

INTEGRAL MUGATUA

1. Kalkulatu hurrengo integralak, adierazitako ordezkapenak erabiliz:

$$\text{a) } \int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}} \quad \left(z = \frac{1}{t} \right) \quad \text{Emitza: } \ln(3/2)$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}} \quad (x-1 = \sqrt{3} \operatorname{tg} z) \quad \text{Emitza: } \frac{1}{6}$$

2. Egiaztatu hurrengo emaitzak:

$$\text{a) } \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{3}{8}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{x^{1/4}}{1+x^{1/2}} dx = \frac{3\pi-8}{3}$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} (1-\cos \varphi)^2 d\varphi = 3\pi$$

$$\text{d) } \int_1^2 \frac{10x^2 dx}{(x^3+1)^2} = \frac{35}{27}$$

$$\text{e) } \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{848}{105}$$

$$\text{f) } \int_0^2 x\sqrt{4x^2+9} dx = \frac{49}{6}$$

3. Kalkulatu hurrengo integral inpropio konbergenteak:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{Emitza: } \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\text{b) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \quad \text{Emitza: } 4$$

$$\text{c) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \quad \text{Emitza: } \sqrt{2}-1$$

4. Ebaluatu hurrengo integral inpropioak:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^2} \quad \text{Emitza: } \frac{\pi}{4a^3}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{Emitza: } \pi$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 - 3z + 2} \quad \text{Emitza: } -\ln 2$$

5. Frogatu integral hauen dibergentzia:

$$\text{a) } \int_{-2}^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{b) } \int_1^{\infty} \frac{x^2}{4x^2 + 25} dx$$

$$\text{c) } \int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^2} dx$$

6. Kalkulatu $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ kurba arkuaren luzera, $x = 2$ eta $x = 4$ artean.

$$\text{Emitza: } -2 + \ln \frac{e^8 - 1}{e^4 - 1}$$

7. Kalkulatu $y = -x^2 - 2x + 3$ parabolak, bere ukitzailea $P(2, -5)$ puntuan eta ordenatuen ardatzak mugatutako azalera.

$$\text{Emitza: } \frac{8}{3}$$

8. Kalkulatu $x^2 + y^2 = 8$, eta $x^2 = 2y$ kurbek barnean mugatzen duten azalera.

$$\text{Emitza: } 2\pi + \frac{4}{3}$$

9. Kalkulatu $x^2 + (y-8)^2 = 4$ zirkunferentziak abzisen ardatzaren inguruan biratzean sortutako solidoaren bolumena.

$$\text{Emitza: } 64\pi^2$$

10. Izan bedi 1. koadrantean honako kurba hauek definitutako eskualdea:

$$\begin{cases} x^2 + 2 \geq y \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Kalkulatu:

a) Eskualdearen azalera eta perimetroa

$$\text{Emitza: } \begin{cases} A = 41/6 \\ L = 6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5}/2 + 1/4 \ln|2 + \sqrt{5}| \end{cases}$$

b) Eskualdeak OX ardatzaren inguruan biratzean sortutako gorputzaren bolumena.

$$\text{Emitza: } \frac{218}{15}\pi$$

11. Kalkulatu hurrengo kurbek bornatzen duten eskualdearen azalera:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Emitza: } \frac{\pi}{2} - 1$$

12. Honako kurba hauek definitutako eskualdearentzako:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \\ y^2 \leq x-1 \end{cases}$$

Kalkulatu eskualdeak OX ardatzaren inguruan biratzean sortutako gorputzaren bolumena.

$$\text{Emitza: } \pi \left[\frac{89}{12} - \frac{17\sqrt{17}}{12} \right]$$

13. Kalkulatu $(y-1)^2 - 2(2+x) = 0$ kurbak eta $A(0,-1)$ eta $B(6,5)$ puntuek lotzen dituen zuzenak barnean mugatzen duten azalera.

$$\text{Emitza: } 18$$

14. Kalkulatu $\int_0^{3/2} \frac{1}{x^2 - 4} dx$

a) Trapezioen metodoa erabiliz, $n=6$ izanik

$$\text{Emitza: } -0.491462$$

b) Simpson-en metodoa erabiliz, $n=3$ izanik

$$\text{Emitza: } -0.48683$$

c) Integralaren balio zehatza

$$\text{Emitza: } -0.486478$$

15. Kalkulatu $\int_1^2 x \ln x \, dx$

a) Trapezioen metodoa erabiliz, $n=6$ izanik

Eraitza: 0.637898

b) Jatorrizko funtzio baten kalkuluaren bidez

Eraitza: $-\frac{3}{4} + 2 \ln 2$

16. Kalkulatu $\int_0^{\pi/2} \sin x^2 \, dx$ Trapezioen metodoa erabiliz, $n=4$ izanik

Eraitza: 0.828206

17. Kalkulatu $\int_1^2 \cos x^3 \, dx$

a) Trapezioen metodoa erabiliz, $n=10$ izanik

Eraitza: -0.0842748

b) Simpson-en metodoa erabiliz, $n=5$ izanik

Eraitza: -0.0750789

18. Kalkulatu honako integral inpropio konbergenteak:

a) $\int_0^\infty \frac{5}{5+x^2} \, dx$

Eraitza: $\frac{\sqrt{5} \pi}{2}$

b) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \, dx$

Eraitza: $\frac{3}{2} (1 - 2\sqrt[3]{2})$

19. Izan bedi honako eran definitutako $[D]$ eskualdea:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \geq 1 ; y \leq 1 ; x \geq 0 ; x \leq 2 ; y \geq 0 \right\}$$

Integral mugatua erabiliz, kalkulatu:

a) $[D]$ eskualdearen azalera

Eraitza: $\frac{8-\pi}{4}$

b) $[D]$ eskualdeak abzisen ardatzaren inguruan biratzean sortutako gorputzaren bolumena.

Eraitza: $\frac{4}{3} \pi$

20. Izan bedi $y^2 \leq 4x$; $y \geq 2x - 4$ kurbek bornatzen duten $[D]$ eskualdea:

a) $[D]$ eskualdearen azalera Eraitza: 9

(OHARRA: erabili y integrazio aldagaitzat)

b) $[D]$ domeinuaren perimetroa Eraitza: $5\sqrt{5} + \sqrt{2} + \ln(4 + 2\sqrt{5}) - \ln(-2 + 2\sqrt{2})$

(OHARRA: erabili y integrazio aldagaitzat)

c) 1. Koadranteako eskualdeak abzisen ardatzaren inguruan biratzeaz sortutako solidoaren bolumena.

(OHARRA: erabili x integrazio aldagaitzat)

Eraitza: $\frac{64}{3} \pi$
