Segidak eta Serieak

1

1. Sarrera
2. Zenbaki errealen segidak
3. Zenbaki errealen progresioak
4. Zenbaki errealen serieak

Sarrera

2

Segida:

- Zenbaki arrunten arabera ordenatutako zenbaki errealez osatutako elementuen multzoa.

  $\{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ non $\boldsymbol{a}_n$ Segidaren Gai Orokorra den

  Adibideak: $\{1, 3, 5, \dots 2n\text{-}1\}$, $\{0, 2, 0, 2, \dots (-1)^n+1\}$

Seriea:

- Segida baten elementuen (zenbaki errealen) **batura** orokortua da.

$$S(n)= a_1+ a_2+a_3+ \dots a_n = \sum_{j=1}^{n}(a_j)$$

Adibideak: $S(n)= 1+ 3+ 5+ \dots +2n\text{-}1$

$S(n)=0+2+ 0+ 2+\dots+ ((-1)^n+1)$

Segidak

- **Definizioa**:

n zenbaki arrunt bakoitzari a_n zenbaki erreala egokitzen dion edozein aplikazio zenbaki errealen segida deritzo.

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \Re$$
$$n \rightarrow a_n$$

"*a*" zenbaki errealen segida (a_n) bezala adieraziko da eta a_n segidaren gai orokorra izango da.

$$(a_n)=\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$$

- **Limitea**:

Esaten dugu ***L*** zenbaki erreal bat (a_n) **segidaren limitea** dela baldin eta:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

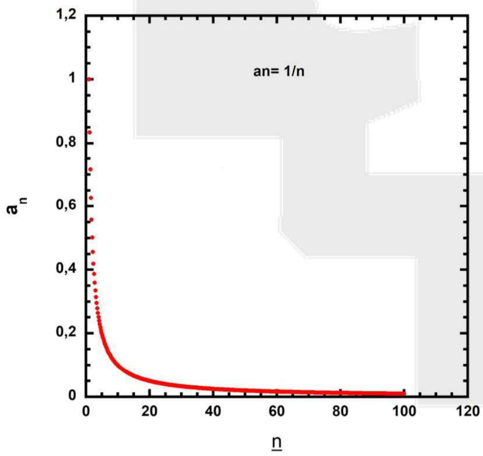
Hau da, edozein ε zenbaki positibori segidaren gai bat $a_{n\varepsilon}$ dagokio non $a_{n\varepsilon}$ eta jarraian datozen guztien *L* zenbakirako distantzia ε baino txikiago denean *L* segidaren limitea dela diogu.

Segidak: Limitea

- **Limitea** : Beste moduan esanda, *n* hazten denean a_n *L* zenbaki errealera hurbiltzen bada, *L* (a_n) segidaren limitea dela diogu.
- L (a_n) segidaren limitea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ edo $a_n \rightarrow L$ forman adieraziko da.
- **Adibidea**: $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n\}$ segida 0-rantz hurbiltzen da *n* handitzean

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Beraz, $(1/n)$ segidaren limitea 0 da.



Segidak: Limiteak

Proposizioa: (a_n) segidak ***L*** **limitea** badu, hau **bakarra** da.

Sailkapena: Segidak Konbergenteak edo Dibergenteak izan daitezke.

-Segida **Konbergentea**: (a_n) segida bat konbergentea da bere limitea L zenbaki erreal bat denean:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ eta } L \in \mathbf{R}$$

-Segida **Dibergentea**: Segida ez-konbergenteei segida dibergente esango diegu.

Adibidea: $\{1/2, 1, 3/2, \ldots, n/2\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

Oso garrantzitsua izango da limiteen kalkulua, segiden izaerarekin erlazionatuta baitaude!!.

Segidak: Limiteak

Segida Bornatuak:

Definizioa:

(a_n) segida bornatua da, baldin eta c zenbaki erreal existitzen bada non:

$$|a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Adibidea: $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n\}$ bornatua da, $|1/n| \leq 1$ betetzen baita.

Proposizioak

-(a_n) segida konbergentea bada orduan bornatua da.

