Zenbakizko metodoak

1. Sarrera
2. Dikotomia metodoa
3. Ondoz ondoko hurbilketen metodoa
4. Newton-Raphson-en metodoa
5. Taylor-en garapena
6. Maximo eta minimo aurkikuntza

Sarrera

g(x)=0 erako aldagai errealeko ekuazio askok ez du soluzio analitiko erraza. Adibidez:

$$x\text{-}\cos(x) = 0$$

$$1/x\text{-}\ln x = 0$$

$$x\text{-}e^{-x} = 0$$

Kasu hauetan, oso erabilgarriak dira zenbakizko metodoak edo zenbakizko kalkulua ekuazioaren soluzio hurbildu bat lortzeko.

Dikotomia metodoa

Dikotomia edo erdibiketa metodoa:

Izan bedi g(x)=0 ekuazio bat, non g(x) aldagai errealeko funtzio erreala den. Ekuazioak $\hat{x}$ soluzio bakarra du [a,b] tartean baldin eta:

- g(x) funtzioa deribagarria bada [a,b] tarte baten,
- g'(x) funtzioak zeinua mantentzen badu [a,b] tartean.
- g(a)g(b)<0 bada.

Aurreko baldintzak betetzen badira, erdibiketa metodoa aplika dezakegu. Metodo hau honetan datza: [a,b] tarteko $x_1 = \frac{a+b}{2}$ erdi-puntua hartzen da eta g(a)g(x_1)-ren zeinua aztertzen da. Baldin g(a)g(x_1)<0 bada, orduan g(x)=0 ekuazioaren $\hat{x}$ soluzioa [a, x_1] tartean egongo da. Aurkako kasuan, $\hat{x}$ soluzioa [x_1,b] tartean egongo da (eta g(x_1)g(b)<0)

Dikotomia metodoa

Era honetan $[a_2,b_2]$ tarte bat definitzen dugu, non $[a_2,b_2]=[a, x_1]$ den baldin $g(a)g(x_1)<0$ bada edo $[a_2,b_2]=[x_1,b]$ baldin $g(x_1)g(b)<0$ bada.

Prozedura n aldiz errepikatuz $\frac{b-a}{2^n}$ luzeradun $[a_n,b_n]$ tarte bat lortzen da, $\hat{x}$ bilatutako erroa (soluzioa) haren barnean izanik.

Soluzio hurbildu bat bilatzea nahi badugu, E baino errore txikiago batekin $[a_n,b_n]$ tarte bat aurkitu beharko dugu, non

$$E \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Ondoz ondoko hurbilketen metodoa

Ondoz ondoko hurbilketen metodoa edo puntu finkoaren metodoa:
Izan bedi $x = g(x)$ erako ekuazio bat, non $g(x)$ aldagai errealeko funtzio bat den.

Metodo hau aplikatzeko honako baldintza hauek bete behar dira. Hurrengo baldintzak betetzen badira $g(x)$ funtzioak soluzio bakarra du $[a,b]$ tartean:

- $g(x)$ C^1 klaseko funtzio bat da $[a,b]$ tartean (1. deribatua jarraia).
- $\exists\, k < 1 / |g'(x)| < k \;\forall x \in [a,b]$
- $g[a,b] \subset [a,b]$

Aurreko baldintzak betetzen badira, orduan $x_0 \in [a,b]$ izanik $x_n = g(x_{n-1})$ segida konbergentea da eta:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

non α, $x = g(x)$ ekuazioaren soluzioa da.

Ondoz ondoko hurbilketen metodoa

Metodoa aplikatzeko, $x_0 \in [a,b]$ hastapen balio bat kontsideratzen da eta segidaren terminoak horrela definitzen dira

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_n = g(x_{n-1}) = \hat{x}$$

Segida hau konbergentea da $\hat{x}$ soluziora.

Newton-Raphson-en metodoa

Izan bedi g(x)=0 ekuazioa, non g(x) aldagai errealeko funtzio erreala baita. g($\hat{x}$) = 0 $\hat{x}$ soluzio bakarra izateko [a,b] tartean, honako hiru baldintzak bete behar dira:

- g(x) funtzio C^2 klasekoa izatea [a,b] tartean (2. deribatua jarraia).
- g'(x) eta g''(x) zeinua mantendu behar dute [a,b] tartean.
- g(a)g(b) <0

Aurreko baldintzak betetzen badira, Newton-Raphson-en metodoa aplika daiteke. Metodoaren prozedura hurrengoa da:

1. $x_0 \in (a,b)$ /g'(x_0)≠0 eta g(x_0)g''(x_0) > 0 hastapen balio bat aukeratzen da.
2. g(x) funtzioaren zuzen ukitzailearen ekuazioa x_0 puntuan kalkulatzen da, Hau da:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$$

Newton-Raphson-en metodoa

3. Hurrengo balio hurbildua zuzen ukitzailea eta OX ardatzaren artean ebakidura puntua izango da

$$\left.\begin{array}{l} y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

Prozedura *n* aldiz errepikatuz, honako hau lortzen da:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Taylor-en garapena

Demagun $f\,(x)$ funtzio batek $x = a$ puntuan n+1 arteko deribatuak onartzen dituela. Puntu horren ingurune batean $f\,(x)$-rekiko ahalik eta “antzekotasunik handiena” daukan $P_n(x)$ polinomio bat lortu nahi dugu, $f\,(x)$ funtzioa erabili beharrean $P_n(x)$ polinomioa erabiltzeko.

