INTEGRAL MUGATUA

1. Sarrera
2. Riemannen integralaren kontzeptua
   - Interpretazio geometrikoa
3. Integragarritasunaren baldintza
4. Integral mugatuaren propietateak
   - Batez besteko balioaren teorema
5. Integral mugatuaren kalkulua
   - Barrowen erregela
6. Aldagai aldaketa
7. Zatikako integral mugatuak

INTEGRAL MUGATUA

8. Integral mugatuaren kontzeptuaren orokortzea
    - Integral inpropioak
9. Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak
    - Barruti baten azaleraren kalkulua
    - Gorputz baten bolumena, azalera paralelo funtzioa
    - Biraketa gorputz baten bolumena
    - Kurba arku baten luzera
    - Biraketa gorputz baten azalera
10. Integral mugatuen kalkulu hurbildua
    - Trapezioen metodoa
    - Simpson-en metodoa

Sarrera

Kontzeptua: Integral mugatua mota geometriko eta fisikoko problema ugari ebazteko oinarrizko tresna matematikoa da (azalera lauen eta bolumenen neurketa, indarrek garatutako lanak, etab.).

Riemannen integralaren kontzeptua

Izan bedi $f(x)$, $[a,b]$ tartean definitutako funtzio bat, non $f(x)>0$, $\forall x \in [a,b]$. $[a,b]$ tartearen partiketa bat $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, zenbakien segida finitu eta ordenatua da, non $x_i < x_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, $x_0=a$ eta $x_n=b$.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad ; \quad \sum_{1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

Riemannen integralaren kontzeptua

Aukera dezagun tarte partzial bakoitzean $P_i : x_i \leq P_i \leq x_{i+1}$ puntu arbitrario bat; $f(x)$-ren **batura integrala** $[a,b]$-n partiketa horren arabera honela definitzen da:

$$S_n = f(P_1)\Delta x_1 + f(P_2)\Delta x_2 + \ldots f(P_i)\Delta x_i + \ldots + f(P_n)\Delta x_n = \sum_{1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$$

hau da, funtzioak P_i bitarteko puntuetan hartzen dituen balioen eta dagozkien azpitarteen luzeren arteko biderkaduren batura kalkulatzen dugu.

Riemannen integralaren kontzeptua

P partiketaren **norma edo diametroa** partiketa horren tarterik handienaren zabalerari deritzo:

$$\|P\| = \operatorname*{Max}_{0\le i\le n} \left\{ \left| x_i - x_{i-1} \right| \right\}$$

$f\,(x)$ $[a,b]$ tartean **integragarria** dela esaten da, baldin eta batura integralaren limitea existitzen bada, partiketaren norma zerorantz doanean; limitea egindako partiketaren eta bitarteko puntuen aukeraketaren independentea da.

Limite honi $f\,(x)$ -ren **integral mugatua [a,b] gainean Riemannen zentzuan** deritzo. Hurrengo notazioa erabiltzen da:

$$\boxed{\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{1}^{n} f\,(P_i)\Delta x_i \equiv \int_a^b f\,(x)\,dx}$$

Riemannen integralaren kontzeptua

Interpretazio geometrikoa: Izan bitez, m_i eta M_i , $f(x)$ funtzioaren baliorik baxuena eta baliorik altuena $[x_i, x_{i+1}]$ tartean; m eta M $[a,b]$ tarteari dagozkionak. Hurrengo kotak agerikoak dira:

$$m \le m_i \le f(P_i) \le M_i \le M \;\rightarrow\; m\Delta x_i \le m_i\Delta x_i \le f(P_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i \le M\Delta x_i \;\Rightarrow$$

$$m(b-a) \le \sum_1^n m_i\Delta x_i \le \sum_1^n f(P_i)\Delta x_i \le \sum_1^n M_i\Delta x_i \le M(b-a)$$

Normalean hurrengo notazioa erabiliko dugu:

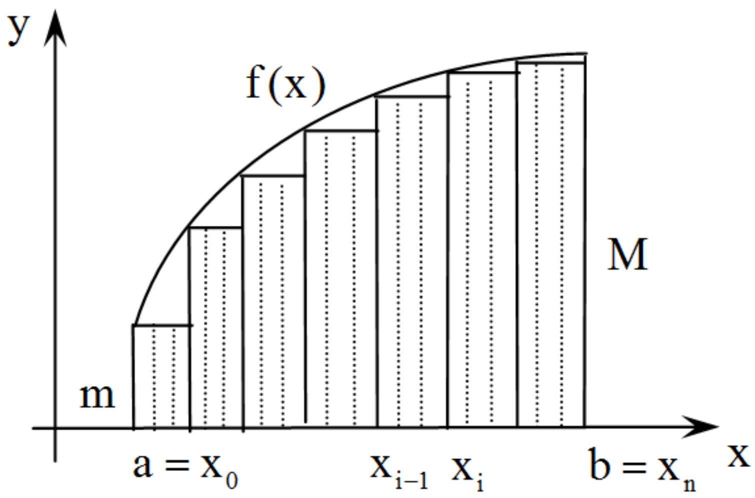
Behe-batura: $\underline{s}_n = \sum_1^n m_i\Delta x_i$

Batura integrala: $\mathrm{S_n} = \sum_1^n \mathrm{f(P_i)\Delta x_i}$

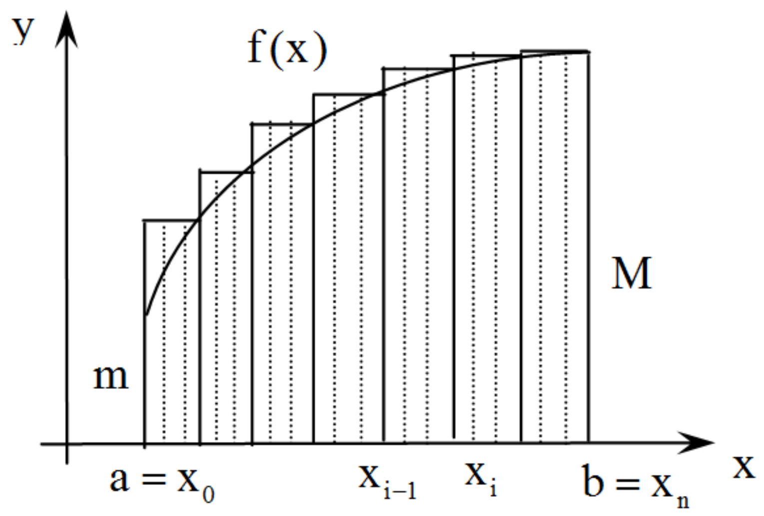
Goi-batura: $\overline{S}_n = \sum_1^n M_i\Delta x_i$

