Goi-ordenako Ekuazio Diferentzial Linealak

1.- Sarrera

2.- Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

3.- Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

4.- Ekuazio osoen integrazioa

5.- Koefiziente aldakorreko ekuazio diferentzialak

6.- Ordena jaitsi ahal den kasuak

1. Sarrera

Goi-ordenako ekuazio diferentzial linealek honako era daukate:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x) \qquad [1]$$

non funtzioarekiko eta haren deribatuekiko linealtasuna baitago. Ekuazio honi, $f(x) \neq 0$ izanik, ***ez-homogeneoa*** edo ***osoa*** deitzen zaio. Baldin $f(x) \equiv 0$, ekuazio elkartuari ***homogeneoa*** edo ***osatugabea*** deritzo:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \qquad [2]$$

Baldin koefiziente guztiak konstanteak badira, [1] eta [2] ekuazioei ***koefiziente konstanteko*** ekuazioak deritze.

Koefizienteetako bat x–ren menpekoa bada, orduan ekuazioak ***koefiziente aldakorrekoak*** dira.

1. Sarrera

D, deribatu-eragilearen, aplikazioa honela denotatuko dugu:

$$D(y) \equiv y', \quad D[D(y)] \equiv D^2(y) \equiv y'', \ldots, \quad D[D^{(n-1)}(y)] \equiv D^n(y) \equiv y^{(n)}$$

[1] ekuazioa honela idatz daiteke:

$$[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n](y) \equiv P_n[D](y) \equiv f(x)$$

non kortxeteen arteko adierazpenak **polinomio eragile diferentzial** bat denotatzen baitu, **sinbolikoki $P_n[D]$** idatziko duguna.

$P_n[D]$, *D* eragile linealean oinarrituta dagoenez, bera ere lineala izango da. Izan ere, hauexek betetzen dira:

$$\text{(a)} \quad P_n[D](Cy) = CP_n[D](y)$$
$$\text{(b)} \quad P_n[D](y_1 + y_2) = P_n[D](y_1) + P_n[D](y_2)$$

Oro har:

$$P_n[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = \sum_1^n C_i P_n[D] y_i = C_1 P_n[D] y_1 + C_2 P_n[D] y_2 + \ldots + C_n P_n[D] y_n$$

2. Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

Izan bedi *n* ordenako hurrengo ekuazio homogeneoa:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \quad [2]$$

Sinbolikoki adierazita: $P_n[D](y)=0$.

Teorema:

"Baldin y_1, y_2,…,y_n ekuazio homogeneo baten soluzio arbitrarioak badira, haien arteko edozein konbinazio lineal ere soluzioa izango da, konstante arbitrarioak erabiliz".

2. Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

Hau da,

$$P_n[D](y_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \rightarrow \quad P_n[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = 0$$

Izan ere, $P_n[D]$ eragilearen linealtasuna dela eta hurrengoa betetzen da:

$$P_n[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = \sum_1^n C_i P_n[D](y_i) = 0, \text{ zeren eta } P_n[D](y_i) = 0.$$

Beraz, $y = \sum_1^n C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

konbinazio linealak [2] betetzen du eta beraz soluzioa da.

2. Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

Soluzioen dependentzia lineala:

y_1, y_2,..., y_n soluzio multzo bat [a,b] tartean linealki independentea dela esaten da, baldin hurrengo berdintza,

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0 \qquad [3]$$

[a,b] tartean, soilik $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$ balioetarako betetzen denean. C_1, C_2,…,C_n konstante arbitrarioak izanik.

Beste kasu batzuetan dependentzia lineala dago eta posible da, baldin $C_i \neq 0$ bada, y_i adieraztea beste soluzioen konbinazio lineal bezala.

2. Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

Soluzioen dependentzia lineala:

Soluzioen dependentzia lineala ikertzeko hurrengo teorema erabiltzen da: *"Multzo baten n soluzioak* [*a,b*] *tartean linealki dependenteak izan daitezen, baldintza beharrezkoa eta nahikoa da beren wronskiarra* [*a,b*] *tartean nulua izatea"*.

$$\exists C_i \neq 0 \quad : \quad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

Wronskiarra hurrengo determinante funtzionala izanik:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

2. Ekuazio homogeneo baten soluzio orokorra

Soluzioen oinarrizko sistema:

n ordenako ekuazio diferentzial homogeneo baten soluzioen oinarrizko sistema, **ekuazioaren *n* soluzio linealki independenteko edozein multzo**ri deritzo. Soluzio multzo honen konbinazio lineala, konstante arbitrarioak erabiliz, ekuazio homogeneoaren ***soluzio orokorra*** da, hots:

$$P_n[D](y_i)=0\ (i=1,2,\ldots,n);\ \ W(y_1,y_2,\ldots,y_n)\neq 0 \xrightarrow{\text{Soluzio orokorra}}$$

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

Ekuazio homogeneoaren edozein soluzio $y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ ekuaziotik lor daiteke, konstante arbitrarioak zehaztu

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

Hurrengo ekuazioaren **soluzioen oinarrizko sistema bat lortzeko**,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0$$

y= exp(rx)=e^{rx} esponentzial sinple motako soluzioak frogatzen dira, behin eta berriro deribatzean esponentziala beti agertzen delako. Era honetan, koefizienteak identifikatzea posiblea da.

$$y = \exp(rx) \equiv e^{rx} \rightarrow y' = re^{rx} \rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \rightarrow \ldots \rightarrow y^{(n-1)} = r^{n-1} e^{rx} \rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

Ekuazio homogeneoan ordezkatzean:

$$e^{rx}[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-2} r^2 + a_{n-1} r + a_n] = 0$$

x-ren balio finituetarako, polinomioa nulua egin behar da. Geratzen den ekuazioari ***ekuazio karakteristikoa*** deritzo eta honen ebazpen aljebraikoak ekuazio homogeneoaren n soluzio ematen ditu:

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \xrightarrow{y=\exp(rx)} \{y_1 = \exp(r_1 x),\ y_2 = \exp(r_2 x), \ldots,\ y_n = \exp(r_n x)\}$$

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

Independentzia lineala aztertzeko, wronskiarra kalkulatzen da:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} \exp(r_1 x) & \exp(r_2 x) & \ldots & \exp(r_n x) \\ r_1 \exp(r_1 x) & r_2 \exp(r_2 x) & \ldots & r_n \exp(r_n x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} \exp(r_1 x) & r_2^{n-1} \exp(r_2 x) & \ldots & r_n^{n-1} \exp(r_n x) \end{vmatrix}$$

Determinanteen propietateengatik, zutabe bakoitzeko elementuen faktore komunak kanpora ateratzen dira, determinantea biderkatuz. Horrela bada, wronskiarra Vandermonde motako determinante batera murrizten da, soluzioa hauxe izanik:

$$W[\exp(r_1 x), \exp(r_2 x), \ldots, \exp(r_n x)] = \exp[(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \exp[(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x]\left[(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)\ldots(r_n - r_1)(r_3 - r_2)\ldots(r_n - r_2)\ldots(r_n - r_{n-1})\right]$$

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

non bigarren errenkadako elementu bakoitzaren eta berak aurrean dauzkan elementu guztien arteko kenduren biderkadura posible guztiak agertzen baitira. Soluzioen menpekotasun analisia berehalakoa da:

Independentzia lineala: Erro guztiek desberdinak izan behar dute, zeren eta orduan $W \neq 0$.

Dependentzia lineala: gutxienez erro multiple bat dagoenean, zeren eta orduan $W \equiv 0$.

