INTEGRAL BIKOITZA

1. Ebatzi hurrengo integral bikoitzak:

a) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ E: $\frac{\pi}{6}$

b) $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}$ E: $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$

c) $\int_1^3 dx \int_{x^3}^{x} (x-y)\,dy$ E: $\frac{11768}{105}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho$ E: $\frac{a^2(\pi+4)}{4}$

---

2. Hurrengo $[D]$ eremuetarako, jarri $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralaren integrazio limiteak bi ordena posibleetan:

a) A(-1,0), B(1,0), C(2,1), D(0,2) eta E(-2,1) erpinezko poligonoa da.

E:
$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-(x+1)}^{\frac{x+4}{2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\frac{x+4}{2}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\frac{4-x}{2}} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x-1}^{\frac{4-x}{2}} f(x,y)\,dy$$
$$I = \int_0^1 dy \int_{-(y+1)}^{y+1} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2(y-2)}^{2(2-y)} f(x,y)\,dx$$

b) $[D]$-ko puntuek $y \le x \le y+2a, \quad 0 \le y \le a$ desberdintzak betetzen dituzte.

E:
$$I = \int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x,y)\,dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{xa} f(x,y)\,dy$$
$$I = \int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x,y)\,dx$$

c) $[D]$ eremua $y=0;\ \ y=1;\ \ x = y^{\frac{3}{2}};\ \ x = 2-\sqrt{2y-y^2}$ kurbek mugatuta dago.

E:
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{-x^2+4x-3}} f(x,y)\,dy$$
$$I \equiv \int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dy$$

---

3. Kalkulatu hurrengo integral bikoitzak adierazitako $[D]$ eremuen gainean:

(a) $\iint_D [\cos(2x)+\sin y]\,dx\,dy$

$[D] \equiv x=0,\ y=0,\ 4x+4y-\pi=0$ zuzenek mugatutako eremua. E: $\dfrac{\pi+1-2\sqrt{2}}{4}$

b) $\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$ E: $\dfrac{112}{9}$

$[D] \equiv A(1,1),\ B(5,1),\ C(10,2),\ D(2,2)$ erpinezko trapezioa.

c) $\iint_D \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$ E: $\dfrac{4a^3}{3}$

$[D] \equiv y^2-x^2=a^2;\ x=0\,;\ x=a\,;\ y=0\ \ (y \ge 0)$ kurbek mugatutako eremua

---

4. Alderantzikatu integrazio ordena hurrengo integraletan:

a) $I=\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$ E: $I=\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$

b) $I=\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$ E: $I=\int_{1}^{2} dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

b) $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$ E: $I=\int_{0}^{1} dx \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

---

5. Ordezkapen egokiak erabiliz, kalkulatu hurrengo integralak adierazitako eremuen gainean.

a) $I=\iint_D \dfrac{y\,dx\,dy}{x+y}$

$[D]$ $x=0;\ y=0,\ x+y=a,\ x+y=1\ \ (0<a<1)$ zuzenek mugatzen dute.

E: $x+y=u;\quad y=uv$ egiten da $\quad\rightarrow\quad I=\int_a^1 u\,du\int_0^2 v\,dv=\dfrac{1-a^2}{4}$

b) $I=\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$

$[D]$ $x+y=1,\ x+y=3,\ x-y=1,\ x-y=-1$ zuzenek mugatzen dute.

E: $x+y=u;\quad x-y=v$ egiten da, $\quad I=\dfrac{20}{3}$

c) $I = \iint_D xy\,dx\,dy$

$[D]$ hurrengo parabolek mugatzen dute lehenengo koadrantean:

$$y = ax^3; \quad y = bx^3; \quad y^2 = px; \quad y^2 = qx, \quad [0 < a < b, \quad 0 < p < q]$$

E: $yx^{-3} = u; \quad y^2x^{-1} = v$ egiten da, $\quad I = \frac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}}\right)$

---

d) $I = \iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2}$

$[\mathrm{D}] \equiv x^2 = ay;\ x^2 + y^2 = 2a^2;\ y = 0 \quad [x > 0, a > 0]$

E: $x = \rho\cos\theta;\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta. \quad I = \frac{a(2 - \ln 2)}{2}$

---

6. Erabili aldagai aldaketa egokiak hurrengo kurbek mugatzen dituzten domeinuen azalerak kalkulatzeko:

a) $x^2 - 3y = 0; \quad x^2 - 4y = 0; \quad x - y^2 = 0; \quad 2x - y^2 = 0 \quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$

E: $u = \frac{y^2}{x}; \quad v = \frac{x^2}{y} \quad A = \frac{1}{3}$

---

b) $xy = 4;\ xy = 8;\ xy^3 = 5;\ xy^3 = 15 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$ E: $xy = u, xy^3 = v \quad A = 2\ln 3$

