MATEMATIKA DISKRETUA

2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

ERIK ALONSO GONZÁLEZ

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)

Aurkibidea

Aurkibidea

Multzo-kontzeptua I

Sarrera

- XI. mendearen amaieran, multzo teoriaren azterketaren sortzailea izan zen George Cantor filosofo eta matematikariak multzo bat honela definitu zuen: "oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma"
- Beranduago, Bertrand Russell-ek honako paradoxa hau aurkeztu zuen: Izan bedi A, bere buruaren elementuak ez diren multzo guztien multzoa. A bere buruaren elementua da ala ez? Erantzuna kontraesan bat da.
- George Cantor-ek ezarritako multzoaren gainean, Bertrand Russell-en paradoxaren intzidentziak honako multzoaren kontzeptu hau ezartzera bultzatzen du.

Multzo-kontzeptua II

1.1. Definizioa

- Multzo bat, oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma da, non ez den bere buruaren elementu bat bezala ulertzen.
- Multzoak letra larriekin adieraziko dira eta elementuak xeheekin.
- Multzo bat ondo definituta dagoela diogu, baldin eta irizpide bat badugu ezagutzeko elementu bat multzoaren barnean dagoen ala ez. Multzoak hedaduraz edo edukieraz defini daitezke.

Multzo-kontzeptua III

1.1. Definizioa

- Multzo bat hedatuz definituta dagoela diogu, baldin eta haren elementuak komaz banatuta edo giltzen artean kokatuz adierazten badira.
- Multzo bat edukieraz definituta dagoela diogu, baldin eta multzoko elementuek soilik betetzen duten propietate baten bidez definituta badago.
- Multzo bat finitua dela diogu, elementu-kopuru finitua badu. Aurkako kasuan infinitu deritzo. A multzo finitu baten elementu-kopurua $n(A)$ adieraziko da.

Multzo-kontzeptua IV

1.1. Definizioa

- Horrela, adibidez, bokalen V multzoa hedaduraz a,e,i,o,u definituko da eta zenbaki bikoitien P multzoa edukieraz honako propietate karakteristiko honen bidez definituko da: x, P-ren elementua da baldin eta soilik baldin, x zenbaki bikoitia bada. V multzo finitua da eta P infinitua.

Zenbakizko multzoak

Zenbakizko multzoak

- Matematikaren garapenean garrantzi handikoak izango dira honako multzo infinitu hauek:
  - $\mathbb{N}$ Zenbaki arrunten multzoa
  - $\mathbb{Z}$ Zenbaki osoen multzoa
  - $\mathbb{Q}$ Zenbaki arrazionalen multzoa
  - $\mathbb{R}$ Zenbaki errealen multzoa
  - $\mathbb{C}$ Zenbaki konplexuen multzoa

Sinbolo erabilgarriak

Sinbolo erabilgarriak

- Multzoen teorian zenbait sinbolo, batzuk logika matematikotik hartuta, esandako teoria garatzen lagunduko dute. Honako taula honetan gehien erabilitakoak agertzen dira:

Sinboloa	Esanahia
$\vee$	edo
$\wedge$	eta
$\Rightarrow$	orduan
$\Leftrightarrow$	baldin eta soilik baldin
$\forall$	edozeinerako
$\exists$	Existitzen da bat gutxienez
$\exists!$	Existitzen da bakarra
$\nexists$	Ez da existitzen
$/$	non
$:$	Egiaztatzen du

Pertenentzia eta berdintasun erlazioak

1.2. Definizioa

- x elementu bat A multzoan badago $x \in A$ adieraziko da eta "x elementua A multzoaren barnean dago" irakurriko da. x elementu bat A multzoan ez badago $x \notin A$ adieraziko da eta "x elementua ez dago A-ren barnean" irakurriko da.
- A multzo baten x edozein elementu B multzoan badago eta B-ren elementu bakoitza A multzoan badago orduan A eta B multzo berdina dira eta $A = B$ denotatuko da.
- Horrela, adibidez, P zenbaki bikoitien multzoa bada $8 \in P$ eta $7 \notin P$ izango dugu.

Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak

1.3. Definizioa

- A multzo bat B beste multzo batean sartuta dagoela diogu, $A \subset B$ denotatuz, baldin eta A-ren edozein elementu B-ren barnean badago.
- A multzoa B multzoan sartua badago, A, B-ren azpimultzoa edo, A, B-ren zati bat dela diogu. A ez badago B multzoan sartuta, $A \not\subset B$ denotatuko da.
- Logika matematikoaren terminoetan, $A \subset B$ adierazpenak $X \in A \Rightarrow X \in B$ esan nahi du eta gainera $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.
- Horrela, adibidez, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eta $\mathbb{C}$ zenbakizko multzoetarako honako partekotasun kate hau egiaztatuko da: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Multzo hutsa

Sarrera

- Kontsidera dezagun A multzo bat eta defini dezagun $\phi_A = \{x \in A \ / \ x \notin A\}$ multzoa. ϕ_A multzoak ez du elementurik eta A multzoari elkartutako multzo hutsa deritzo.
- Multzo huts bakarra existitzen da, hots, hartutako A multzoarekiko independentea da multzo hutsaren definizioa. Benetan, B bada beste multzo bat eta $\phi_B = \{x \in B \ / \ x \notin B\}$ bada B multzoari elkartutako multzo hutsa, berehalakoa da $\phi_A \subset \phi_B$ eta $\phi_B \subset \phi_A$ ziurtatzea, hau da $\phi_A = \phi_B$.