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

Hurrengo lerroetan aipatzen diren kasuak gerta daitezke:

(A) **Erro sinpleak.** Baldin ekuazio karakteristikoaren erro guztiak desberdinak badira, elkartutako ekuazioak independenteak dira eta oinarrizko sistema bat daukagu, ekuazioaren soluzio orokorra finkatzeko. Hurrengo kasuak dauzkagu:

(A_1) ***Erro erreal sinpleak.*** Soluzio orokorra elkartutako *n* soluzioen konbinazio lineal baten bidez kalkulatzen da.

$$\boxed{y = C_1 \exp(r_1 x) + C_2 \exp(r_2 x) + \ldots + C_n \exp(r_n x)}$$

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO (Ingeniería Técnica Industrial)

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

(A_2) ***Erro irudikari sinpleak.*** Izan bitez $a \pm bi$, hurrengo soluzioak dagozkien erro irudikari bakunen pare bat:

$$y_1 = \exp[(a+bi)x] = \exp(ax)\exp(ibx) \equiv e^{ax}e^{ibx}$$

$$y_2 = \exp[(a-bi)x] = \exp(ax)\exp(-ibx) \equiv e^{ax}e^{-ibx}$$

Oso baliagarria da esponentzial konplexuak era trigonometrikoan adieraztea, Euler-en formulak aplikatuz,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \rightarrow \quad y_1 = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad \rightarrow \quad y_2 = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

Soluzio orokorrean, soluzio hauen konbinazio lineala honela adierazten da $y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{ax}[(C_1+C_2)\cos bx + i(C_1-C_2)\sin bx]$

$C_1 + C_2 = A,\ i(C_1 - C_2) = B$ ordezkatuz, azkenean hauxe daukagu:

$$\boxed{y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx).}$$

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

(B) **Erro anizkoitzak.** Wronskiarraren soluzioan agertzen diren diferentzia moduko faktoreak, erro berdinei dagozkienak, deuseztatu egiten dira eta, beraz, $W \equiv 0$. Orobat, hurrengo kasuak kontsideratu behar dira:

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

(B_1) ***Erro erreal anizkoitzak.*** Baldin $r=k$ m anizkoiztasuneko erro erreal bat bada, elkartutako m soluzioetako bat baino ez daukagu, $y=\exp(kx)$. Beraz, beste $m-1$ soluzio aske ere ezagutu behar dira. Froga daitekeenez, $y=\exp(kx)$ soluzioaz gain, soluzioa x-ren berretura gorakorrez biderkatzean lortzen diren funtzioak ere soluzioak dira, $m-1$ graduraino. Horrela bada, m soluzio independente lortzen dira (wronskiarra nulua egiten ez dela baino ez da egiaztatu behar):

$$r=k(m)\ \text{erroa}\ \xrightarrow[\text{soluzioak}]{\text{asoziatutako}}\ y_1=e^{kx},\ y_2=xe^{kx},\ \ldots,\ y_m=x^{m-1}e^{kx}$$

Erro erreal anizkoitz bati dagozkion soluzioen konbinazio linealean, esponentzialak $m-1$ graduko x aldagaiko eta koefiziente indeterminatuko polinomio bat biderkatzen du:

$$\boxed{y=[C_1+C_2x+\ldots+C_mx^{m-1}]e^{kx}}$$

3. Koefiziente konstantezko ekuazio homogeneoen integrazioa

(B_2) ***Erro irudikari anizkoitzak.*** Baldin $r=a\pm bi$ m anizkoiztasuneko erro irudikari konjugatuak badira, $y_1=e^{ax}\cos bx$, $y_2=e^{ax}\sin bx$ soluzioak baino ez dauzkagu, beste $2m-2$ ekuazio ezagutu behar direlarik. Froga daitekeenez, soluzio hauek x-ren berreturez biderkatzean lortutako funtzioak ere soluzio linealki independenteak dira, $m-1$ graduraino:

$$a\pm bi\ (m)\ \text{erroak}\ \xrightarrow[\text{soluzioak}]{\text{asoziatutako}} \begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

$2m$ soluzio hauen konbinazio lineala honela adierazten da:

$$\boxed{y=e^{ax}[P_{m-1}(x)\cos bx+Q_{m-1}(x)\sin bx],}$$

non $P_{m-1}(x)$ eta $Q_{m-1}(x)$ koefiziente indeterminatuko $m-1$ graduko polinomioak baitira x aldagaian.