Riemannen integralaren kontzeptua

Interpretazio geometrikoa:



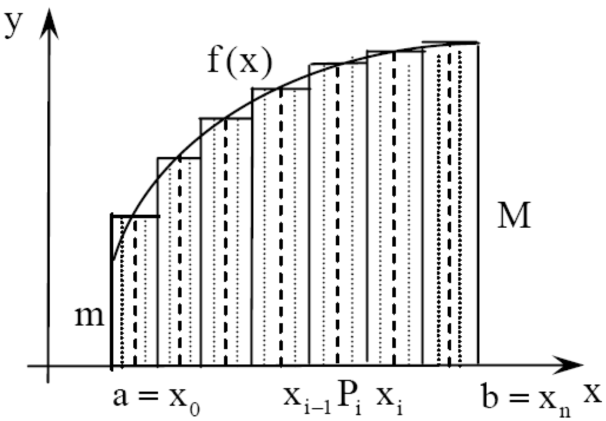
(1) irudia. Behe-batura



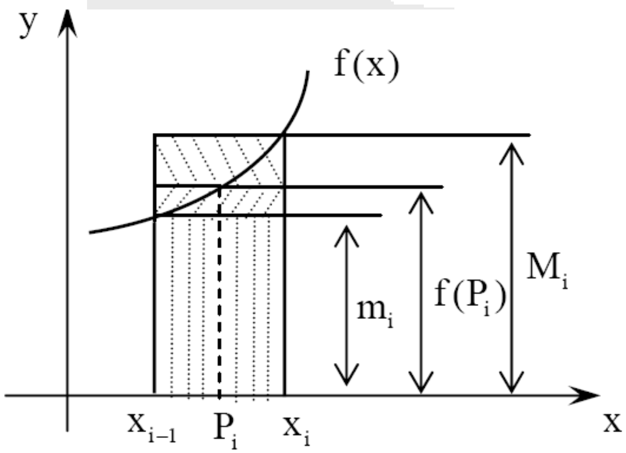
(2) irudia. Goi-batura

Riemannen integralaren kontzeptua

Interpretazio geometrikoa:



(3) irudia. Batura integrala



(4) irudia. Batura partzialen xehetasunak

[x_{i-1}, x_i] tarte generikoan, m_i eta M_i altuerako errektangeluen s_i eta S_i azalerak hauexek dira:

$$s_i = m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \equiv m_i \Delta x_i; \quad S_i = M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \equiv M_i \Delta x_i$$

$f\,(x)$ eta OX ardatzaren arteko A_1 azalera, [x_i, x_{i-1}]-n, s_i eta S_i artean bornatuta dago:

$$s_i \leq A_i \leq S_i$$

Riemannen integralaren kontzeptua

Interpretazio geometrikoa:

P partiketaren tarte guztiak batuz:

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}S_i=S$$

Batura integrala $f(x)$ eta OX ardatzaren arteko azaleraren estimaziotzat har daiteke, $x=a$ eta $x=b$ artean.

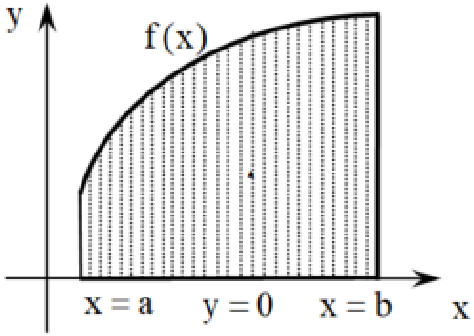
$$\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta x_i\approx\sum_{i=1}^{n}A_i=A$$

Riemannen integralaren kontzeptua

Interpretazio geometrikoa:

Zenbat eta finagoa izan P partiketa, orduan eta hurbilago egongo dira s eta S, A-ren baliotik. Normak zerorantz jotzen duenean, inskribatutako eta zirkunskribatutako lerro poligonalek $f(x)$-ren grafoaren gero eta itxura handiagoa daukate eta, limitean, s eta S A-rantz hurbiltzen dira. Ideia intuitibo honetan oinarrituz, $f(x)$ eta OX ardatzaren arteko azalera definitzen da, $x = a$ eta $x = b$ abzisen artean, $f(x)$ altuera daukaten eta beren oinarrien zabalera zerorantz doazen infinitu errektangeluen batura bezala. Horrela, bada,

$$A = \lim_{\|p\|\to 0} s = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i = \lim_{\|p\|\to 0} S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Integragarritasunaren baldintza

Funtzio bat integragarria izan dadin, batura integralaren limitearen existentzia beharrezkoa da, partiketaren norma zerorantz doanean, egindako partiketaren eta aukeratutako bitarteko puntuen independentziarekin.

Hurrengo teoremak ematen ditu baldintzak hau honela izan dadin.

Integragarritasunaren baldintza

<u>*Teorema*</u>

$f(x)$ $[a,b]$ tartean integragarria izan dadin, baldintza beharrezko eta nahikoa hauxe da: goi- eta behe- baturek limite berdina izan dezatela, partiketaren norma zerorantz doanean. Limite komun hori bat dator integral mugatuaren zenbakizko balioarekin.

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{1}^{n} M_i \Delta x_i = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{1}^{n} f(P_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,dx = L$$

Hurrengo funtzio motak integragarriak direla frogatzen da:

a) Funtzio jarraituak $[a,b]$ tartean.

b) Gehienez etenune kopuru finitua daukaten funtzio bornatuak $[a,b]$ tartean (funtzio ia-jarraituak).

