a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$

b) $\infty - \infty \Rightarrow$ por el conjugado y entre el conjugado.

SEGIDAK

Leire García

Kalkulatu hurrengo segiden limiteak:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$ Sol.: e^2

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ Sol.: $\dfrac{1}{2}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+n}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$ Sol.: e

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}$ Sol.: e^{-4}

e) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}$ Sol.: 0

f) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-5)^8}{\left(\frac{1}{2}n^4+1\right)^4}$ $= \dfrac{(n^2)^8}{\left(\frac{1}{2}n^4\right)^4}$ Sol.: 16

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n^3+1}\right)^{\frac{1}{\ln(n+3)}}$ Sol.: e^{-1}

h) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{1+5\cdot 3^n}$ Sol.: $\dfrac{1}{5}$

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)$ Sol.: 0

j) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\tan(1/n)}\right)^n$ Sol.: e^{-1}

k) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-n}{n^3}\left(1+n^2\right)$ Sol.: -1

l) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{n+2}$ Sol.: $e^{2/3}$

m) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ Sol.: $\ln a$

CODEAM
Aire Konprimatua eta Hozketa Industriala
Aire Comprimido y Frío Industrial

GAIA: ASUNTO: Segidak | DATA: FECHA: | ORRIA: HOJA:

⊗ Kalkulatu hurrengo segiden limiteak

si $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1^{\infty} \rightarrow e^{\lim_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)}$

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = 1^{\infty}$ INDET

$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n-3}\left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n-3}\left(\frac{2}{n-1}\right)} \sim e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2}} = e^2$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \infty - \infty$

multiplicamos y dividimos por el conjugado cuando tenemos $\infty - \infty$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \ln\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1} =$

$\ln(1) = 0$

$e^{\lim_{n\to\infty} (4n+1)\left(\underbrace{\ln\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)}_{??}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} (4n+1)\frac{-3n+1}{3n^2+5n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-12n^2}{3n^2}} = e^{-4}$

$\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n} - 1 = \frac{-3n+1}{3n^2+5n}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\text{número}}{\infty} = 0$

$\sin(n)$ → está entre $[-1, 1]$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-5)^8}{\left(\frac{1}{2}n^4+1\right)^4} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)^8}{\left(\frac{1}{2}n^4\right)^4} = \lim \frac{n^{16}}{\frac{1}{2^4} n^{16}} = 16$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{1+5\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{5\cdot 3^n} = \frac{1}{5}$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+\tan\frac{1}{n}}-1\right)$$

j) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\tan\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-\tan\frac{1}{n}}{1+\tan\frac{1}{n}}\right)} \sim e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)} \sim e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{-1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1}$$

i) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right) = \infty-\infty \Rightarrow$$ multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)-(n+1)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

1. PARTZIALA 2018ko urriaren 3an

POR UN LADO Y POR OTRO, LUEGO

2. ARIKETA

a) $$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{a_n}\cdot\underbrace{\frac{7^n}{3^{n+1}+7^{n-1}}}_{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 1\cdot 7 = 7$$

$$7^{n-3} > 3^{n+100}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{3^{n+1}+7^{n-1}} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{7^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{\frac{7^n}{7}} = 7$$

$\to 1-1=0 \Rightarrow e^{a_n}-1 \sim a_n$ CUANDO $a_n \to 0$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+1)(e^{1/n}-1)}{\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)} \simeq \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$$

$\frac{1}{n}\to 0$

SERIEAK

Aztertu honako serie hauen konbergentzia:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+1}$ — Sol.: Dibergente

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^n}$ — Sol.: Konbergente

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$ — Sol.: Dibergente

OSZIL d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+n}$ — Sol.: Konbergente

OSZIL e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ — Sol.: Konbergente

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\cos(3n)}{n^2+n}$ — Sol.: Konbergente

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^p}$ $(p>0)$ — Sol.: $\begin{cases}\forall p>2\rightarrow \text{Konbergente}\\ \forall p\le 2\rightarrow \text{Dibergente}\end{cases}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$ — Sol.: Konbergente

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\,7^n}{(2n)!}$ — Sol.: Dibergente

