Aldagai anitzeko funtzioak

1. Sarrera
2. Jarraitutasuna
3. Deribagarritasuna
4. Norabide-deribatua eta gradiente bektorea
5. Katearen erregela
6. Goi ordenako deribatuak
7. Muturrak

Sarrera

Bi aldagaiko funtzioak: Bi aldagai errealeko funtzioa, hurrengo erako edozein aplikazioari deituko diogu :

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to z = f(x, y),$$

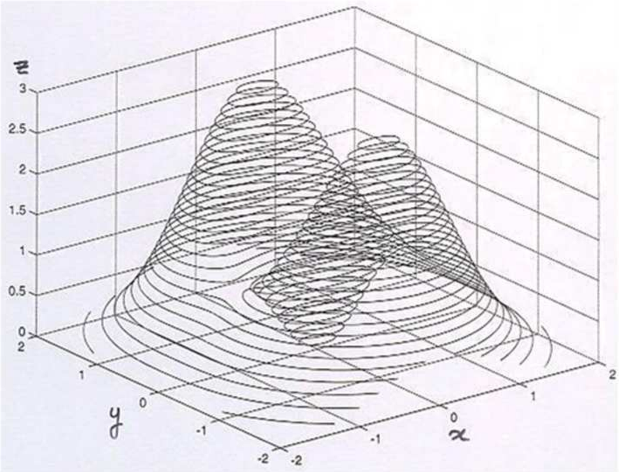
non *x* eta *y* aldagai independente edo askeak baitira eta *z* menpeko aldagaia.

$Z = f(x, y)$ funtzioa definituta dagoen (x, y) pare ordenatuen multzoari funtzioaren **definizio domeinua** edo **existentzia eremua** deitzen zaio. Domeinua mugatzen duten lerroak **muga** deitzen dira.

Sarrera

Adierazpide grafikoa: Izan bedi $z= f\,(x,y)$. Funtzio honek geometrikoki R^3-ko gainazal bat adierazten du. R^2 planoan **sestra-kurben** bidez marrazten da normalean:

$$k= f(x,y).$$



Jarraitutasuna

Izan bedi $f : A \subset R^2 \to R$ bi aldagaiko funtzio bat eta izan bedi A multzo irekiaren (a,b) puntu bat. f funtzioa (a,b) puntuan jarraitua dela esaten da baldin eta soilik baldin honako baldintza hauek betetzen badira:

1) $\exists f(a,b)$

2) $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

3) $f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Jarraitasun kontzeptua lokala da; beraz, f A multzoan jarraitua dela esango dugu baldin multzo hartako puntu guztietan jarraitua bada.

Jarraitutasuna

Funtzio jarraituen propietateak: Izan bitez $f(x,y)$ eta $g(x,y)$ bi funtzio jarraitu (a,b) puntuan, orduan, honako funtzio honek ere jarraituak dira (a,b) puntuan:

- $k \cdot f(x,y)$ donde $k \in R$
- $(f \pm g)(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$
- $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x,y) = \left(\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right)$, si $g(a,b) \neq 0$
- $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$
- $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y))$

Deribagarritasuna

Bi aldagaiko funtzioen deribagarritasuna: Deribatu partzialak:

Izan bedi $z = f(x,y)$ bi aldagaiko funtzio bat. bat. ***f* -ren deribatu partziala *x*-rekiko** (a,b) puntuan, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y)$ denotatuta, honako limite hau da

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Era berean, ***f* -ren deribatu partziala *y*-rekiko** (a,b) puntuan, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y)$ denotatuta, honako limite hau da:

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

Deribagarritasuna

Interpretazio geometrikoa:

$z = f(x,y)$ ekuazioak gainazal bat adierazten du, beraz $y = b$ denean, $z = f(x,b) = \Gamma_0$ kurba baten ekuazioa da. Γ_0 kurba, $z = f(x,y)$ gainazalaren eta $y = b$ planoaren arteko ebakidura da.

Hortaz $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$ adierazpena Γ_0 kurbaren zuzen ukitzailearen malda da $x = a$ puntuan.

Plano ukitzailearen ekuazioa (a,b,c) puntuan ($c = f(a,b)$ izanik) hurrengoa da:

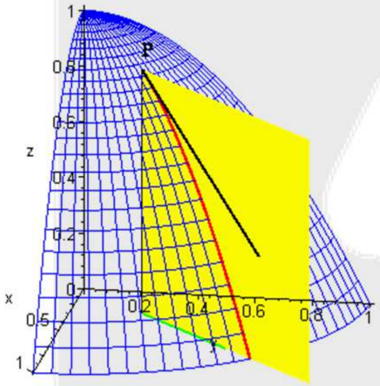
$$z - c = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} (x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} (y-b)$$

$f(x,y)$ funtzio bat (a,b) puntuan ***deribagarria*** dela esaten da baldin eta soilik baldin puntu horretan deribatu partzialak badauzka (berdinak zein ezberdinak).