Integral mugatuaren propietateak

Limiteen propietateetan oinarritzen dira. Baldin $f(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua bada, hurrengo propietateak azpimarratu behar dira:

1. Integral mugatua operatzaile lineala da: $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2. Integrazio aldagaia “mutua” da: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots = \int_a^b f(z)dz$

3. Integrazio limiteen permutazioa: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. Integrazio limite berdinak: $\int_a^a f(x)dx = 0$

5. Integrazio tartearen partiketa:

$$\text{baldin } c \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Integral mugatuaren propietateak

6. Integralaren bornapena:

6.1 $\text{baldin } \forall x \in [a,b] - \text{rako } 0 \le f(x) \le g(x): \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

$$\text{Kasu partikularrak} \begin{cases} \text{baldin } f(x) \le 0 \ \forall x \in [a,b] \text{ orduan}: & \int_a^b f(x)\,dx \le 0 \\ \text{baldin } f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b] \text{ orduan}: & \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \end{cases}$$

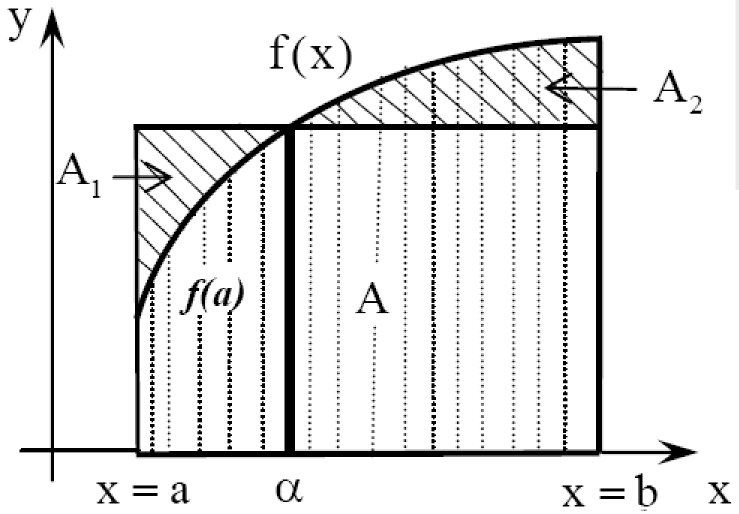
6.2 $\text{baldin } \forall x \in [a,b] \ \ 0 \le f(x), \text{ eta } c \in [a,b]: \int_a^c f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$

6.3 $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Integral mugatuaren propietateak

Batez besteko balioaren teorema: Baldin $f(x)$ $[a,b]$ tartean funtzio jarraitua bada, orduan gutxienez $\alpha \in [a,b]$ puntu bat existitzen da, halakoa non:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\alpha)\,.$$



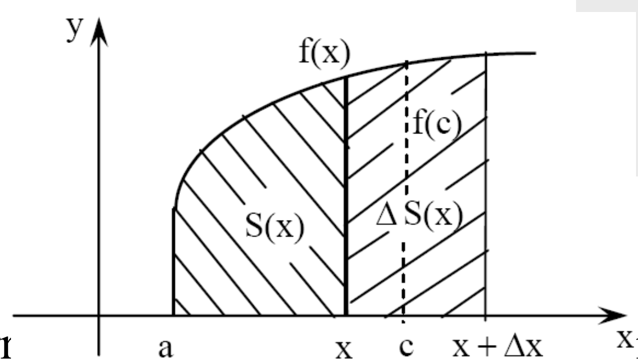
" f (x)-ren funtzioaren azpian eta a eta b artean dagoen azalera, (b−a) oinarriko eta f(α) altuerako laukizuzen baten azaleraren berdina da."

Integral mugatuaren kalkulua

Izan bedi $y= f(x)$ funtzio jarraitu bat $[a,b] \subset R$ tarte batean. Izan bedi $x \in [a,b]$ eta izan bedi $S(x)$, $f(x)$-ren azpiko azalera a eta x-ren artean.

Interpretazio geometrikoaren arabera, $f(x)$-ren integrala $[a,b]$ tartean, non $a \leq x \leq b$:

$$I = \int_a^b f(x)dx = S(x)$$



Kalkuluaren bigarr… n arabera, “deribatu” eta “integral mugatu” operatzaileen artean erlazio estua dago; teorema horrek integralaren kalkulurako metodoa ematen digu.

eman ta zabal zazu
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral mugatuaren kalkulua

$f(x)$ $[a,b]$-n jarraitua dela suposatuz, $f(x)$-ren $[a,x]$ bitarteko integralaren deribatua x goi-limitearekiko, integrakizun funtzioaren berdina da, integrazio aldagai mutua x limitearekin trukatuz.

$$\boxed{\text{Baldin}\quad S(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad \text{orduan}\quad S'(x)=f(x)}$$

Kalkuluaren oinarrizko teorema.

Teorema frogatzeko, aski da $\Delta S(x)$ kalkulatzea, batez besteko balioaren teorema erabiltzea gehikuntzazko zatidura finkatzeko eta limiteak hartzea Δx zerorantz doanean.

$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt \;\rightarrow\; S(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \;\rightarrow \Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)=$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta S(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Integral mugatuaren kalkulua

Integral honi batez besteko balioaren teorema aplikatzean,

$$\Delta S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = (x + \Delta x - x)\cdot f(\alpha) = \Delta x \cdot f(\alpha), \qquad x < \alpha < x + \Delta x$$

limiteak hartuz: $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(\alpha) \rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\alpha)$

Baldin $\Delta x \rightarrow 0$, orduan $\alpha \rightarrow x$, zeren eta $x < \alpha < x + \Delta x$.

Limiteen berdinketarako hauxe daukagu: $S'(x) = \lim\limits_{\alpha \to x} f(\alpha) = f(x)$

Hortaz , $\int_a^x f(t)\,dt$ $f(x)$-ren jatorrizko funtzioa da.