1.4. Definizioa

- Elementuak ez dituen ϕ multzo bakarrari multzo huts deritzo.
- A edozein multzo izanik, $\phi \subset A$ egiaztatuko da.

Multzo osagarria

1.5. Definizioa

- Izan bitez A eta E bi multzo, non $A \subset E$ baita.
- Honako A′ multzo honi, A-ren multzo osagarria E-rekiko deritzo:

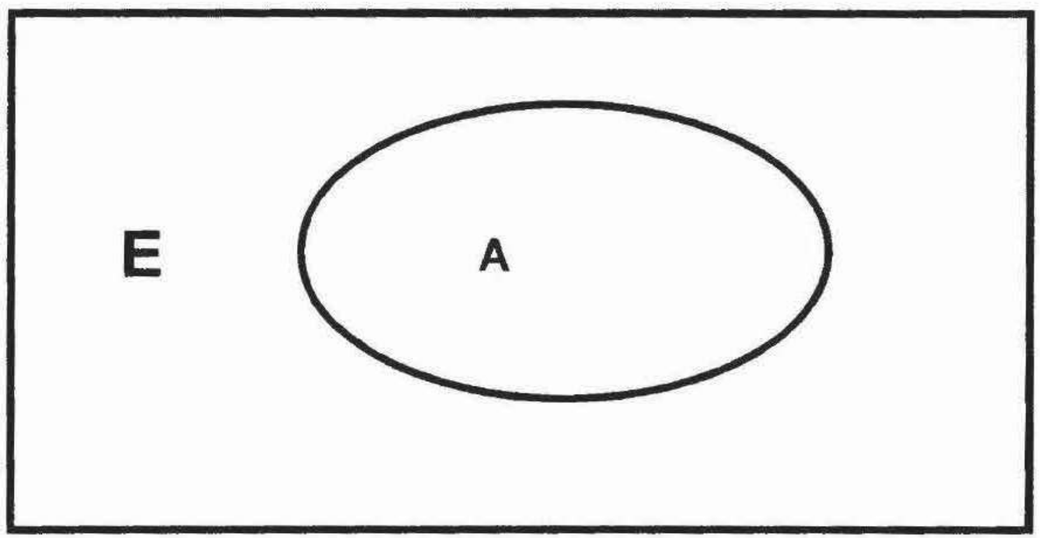
$$A' = \{x \in E \; / \; x \notin A\}$$

- Horrela, adibidez, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ eta $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ badira, orduan $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ izango da.
- $\mathbb{Q}$-ren osagarria $\mathbb{R}$-rekiko, zenbaki irrazionalen multzoa da.

Venn-en diagramak

Venn-en diagramak

- Multzoak kurba itxi ganbilez mugatutako planoko eremuen bidez adieraz daitezke. Adierazpen hauei Venn-en diagrama deritze.



$A \subset E$

Aurkibidea

Eragiketak multzoekin

Sarrera

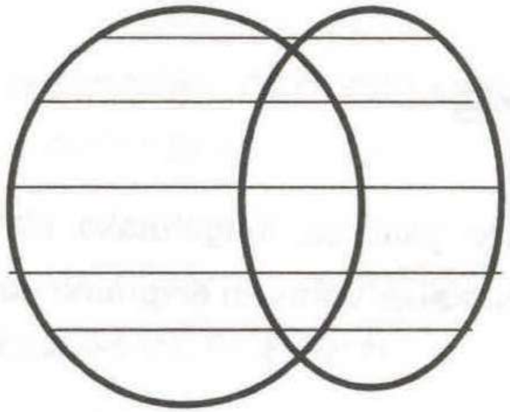
- Multzoen arteko eragiketen bidez multzoak konbina daitezke multzo berriak sortuz. Bildura ($\cup$), ebakidura ($\cap$) eta diferentzia ($-$) eragiketak aztertuko ditugu.

Bildura

2.1. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren bildura $A \cup B$ denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean edo B-ren barnean baitaude.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

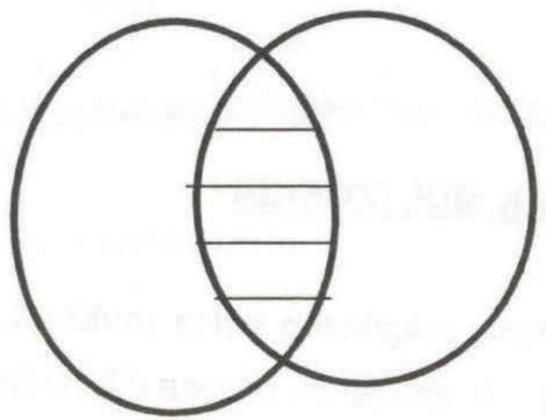


Ebakidura

2.2. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren ebakidura $A \cap B$ denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean eta B-ren barnean baitaude.
- $A \cap B = \phi$ bada A eta B multzo disjuntuak direla diogu.