Norabide deribatua eta gradiente bektorea

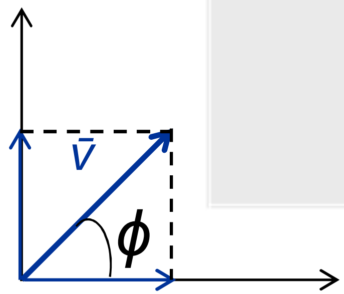
Norabide deribatua: Izan bedi $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta izan bitez $\bar{x} = (a,b) \in$ A puntu bat eta $\bar{v} = (v_1,v_2)$ edozein bektore. ***f*** **-ren deribatua $\bar{v}$ bektorearekiko** (a,b) puntuan hurrengo limiteari deritzo:

$$D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\bar{v}) - f(\bar{x})}{t}$$



Baldin $\bar{v} = (v_1,v_2)$ bektore unitarioa bada, limite honi ***f*** **-ren norabide-deribatua $\bar{v}$ bektorearekiko** (a,b) puntuan deritzo. Baldin $z= f(x,y)$ (a,b) puntuan deribagarria bada eta $\|\bar{v}\| = 1$,OX ardatzarekiko argumentua φ izanik, hots, $\bar{v} = (v_1,v_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, honako hau daukagu:

$$D_{\bar{v}} f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} \cos\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} \sin\varphi$$



Norabide deribatua eta gradiente bektorea

Gradiente bektorea: Izan bedi $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio deribagarri bat (*a*,*b*) puntuan, ***f*** **-ren gradiente bektorea** (*a*,*b*)-n hurrengo bektoreari deritzo:

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right)$$

Beraz:

- Norabide deribatuak funtzioaren aldakuntza $\bar{v}$ bektorearen norabidean adierazten du.
- Deribatu partzialak oinarri kanoniko bektoreekiko norabide deribatuak dira.
- Baldin *f* (*x*,*y*) funtzioa (*a*,*b*) puntu batean deribagarria bada, norabide deribatua gradiente bektorearen eta $\bar{\bar{v}}$ bektore unitarioaren arteko biderkadura da:

$$D_{\bar{v}} f(a,b) = \nabla f(a,b) . \bar{v}$$

- Gradiente bektoreak puntu batean norabide-deribatua maximoa den norabidea adierazten du. Norabide-deribatuaren balio maximoa gradientearen modulua da.
- Puntu bakoitzean, gradiente bektorearen norabidea *f* (*x*,*y*) gainazalaren sestra kurbaren normalaren norabidea da

Katearen erregela

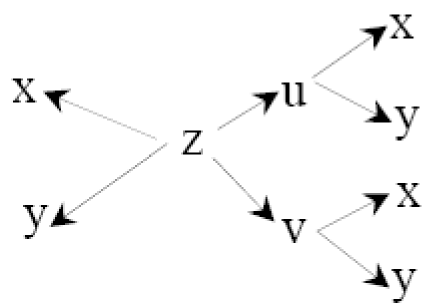
Funtzio konposatuaren deribatua. Katearen erregela:

Izan bedi $z = f(u,v)$, non, $u = u(x,y)$ eta $v = v(x,y)$ diren eta izan bitez f, u, v eta haien deribatuak funtzio jarraituak. Orduan:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Katearen erregela aplikatzeko, honela adierazten da aldagai desberdinen arteko menpekotasuna



Goi ordenako deribatu partzialak

Bigarren deribatuak: Izan bedi $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A *-ko* puntu guztietan deribatu partzialak onartzen dituen funtzio bat. Deribatu partzialek deribatu partzialak onartzen badituzte, hauek bigarren ordenako deribatuak deitzen dira eta honela denotatzen dira:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Oharrak:

- *x* aldagaiarekiko deribatzean, *y* konstantetzat hartzen da (eta *y* aldagaiarekiko deribatzean, *x* konstantetzat hartzen da) eta deribazio erregela guztiak mantentzen dira.
- Bigarren ordenako deribatu partzialak, bi aldagaiko funtzioak dira.
- Era beran, ordena guztietako deribatuak defini daitezke.

Goi ordenako deribatu partzialak

***k* klaseko funtzioa:** $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio bat ***k* klasekoa** dela esaten da ($f \in C^k$ denotatuz), baldin eta soilik baldin k ordenako deribatu partzialak onartzen baditu A-ko puntu guztietan eta deribatu partzialak A-n jarraituak badira.

Schwarzen teorema: Izan bedi $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 klaseko funtzio bat.

