge\left((p\wedge q)\vee q\right)\wedge\neg q\equiv(r\vee s)\wedge q\wedge\neg q\equiv C$$

## 2. Ariketa

Sinplifikatu honako adierazpena:

$$\left[\left(p\to(r\to s)\right)\wedge r\right]\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv\left[\left(\neg p\vee(\neg r\vee s)\right)\wedge r\right]\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv\left[(\neg p\vee\neg r\vee s)\wedge r\right]\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv\left[(\neg p\wedge r)\vee(\neg r\wedge r)\vee(s\wedge r)\right]\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv(\neg p\wedge r)\vee(s\wedge r)\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv(\neg p\wedge r)\vee\left[(s\vee\neg s)\wedge(r\vee\neg s)\right]\equiv$$

$$\equiv\underbrace{(\neg p\wedge r)\vee r}_{r}\vee\neg s\equiv$$

$$\equiv r\vee\neg s$$

## 3. Ariketa

Markelek garagardoa edaten badu, ez da egarri. Gainera, ez da egia ura nahi duela eta ez garagardoa edan. Gaur adibidez, Markel egarri da. Beraz, Markelek ez du ura nahi.

$p$ = 'Markelek garagardoa edan'
$q$ = 'Egarri da'
$r$ = 'ura ~~edan~~ nahi'

$$(p \to \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge q \Rightarrow \neg r$$

$$(p \to \neg q) \wedge (\neg r \vee p) \wedge q \equiv$$

$$\equiv \underbrace{(r \to p) \wedge (p \to \neg q)} \wedge q \Rightarrow (r \to \neg q) \wedge q \equiv$$

$$\equiv (\neg r \vee \neg q) \wedge q \equiv$$

$$\equiv (\neg r \wedge q) \vee (\neg q \wedge q) = \neg r \wedge q \Rightarrow \neg r$$

## 4. Ariketa

Izan bitez $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hurrengo eran definituriko bi korrespondentzia.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & x \leq 0 \\ 2x - 2 & 0 < x < 1 \\ \ln(x) & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{-1}{x^2+1}$$

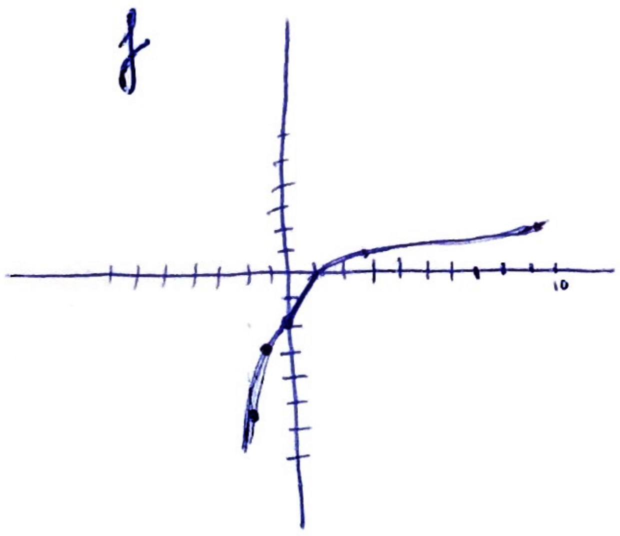
a) Adierazi grafikoki.

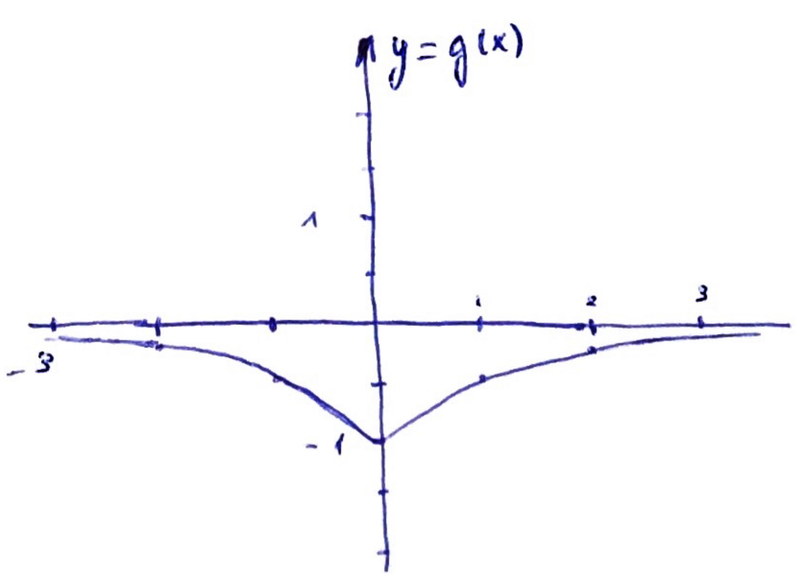
b) aztertu $f$ eta $g$ aplikazioak diren eta baiezkoan sailkatu

c) kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$.

d) kalkulatu alderantzizkoa existitzen bada

a)



# 4. Ariketa JARRAIPENA

b) $f$ aplikazioa dela frogatu:

$D(f) = \mathbb{R} \wedge \forall x \in D(f) \; \exists!\, y \in Im(f) \,/\, f(x) = y$

$\boxed{BAI}$ INJEKTIBOA

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Bi x desberdin hartuta, ez dut aurkitzen irudi berdina.

$\boxed{BAI}$ SUPRAIEKTIBOA $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

$\boxed{BAI}$ BIJEKTIBOA

Injektibo eta supraiektiboa delako.