Suposa dezagun $F(x)$ $f(x)$-ren beste jatorrizko bat dela. Kalkuluaren lehenengo teorema dela eta, bi jatorrizkoak konstante batez desberdinak dira:

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = C \quad \rightarrow \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

C konstantea finkatzeko, $x = a$ jar dezakegu berdintza hartan:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \;\rightarrow\; C = -F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Integral mugatuaren kalkulua

t integrazio aldagaia *x*-rekin trukatzen badugu eta *x* goi-limite aldakorra *b* konstante batekin trukatzen badugu, formula erabilgarri bat lortzen dugu, **Barrowen erregelatzat** ezaguna, integralak [*a*,*b*] tarte bornatuen gainean ebaluatzea ahalbidetzen duena; horretarako, aski da $f(x)$ integrakizun funtzioaren $F(x)$ jatorrizko bat kalkulatzea eta goi- eta behe-limiteetarako hartzen dituen balioen diferentzia ematea:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \equiv F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

1. Adibidea

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^3+2}{x^4+8x+2}\,dx; \qquad I_2 = \int_1^0 \frac{6x^2+2}{\left(x^3+x-1\right)^3}\,dx$$

Integral mugatuaren kalkulua

1. adibidea

Kalkulatu honako integralak:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^3+2}{x^4+8x+2}\,dx; \qquad I_2 = \int_1^0 \frac{6x^2+2}{\left(x^3+x-1\right)^3}\,dx$$

Dagozkien jatorrizkoak:

$$F_1(x) = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+8x+2\right|; \qquad F_2(x) = -(x^3+x-1)^{-2}$$

Barrow-ren formula aplikatuz:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^3+2}{x^4+8x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+8x+2\right|\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\ln 34 - \ln 2\right) = \frac{\ln 17}{4}$$

$$I_2 = \int_1^0 \frac{6x^2+2}{\left(x^3+x-1\right)^3}\,dx = -\left(x^3+x-1\right)^{-2}\Big]_1^0 = -(-1)^{-2} + (1)^{-2} = 0$$

eman ta zabal zazu

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

Aldagai aldaketa

Askotan erabiltzen den teknika honen funtsezko helburua **hasierako integrala beste errazago batera murriztea** da.

Izan bedi $I = \int_a^b f(x)dx$ integral bat, non x t-rekin ordezkatu nahi den, $x = x(t)$ erlazioa erabiliz. Hurrengo teoremak ematen ditu ordezkapen formula eta hura baliodun den baldintzak:

Hurrengo baldintzak betetzen badira,

$$\begin{cases} (1) \quad a = x(c); b = x(d) \\ (2) \quad x(t); x'(t); \ f[x(t)] \text{ funtzio jarraituak dira } [a,b] \text{ tartean} \end{cases}$$

orduan hurrengo berdintza bete egiten da:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[x(t)] \cdot x'(t)\,dt}$$

Aldagai aldaketa

2. adibidea

Kalkulatu $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$

$$\sqrt{2-x}=t\rightarrow 2-x=t^2\xrightarrow{d} dx=-2tdt;\quad \begin{cases} x=0\rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=2\rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^0\left(2-t^2\right)^3 t(-2tdt)=2\int_0^{\sqrt{2}} t^2\left(2-t^2\right)^3 dt=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\left(8t^2-12t^4+6t^6-t^8\right)dt=2\left(\frac{8t^3}{3}-\frac{12t^5}{5}+\frac{6t^7}{7}-\frac{t^9}{9}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{2}}=\frac{512\sqrt{2}}{315}$$

Aldagai aldaketa

3. adibidea

$x^2+y^2=R^2$ zirkuluaren azalera kalkulatu

$$A=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\begin{bmatrix} x=R\sin t \\ dx=R\cos t\,dt \end{bmatrix}=4\int_0^{\arcsin 1} R\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=4R^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4R^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=2R^2\left[\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}=2R^2\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right]=\pi R^2$$

Zatikako integral mugatuak

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

adierazpenean limiteak hartuz, hauxe lortzen dugu:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

<u>4. Adibidea</u>

Kalkulatu *y*=ln *x* kurba, abszisa ardatza eta *x*=1 eta *x*=*e* zuzenen artean dagoen azalera

$$A = \int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} \ln x = u & \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{bmatrix} = x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Integral inpropioak

Riemannen zentzuan, integrala definitzean, bi hasierako hipotesi kontsideratu dira:

- [*a*, *b*] integrazio tartea bornatuta dago.
- *f*(*x*) integrakizun funtzioa [*a*, *b*] tartean bornatuta dago.

Bi hipotesiak betetzen ez direnean**, integral inpropioak** dauzkagu, hots, **integrazio tartea edota integrakizun funtzioa infinitu egiten direnean**.

Integral inpropioak

Tarte infinituak

Hurrengo kasuak kontsideratu behar dira:

$$(A.1)\quad \int_a^{\infty} f(x)dx; \quad (A.2)\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \quad (A.3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Mutur infinitu bakoitza *m* parametro batekin ordezkatzen bada eta integralaren limiteak *m* infiniturantz joatean kalkulatzen badira,

$$(A.1)\quad \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_a^{m} f(x)dx \qquad (A.2)\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{b} f(x)dx$$

$$(A.3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{m} f(x)dx$$

Hurrengo definizioak agertzen dira:

Integral inpropioak

Tarte infinituak

Limitearen balioa finitua denean, ***integral inpropioa konbergentea*** dela esaten da eta infinitua bada, ***dibergentea***.

Integrala kalkulatu baino lehen, haren konbergentzia kalkulatu behar da eta, haren kalkulua posiblea ez denean, ahalik eta bornapenik onena lortu. Horretarako hurrengo teoremak aplikatzen dira:

Integral inpropioak

Tarte infinituak

1. teorema

Baldin $x \geq a$ denean, $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ bada eta $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ integralak konbergitzen badu, orduan:

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ integralak konbergitzen du eta $\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x)dx$

2. teorema

Baldin $x \geq a$ denean, $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ bada eta $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ integralak dibergitzen badu, orduan:

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ integralak dibergitzen du

Integral inpropioak

Konparaketa funtzio estandarra tarte infinitu baterako

Erabiltzen den $\varphi(x)$ konparaketa funtzio estandarra $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^n}$ da.