$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

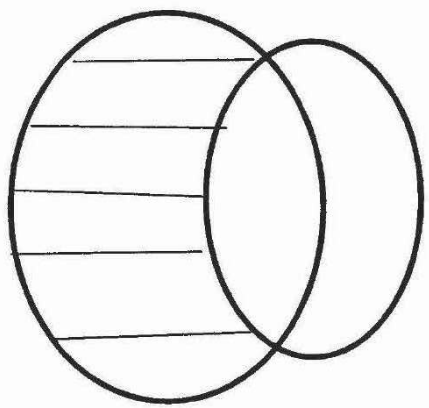


Diferentzia

2.3. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren diferentzia A-B denotaturiko beste multzoa izango da, non haren elementuak A-ren barnean baitaude, baina ez B-n.
- $A \subset E$ badago, orduan $A' = E - A$ egiaztatuko da.
- Problema konkretu bateko multzo guztien elementuak dituen E multzo bati erreferentzia-multzo edo multzo unibertsal deritzo.

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



Oinarrizko propietateak I

2.4. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P edozein azpimultzo izanik, honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$(P')' \equiv P \qquad (1.p)$$

$$\phi' \equiv E \qquad (2.p)$$

$$E' \equiv \phi \qquad (3.p)$$

Oinarrizko propietateak II

2.5. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup \phi \equiv P \tag{4.p}$$

$$P \cup E \equiv E \tag{5.p}$$

$$P \cup P \equiv P \tag{6.p}$$

$$P \cup Q \equiv Q \cup P \tag{7.p}$$

$$(P \cup Q) \cup R \equiv P \cup (Q \cup R) \tag{8.p}$$

$$P \cup P' \equiv E \tag{9.p}$$

Oinarrizko propietateak III

2.6. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cap \phi \equiv \phi \qquad (10.p)$$

$$P \cap E \equiv P \qquad (11.p)$$

$$P \cap P \equiv P \qquad (12.p)$$

$$P \cap Q \equiv Q \cap P \qquad (13.p)$$

$$(P \cap Q) \cap R \equiv P \cap (Q \cap R) \qquad (14.p)$$

$$P \cap P' \equiv \phi \qquad (15.p)$$

Oinarrizko propietateak IV

2.7. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup (P \cap Q) \equiv P \tag{16.p}$$

$$P \cap (P \cup Q) \equiv P \tag{17.p}$$

$$P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R) \tag{18.p}$$

$$P \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \tag{19.p}$$

$$(P \cup Q)' \equiv P' \cap Q' \tag{20.p}$$

$$(P \cap Q)' \equiv P' \cup Q' \tag{21.p}$$

Oinarrizko propietateak V

2.8. Proposizioa

- P eta Q edozein multzo finitu izanik, honako hau egiaztatuko da:

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$$

Berretura multzoa

2.9. Definizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A-ren azpimultzo guztiek osatzen duten P(A) multzoari A-ren berretura multzoa deritzo.

2.10. Proposizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A multzo finitua bada eta $n(A)=r$ orduan honako hau egiaztatuko da: $n[P(A)]=2^r$.

Multzo baten partiketa

Sarrera

- Izan bedi A multzo ez huts bat eta $F=\{S_i \ / \ i \in I\}$ A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat.

2.11. Proposizioa

- F, A-ren partiketa bat dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:
  1. $\bigcup_{i \in I} S_i = A$
  2. $\forall i,j \in I \ / \ i \neq j \quad S_i \cap S_j = \phi$
- 1. atala baino ez bada egiaztatzen, F, A-ren estaldura dela diogu.

Aurkibidea

3. Multzoen biderkadura kartesiarra

Multzoen biderkadura kartesiarra I

3.1. Definizioa

- A eta B bi multzoren biderkadura kartesiarra AxB denotaturiko honako multzo hau izango da:

$$AxB=\{(x,y)\ /\ x\in A \wedge y\in B\}$$

- AxB multzoko (x,y) elementuei bikote ordenatu deritze.

3.2. Definizioa

- A, B eta C hiru multzoren biderkadura kartesiarra AxBxC denotaturiko multzo hau izango da:

$$AxBxC=\{(x,y,z)\ /\ x\in A \wedge y\in B \wedge z\in C\}$$

- AxBxC multzoko (x,y,z) elementuei hirukote ordenatu deritze.

Multzoen biderkadura kartesiarra II

3.3. Definizioa

- A_1, A_2,... eta A_m, m multzoren biderkadura kartesiarra $A_1xA_2x...xA_m$ denotaturiko multzo hau izango da:

$$A_1xA_2x...xA_m=\{(x_1,x_2,...,x_m) \;/\; x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 ... \wedge x_m \in A_m\}$$

- $A_1xA_2x...xA_m$ multzoko $(x_1,x_2,...,x_m)$ elementuei n-kote deritze.
- $A_1=A_2=...=A_m$ berdinak badira, orduan AxAx...xA multzoa A^m adieraziko da.
- Bereziki interesgarriak dira plano arrunta eta espazio arrunta adierazten dituzten $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoak, non $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoa baita.

Multzoen biderkadura kartesiarra III

3.4. Proposizioa

- A_1, A_2,... eta A_m multzo finituak badira honako hau egiaztatuko da:

$$n(A_1 x A_2 x \ldots x A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) \ldots n(A_m)$$

Aurkibidea

Korrespondentziak I

4.1. Definizioa

Izan bitez A eta B bi multzo ez huts.