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ — Sol.: Konbergente

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{x^{4n}+2n^3}$ $\forall x\ge 0$ — Sol.: $\begin{cases}\forall x\le 1\rightarrow \text{Konbergente}\\ \forall x>1\rightarrow \text{Dibergente}\end{cases}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3n}$ — Sol.: Konbergente

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1}$ — Sol.: Konbergente

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1)\sqrt{n^3-2}}$ — Sol.: Konbergente

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} a^n \quad (a>0)$ Sol.: $\begin{cases} \forall a < \frac{2}{9} \rightarrow \text{Konbergente} \\ \forall a \geq \frac{2}{9} \rightarrow \text{Dibergente} \end{cases}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$ Sol.: Konbergente

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) - \frac{1}{n(n+1)} \right]$ Sol.: Konbergente

Bibliografia:

- "Análisis Matemático" T.M. Apostol- Editorial Reverte S.A.
- "Analisi Matematikoa" Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Graduko Apunteak. Clara Baquerizo, Izaskun Basterrechea, Emilia Martín.
- http://www.ehu.eus/olatzgz/

SERIEEN KONBERGENTZIAK

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 \to$ Dibergentea (si el $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ dibergentea)

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+3}{n}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n}} = e^3 \neq 0 \to$ dibergentea

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+3)^n} = \frac{1}{\infty^n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ Puede ser convergente

D'alembert $\to \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1+3)^{n+1}}}{\frac{1}{(n+3)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^n}{(n+4)^{n+1}} \to (n+4)^n \cdot (n+4)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n \cdot \frac{1}{n+4} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n}_{e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+3}{n+4}-1\right)} = e^{-1}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4}}_{0}$$

$= e^{-1} \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow$ Convergente

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^p}$ será cero si $p > 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ = armónica $\begin{cases} \alpha > 1 & \text{konbergentea} \\ \alpha \leq 1 & \text{dibergentea} \end{cases}$

Grado arriba = 1
Grado abajo = p
} Para q sea convergente grado abajo tiene q ser más de una unidad mayor q el de arriba

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a \cdots}{n^b \cdots} \to$ para q sea convergente $\Rightarrow b > a+1$

$$\sum \frac{n^2}{n^5+2n-1}$$ Comparo con $\frac{1}{n^3}$ ⇒ Convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^5+2n-1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5+2n-1} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\frac{n^2}{n^5+2n-1}\\ \frac{1}{n^3}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ son ambos convergentes

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ → número $\neq 0$ → $\left\{\begin{array}{c}a_n\\ b_n\end{array}\right\}$ son del mismo tipo

$$\sum \frac{n}{(n+1)^p}$$ → dif. $p-1$ ⇒ Pero q sea convergente → $p-1>1$ → $p>2$

D'Alembert erabili
↳ R) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ ⇒

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^n}{n^2 e^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^n}{n^2 e^n \cdot e} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} < 1$ ⇒ Konbergentea

$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$= 7\cdot 6!$
$= 7\cdot 6\cdot 5!$

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2 \cdot 7^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2\cdot 7^n}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\overbrace{[(n+1)\cdot n!]^2}^{(n+1)^2\cdot \cancel{(n!)^2}} \cancel{7^n}\cdot 7}{(2n+2)(2n+1)\cdot \cancel{2n!}}}{\frac{\cancel{(n!)^2\cdot 7^n}}{\cancel{(2n)!}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\cdot 7}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+\dots}{4n^2+\dots} = \frac{7}{4}$$

$\frac{7}{4} > 1$ ⇒ dibergentea

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1}}{\frac{1}{n^{8/3}}}$$

$$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n^8}}{n^3+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^9+2n^8}}{n^3+1} = 1$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1} \\ \frac{1}{n^{8/3}}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{son del mismo tipo}$$

$\Downarrow$

ambos son convergentes

$\frac{1}{n^{8/3}} \to$ convergente

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1)\sqrt{n^3-2}} \Rightarrow$