Demagun $P_n(x)$, $(x - a)$ -ren berreturen bidez garatuta, honela adierazten dela:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

Taylor-en garapena

$x = a$ puntuan honako berdinketa hauek planteatzen dira:

$$
\begin{aligned}
P_n(a) &= a_0 = f(a) \\
P_n'(a) &= a_1 = f'(a) \\
P_n''(a) &= 2a_2 = f''(a) \\
P_n'''(a) &= 2\cdot 3a_3 = f'''(a) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n^{(n)}(a) &= n!a_n = f^{(n)}(a)
\end{aligned}
$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ askatuz eta $P_n(x)$ polinomioan ordezkatuz:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

geratzen da, hau da, ***f* (*x*) funtzioaren *n* ordenako Taylor-en garapena *x* = *a* puntuan**.

Taylor-en garapena

$f\,(x)$ funtzioaren n ordenako **Lagrange-ren hondarraren** edo gai osagarriaren formula $x = a$ puntuan honela definitzen da:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \xi\in(a,x) \text{ egonik,}$$

non $R_{n+1}(x)$-k **egindako errorea** adierazten baita, $f\,(x)$ funtzioa x puntu batean $P_n(x)$ polinomioaz ordezkatu eta gero.

Beraz, $f\,(x)$ funtzioaren **Taylor-en garapena x=a puntuan** hau da:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x)$$

Baldin $\boldsymbol{a = 0}$, aurreko garapenari **Maclaurinen garapena** deritzo**:**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \theta\in(0,1) \text{ egonik}$$

Taylor-en garapena

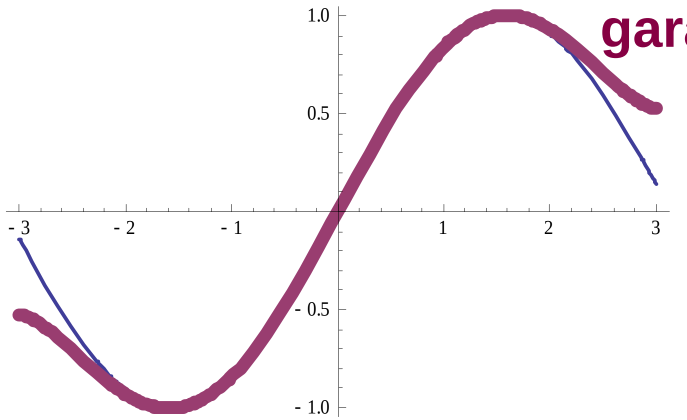
Adibidez: $f(x) = \sin(x)$

Maclaurinen garapena (5. ordenakoa):

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Grafikoki:

Maclaurinen garapena



Maximo eta minimo aurkikuntza

Atal honetan optimizazio zenbakizko metodoak (maximoak eta minimoak aurkitzeko) aurkeztuko dira.

f funtzio baten maximoa aurkitzean jarriko da arreta zeren minimoa topatzeko nahikoa izango baita "-*f*" funtzioaren maximoa lortzea. Hau da:

$$\min(f(x)) = -\max(-f(x))$$

Izan bedi *f* aldagai errealeko funtzio erreal bat $[a,b]$ tartean definitua eta mugatua, non *f* funtzioa maximo bat baitu $[a,b]$ tartean.

Maximo eta minimo aurkikuntza

Dikotomia metodoa:

Metodo honetan b-a, l_1, l_2, … , l_k,….. luzeradun $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\ \ldots\supset[a_k,b_k]\ldots$ tarteko segida eraiki nahi da, non tarte guztietan baitago f funtzioak $M=f(\hat{x})$ balio maximoa lortzen duen $\hat{x}$ balioa.

Kontsidera ditzagun $[a,b]$ tarteko x_1 eta x_2 bi puntu, simetrikoki kokatuz tartearen zentroarekiko, honela definituz:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

non $\delta>0$

Maximo eta minimo aurkikuntza

Orduan,

$$f(x_1) > f(x_2) \longrightarrow \hat{x} \in [a, x_2]$$

$$f(x_1) < f(x_2) \longrightarrow \hat{x} \in [x_1, b]$$

Bi kasuetan $[a_1,b_1]$ ($[a, x_2]$ edo $[x_1, b]$) tarte berri bat definituko da honako luzerarekin:

$$l_1 = \frac{l}{2} + \frac{\delta}{2} \text{ non } l = b\text{-}a$$

Prozedura errepikatuz, $[a_1,b_1]$ hasiz, $[a_2,b_2]$ tarte berri bat lortuko da honako luzerarekin:

$$l_2 = \frac{l_1}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{l}{4} + \delta\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

non $\hat{x} \in [a_2, b_2]$

Maximo eta minimo aurkikuntza

Prozedura n aldiz errepikatuz, $[a_n,b_n]$ tarte lortuko da honako luzerarekin

$$l_n = \frac{l}{2^n} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

non $\hat{x} \in [a_n, b_n]$

Azkenean, $\hat{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$ gisa balio hartuko da eta $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ izango da f -ren balio maximoa $[a,b]$ tartean