- AxB multzoko edozein G azpimultzori A-ren B gaineko korrespondentzia deritzo.
- A, B eta G multzoei korrespondentziaren hasiera multzo, helburu multzo eta grafo deritze hurrenez hurren.
- $D \subset A$ multzoari, non $x \in D$ elementu bakoitzarentzat $y \in B$ elementu bat existitzen den $(x,y) \in G$ izanik, korrespondentziaren definizio-eremu deritzo. Era berean, $I \subset B$ multzoari, non $y \in I$ bakoitzarentzat $x \in A$ elementu bat existitzen den $(x,y) \in G$ izanik, korrespondentziaren irudi edo balio-eremu deritzo.

Korrespondentziak II

4.1. Definizioa

- Korrespondentziak adierazteko $f{:}A \to B$ erabiliz gero, orduan $(x,y) \in G$ badago "y, x-ren irudi f-ren arabera" dela esango da, eta $y=f(x)$ denotatuko da. Gainera, korrespondentziaren definizio-eremua eta irudia edo balio-eremua honako era honetan adieraziko dira:

$$D(f)=\{x \in A \ / \ \exists y \in B{:}\ f(x)=y\}=\{x \in A \ / \ \exists y \in B{:}\ (x,y) \in G\}$$
$$\mathrm{Im}(f)=\{y \in B \ / \ \exists x \in A{:}\ f(x)=y\}=\{y \in B \ / \ \exists x \in A{:}\ (x,y) \in G\}$$

Aplikazioak

4.2. Definizioa

- $f{:}A \to B$ korrespondentzia bat, aplikazio bat dela diogu baldin eta $D(f)=A$ bada eta $x \in D(f)$ bakoitzarentzat $y \in Im(f)$ bakarra existitzen bada, non $f(x)=y$ baita.

$$D(f)=A \quad \wedge \quad \forall x \in D(f){:}\ \exists y \in Im(f)\ /\ f(x)=y$$

- Hots, A-ren B gaineko f aplikazio bat A-ren elementu bakoitzari B-ren elementu bakarra egokitzen dion erregela baten bidez definituko da.
- f aplikazio batentzat $y=f(x)$ bada, orduan “y elementua x jatorrizkoaren irudia f-ren arabera” dela esango dugu.

Zenbait aplikazio berezi I

4.3. Definizioa

- $A \subset B$ bada, honako $i_A : A \to B$ aplikazio honi A-ren B gaineko inklusio aplikazio deritzo:

$$i_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

4.4. Definizioa

- Honako $I_A : A \to A$ aplikazio honi A-ren identitate aplikazio deritzo:

$$I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

- Kontuan izan identitate aplikazioa, inklusio aplikazioaren kasu berezi bat dela.

Zenbait aplikazio berezi II

4.5. Definizioa

- Izan bedi $k \in B$ elementu bat. Honako $f_k : A \longrightarrow B$ aplikazio honi aplikazio konstante deritzo:

$$f_k(x) = k \qquad \forall x \in A$$

4.6. Definizioa

- Izan bedi A, E-ren azpimultzo bat. Honako $c_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ aplikazio honi A-ren funtzio karakteristiko deritzo:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \ \text{badago} \\ 0 & x \in E\text{-}A \ \text{badago} \end{cases}$$

Zenbait aplikazio berezi III

4.7. Definizioa

- Kontsidera ditzagun $f:A\to B$ aplikazio bat eta A-ren S azpimultzo bat. Honako $f_s:S\to B$ aplikazio honi f-ren murrizketa aplikazio S gainean deritzo:

$$f_s(x)=f(x) \qquad \forall x\in S$$

Aplikazioen sailkapena I

4.8. Definizioa

- f:A→B aplikazio bat injektiboa dela diogu baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \;/\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta A-ren jatorrizko desberdinei f-ren arabera B-ko irudi desberdinak egokitzen bazaizkie.

Aplikazioen sailkapena II

4.8. Definizioa

- 4.8 definizioa honako definizio honen baliokidea da:
- f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \;/\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta B-ko irudi berdinei A-ren jatorrizko berdinak egokitzen bazaizkie f-ren arabera.

Aplikazioen sailkapena III

4.9. Definizioa

- $f:A\to B$ aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta $Im(f)=B$ egiaztatzen bada.
- Hots, $f:A\to B$ aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza A-ren elementu baten irudia bada gutxienez. Sinbolikoki:

$$\forall y\in B : \exists x\in A \ / \ f(x)=y$$

Aplikazioen sailkapena IV

4.10. Definizioa

- $f:A\rightarrow B$ aplikazio bat bijektiboa da baldin eta injektiboa eta suprajektiboa bada.
- Hots, $f:A\rightarrow B$ aplikazio bat bijektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza Aren elementu bakarraren irudia bada. Sinbolikoki:

$$\forall y\in B : \exists! x\in A \ / \ f(x)=y$$

Aplikazioen konposaketa

4.11. Definizioa

- Izan bitez $f:A\rightarrow B$ eta $g:B\rightarrow C$ bi aplikazio. Honako $g\circ f:A\rightarrow C$ aplikazio honi f eta g-ren aplikazio konposatu deritzo:

$$g\circ f(x)=g[f(x)] \quad \forall x\in A$$

- $f:A\rightarrow A$ aplikazio bat izanik, $f\circ f$ aplikazioa f^2 denotatuko da.
- 4.11 definizioa erabiliz erraz defini daiteke hiru edo aplikazio gehiagoren arteko konposaketa.

