INTEGRAL HIRUKOITZA

1. Izan bedi hurrengo [D] domeinua:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge z\geq 0 \wedge x+y+z\leq 1)\right\}$$

Kalkulatu $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ integral hirukoitzaren balioa E: $\dfrac{1}{24}$

---

2. Izan bedi XY planoari eta $z=x^2+y^2$ eta $1-x^2-y^2=0$ gainazalen ekuazio kartesiarrei dagokien [D] domeinu komuna:

a) Kalkulatu [D] E: $\dfrac{\pi}{2}$

b) Kalkulatu $\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ integral hirukoitzaren balioa E: $\dfrac{\pi}{6}$

---

3. Integral hirukoitzaren kontzeptua erabiliz, kalkulatu $x^2+y^2+z^2=1$ eta $z^2=x^2+y^2$ ($z\geq 0$ izanik) gainazalen ekuazio kartesiarrei dagokien eskualde komunaren bolumena.

E: $\dfrac{2\pi}{3}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

---

4. Kalkulatu hurrengo [D] domeinuaren bolumena:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2\leq (z-3)^2 \wedge x^2+y^2\leq 4z \wedge z\leq 3)\right\}$$

E: $\dfrac{14\pi}{3}$

---

5. Integral hirukoitza erabiliz, kalkulatu $4x^2+y^2=4,\quad 4x^2+z^2=4$ zilindroek mugatzen duten [V] domeinuaren bolumena.

E: $\dfrac{64}{3}$

---

6. Aldagai aldaketa egokia erabiliz, kalkulatu hurrengo zilindro parabolikoek mugatzen duten [C] gorputzaren bolumena:

$$y-z^2=0;\quad 2y-z^2=0;\quad z-x^2=0;\quad 2z-x^2=0;\quad x-y^2=0;\quad 2x-y^2=0$$

E: $\dfrac{1}{7}$

---

7. Determinatu lehen oktantean dagoen dentsitate konstanteko gorputz baten masa zentroa, baldin gorputza hurrengo gainazalek mugatzen badute

$$x^2+y^2=z,\quad x^2+y^2=2z,\quad xy=1,\quad xy=4,\quad y=x,\quad y=3x.$$

E: $x_m = \dfrac{62(13\sqrt{13}-9)}{675}, \quad y_m = \dfrac{62(\sqrt{3}+1)}{75}, \quad z_m = \dfrac{7(90+9\ln 3)}{40}$

---

8. Kalkulatu honako gainazal hauek mugatzen duten [C] gorputz homogeneoaren bolumena:

$$x^2 + z - 2 = 0, \quad y + z = 5, \quad y = 0, \quad z = 0$$

E: $\dfrac{56\sqrt{2}}{5}$

---

9. [C] gorputz homogeneoa honako gainazal hauek mugatzen dute:

$$x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \;\; (z \geq 0), \quad h^2\left(x^2 + y^2\right) - 4\left(z + h\right)^2 = 0 \;\; (z \geq -h)$$

Kalkulatu h parametro positiboa, [C]–ren grabitate zentro geometrikoa jatorrian kokatuta egon dadin.

E: $h = 4\sqrt{2}$

---

10. [C] gorputz homogeneo bat oktante positiboan honako gainazal hauek mugatzen dute:

$$x + y + z - 8 = 0, \quad x + 4y - 8 = 0, \quad x + 2y - 8 = 0$$

Kalkulatu [C]-ren grabitate zentro geometrikoaren z_c koordenatua.

E: $z_c = \dfrac{19}{10}$

---

11. Izan bedi honako gainazal hauek mugatzen duten [V] gorputz homogeneoa:

$$x^2 + y^2 + = 9, \quad x + z - 6 = 0, \quad x + 3z - 6 = 0$$

Marraztu [V]-ren grafiko hurbildua eta frogatu bere bolumena V=36π dela eta bere grabitate zentro geometrikoa (-3/8, 0, 17/4) posizioan dagoela.

---

12. [C] gorputz homogeneoa honako gainazalek mugatzen dute:

$$z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \;\; (z \leq 4), \quad x^2 + y^2 - 2z = 0$$

Frogatu bere masa zentroa (0, 0, 9/5) puntuan kokatuta dagoela.

---

13. Kalkulatu lehenengo oktantean $6x + 3y + 2z = 6$ planoak mugatzen duen tetraedroaren grabitate zentroa:

E: $x_c = \dfrac{1}{4}, \quad y_c = \dfrac{1}{2}, \quad z_c = \dfrac{3}{4}$