Liburuko 1. adibidea

4. Ekuazio osoen integrazioa

Izan bedi hurrengo EDA lineal ez homogeneo edo osoa:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x)$$

Teorema: *"Soluzio orokorra, elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorrari ekuazio osoaren soluzio bat gehituz lortzen da"*.

$$\boxed{P_n[D](y) = f(x) \xrightarrow{\text{soluzio orokorra}} y = y_h + Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + Y.}$$

Ohiko kasuan, funtzioaren puntu bateko balioa eta bere lehenengo *n* deribatuen balioak sartzean (Cauchy-ren hastapen baldintzak), konstanteak *n* ekuazioko sistema bat askatuz zehazten dira.

Liburuko 2. adibidea

4. Ekuazio osoen integrazioa

Koefiziente indeterminatuen metodoa: Metodoaren aplikazioa ekuazioaren eskuinaldean dagoen $f(x)$ funtzioaren motarengatik baldintzatuta dago. Oro har, koefiziente indeterminatuko Y soluzio bat frogatzen da, $f(x)$-ren motakoa. Ekuazioan sartuta, koefizienteak determinatzea posible izan behar da. Aplikazio kasurik ohikoenak polinomioko, esponentzial sinple eta trigonometrikoko funtzioen biderkaduren konbinazioak dira. Eredu orokorra era honetakoa da:

$$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx] \xrightarrow{\text{probatzen da}}$$

$$Y = e^{ax}[R_N(x)\cos bx + S_N(x)\sin bx], \quad \text{non} \ N \equiv \max\{m, n\}$$

4. Ekuazio osoen integrazioa

Koefizienteak identifikatzeko prozedura ez da posible $f(x)$ y_h–ren barnean dagoen soluzioren batekin bat badator, zeren eta, $P_n[D]Y = 0$ denez, $f(x)$-rekiko identifikazioa ezinezkoa da. Kasu horretan, problema ebazten da saiakuntza-soluzioa x-ren potentziarik txikienaz biderkatuz, kointzidentzia ekidinez.

Soluzioen gainezarpenaren printzipioa: Baldin $f(x)$ kontsideratutako kasuen funtzioen batura bada, banan-banan frogatuko liratekeen soluzioen batura frogatzen da:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x) \xrightarrow{\text{probatzen da}} Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m$$

halako moldez, non:

$$P_n[D](Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m) \equiv f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$$

Liburuko 3. adibidea

4. Ekuazio osoen integrazioa

Parametroen aldakuntzaren metodoa: Konstante arbitrarioen aldakuntzako metodotzat ere ezagutzen da. Aurreko metodoarekin alderatuz, abantaila bat dauka: **edozein ekuaziori aplika dakioke, koefizienteak konstanteak zein aldakorrak izanik eta *f* (*x*) edozein funtzio mota izanik.** Metodoa aplikatzeko, ekuazio homogeneoaren soluzioa ezagutu behar da.

Izan bedi $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x)$ ekuazio osoa, $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ soluzioa ezagutzen delarik. Ekuazio homogeneoaren soluzioan oinarrituz, **ekuazio osoaren soluzio orokor** bezala, planteamendu hau egingo dugu:

$$y = L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + \ldots + L_n(x) y_n \equiv \sum_{1}^{n} L_i(x) y_i$$

4. Ekuazio osoen integrazioa

non $L_1(x), L_2(x) \dots L_n(x)$ determinatu beharreko funtzio laguntzaileak baitira. Metodoaren funtsa hauxe da:

$L_i'(x)$ deribatuak n ekuazioko sistema honen menpean daude:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\sum_1^n L_i' \, y_i = 0 & (1) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i' = 0 & (2) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i'' = 0 & (3) \\
\vdots & \vdots \\
\sum_1^n L_i' \, y_i^{(n-2)} = 0 & (n-1) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0} & (n)
\end{array}\right.$$