Grado $= 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

Grado $= 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

dif $\frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{27-16}{6} = \frac{11}{6} > 1 \to$ Konbergentea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)-1)\sqrt[3]{(n+1)^5+3(n+1)}}{((n+1)^3-1)\sqrt{(n+1)^3-2}}}{\frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1)\sqrt{n^3-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3-1)\sqrt{n^3-2}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^5+3n+3}}{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}\,((n+1)^3-1)\sqrt{(n+1)^3-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1)\sqrt{n^3-2}}}{\frac{1}{n^{11/6}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{\frac{\frac{(n-1)^6\cdot(n^5+3n)^2}{(n^3-1)^6\cdot(n^3+2)^3}}{\frac{1}{n^{11}}}}$$

$\frac{1}{n^{11/6}} \to$ Convergente

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{\frac{n^{6+10+11}+\ldots}{n^{18+9}+\ldots}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{\frac{n^{27}+\ldots}{n^{27}+\ldots}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

$\to$ son del mismo tipo

$\sum \frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1)\sqrt{n^3-2}}$ también es convergente

j) D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{4(n+1)-3}}{(4(n+1)-3)!}}{\frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{4n+1}\cdot 2}{(4n+1)!}}{\frac{2^{4n}\cdot 2^{-3}}{(4n-3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\cdot 2\,(4n-3)!\,2^{3}}{2^{4n}\cdot(4n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^4\,(4n-3)!}{(4n+1)(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)!} = 0 \implies \text{seriea konbergentea da}$$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{x^{4n}+2n^3}$

Si $x>1$ $\quad \frac{\infty}{\infty} \to \lim = 1 \to$ divergente

Si $x=1$ $\quad \frac{1}{\infty} = 0$

Si $x<1$ $\quad \frac{0}{\infty} = 0$

→ Para poder ser convergente $x \leq 1$

D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{4(n+1)}}{x^{4(n+1)}+2(n+1)^3}}{\frac{x^{4n}}{x^{4n}+2n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^{4n}}\cdot x^4\cdot(x^{4n}+2n^3)}{\cancel{x^{4n}}(x^{4n}\cdot x^4+2(n+1)^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^4\cdot(x^{4n}+2n^3)}{x^{4n}\cdot x^4+2(n+1)^3}$$

Si $x=1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^3}{1+2(n+1)^3} = 1$ ¿?

Si $x\in(0,1)$ $\quad \lim_{n\to\infty} = \frac{x^4\cdot 2n^3}{2(n+1)^3} < 1 \to$ Convergente

$$\boxed{a^{\infty} \begin{cases} \text{Si } a>1 \Rightarrow \infty \\ \text{Si } a\in(0,1) \Rightarrow 0 \end{cases}}$$

$$\sum \frac{1}{1+2n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+2n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{1+2n^3} = \frac{1}{2}$$

converg $\frac{1}{n^3}$

$\left\{ \frac{1}{1+2n^3},\ \frac{1}{n^3} \right\}$ son del mismo tipo ⇓ convergente

Serie oscilante

$$\sum (-1)^n \cdot a_n$$

$\rightarrow$ leibniz

Si a_n es beherakorra $a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ konbergentea

Si además a_n es convergente $\Rightarrow \sum (-1)^n \cdot a_n$ es absolutuki konbergentea

d) $\sum \frac{(-1)^n}{n^3+n} \Rightarrow \frac{1}{n^3+n}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n^3+n} \\ \\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3+n+1} \end{array}\right\} a_{n+1} < a_n \Rightarrow \text{beherakorra}$$

$\hookrightarrow$ Según leibniz es konbergentea.

$\sum \frac{1}{n^3+n} \rightarrow$ Como es convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n^3+n}$ es absolut. konbergentea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3+n}}{\frac{1}{n^3}} = 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum \frac{1}{n^3+n} \\ \sum \frac{1}{n^3} \end{array}\right\} \text{son las 2 konbergente}$$

$\hookrightarrow$ konbergentea

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$

$|a_{n+1}| < |a_n| \Rightarrow$ beherakorra

según Leibnitz konbergentea

$\sum \frac{1}{2^n}$

D'Alambert

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} < L \Rightarrow$ seriea konbergentea da

l) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9 \cdot 3n} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$