-(a_n) segida bornatua bada eta (b_n) segidaren limitea 0 bada orduan:

$$\lim_{n\to\infty} [a_n b_n] = 0$$

Adibidea: $a_n = \cos(n)$ eta $b_n = 1/n$

-(a_n) segida bornatua bada eta (b_n) segidaren limitea ∞ bada orduan:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{b_n}\right] = 0$$

Adibidea: $a_n = \cos(n)$ eta $b_n = n^2$

Segidak: Limiteak

Segida baliokideak

Segiden limiteen kalkuluan zenbait indeterminazio ager daitezke: $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $0/0$, ∞/∞, 1^{∞}, 0^0, 0^{∞}, ∞^0

Adibideak: $\lim_{n\to\infty} [\ln(1+\frac{1}{n})]^n$ (0^{∞}) edo $\lim_{n\to\infty} [2n \sin\frac{1}{n}]$ $(\infty \cdot 0)$

Kasu hauetan oso baliagarria izango da, ahal bada, segida baliokideak erabiltzea.

Zer dira segida baliokideak?

(a_n) eta (b_n) bi **segida baliokideak**, baldin eta: $\lim_{n\to\infty} [\boldsymbol{a_n/b_n}]=\mathbf{1}$

(a_n) eta (b_n) baliokideak direnean: $a_n \sim b_n$ adierazten da

Segidak: Limiteak

Segida baliokideak

$\boxed{\lim_{n\to\infty} [a_n]=0}$ bada, honako baliokidetasun hauek betetzen dira:

1) $\mathbf{\tan a_n \sim \sin a_n \sim a_n \sim \arcsin a_n \sim \arctan a_n}$

2) $\mathbf{1-\cos a_n \sim \frac{a_n{}^2}{2}}$

3) $\mathbf{e^{a_n} - 1 \sim a_n}$

4) $\mathbf{\ln(1+a_n) \sim a_n}$ $\quad\Rightarrow$ Baldin $\lim_{n\to\infty} [a_n]=1$ $\quad\mathbf{\ln(a_n) \sim a_n - 1}$

Aurreko Adibideak: $\lim_{n\to\infty} [\ln(1+\frac{1}{n})]^n$ (0^{∞}) edo $\lim_{n\to\infty} [2n \sin\frac{1}{n}]$ $(\infty \cdot 0)$

Segidak: Limiteak

9

Limiteen propietateak:

Izan bitez (a_n) eta (b_n) bi segida, non $\lim_{n\to\infty}[a_n] = L_1$ eta $\lim_{n\to\infty}[b_n] = L_2$

Orduan

1- $\lim_{n\to\infty}[a_n + b_n] = L_1 + L_2$

2- $\lim_{n\to\infty}[a_n - b_n] = L_1 - L_2$

3- $\lim_{n\to\infty}[a_n b_n] = L_1 L_2$

4- $\lim_{n\to\infty}[a_n/b_n] = L_1/L_2$, L_2 eta (b_n) segidaren gaiak ez nuluak direnean

5- $\lim_{n\to\infty}[a_n{}^{b_n}] = L_1{}^{L_2}$, baldin eta $L_1>0$ bada

Segidak: Limiteak

10

Segidak baliokideak

$\boxed{n \to \infty}$ hurbiltzen denean, hurrengo baliokidetasunak ematen dira (infinitu baliokideak):

1) $\boldsymbol{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k}$ **(k>0)**

2) $\ln(\boldsymbol{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k}) \sim \ln \boldsymbol{n^k} = \mathbf{k} \ln \boldsymbol{n}$ **(k>0)**

Adibidea: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n^4+3n^2+3}{3n^4+3}\right]$

$\boxed{n \to \infty}$ hurbiltzen denean, hurrengoa betetzen da baldin eta $a>1$, $b>0$ eta $p>0$ badira:

$$\boldsymbol{n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg \ln n^p}$$

Adibidea: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{1+\ln n}\right]$ eta $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\ln(1+2n+n^2)\right]$

Segidak: Limiteak

1^{∞}, 0^0, 0^{∞}, ∞^{0} motako indeterminazioak agertzen direnean oso ohikoa da logaritmo nepertarra erabiltzea indeterminazio ebazteko.

Nola? $\lim\limits_{n\to\infty}[\,a_n] = A$ kalkulatu nahi dugu. Askotan errazago da B=ln A kalkulatzea eta behin B kalkulatuta erraz determinatzen dugu A.

<u>Adibidea</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]^{n} = A$

$$B = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{n}{n+1}^{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{n}{n+1}\right] = -\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\frac{n+1}{n}\right] = -\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \sim$$

$$\sim -\lim_{n\to\infty}\left[n\,\frac{1}{n}\right] = -1 \qquad A = e^{B} = e^{-1}$$