4. Ekuazio osoen integrazioa

Sistema hau **bateragarri determinatua da,** koefizienteen determinantea ekuazio homogeneoaren soluzioen wronskiarra delako, hau **ez-nulua** izanik, y_1 , y_2 ,..., y_n soluzioen independentziaren hipotesiagatik. Sistema ebazteak honetara garamatza: $L_i'(x) = \Phi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Eragile integrala aplikatuz: $L_i(x) = \int \Phi_i(x)dx + A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Soluzio orokorrean ordezkatuz:

$$y = \sum_1^n L_i(x) y_i = \sum_1^n \left[\int \Phi_i(x)dx + A_i \right] y_i$$

Soluzioa ordenatu eta gero, ekuazio osoaren soluzio partikular bat hauxe dela ondorioztatzen da:

$$y = \sum_1^n A_i y_i + \sum_1^n y_i \int \Phi_i(x)dx = y_h + Y \quad \Rightarrow \quad Y = \sum_1^n y_i \int \Phi_i(x)dx$$

Liburuko 5. adibidea

5. Koefiziente aldakorreko ekuazio diferentzialak. Euler-en ekuazioak

Oso urria da beren soluzioak funtzio elementalen bidez adieraz daitezkeen koefiziente aldakorren ekuazioen kopurua. Arau orokor bezala, ekuazioa koefiziente konstantedun kasura bihurtzen duten aldagai aldaketak ikertuko dira. Adibide aipagarri bat, Euler-en ekuazioa da. Euler-en ekuazioa era orokor honetakoa da:

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

Ikus daitekeenez, gai bakoitzean *ax*+b faktore aldakorraren potentzia, faktoreak multiplikatzen duen deribatuaren ordenarekin bat dator. Ohiko kasu bat *a*=1, *b*=0 direnean ematen da:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad [1]$$

5. Koefiziente aldakorreko ekuazio diferentzialak. Euler-en ekuazioak

Koefiziente konstanteen kasurako murrizketa hurrengo ordezkapenekin egiten da:

orokorrean: $ax+b = e^t \leftrightarrow t = \ln(ax+b)$,

a=1; b=0 direnean: $x = e^t \leftrightarrow t = \ln x$.

a=1; b=0 kasuan, aldaketa egiteko, deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \xrightarrow{D_t} \frac{d^2y}{dx^2}e^t = e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Indukzioz arrazoituz, n-garren deribaturako, hurrengoa frogatzen da:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt}\left(c_n\frac{d^ny}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + c_2\frac{d^2y}{dt^2} + c_1\frac{dy}{dt}\right)$$

non c_1, c_2 ,…, c_n koefiziente konstanteak baitira.

5. Koefiziente aldakorreko ekuazio diferentzialak. Euler-en ekuazioak

Ekuazioan ordezkatzean, sinplifikazio bat gertatzen da faktore aldakorren biderkaduretan ($x^n \equiv e^{nt}$) eta dagozkien deribatuen esponentzialetan (e^{-nt}) . Era honetako ekuazio batera heltzen da:

$$b_0 y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_{n-2} y''(t) + b_{n-1} y'(t) + b_n y(t) = f(e^t) \equiv g(t) \quad [2]$$

ekuazioa $y(t)$ funtzioan adierazita egonez, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ konstanteekin.

Oharra: [2] ekuazioari elkartutako ekuazio homogeneoa ebazteko, $y(t) = e^{rt}$ motako soluzioekin proba egiten da; horrek [1] ekuazio homogeneoaren zuzeneko integrazioa iradokitzen du, era potentzialeko $y=x^r$ soluzioak ikertuz. Ekuazio osoa integratzeko, parametroen aldakuntzako metodoa aplikatzen da.

Liburuko 6. adibidea

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

Oro har, ekuazio baten ordena jaitsi daiteke ekuazioan aldagaietako bat falta denean edo, ekuazio linealen kasuan bezala, elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio partikular bat ezagutzen denean.

Menpeko aldagaia (*y*) ez duten ekuazioak: Ordena jaisteko, $y'=z$ eginez $\rightarrow y'' = z', \ldots, y^{(n-1)} = z^{(n-2)}, \; y^{(n)} = z^{(n-1)}$

$$f[x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0 \quad \Rightarrow \quad f[x, z, z', \ldots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}] = 0$$

Ekuazio honen *z* jatorrizko bat lortuta, beste koadratura batek soluziora garamatza:

$$z = z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \quad \rightarrow \quad y = \int z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx + C_n$$