- baldin $n \neq 1$: $$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^n}\,dx=\left.\frac{x^{-n+1}}{1-n}\right]_a^{\infty}=\begin{cases}\infty & si\ n<1\\ \dfrac{a^{-n+1}}{n-1} & si\ n>1\end{cases}$$

- baldin $n=1$: $$\int_a^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|\Big]_a^{\infty}=\infty$$

Hots, $\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{1}{x^n}\,dx$ integralak konbergitzen du n>1 bada, eta dibergitzen du n≤1 bada.

Integral inpropioak

Funtzio eten baten integrala

Baldin $f(x)$ $[a,c)$-n etena bada (baliokideki $(a,c]$-n) baina ez x=c puntuan (baliokideki x=a puntuan), han infinitu egiten delako, integrala honela definitzen da:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a^+}\int_b^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx$$

Integral inpropioak

Funtzio eten baten integrala

Limitea existitzen bada, integrala konbergentea dela esaten da; bestela, dibergentea da. Baldin *f(x)* *[a,c]* tartearen barrualdeko $x=c$ puntu batean etena bada, han infinitu egiten delako, orduan integrala honela definitzen da:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Aurreko kasuan bezala, integrala kalkulatu baino lehen, bere konbergentzia kalkulatzea interesatzen zaigu eta bere kalkulua egitea posible ez denean, ahalik eta bornapenik onena lortzea.

Integral inpropioak

Funtzio eten baten integrala

1. teorema

Baldin $f(x)$ eta $\varphi(x)$ x=c puntuan etenak badira, baina $\forall x \in [a,c)$ -rako $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$ bada eta $\int_a^c \varphi(x)dx$ integralak konbergitzen badu, orduan $\int_a^c f(x)dx$ integralak konbergitzen du.

Baldin $f(x)$ eta $\varphi(x)$ x=c puntuan etenak badira, baina $\forall x \in [a,c)$ -rako $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ bada eta $\int_a^c \varphi(x)dx$ integralak dibergitzen du, orduan $\int_a^c f(x)dx$ integralak dibergitzen du.

Integral inpropioak

Funtzio eten baten integrala

2. teorema

Baldin $\int_a^c |f(x)|dx$ integralak konbergitzen badu, orduan $\int_a^c f(x)dx$ integralak konbergitzen du.

Integral inpropioak

<u>Konparaketa funtzio estandarra funtzio eten batentzat</u>

Funtzioa *x*=*c* puntuan etena bada, erabiltzen den $\varphi(x)$ konparaketa funtzio estandarra $\varphi(x)=\dfrac{1}{(x-c)^n}$ da.

- baldin $n\neq 1$: $\displaystyle\int_a^c \frac{1}{(x-c)^n}dx=\left.\frac{(x-c)^{-n+1}}{1-n}\right]_a^c=\begin{cases}\infty & si\ n>1\\ \dfrac{(a-c)^{-n+1}}{n-1} & si\ n<1\end{cases}$

- baldin $n=1$: $\displaystyle\int_a^c \frac{1}{(x-c)}dx=\ln|x-c|\Big]_a^c=\infty$

Integral inpropioak

Konparaketa funtzio estandarra funtzio eten batentzat

Hots, $\int_a^c \frac{1}{(x-c)^n}\,dx$ konbergentea da baldin $n<1$, eta dibergentea baldin $n \geq 1$.

Oharra: Baldin eten puntua *a* bada, kontsidera bedi:

$$\int_a^c \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\int_c^a \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$$

eta aplika bitez aurreko emaitzak.

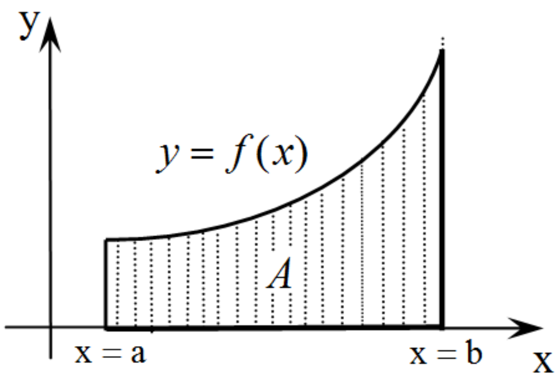
6. eta 7. adibideak

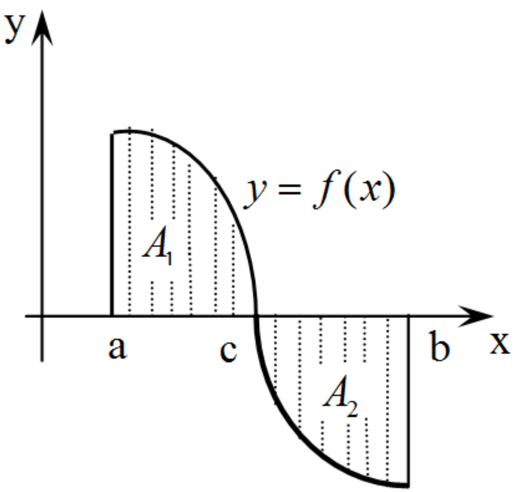
Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Barruti baten azaleraren kalkulua

f (x) kurbak, abzisen ardatzak eta zuzenek mugatutako trapezio mixtilineo baten azalera, integral mugatuaren definizioa kontutan hartuta, hurrengo adierazpenak ematen du:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$





Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

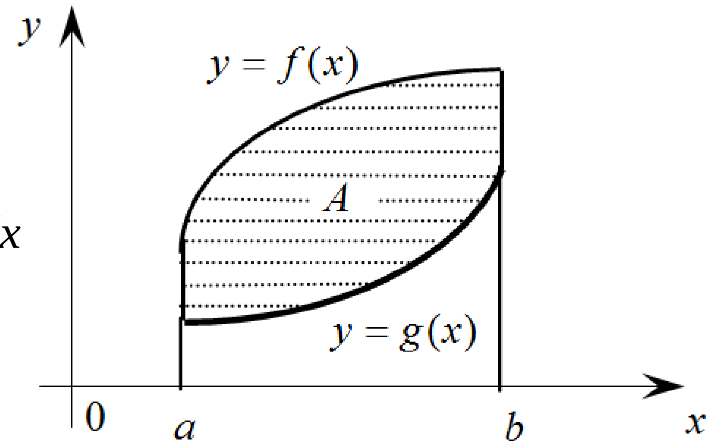
Barruti baten azaleraren kalkulua

- Gogoratu integralak *f(x)*-ren zeinua mantentzen duela. Baldin (c,b) tartean *f(x)*<0 bada, orduan:

$$A=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

- Bi kurbek mugatutako gainazala kalkulatu nahi bada:

$$A=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$



8. adibidea

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Gorputz baten bolumena, azalera paraleloen funtzio gisa

Suposa dezagun erreferentzia ardatz baten (adibidez *OX*) perpendikularra den eta [*a*,*b*] tarteko puntu arbitrario batetik marraztu den plano batek, [C] gorputz batean eragindako sekzioaren azalera, planoaren posizioaren funtzioa dela. Izan bedi $Q(X)$ azalera honen neurria. $x=a$, $x=b$ planoen arteko gorputzaren bolumena hurrengo batura integralaz estima daiteke:

$$V \approx \sum_{1}^{n} Q(P_i) \cdot \Delta x_i;$$

eta limitearen bitartez, hurrengo definizioa daukagu:

$$\boxed{V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{1}^{n} Q(P_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b Q(x)\, dx.}$$

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Biraketa gorputz baten bolumena

Domeinu lau batek erreferentzia ardatz baten inguruan (adibidez *OX*) biratzean [C] gorputza sortzen badu, orduan, kasu partikular bezala, plano paraleloek egindako ebakidurak zirkuluak dira eta batugai integralak, zilindro zirkularren bolumenak. Horrela bada, hurrengo formulak dauzkagu:

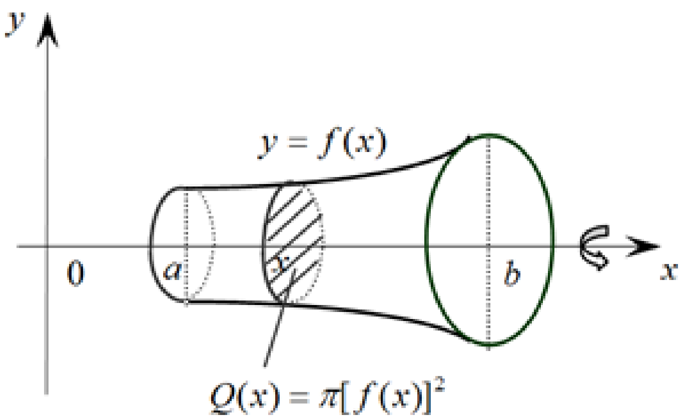
– *OX* ardatzaren inguruko biraketa

Izan bedi hurrengo lerroek mugatzen duten barruti planoa *OX* ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa gorputza:

$y=f(x); x=a; x=b; y=0$, non $f(x)>0$ baldin $a \leq x \leq b$

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Biraketa gorputz baten bolumena

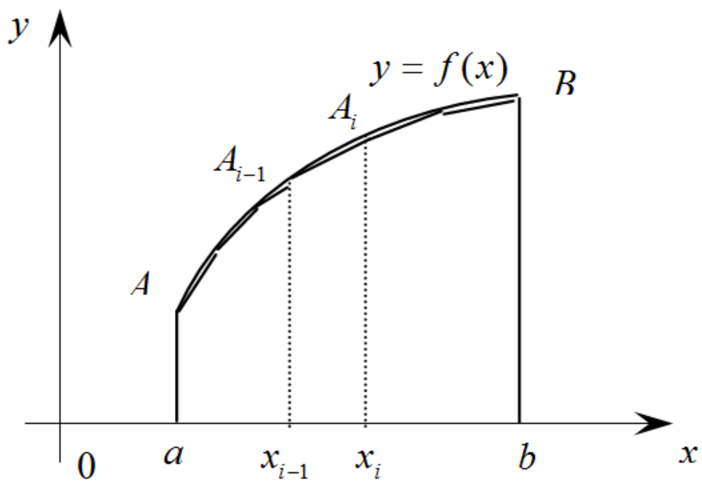


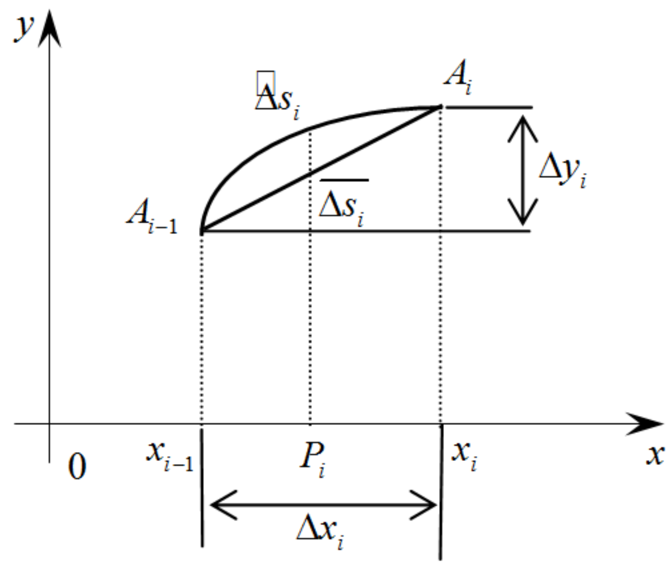
$$Q(x) = \pi[f(x)]^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

9. adibidea

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Kurba arku baten luzeraren kalkulua





$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

10. adibidea

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Biraketa gorputz baten azalera

Kurba arku batek, ardatz baten inguruan biratzen bada, biraketa gainazal bat sortzen du. Kontsidera dezagun, bada y=f(x), $a \leq x \leq b$, ekuazioko arku lauaren biraketa, *OX* ardatzaren inguruan.