Alderantzizko aplikazioa

4.12. Definizioa

- Izan bedi $f:A \rightarrow B$ aplikazio bijektibo bat. B-ren y elementu bakoitzari A-ren x jatorrizkoa f-ren arabera egokitzen dion $f^{-1}:B \rightarrow A$ aplikazioari f-ren alderantzizko aplikazio deritzo.
- Kontuan izan $f \circ f^{-1} = I_B$ eta $f^{-1} \circ f = I_A$ egiaztatzen direla.

Aurkibidea

5. Zenbaki osoak eta zatidura
   - Zenbaki osoen zatidura
   - Zatitzaile komunetako handiena eta multiplo komunetako txikiena
   - Kongruentziak modulu m

Zenbaki osoen zatidura I

5.1. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$, non "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen duela diogu baldin eta c $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non b $=$ ac baita. "a", "b"-ren zatitzailea dela ere esango da, edo "b", "a"-ren multiploa dela eta honela denotatuko da: $a|b$. "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen ez badu, honela denotatuko da: $a\nmid b$.

5.2. Definizioa

- p>1 zenbaki arrunt bat lehena dela diogu baldin eta haren zatitzaile arrunt bakarrak 1 eta zenbaki bera badira. Aurkako kasuan konposatua deritzo.

Zenbaki osoen zatidura II

5.3. Proposizioa

- Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Orduan, honako hau egiaztatuko da:
  1. $a|b$ bada eta $a|c$ bada, $a|(b+c)$ egiaztatuko da.
  2. $a|b$ bada, orduan $a|bc$ $\forall c \in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.
  3. $a|b$ bada eta $b|c$ bada, orduan $a|c$ egiaztatuko da. Kasu honetan, $a|(mb+nc)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.

5.4. Proposizioa (aritmetikaren funtsezko teorema)

- Izan bedi z zenbaki oso bat 1 baino handiagoa. Orduan, z zenbakia era bakarrean idatziko da zenbaki lehen gisa, edo bi edo zenbaki lehen gehiagoren berreturen batura gisa.

Zenbaki osoen zatidura III

5.5. Proposizioa

- Izan bedi $z \in \mathbb{Z}$ zenbaki oso konposatu bat. Orduan, z zenbakiak $\sqrt{z}$ baino txikiagoa edo berdina den zatitzaile lehen bat izango du.

5.6. Proposizioa (Zatidura osoaren algoritmoa)

- Izan bitez a zenbaki oso bat eta b zenbaki oso positibo bat. p eta r bi zenbaki oso bakarrak existituko dira, non $a = pb + r$ den, $0 \leq r < b$ izanik.

5.7. Definizioa

- Aurreko proposizioan b zatitzailea da, a zatikizuna, p zatidura eta r hondarra.

z.k.h eta m.k.t I

5.8. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. d|a eta d|b betetzen dituen d zenbaki oso handienari a eta b-ren zatitzaile komunetako handiena deritzo eta honela denotatuko da:

$$d = zkh(a, b).$$

5.9. Proposizioa (Euclides-en algoritmoa)

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. a $=$ pb $+$ r bada, non $0 \leq r < b$ den, honako hau egiaztatuko da:

$$zkh(a, b) = zkh(b, r).$$

5.10. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a eta b berekiko lehenak dira baldin eta zkh(a, b) $= 1$ egiaztatzen bada.

z.k.h eta m.k.t II

5.11. Definizioa

- Izan bitez $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. $a_1, a_2, \dots, a_n$ binaka berekiko lehenak direla diogu baldin eta $zkh(a_i, a_j) = 1$ egiaztatzen bada, non $1 \leq i < j \leq n$ den.

5.12. Proposizioa (Bezout-en teorema)

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b berekiko lehenak dira, baldin eta soilik baldin $p,q \in \mathbb{Z}$ existitzen badira non honako hau egiaztatzen den: $ap + bq = 1$.

5.13. Definizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b-rekin zatigarria den zenbaki oso positibo txikienari a eta b-ren multiplo komunetako txikiena deritzo eta honela denotatuko da:

$$mkt(a, b)$$

z.k.h eta m.k.t III

5.14. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. Honako hau egiaztatuko da:

$$ab = \text{zkh}(a, b)\ \text{mkt}(a, b)$$

5.15. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}^+$. zkh(a, b)=1 bada, orduan mkt(a, b)=ab egiaztatuko da.

Kongruentziak modulu m I

5.16. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a eta b kongruente modulu m direla esango dugu, m zenbaki positibo bat delarik, baldin eta m|(a-b) egiaztatzen bada eta honela denotatuko da: a$\equiv$b (mod m).

5.17. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. Orduan honako hau egiaztatuko da: a$\equiv$b (mod m) baldin eta soilik baldin k $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non a=b+km den.

