

Segidak eta Serieak

1

1. Sarrera
2. Zenbaki errealen segidak
3. Zenbaki errealen progresioak
4. Zenbaki errealen serieak



Sarrera

2

Segida:

- Zenbaki arrunten arabera ordenatutako zenbaki errealez osatutako elementuen multzoa.

$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ non a_n Segidaren Gai Orokorra den

Adibideak: $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$, $\{0, 2, 0, 2, \dots, (-1)^{n+1}\}$

Seriea:

- Segida baten elementuen (zenbaki errealen) **batura** orokortua da.

$$S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n (a_j)$$

Adibideak: $S(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$

$$S(n) = 0 + 2 + 0 + 2 + \dots + ((-1)^{n+1})$$

Segidak

3

□ Definizioa:

n zenbaki arrunt bakoitzari a_n zenbaki erreala egokitzen dion edozein aplikazio zenbaki errealen segida deritzo.

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n$$

“ a ” zenbaki errealen segida (a_n) bezala adieraziko da eta a_n segidaren gai orokorra izango da.

$$(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

□ Limitea:

Esaten dugu L zenbaki erreal bat (a_n) **segidaren limitea** dela baldin eta:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Hau da, edozein ε zenbaki positibori segidaren gai bat a_{n_ε} dagokio non a_{n_ε} eta jarraian datozen guztien L zenbakirako distantzia ε baino txikiago denean L segidaren limitea dela diogu.

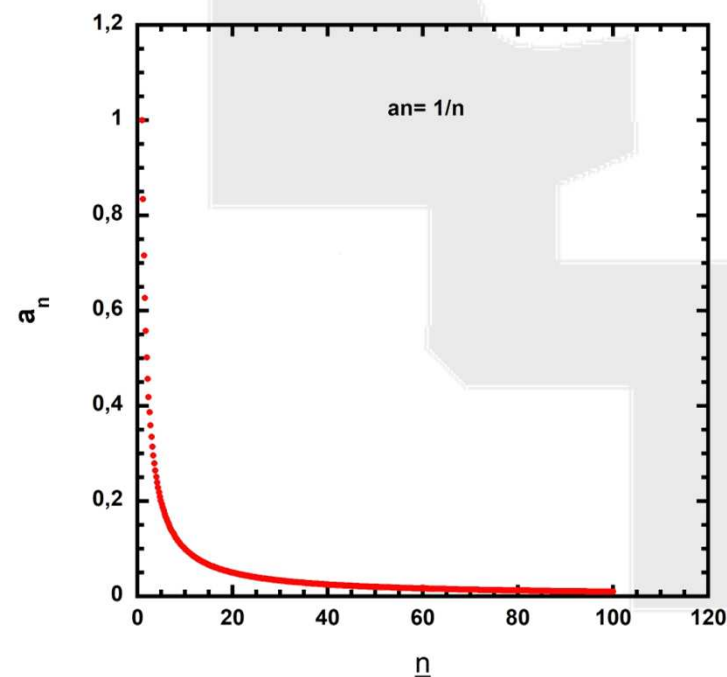
Segidak: Limitea

4

- **Limitea** : Beste moduan esanda, n hazten denean a_n L zenbaki errealera hurbiltzen bada, L (a_n) segidaren limitea dela diogu.
- L (a_n) segidaren limitea bada, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ edo $a_n \rightarrow L$ forman adieraziko da.
- **Adibidea**: $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n\}$ segida 0-rantz hurbiltzen da n handitzean

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Beraz, $(1/n)$ segidaren limitea 0 da.



Segidak: Limiteak

5

Proposizioa: (a_n) segidak **L limitea** badu, hau **bakarra** da.

Sailkapena: Segidak Konbergenteak edo Dibergenteak izan daitezke.

-Segida **Konbergentea**: (a_n) segida bat konbergentea da bere limitea L zenbaki erreal bat denean:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ eta } L \in \mathbf{R}$$

-Segida **Dibergentea**: Segida ez-konbergenteei segida dibergente esango diegu.

Adibidea: $\{1/2, 1, 3/2, \dots, n/2\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \infty$$

Oso garrantzitsua izango da limiteen kalkulua, segiden izaerarekin erlazionatuta baitaude!!.