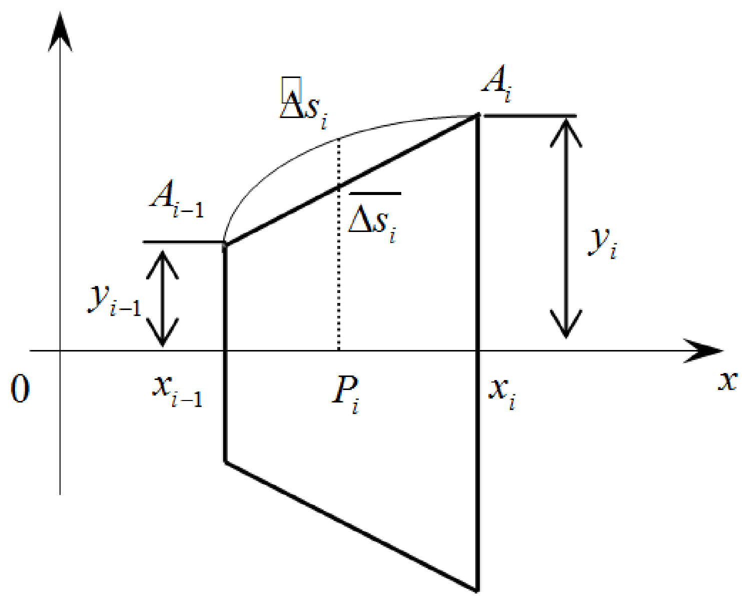
Sortutako gainazalaren azaleraren lehenengo estimazio bat lortzeko, kono-enborren azaleren batura egiten dugu; kono hauen biraketa-sortzaileak $[a,b]$ tarteko partiketa arbitrario bati dagozkion A_i puntuak lotzen dituen AB-n inskribatutako poligonalaren segmentuak dira.

Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Biraketa gorputz baten azalera

Oinarrien erradioak diren eta sortzailea den kono enbor baten azalera hauxe da:

$$\Delta A_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\,\overline{\Delta s_i} = \pi\left(y_{i-1}+y_i\right)\sqrt{1+\left[f'(P_i)\right]^2}\cdot\Delta x_i$$



Integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Biraketa gorputz baten azalera

- Biraketa azalera estimatzea ahalbidetzen duen batuketa integrala hauxe da:

$$A \approx \sum_{1}^{n} \Delta A_i = \sum_{1}^{n} \pi \left(y_{i-1} + y_i \right) \sqrt{1 + \left[f'(P_i) \right]^2} \cdot \Delta x_i$$

- $[a, b]$-ren partiketaren norma zerorantz ($n \to \infty$) doanean limiteak hartzen badira, hurrengoa froga daiteke:

$$\lim_{n\to\infty} \left(y_{i-1} + y_i \right) = 2 f(P_i), \quad \text{non} \quad x_{i-1} \le P_i \le x_i$$

- Horrela, batuketa integralaren limiterako hauxe daukagu:

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \, dx}$$

Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

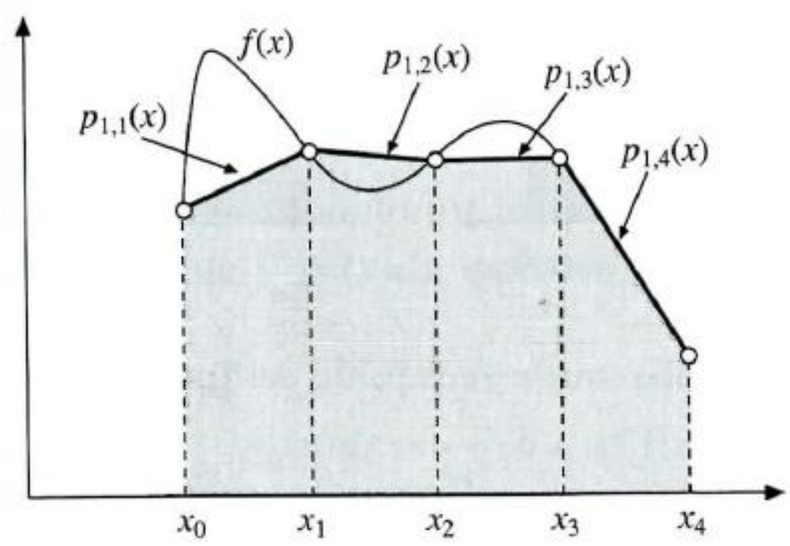
Kasu batzutan ez da posible/eraginkorra Barrow-ren erregela aplikatzea $\int_a^b f(x)\,dx$ integral mugatuaren zenbakizko balioa kalkulatzeko:

- Integrakizunak ez daukanean jatorrizko funtziorik.
- $f(x)$-ren adierazpen analitikoa ez dagoenean, eta funtzioa era diskretuan, balio taula baten bitartez ezagutzen denean.
- Jatorrizko funtzioaren kalkulu eta ebaluazioa hain neketsua denean eta ondorioz eraginkorrena den zenbakizko metodoa erabiltzen denean. Adibidez, izendatzailean erro anitz dituen funtzio arrazionalen integrala.

Kasu hauetan, zenbakizko integrazioa erabiltzen da integral mugatuen kalkulu hurbildua egiteko.

Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Izan bedi $f\ (x)$ funtzio integragarria $[a,b]$ tartean. Bere kalkulu hurbildua egiteko lehenengo eta behin, $[a,b]$ tartea $h = \dfrac{b-a}{n}$ luzera duten ondoz ondoko $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$… $[x_{n-1},\ x_n]$ n azpi-tarteetan banatzen da.

