eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

MATEMÁTICA APLICADA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA DE GESTIÓN Y SISTEMAS DE INFORMACIÓN

ANÁLISIS MATEMÁTICO **15 *de enero de* 2019**

A) Resuelve la siguiente ecuación en el dominio complejo:

$$z^2-(3-i)z+4=0$$

(1 punto)

Solución:

$$z=\frac{(3-i)\pm\sqrt{(3-i)^2-16}}{2}=\frac{(3-i)\pm\sqrt{9-1-6i-16}}{2}=\frac{(3-i)\pm\sqrt{-8-6i}}{2}$$

A continuación, calculamos la raíz $\sqrt{-8-6i}$:

$$\sqrt{-8-6i}=a+bi$$

$$-8-6i=(a+bi)^2$$

$$-8-6i=a^2-b^2+2abi\rightarrow\begin{cases}-8=a^2-b^2\\ -6=2ab\rightarrow\boxed{a=\dfrac{-3}{b}}\end{cases}$$

Sustituyendo a en la primera ecuación:

$$-8=\left(\frac{-3}{b}\right)^2-b^2\rightarrow -8b^2=9-b^4$$

$$b^4-8b^2-9=0\rightarrow b^2=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm10}{2}=\begin{cases}9\rightarrow b=\pm3\\ -1\rightarrow \text{Imposible}\end{cases}$$

Por tanto: $\pm\sqrt{-8-6i}=\pm(1-3i)$

De manera que:

$$z=\frac{(3-i)\pm(1-3i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{4-4i}{2}=\boxed{2-2i}\\ \dfrac{2+2i}{2}=\boxed{1+i}\end{cases}$$

B) Calcula el límite de la siguiente sucesión en función de los valores del parámetro a ($a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$$

(1 punto)

<u>Solución</u>:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \infty \text{ si } a < 0 \\ 1 \text{ si } a = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n}\right) = \begin{cases} 0 \cdot \text{acotado=0 si } a > 0 \\ \infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n}\right) \to \nexists \text{ si } a < 0 \\ 1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n}\right) \to \nexists \text{ si } a = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n}\right) = \boxed{\begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \nexists \text{ si } a \leq 0 \end{cases}}$$

C) Estudia el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

(1 punto)

<u>Solución 1</u>:

Es una serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Utilizando el criterio de Leibniz:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \\ |a_{n+1}| \leq |a_n| \to \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \end{array}\right\} \text{Se cumplen las dos condiciones, por tanto es } \boxed{\text{convergente}}$$

MATEMÁTICA APLICADA

Solución 2:

Utilizando el valor absoluto, podemos utilizar el criterio de comparación y ver así si se trata de una serie absolutamente convergente:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\pi)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow$ Es menor que la serie armónica con exponente 2, por tanto, es $\boxed{\text{convergente}}$.

D) Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\ln\left(\mathrm{sh}^2 x - 5\mathrm{chx} + 8\right) = 0$$

(1 punto)

Solución:

Tomando exponenciales:

$$e^{\ln\left(\mathrm{sh}^2 x - 5\mathrm{chx} + 8\right)} = e^0$$

$$\mathrm{sh}^2 x - 5\mathrm{chx} + 8 = 1$$

$$\mathrm{ch}^2\mathrm{x} - 1 - 5\mathrm{chx} + 8 = 1$$

$$\mathrm{ch}^2\mathrm{x} - 5\mathrm{chx} + 6 = 0 \rightarrow \mathrm{chx} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Utilizando la función inversa del coseno hiperbólico:

$$\mathrm{x} = \mathrm{argch}(3) = \ln\left(3 \pm \sqrt{9-1}\right) = \boxed{\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{argch}(2) = \ln\left(2 \pm \sqrt{4-1}\right) = \boxed{\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}$$

E) Calcula el desarrollo de Taylor de segundo grado de la función $y(x) = x^{\text{sen}x}$ en el punto $a = \dfrac{\pi}{2}$

(2 puntos)

Solución:

En primer lugar, necesitamos calcular las derivadas primera y segunda de la función. Para ello utilizamos derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x$$

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 1$$

A continuación, calculamos la segunda derivada:

$$y'' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)^2 + x^{\sin x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(0 + \frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(-\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\right) = \frac{-\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto, el desarrollo de Taylor será:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