Kongruentziak modulu m II

5.18. Proposizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$. $a \equiv b \pmod{m}$ eta $c \equiv d \pmod{m}$ badira, honako hau egiaztatuko da:

$$a+c \equiv b+d \pmod{m}$$
$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

- Hau da, modulu berdinekiko kongruentziak gaika batu eta biderkatu daitezke. Hots, batura eta biderkadura bateragarriak dira kongruentzia-erlazioarekin.

Aurkibidea

6. Erlazio bitarrak
   - Erlazio bitarraren kontzeptuak
   - Erlazio bitarren propietateak

Erlazio bitarraren kontzeptuak

6.1. Definizioa

- AxA-ko G edozein azpimultzori A gaineko erlazio bitar deritzo. Hots, erlazio bitar bat A-ren A gaineko korrespondentzia bat da.
- $\mathcal{R}$ ikurraren bidez adierazten bada erlazio bitarra, orduan (x,y)$\in$G badago "x, y-rekin erlazionatuta dago" esango dugu eta x$\mathcal{R}$y denotatuko da. (x,y)$\notin$G bada "x ez dago y-rekin erlazionatuta" esango dugu eta x$\not\mathcal{R}$y denotatuko da. Gainera $\mathcal{R}$ erlazio bitarra karakterizatzen duen G azpimultzoari $\mathcal{R}$-ren grafo deritzo.

Erlazio bitarren propietateak I

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat, haren grafoa G izanik.

6.2. Definizioa

- R bihurkorra dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in A \qquad xRx$$

edo

$$\forall x \in A \qquad (x,x) \in G$$

6.3. Definizioa

- R simetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \Rightarrow yRx$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$$

Erlazio bitarren propietateak II

6.4. Definizioa

- R antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow x=y$$

6.4. Definizioa (Beste era bat)

- R antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow x \not{R} y \vee y \not{R} x$$

edo

$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow (x,y) \notin G \vee (y,x) \notin G$$

Erlazio bitarren propietateak III

6.5. Definizioa

- R iragankorra dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y,z \in A \qquad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

edo

$$\forall x,y,z \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$$

Aurkibidea

Baliokidetasun-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat.

7.1. Definizioa

- R erlazio bitarra, baliokidetasun-erlazioa dela diogu, baldin eta bihurkorra, simetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, xRy bada “x baliokide y” esango da.
- Baliokidetasun-erlazioak $\sim$ ikurrarekin adieraziko dira.

Baliokidetasun klaseak I

Izan bedi A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazio bat.

7.2. Definizioa

- Kontsidera dezagun $a \in A$ elementu bat. Honako A-ren C(a) multzo honi "a elementuaren baliokidetasun klase, modulu $\sim$" deritzo:

$$C(a)=\{x \in A \;/\; x \sim a\}$$

- Baliokidetasun klaseen beste notazio batzuk honako hauek dira: $[a]$ edo $\bar{a}$.

Baliokidetasun klaseak II

7.3. Proposizioa

- A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagozkion baliokidetasun klaseak kontsideratzen badira, honako propietate hauek egiaztatuko dira:
  1. $\forall x \in A \qquad C(x) \neq \emptyset$
  2. $\forall x,y \in A \qquad x \sim y \Rightarrow C(x) = C(y)$
  3. $\{C(x) \ / \ x \in A\}$ A-ren partiketa bat da.
- 2. atalaren ondorioz, C(x), baliokidetasun klase bat, klasearen adierazle deritzon haren edozein elementuren bidez zehaztu daiteke.

Zatidura multzoa

7.4. Definizioa

- Honako multzo honi, $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagokion zatidura multzo deritzo eta $A/\sim$ denotatuko da:

$$A/\sim = \{C(x) \ / \ x \in A\}$$

- Hots, $A/\sim$ zatidura multzoa $\sim$ moduluko baliokidetasun klaseekin osatuta dago eta 7.3 proposizioaren 3. atalaren arabera A-ren partiketa bat.

Aurkibidea

Ordena-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat.

8.1. Definizioa

- R erlazio bitarra, ordena-erlazioa dela diogu, baldin eta R bihurkorra, antisimetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, xRy bada “x, y-ren aurreko” esango da.
- Ordena-erlazioak $\preccurlyeq$ ikurrarekin adieraziko dira.

8.2. Definizioa

- ”$\preccurlyeq$” erlazio bitar batez hornituriko A multzo ez huts bati, multzo ordenatu deritzo. Gainera, $x \preccurlyeq y$ edo $y \preccurlyeq x$ egiaztatzen bada, x eta y A-ren edozein elementurentzat, orduan A multzo guztiz ordenatua dela esango dugu.

Elementu nabarmenak I

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" erlazio bitar baten bidez eta kontsidera dezagun A-ren H azpimultzo ez huts bat.

8.3. Definizioa

- m∈H elementu bat H-ren minimo bat izango da, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad m \preccurlyeq x$$

8.4. Proposizioa

- H-ren minimo bat existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren minimoaren kontzeptua izango dugu.

Elementu nabarmenak II

8.5. Definizioa

- $i \in A$ elementu bat H-ren behe-borne bat (edo minorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad i \preccurlyeq x$$

- Kontuan izan:
  1. $i \in A$ H-ren behe-borne bat bada eta $i' \in A$ elementuak $i' \preccurlyeq i$ baldintza egiaztatzen badu, orduan i' ere H-ren behe-borne bat izango da.
  2. H-k $m \in H$ minimo bat badu, orduan m H-ren behe-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{i} \in H$ behe-borne bat badu, orduan $\hat{i}$ H-ren minimoa da.