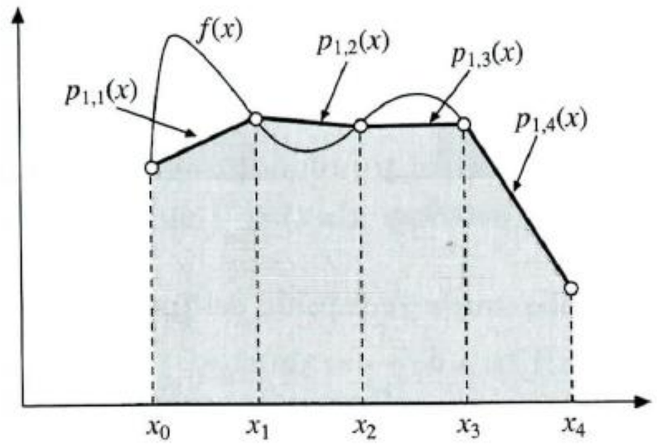


Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Trapezioen metodoa

$[x_k,x_{k+1}]$ azpi-tarte bakoitzean $f(x)$ integrakizun funtzioa, $(x_k, f(x_k))$ eta $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ puntuetatik pasatzen den $p_{1,k+1}(x)$ zuzenagatik ordezkatzen da.

$f(x)$ kurbak, OX ardatzak eta $y=x_k$ eta $y=x_{k+1}$ zuzen bertikalek mugatzen duten azalera kalkulatzeko $f(x_k)$ eta $f(x_{k+1})$ oinarria eta h altuera duen trapezioaren azaleragatik hurbiltzen da:



Trapezioaren azalera

$$A_{\text{trapezioa}} = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot h$$

Azpi-tarte baten azalera hurbildua

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot h$$

Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

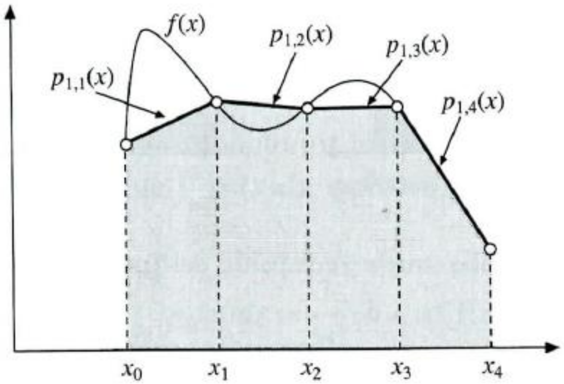
Trapezioen metodoa

$f(x)$-ren azalera hurbildua $[a,b]$ tartean:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx\right) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]\cdot h$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]\cdot \frac{b-a}{n}}$$



Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Trapezioen metodoa

Errore absolutuaren goi bornea

$$E_T \leq \frac{M}{12n^2}(b-a)^3 \qquad \text{non } M = \max_{x\in[a,b]}\left(\left|f''(x)\right|\right)$$

1 edo gradu txikiagoko polinomietarako:

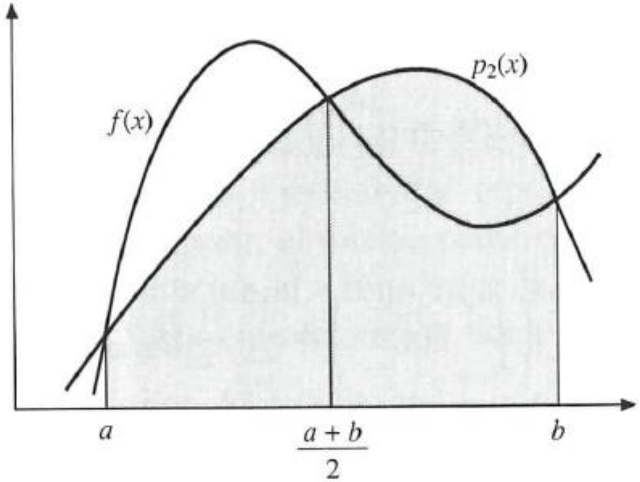
$$\boxed{E_T = 0} \qquad f''(x) = 0 \text{ baita}$$

Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Simpson-en metodoa

$[x_k, x_{k+1}]$ azpi-tarte bakoitzean $f(x)$ integrakizun funtzioa, $(x_k, f(x_k))$ eta $\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right)$ puntuetatik pasatzen den $p_{2,k+1}(x)$ parabolagatik ordezkatzen da.

$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ hurbiltzeko $\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_2(x)\,dx = \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \cdot \frac{h}{6}$ erabiltzen da.



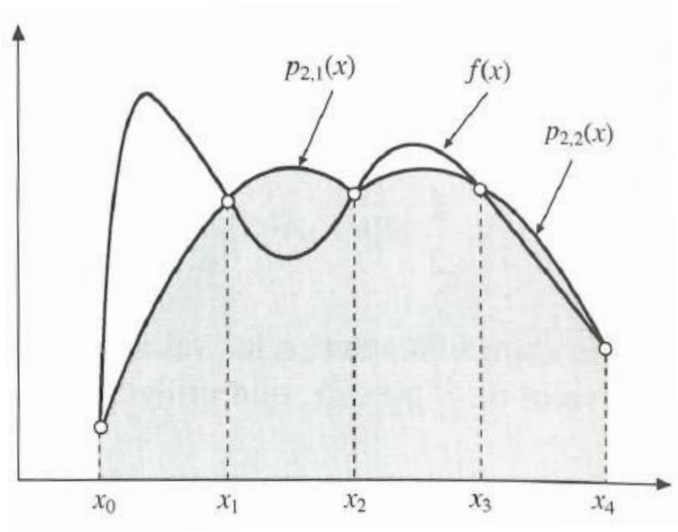
Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Simpson-en metodoa

$f\,(x)$-ren azalera hurbildua $[a,b]$ tartean:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx\right) \approx \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right]\cdot\frac{h}{6}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{6n}}$$



Integral mugatuaren kalkulu hurbildua

Simpson-en metodoa

Errore absolutuaren goi bornea

$$E_T \leq \frac{M}{2880n^4}(b-a)^4 \qquad \text{non } M = \max_{x\in[a,b]}\left(\left|f^{(IV)}(x)\right|\right)$$

3 edo txikiagoko graduko polinomioetarako:

$$\boxed{E_T = 0} \qquad f''(x) = 0 \text{ baita}$$