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

y ez egoteaz gain, lehenengo $m-1$ deribatuak agertzen ez badira, hau da, ekuazioan agertzen den lehenengo deribatua $y^{(m)}$ bada, ordena *m* unitate jaisten da, hurrengo aldaketa erabiliz:

$$y^{(m)} = z \to y^{(m+1)} = z', \dots, y^{(n-1)} = z^{(n-m-1)}, y^{(n)} = z^{(n-m)} \to$$

$$f[x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0 \quad \Rightarrow \quad f[x, z, z', \dots, z^{(n-m-1)}, z^{(n-m)}] = 0$$

Kasu honetan, *z* lortutakoan, segidako *m* koadraturak soluzio orokorra ematen digute:

$$z = z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}) \quad \to$$

$$y^{(m-1)} = \int z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})dx + C_{n-m+1} \dots \to \dots y = \int y' dx + C_n$$

Liburuko 7. adibidea

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

Aldagai independentea (x) ez duten ekuazioak: Ekuazioan x aldagai independentea falta bada:

$$f[y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$$

ordena unitate bat jaitsi dezakegu, hurrengo ordezkapenarekin:

$$y' = z(y) \rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z \rightarrow y''' = \frac{d^2 z}{dy^2} y' z + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dy} y' = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z + \ldots$$

Ordezkatuz, hurrengo erakoa den $n-1$ ordenako ekuazio batera heltzen gara: $g[y, z, z', \ldots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}] = 0$

Koadratura berri batez, $z = z(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ jatorrizko bat lortzen dugu:

$$y' = z(y) \rightarrow \frac{dy}{z(y)} = dx \xrightarrow{\int} \int \frac{dy}{z(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n$$

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

Elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio partikular bat ezagutzen den ekuazio diferentzial linealak: Izan bedi $P_n[D](y) = f(x)$ ekuazio diferentzial lineal bat, non $P_n[D](u) = 0$ [$u = u(x)$ elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio partikular bat da].

Hurrengo ordezkapenak,

$$y = uz \rightarrow y' = u'z + uz' \rightarrow y'' = u''z + 2u'z' + uz'' \rightarrow \ldots$$

z menpeko aldagai berria agertzen ez den ekuazio batera eramaten gaitu; ekuazio honen ordena unitate bat jaitsi dezakegu, $z' = w$ eginez.

Bigarren ordenako ekuazio batentzat, prozedura hurrengoa da. Izan bedi $u(x)$ ekuazio homogeneoaren soluzio bat:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \rightarrow \quad u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0$$

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

y=uz ordezkapenak aldagai bananduen hurrengo ekuaziora eramaten du:

$$u''z + 2u'z' + uz'' + P(u'z + uz') + Quz = 0 \rightarrow \overbrace{(u'' + Pu' + Qu)z}^{=0} + uz'' + (2u' + Pu)z' = 0$$

$$\rightarrow\; uz'' + (2u' + Pu)z' = 0 \xrightarrow{z'=w} uw' + (2u' + Pu)w = 0$$

soluzioa hauxe izanik:

$$\frac{dw}{w} + \left(\frac{2u'}{u} + P(x)\right)dx = 0 \rightarrow \ln w + 2\ln u + \int P(x)dx = A \Rightarrow w(x) \equiv \frac{B\exp\left(-\int P\,dx\right)}{u^2}$$

Beste koadratura batez, soluzio orokorra lortzen da:

$$z = \int w(x)dx = B\int \frac{\exp\left(-\int Pdx\right)}{u^2}dx + C \quad \xrightarrow{y=uz} \quad \boxed{y = Bu\int \frac{\exp\left(-\int Pdx\right)}{u^2}dx + Cu.}$$

6. Ordena jaitsi ahal den kasuak

Handik, homogeneoaren beste $v(x)$ soluzio bat hauxe dela ondorioztatzen da:

$$v = u\int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{u^2}dx \equiv u\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}dx$$

Oharra: u eta v linealki independenteak dira, hots, $W(u,v) \neq 0$ da. Ekuazio homogeneoa ebatzi ondoren, ekuazio osoa integratzeko, parametroen aldakuntzako metodoa erabiltzen da.