---

c) $xy = 1; \quad xy = 2, \quad y = x; \quad y = 3x$ E: $A = \frac{\ln 3}{2}$

---

7. Ebaluatu adierazitako kurbek mugatzen dituzten eremu lauen azalerak:

a) $x + y - 2 = 0; \quad y^2 - 4x - 4 = 0$ E: $\frac{64}{3}$

---

b) $3y^2 - 25x = 0; \quad 5x^2 - 9y = 0$ E: 5

---

c) $y = x(4 - x); \quad y = x(2x - 5)$ E: $\frac{27}{2}$

---

d) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}; \quad x = 2y; \quad x = 0\ (a > 0)$ E: $\mathrm{a}^2(\pi - 1)$

---

e) $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0; \quad y^2 - ax = 0; \quad y = 0$, lehenengo koadrantea E: $\mathrm{A} = \frac{(3\pi + 2)\mathrm{a}^2}{12}$

---

8. r erradioko erdizirkulu bati triangelu isoszele bat lotzen zaio, halako moldez non triangeluaren alde desberdina erdizirkuluaren diametroarekin bat baitator. Determinatu triangeluaren h altuera, halako moldez non figuraren grabitate zentroa erdizirkuluaren diametroaren erdiko puntuan baitago. E: $\mathrm{h} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{r}$

9. Aplikatu kalkulu integrala, hurrengo eremu lauen grabitate zentro geometrikoaren koordenatuak lortzeko:

(a) $[D]$ lehenengo koadrantean a eta $2a$ diametroko bi zirkunferentziak mugatzen dute. Zirkunferentziok jatorrian (OX) ardatzaren ukitzaileak dira, $x = 0$.

E: $grabitate\ zentroa \equiv \left(\frac{14a}{9\pi}; \frac{7a}{6} \right)$

---

b) $[D]$ eremua $xy = a^2;\ y^2 = 8ax;\ x = 2a;\ y = 0\quad [a > 0, x \geq 0, y \geq 0]$ kurbek mugatzen dute.

E: $grabitate\ zentroa \equiv \left(\frac{51a}{20(1+3\ln 2)}; \frac{15a}{8(1+3\ln 2)} \right)$

---

c) $[D] \equiv\ x^2 - y = 0;\quad 2x^2 - y = 0;\quad x - 1 = 0;\quad x - 2 = 0$ E: $grabitate\ zentroa \equiv \left(\frac{45}{28}; \frac{279}{70} \right)$

---

d) $[D]\ \rho = \cos\theta,\quad \rho = \sin\theta$ zirkuluen eremu komuna da. E: $grabitate\ zentroa \equiv \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right)$

---

10. Alderantzikatu honako integral hauen integrazio ordena:

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_2^6 dx \int_0^{2+\sqrt{4-(x-4)^2}} f(x,y)\,dy + \int_6^8 dx \int_0^{\sqrt{4-(x-6)^2}} f(x,y)\,dy$$

E: $\int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{6+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{4-\sqrt{4y-y^2}}^{4+\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx$

---

11. Alderantzikatu I-ren integrazio ordena:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy$$

E: $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$

---

12. Izan bedi $[D]$ honako erpin hauek dauzkan laukizuzena:

$A(1,2);\ B(2,1);\ C(2,4);\ D(4,2)$

Egin aldaketa egokiak $\iint_D \frac{x+y}{x^2}\,dx\,dy$ integrala ebaluatzeko.

E: $\frac{9}{2}$

---

13. Kalkulatu $I = \iint_D xy\,dx\,dy$ integralaren balioa, $[D]$ eremua honako kurba hauek lehenengo koadrantean mugatutako esparrua izanik: $x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 9;\ x^2 - y^2 = 1;\ x^2 - y^2 = 4.$

E: $\frac{15}{8}$

---

14. Kalkulatu XY planoan honako desberdintza hauek mugatzen duten eremuaren azalera:

$x+y \geq 6;\;\; x+y \leq 18;\;\; x-y \geq -6;\;\; x-y \leq 6.$

E: 72

---

15. Honako kurba hauek mugatzen duten $[D]$ eremu laua kontsideratzen da:

$x^2+4y^2-4=0;\;\; x^2+4y^2-16=0;\;\; y \geq 0.$

E: $x_c=0; \quad y_c=\dfrac{28}{9\pi}$

---

16. Integral bikoitzaren integrazio ordena alderantzikatu:

$$I=\int_1^2 dx \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{x} f(x,y)\,dy+\int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy$$

Kalkulatu integrazio eremuaren grabitate zentroaren ordenatua.

E:
$$I=\int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$$
$$y_c=\frac{14}{3(\pi+2)}$$

---

17. Kalkulatu lehenengo koadrantean $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ elipseak eta bere sokak $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$, mugatzen duten irudiaren grabitate zentro geometrikoaren ordenatua.

E: $y_c=\dfrac{2}{\pi-2}$