F) Determina y representa gráficamente el dominio de definición de la siguiente función:

$$z(x, y) = \frac{\ln\left[\left(16 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right]}{xy\sqrt{\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 1}}$$

(2 puntos)

Solución:

El argumento del logaritmo tiene que ser positivo, por tanto:

$$\text{primera opción}\begin{cases}16-x^2-y^2>0\rightarrow x^2+y^2<16 & \text{(cirunferencia centrada en el origen de radio 4)}\\ x^2+y^2-4>0\rightarrow x^2+y^2>4 & \text{(cirunferencia centrada en el origen de radio 2)}\end{cases}$$

$$\text{segunda opción}\begin{cases}16-x^2-y^2<0\rightarrow x^2+y^2>16\\ x^2+y^2-4<0\rightarrow x^2+y^2<4\end{cases}\rightarrow \text{Imposible}$$

Por otro, lado el radicando debe ser positivo:

$$\frac{x^2}{9}+y^2-1>0\rightarrow\frac{x^2}{9}+y^2>1 \text{ (elipse centrada en el origen de semiejes 3 y 1)}$$

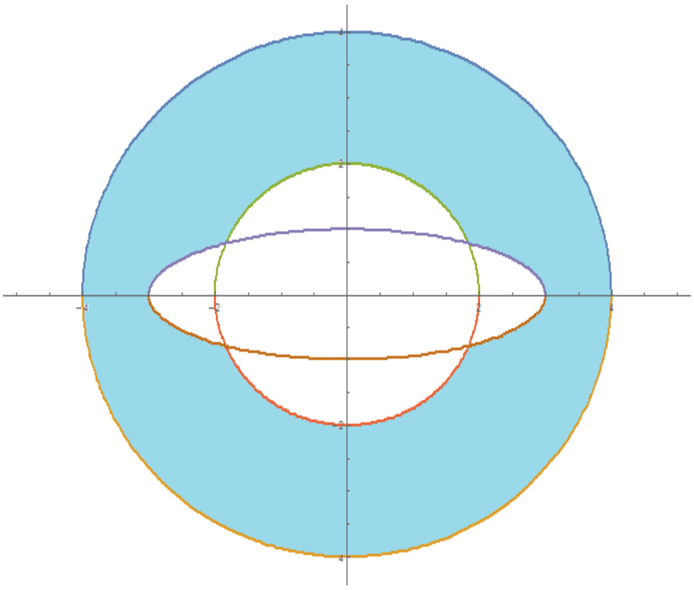
Por último, el denominador debe ser distinto de cero:

$$xy\neq 0\rightarrow x\neq 0\wedge y\neq 0$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in R^2/\left(x^2+y^2<16\right)\wedge\left(x^2+y^2>4\right)\wedge\left(\frac{x^2}{9}+y^2>1\right)\wedge x\neq 0\wedge y\neq 0\right\}}$$

Gráficamente:



Los ejes x e y y las curvas dibujadas no están incluidas en el dominio

G) Encuentra los extremos relativos de la función $f(x,y)=x+y$ sobre la elipse $x^2+2y^2=1$

(2 puntos)

<u>Solución</u>:

La función Lagrangiana es la siguiente

$$L(x,y,\lambda)=x+y+\lambda\left(x^2+2y^2-1\right)$$

Calculamos los puntos críticos utilizando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_x^{'}=0 \\ L_y^{'}=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ 1+4\lambda y=0 \\ x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$$

Se obtienen dos puntos críticos:

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \text{ con } \lambda=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\left(\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) \text{ con } \lambda=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Calculamos la matriz Hessiana orlada para analizar los puntos críticos:

$$H_L(\lambda,(x,y))=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante en los puntos críticos:

$$H_L\left(\frac{-\sqrt{6}}{4},\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right)=\begin{vmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{4\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{4\sqrt{6}}{6} & 0 & -\sqrt{6} \end{vmatrix}>0\rightarrow \boxed{\text{Máximo en } \left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$$

$$H_L\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\left(\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6}\right)\right)=\begin{vmatrix} 0 & \frac{-2\sqrt{6}}{3} & -\frac{4\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{-4\sqrt{6}}{6} & 0 & -\sqrt{6} \end{vmatrix}<0\rightarrow \boxed{\text{Mínimo en } \left(\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)}$$