Elementu nabarmenak III

8.6. Definizioa

- $M \in H$ elementu bat H-ren maximoa dela diogu, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq M$$

8.7. Proposizioa

- H-ren maximoa existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren maximoaren kontzeptua izango dugu.

Elementu nabarmenak IV

8.8. Definizioa

- $s \in A$ elementu bat H-ren goi-borne bat (edo maiorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq s$$

- Kontuan izan:
  1. $s \in A$ H-ren goi-borne bat bada eta $s' \in A$ elementuak $s \preccurlyeq s'$ baldintza egiaztatzen badu, orduan s' ere H-ren goi-borne bat izango da.
  2. H-k $M \in H$ maximo bat badu, orduan M H-ren goi-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{s} \in H$ goi-borne bat badu, orduan $\hat{s}$ H-ren maximoa da.

Elementu nabarmenak V

8.9. Definizioa

- H-ren behe-borne guztien multzoak maximoa badu, orduan maximo horri H-ren infimo deritzo, eta inf(H) denotatuko da.

8.10. Proposizioa

- H-k minimo bat badu, orduan inf(H)=m egiaztatuko da.

8.11. Definizioa

- H-ren goi-borne guztien multzoak minimo bat badu, orduan minimo horri H-ren supremo deritzo, eta sup(H) denotatuko da.

8.12. Proposizioa

- H-k M maximo bat badu, orduan sup(H)=M egiaztatuko da.

Multzo bornatuak

8.13. Definizioa

- H behe-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez behe-borne bat badu.

8.14. Definizioa

- H goi-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez goi-borne bat badu.

8.15. Definizioa

- H bornatua dela diogu, baldin eta goi-bornatua eta behe-bornatua bada.

Aurkibidea

Saretxoak eta multzo ondo ordenatuak

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" ordena-erlazioaren arabera.

9.1. Definizioa

- A saretxo bat dela diogu baldin eta $x,y \in A$ edozein elementurako $H=\{x,y\}$ multzoak infimoa eta supremoa dituela egiaztatzen bada.

9.2. Definizioa

- A multzoa ondo ordenatua dela diogu baldin eta A-ren H edozein azpimultzo ez-hutsak minimoa badu.

Aurkibidea

Indukzio-printzipioa

Izan bedi $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten multzoa $\preccurlyeq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioarekin. $\mathbb{N}$ multzo ondo ordenatua da esandako ordena-erlazioarekiko eta indukzio-printzipio deritzon honako emaitza hau egiaztatzen da:

10.1. Proposizioa

- Izan bedi $P(n)$ n zenbaki arruntei dagozkien propietate bat, orduan honako emaitza hau egiaztatzen bada:
  1. n_0 zenbaki arrunt bat existituko da, non $P(n_0)$ egia den.
  2. $k \geq n_0$ edozein zenbaki arrunterako, $P(k)$ egia bada $P(k+1)$ ere egia izango da.
- $P(n)$ propietatea egia da n edozein zenbaki arrunterako.

Aurkibidea

Proposatutako ariketak I

1. Ariketa

- 140 ikasletik, 120-k gutxienez matematika (M), fisika (F) edo kimika (K) ikasten dute. Gainera, 80 ikaslek matematika ikasten dute, 75-ek fisika, 50-ek kimika, 40-k matematika eta fisika, 35-ek matematika eta kimika eta 20-k fisika eta kimika.

  Honakoa hau kontuan izanik:
  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

  Aurkitu:
  1. Hiru irakasgaiak batera ikasten dituzten ikasle-kopurua.
  2. Matematika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Fisika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Kimika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua.
  3. Matematika eta fisika baina ez kimika ikasten duten ikasle-kopurua.
  4. Matematika eta kimika baina ez fisika ikasten duten ikasle-kopurua.
  5. Fisika eta kimika baina ez matematika ikasten duten ikasle-kopurua.

Proposatutako ariketak II

2. Ariketa

1. Aurkitu A eta B bi multzo finitu honako hau jakinik:
   $A\text{-}B=\{1,2,3,4\}$; $B\text{-}A=\{5,6,7\}$; $A\cap B=\{8,9\}$
2. Aurkitu C eta D bi multzo finitu honako hau jakinik:
   $C\text{-}D=\{1,2,4\}$; $D\text{-}C=\{7,8\}$; $C\cup D=\{1,2,4,5,7,8,9\}$

Proposatutako ariketak III

3. Ariketa

- Izan bedi $E=\{1,2,3,4,\ldots,10\}$ multzoa eta kontsidera ditzagun honako E-ren azpimultzo hauek:

  $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,4,8\}$, $C=\{1,2,3,5,7\}$, $D=\{2,3,5,8\}$

  Aurkitu:

  1. $(A\cup B)\cap C$
  2. $(C\cap D)'$
  3. $(A\cup B)-C$
  4. $(A\cup B)-(C\cap D)$
  5. $C'\cup D'$

Proposatutako ariketak IV

4. Ariketa

- 25 liburu erabiliz irakasle batek hiru gai aztertu nahi ditu: A (konpilagailuak), B (datu-egiturak) eta C (itzultzaileak). Gai horiei buruzko liburu-kopurua honako datu hauekin bat datorrela jakinik:

  $n(A)=9$, $n(B)=13$, $n(C)=12$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=3$, $n(B\cap C)=6$ eta $n(A\cap B\cap C)=2$

  Aurkitu:

  1. Gutxienez gai bati buruzko liburu-kopurua.
  2. Zenbatek ez dute horrelako gai bat ere aztertzen?
  3. Soilik itzultzaileei buruz diren liburu-kopurua.
  4. Soilik konpilagailuei buruz diren liburu-kopurua.