Baldin $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ existitzen bada eta jarraitua bada, orduan $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ existitzen da eta honako berdinketa hau betetzen da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Muturrak

Mutur erlatiboak:

$f(x,y)$ funtzioak (a,b) puntuan **maximo erlatibo** bat dauka, baldin (a,b) puntua barnean daukan multzo ireki baten (x, y) puntu guztietarako:

$$f(x,y) \leq f(a,b)$$

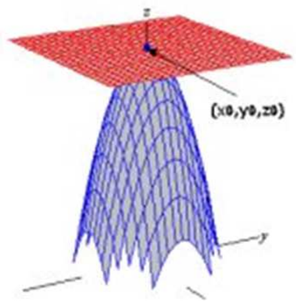
$f(x,y)$ funtzioak (a,b) puntuan **minimo erlatibo** bat dauka, baldin (a,b) puntua barnean daukan multzo ireki baten (x, y) puntu guztietarako:

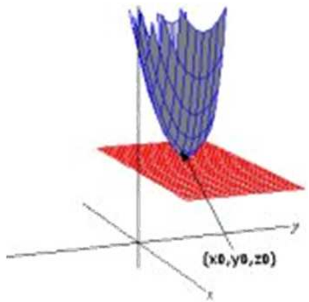
$$f(x,y) \geq f(a,b)$$

Muturrak

Izan bedi $f\,(x,y)$ bi aldagaiko funtzio bat A eskualde ireki batean. Izan bedi $(a,b)\in A$. (a,b) f -ren **puntu kritiko** bat dela esango dugu baldin hurrengo baldintzetako bat betetzen bada:

- $f'_x(a,b)=0 \;\wedge\; f'_y(a,b)=0$
- $f'_x(a,b) \;\vee\; f'_y(a,b)$ ez dira existitzen





Muturrak

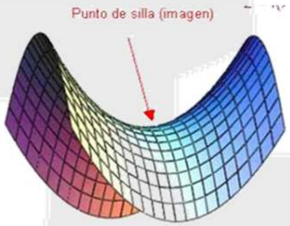
Izan bedi $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ izanik. f -ren **matrize hessiarra** (a,b) puntuan honela definitutako matrize simetrikoari deritzo:

$$Hf(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Muturrak

Bigarren deribatuaren irizpidea: Izan bedi f C^2 klaseko bi aldagaiko funtzio bat. Izan bedi (a,b) f-ren puntu kritiko bat. **Determinante hessiarra** matrize hessiarraren determinanteari deritzo

- Baldin $|Hf(a,b)| > 0$ eta $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow$ f-k **minimo erlatibo** bat dauka**.**
- Baldin $|Hf(a,b)| > 0$ eta $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow$ f-k **maximo erlatibo** bat dauka.
- Baldin $|Hf(a,b)| < 0 \quad \Rightarrow$ f-k **zela puntu** bat dauka**.**
- Baldin $|Hf(a,b)| = 0 \quad \Rightarrow$ Zalantzazko kasua.



Azken kasuan, $[f(x,y) - f(a,b)]$ gehikuntzaren zeinua aztertu behar da, (a,b) puntua barnean daukan multzo ireki batean

Loturak dauzkaten bi aldagaiko funtzioen muturrak

z=*f* (*x*, *y*) funtzioaren muturrak bilatzen ari gara, non aldagaiak $\varphi(x, y) = 0$ baldintzarekin lotuta baitaude, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ suposatuta.

Funtzio Lagrangiarra: Funtzio Lagrangiarra honela definitutako funtzioari deritzo:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

non λ eskalarra Lagrange-ren biderkatzailea baita.

Puntu kritikoek ematen duten beharrezko baldintza honako hau da:

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Loturak dauzkaten bi aldagaiko funtzioen muturrak

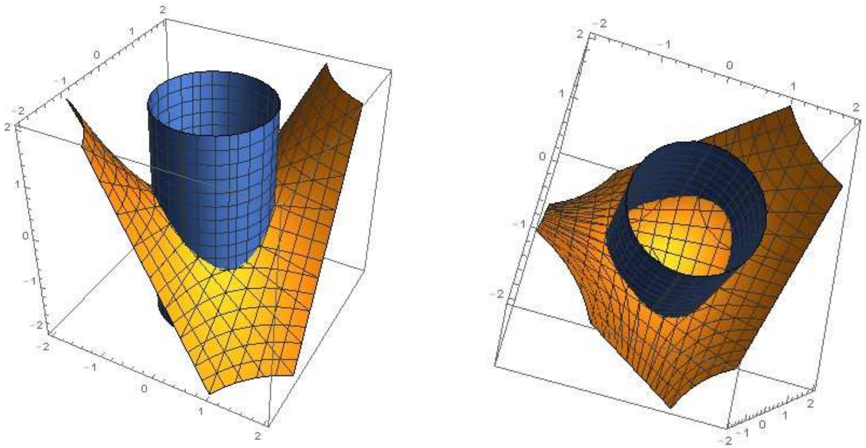
Matrize hessiar orlatua, funtzio Lagrangiarraren matrize hessiarrari deritzo:

$$HL(\lambda,(x,y)) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Loturak dauzkaten bi aldagaiko funtzioen muturrak

Bigarren deribatuaren irizpidea: Baldin (a, b) puntua puntu kritikoa bada, dagokion Lagrange-ren biderkatzailea λ izanik, orduan:

- Baldin $\left|HL(\lambda,(a,b))\right| < 0 \quad \Rightarrow \quad (a,b)$ ***minimo lokala*** da
- Baldin $\left|HL(\lambda,(a,b))\right| > 0 \quad \Rightarrow \quad (a,b)$ ***maximo lokala*** da



$$z(x,y) = xy$$
$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$