Segidak: Limiteak

6

Segida Bornatuak:

Definizioa:

(a_n) segida bornatua da, baldin eta c zenbaki erreal existitzen bada non:

$$|a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Adibidea: $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n\}$ bornatua da, $|1/n| \leq 1$ betetzen baita.

Proposizioak

-(a_n) segida konbergentea bada orduan bornatua da.

-(a_n) segida bornatua bada eta (b_n) segidaren limitea 0 bada orduan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n b_n] = 0$$

Adibidea: $a_n = \cos(n)$ eta $b_n = 1/n$

-(a_n) segida bornatua bada eta (b_n) segidaren limitea ∞ bada orduan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{b_n} \right] = 0$$

Adibidea: $a_n = \cos(n)$ eta $b_n = n^2$

Segidak: Limiteak

7

Segida baliokideak

Segiden limiteen kalkuluan zenbait indeterminazio ager daitezke: $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $0/0$, ∞/∞ , 1^∞ , 0^0 , 0^∞ , ∞^0

Adibideak: $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(1 + \frac{1}{n})]^n$ (0^∞) edo $\lim_{n \rightarrow \infty} [2n \sin \frac{1}{n}]$ ($\infty \cdot 0$)

Kasu hauetan oso baliagarria izango da, ahal bada, segida baliokideak erabiltzea.

Zer dira segida baliokideak?

(a_n) eta (b_n) bi **segida baliokideak**, baldin eta: $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n/b_n] = 1$

(a_n) eta (b_n) baliokideak direnean: $a_n \sim b_n$ adierazten da

Segidak: Limiteak

8

Segida baliokideak

$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = 0$ bada, honako baliokidetasun hauek betetzen dira:

$$1) \quad \tan a_n \sim \sin a_n \sim a_n \sim \arcsin a_n \sim \arctan a_n$$

$$2) \quad 1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$$

$$3) \quad e^{a_n} - 1 \sim a_n$$

$$4) \quad \ln(1 + a_n) \sim a_n \quad \Rightarrow \text{Baldin } \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = 1 \quad \ln(a_n) \sim a_n - 1$$

Aurreko Adibideak: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n (0^\infty)$ edo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2n \sin \frac{1}{n} \right] (\infty \cdot 0)$

Segidak: Limiteak

9

Limiteen propietateak:

Izan bitez (a_n) eta (b_n) bi segida, non $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = L_1$ eta $\lim_{n \rightarrow \infty} [b_n] = L_2$

Orduan

1- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + b_n] = L_1 + L_2$

2- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n - b_n] = L_1 - L_2$

3- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n b_n] = L_1 L_2$

4- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n / b_n] = L_1 / L_2$, L_2 eta (b_n) segidaren gaiak ez nuluak direnean

5- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n^{b_n}] = L_1^{L_2}$, baldin eta $L_1 > 0$ bada

Segidak: Limiteak

10

Segidak baliokideak

$n \rightarrow \infty$ hurbiltzen denean, hurrengo baliokidetasunak ematen dira (infinitu baliokideak):

$$1) \quad a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k \quad (k > 0)$$

$$2) \quad \ln(a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k) \sim \ln n^k = k \ln n \quad (k > 0)$$

$$\text{Adibidea: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{5n^4 + 3n^2 + 3}{3n^4 + 3} \right]$$

$n \rightarrow \infty$ hurbiltzen denean, hurrengoak betetzen da baldin eta $a > 1$, $b > 0$ eta $p > 0$ badira:

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg \ln n^p$$

$$\text{Adibidea: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{1+\ln n} \right] \text{ eta } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \ln(1 + 2n + n^2) \right]$$

Segidak: Limiteak

11

$1^\infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0$ motako indeterminazioak agertzen direnean oso ohikoa da logaritmo nepertarra erabiltzea indeterminazio ebazteko.

Nola? $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = A$ kalkulatu nahi dugu. Askotan errazago da $B = \ln A$ kalkulatzeko eta behin B kalkulatu erraz determinatzen dugu A .

Adibidea $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \right]^n = A$

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{n}{n+1} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \frac{n}{n+1} \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \frac{n+1}{n} \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \sim$$

$$\sim - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{1}{n} \right] = -1$$

$$A = e^B = e^{-1}$$