Proposatutako ariketak V

5. Ariketa

- Kontsidera ditzagun $\mathbb{Z}$-ren honako azpimultzo hauek:

  $A=\{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  $B = \{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $C = \{2x-1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $D = \{2x+3 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  Aztertu honako emaitzen egiatasuna::

  1. $A\subset B$ eta $A\subset D$
  2. $A=B$ eta $B=C$
  3. $1\in A$, $-3\in C$, $-4\in B$, $6\notin D$
  4. $A\cup D=A$ eta $A\cap D=D$

Proposatutako ariketak VI

6. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. $(A \cap B) \cup (A \cap B')=A$
  2. $A \cup B=(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$
  3. $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap D'))]=B \cap (A \cup C)$

7. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. $A-(A \cap B)=A-B$
  2. $(A-B)-C=A-(B \cup C)$

Proposatutako ariketak VII

8. Ariketa

- $A=[0,5]$ eta $B=[2,8)\in\mathbb{R}$ badira, aurkitu:
  1. $A\cap B$
  2. $A\cup B$
  3. A' eta B'
  4. $A-B$ eta $B-A$

Proposatutako ariketak VIII

9. Ariketa

- Kontsidera ditzagun honako korrespondentzia hauek:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non $f(x)=x^2$ den.

g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non $g(x)=x+3$ den.

h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non $h(x)=\ln x$ den.

k: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non $k(x)=\sin x$ den.

p: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non $p(x)=\frac{x+1}{x-1}$ den.

1. Aurkitu bakoitzaren izate-eremua.
2. Aurkitu bakoitzaren irudi-multzoa.
3. Zeintzuk dira aplikazioak?
4. Sailkatu aplikazioak direnak.
5. Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$.
6. Aurkitu g^{-1}

Proposatutako ariketak IX

9. Ariketa

- Kontsidera ditzagun honako korrespondentzia hauek:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x)=x^2+1$ den.

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $g(x)=\frac{x-1}{2}$ den.

h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $h(x)=\frac{x}{x+1}$ den.

1. Aurkitu bakoitzaren izate-eremua.
2. Aurkitu bakoitzaren irudi-multzoa.
3. Zeintzuk dira aplikazioak?
4. Sailkatu aplikazioak direnak.
5. Aurkitu $f \circ g$ eta $g \circ f$.
6. Aurkitu g^{-1}

Proposatutako ariketak X

11. Ariketa

- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi aplikazio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 2 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 3x & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

1. Sailkatu f eta g.
2. Aurkitu f∘g eta g∘f.
3. Aurkitu g^{-1}

Proposatutako ariketak XI

12. Ariketa

- Izan bitez f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi aplikazio:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 2x-1 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & x \geq 0 \quad \text{bada} \\ 1 & x < 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

1. Sailkatu f eta g.
2. Aurkitu f∘g eta g∘f.
3. Aurkitu f^{-1} eta g^{-1}

Proposatutako ariketak XII

13. Ariketa

- Faktorizatu 100, 641, 999 eta 1024 zenbakiak zenbaki lehenen biderkadura gisa.

14. Ariketa

- Froga ezazue 101 zenbaki lehena dela.

15. Ariketa

- Zehaztu 10, 19 eta 24 zenbakiak elkar lehenak diren ala ez.

16. Ariketa

- Aurkitu zkh(120,500).

Proposatutako ariketak XIII

17. Ariketa

- Euclides-en algoritmoa erabiliz, kalkulatu zkh(3258,1164).

18. Ariketa

- Kalkulatu 200 baino txikiagoak diren zenbaki lehenak *Eratostenes-en bahea* deritzon metodoarekin:
  1. Idatzik zenbaki guztiak 1-tik 200-era.
  2. Ezabatu zenbaki bikoitiak, 2a izan ezik.
  3. Ezabatu 3-ren multiploak, 3a izan ezik.
  4. Eta horrela jarraitu.

19. Ariketa

- Kalkulatu zkh(1000,625) eta mkt(1000,625) eta konprobatu honako berdintza hau: $\text{zkh}(1000,625) \cdot \text{mkt}(1000,625) = 1000 \cdot 625$

Proposatutako ariketak XIV

20. Ariketa

- Balioztatu honako adierazpenak:
  1. 144 mod 7
  2. -28 mod 3
  3. 155 mod 19
  4. -221 mod 23

21. Ariketa

- Idatzi 0,1,2,3,4 zenbakiekin kongruenteak modulu 5 diren zenbakien segidak.

22. Ariketa

- Egia al da $80 \equiv 5 \pmod{17}$ afirmazioa?

MATEMATIKA DISKRETUA

2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

ERIK ALONSO GONZÁLEZ

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)