$g$ aplikazioa dela

$D(g) = \mathbb{R} \wedge \forall x \in D(g) \; \exists!\, y \in Im(g) \,/\, g(x) = y$

$\boxed{EZ}$ INJEKTIBOA

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

$x_1 = -1 \Rightarrow g(x_1) = -1/2$

$x_2 = 1 \Rightarrow g(x_2) = -1/2$

Bi x desberdin aurkitu ditut zeinak $g(x)$ berdina duten, beraz, ez da injektiboa.

$\boxed{EZ}$ SUPRAIEKTIBO $\quad Im(g) = [-1, 0)$

$\boxed{EZ}$ BIJEKTIBO

Ez delako injektiboa ezta supraiektiboa ere ez.

argumentua BETI Negatiboa → soilik $f(x)$-ren lehengo tartean existituko da.

c) $f \circ g = f[g(x)] = f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right) = -\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)^2 - 2 = \frac{-1}{(x^2+1)^2} - 2$

$$g \circ f = g[f(x)] = \begin{cases} g(-x^2-2) & x \leq 0 \\ g(2x-2) & 0 < x < 1 \\ g(\ln(x)) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{(-x^2-2)^2+1} & x \leq 0 \\ \frac{-1}{(2x-2)^2+1} & 0 < x < 1 \\ \frac{-1}{(\ln(x))^2+1} & 0 \geq 1 \end{cases}$$

d) $\exists f^{-1}$, $f$ BIJEKTIBOA delako.

→ x-ren balio negatiboentzako soilik

$y = -x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = -y - 2 \Rightarrow x = \cancel{\pm}\, -\sqrt{-y-2} \qquad y \leq -2$

$y = 2x - 2 \Rightarrow 2x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2} \qquad -2 < y < 0$

$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y \qquad y \geq 0$

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{-y-2} & y \leq -2 \\ \frac{y+2}{2} & -2 < y < 0 \\ e^y & y \geq 0 \end{cases}$$

# 5. Ariketa  Ariketa propietateak  $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 24, 27, 36, 72, 81\}$

a)  $xRy \iff y = 3x$

a) BIHURKORRA  $\forall x \in A \; \{ xRx$  $\boxed{EZ}$

$xRx \iff x = 3x \Rightarrow \boxed{x = 0}$ denean soilik bihurkorra da eta ez $\forall x \in A$-rako.
Adibidez $x = 2 \neq 0$  $2 \not R 2 \iff 2 \neq 6$ delako.

b) SIMETRIKOA  $\forall x, y \in A \; \{ xRy \iff yRx$  $\boxed{EZ}$

$\left.\begin{array}{l} xRy \iff y = 3x \\ yRx \iff x = 3y \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3(3x) \Rightarrow x = 9x \Rightarrow \boxed{x = 0}$ denean soilik erlazio bitarra da simetriko eta $\forall x, y \in A$-rako ez.

eta $\boxed{y = 0}$

Baldintza betetzen den bakoitzean

c) ANTISIMETRIKO  $\forall x, y \in A \; \left\{ \begin{array}{l} (1)\; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \\ \text{edo} \\ (2)\; x \neq y \Rightarrow x \not R y \vee y \not R x \end{array} \right.$ honakoa betetzen da BETI  $\boxed{BAI}$

(1) lehenengo baldintza betetzen duen konbinazio bakarra daukagu. $xRy \wedge yRx$, eta $x = y = 0$ da.
$\emptyset R \emptyset \wedge \emptyset R \emptyset \Rightarrow 0 = 0$ ✓

d) IRAGANKORRA  $\forall x, y \in A \; \{ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$\boxed{EZ}$

$\left.\begin{array}{l} xRy \iff y = 3x \\ yRz \iff z = 3y \end{array}\right| \Rightarrow z = 9x \not\Leftrightarrow xRz \iff z = 3x$
Honen desberdina da

b Ordena erlazioa da? Nahi → Ez da bihurkorra, iragankorra ~~baina bai~~ ~~antisimetrikoa~~ (lino ne ses 3 covas para ne sea ordena erlazioa)
c) Zein elementu daude 2 elementuarekin erlazionatuta? Eta 2 elementua zein elementuarekin dago erlazionatuta?
$xR2 \iff 2 = 3x \Rightarrow x = 3/2 \notin A$  ez dago elementurik A barnean 2 elementuarekin erlazionatuta daudenak.

$2Rx \iff x = 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 6 \in A$

$2R6$
$\underbrace{(2,6)}$ $\in A \times A$
↳ Eta A-ren biderkadura kartesiarraren barne dago.
grafoaren

Ez denez erlazio simetrikoa ez dugu berdina lortuko.

# 6. Ariketa

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{(4n^2-1)n}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

① $n_0=1 \Rightarrow P(n_0=1)$ dela egiaztatuko dugu / dauan komprobatu egia dela:

$$P(n=1) \Rightarrow 1^2=\frac{(4(1)^2-1)\,1}{3} \Rightarrow 1^2=\frac{(4-1)\cdot 1}{3} \Rightarrow 1^2=\frac{3}{3} \Rightarrow 1=1 \ \checkmark$$

② $P(n=k)$ Egia dela suposatu:

$$P(n=k) \Rightarrow 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{(4k^2-1)k}{3}.$$

③ $P(n=k+1)$ egia dela komprobatu ② pausuan oinarrituz:

$$P(n=k+1) \Rightarrow 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2=\frac{(4(k+1)^2-1)(k+1)}{3}$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(4(k^2+2k+1)-1)(k+1)}{3}=$$

$$=\frac{4k^3+8k^2+4k-k+4k^2+8k+4-1}{3}=\boxed{\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}}$$

$$\underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2}_{P(k)}+(2k+1)^2=\frac{(4k^2-1)k}{3}+(2k+1)^2=$$

$$=\frac{4k^3-k+3(4k^2+4k+1)}{3}=\boxed{\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}}$$