MATEMATIKA DISKRETUA
2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

Erik Alonso González

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)

Aurkibidea

1. Multzoak
2. Eragiketak multzoekin
3. Multzoen biderkadura kartesiarra
4. Aplikazioak
5. Zenbaki osoak eta zatidura
6. Erlazio bitarrak
7. Baliokidetasun-erlazioak
8. Ordena-erlazioak
9. Saretxoak eta multzo ordenatuak
10. Indukzio-printzipioa
11. Proposatutako ariketak

Aurkibidea

1. Multzoak
   - Multzo-kontzeptua
   - Zenbakizko multzoak
   - Sinbolo erabilgarriak
   - Pertenentzia eta berdintasun erlazioak
   - Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak
   - Multzo hutsa
   - Multzo osagarria
   - Venn-en diagramak

Multzo-kontzeptua I

Sarrera

- XI. mendearen amaieran, multzo teoriaren azterketaren sortzailea izan zen George Cantor filosofo eta matematikariak multzo bat honela definitu zuen: “oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma”
- Beranduago, Bertrand Russell-ek honako paradoxa hau aurkeztu zuen: Izan bedi A, bere buruaren elementuak ez diren multzo guztien multzoa. A bere buruaren elementua da ala ez? Erantzuna kontraesan bat da.
- George Cantor-ek ezarritako multzoaren gainean, Bertrand Russell-en paradoxaren intzidentziak honako multzoaren kontzeptu hau ezartzera bultzatzen du.

Multzo-kontzeptua II

1.1. Definizioa

- Multzo bat, oso bat bezala sortu daitekeen eta gure ulermenak bereizten dituen objektu definituen bilduma da, non ez den bere buruaren elementu bat bezala ulertzen.
- Multzoak letra larriekin adieraziko dira eta elementuak xeheekin.
- Multzo bat ondo definituta dagoela diogu, baldin eta irizpide bat badugu ezagutzeko elementu bat multzoaren barnean dagoen ala ez. Multzoak hedaduraz edo edukieraz defini daitezke.

Multzoak
Eragiketak multzoekin
Multzoen biderkadura kartesiarra
Aplikazioak
Zenbaki osoak eta zatidura
Erlazio bitarrak
Baliokidetasun-erlazioak
Ordena-erlazioak
Saretxoak eta multzo ordenatuak
Indukzio-printzipioa
Proposatutako ariketak
Multzo-kontzeptua
Zenbakizko multzoak
Sinbolo erabilgarriak
Pertenentzia eta berdintasun erlazioak
Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak
Multzo hutsa
Multzo osagarria
Venn-en diagramak

Multzo-kontzeptua III

1.1. Definizioa

- Multzo bat hedatuz definituta dagoela diogu, baldin eta haren elementuak komaz banatuta edo giltzen artean kokatuz adierazten badira.
- Multzo bat edukieraz definituta dagoela diogu, baldin eta multzoko elementuek soilik betetzen duten propietate baten bidez definituta badago.
- Multzo bat finitua dela diogu, elementu-kopuru finitua badu. Aurkako kasuan infinitu deritzo. A multzo finitu baten elementu-kopurua n(A) adieraziko da.

Multzo-kontzeptua IV

1.1. Definizioa

- Horrela, adibidez, bokalen V multzoa hedaduraz a,e,i,o,u definituko da eta zenbaki bikoitien P multzoa edukieraz honako propietate karakteristiko honen bidez definituko da: x, P-ren elementua da baldin eta soilik baldin, x zenbaki bikoitia bada. V multzo finitua da eta P infinitua.

Zenbakizko multzoak

Zenbakizko multzoak

- Matematikaren garapenean garrantzi handikoak izango dira honako multzo infinitu hauek:
  - $\mathbb{N}$ Zenbaki arrunten multzoa
  - $\mathbb{Z}$ Zenbaki osoen multzoa
  - $\mathbb{Q}$ Zenbaki arrazionalen multzoa
  - $\mathbb{R}$ Zenbaki errealen multzoa
  - $\mathbb{C}$ Zenbaki konplexuen multzoa

Sinbolo erabilgarriak

Sinbolo erabilgarriak

- Multzoen teorian zenbait sinbolo, batzuk logika matematikotik hartuta, esandako teoria garatzen lagunduko dute. Honako taula honetan gehien erabilitakoak agertzen dira:

Sinboloa	Esanahia
$\vee$	edo
$\wedge$	eta
$\Rightarrow$	orduan
$\Leftrightarrow$	baldin eta soilik baldin
$\forall$	edozeinerako
$\exists$	Existitzen da bat gutxienez
$\exists!$	Existitzen da bakarra
$\nexists$	Ez da existitzen
$/$	non
$:$	Egiaztatzen du

Pertenentzia eta berdintasun erlazioak

1.2. Definizioa

- x elementu bat A multzoan badago $x \in A$ adieraziko da eta "x elementua A multzoaren barnean dago" irakurriko da. x elementu bat A multzoan ez badago $x \notin A$ adieraziko da eta "x elementua ez dago A-ren barnean" irakurriko da.
- A multzo baten x edozein elementu B multzoan badago eta B-ren elementu bakoitza A multzoan badago orduan A eta B multzo berdina dira eta $A = B$ denotatuko da.
- Horrela, adibidez, P zenbaki bikoitien multzoa bada $8 \in P$ eta $7 \notin P$ izango dugu.

Partekotasun-erlazioa eta azpimultzoak

1.3. Definizioa

- A multzo bat B beste multzo batean sartuta dagoela diogu, A$\subset$B denotatuz, baldin eta A-ren edozein elementu B-ren barnean badago.
- A multzoa B multzoan sartua badago, A, B-ren azpimultzoa edo, A, B-ren zati bat dela diogu. A ez badago B multzoan sartuta, A$\not\subset$B denotatuko da.
- Logika matematikoaren terminoetan, A$\subset$B adierazpenak X$\in$A $\Rightarrow$ X$\in$B esan nahi du eta gainera A=B $\Leftrightarrow$ A$\subset$B $\wedge$ B$\subset$A.
- Horrela, adibidez, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eta $\mathbb{C}$ zenbakizko multzoetarako honako partekotasun kate hau egiaztatuko da: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Multzo hutsa

Sarrera

- Kontsidera dezagun A multzo bat eta defini dezagun $\phi_A = \{x \in A \ / \ x \notin A\}$ multzoa. ϕ_A multzoak ez du elementurik eta A multzoari elkartutako multzo hutsa deritzo.
- Multzo huts bakarra existitzen da, hots, hartutako A multzoarekiko independentea da multzo hutsaren definizioa. Benetan, B bada beste multzo bat eta $\phi_B = \{x \in B \ / \ x \notin B\}$ bada B multzoari elkartutako multzo hutsa, berehalakoa da $\phi_A \subset \phi_B$ eta $\phi_B \subset \phi_A$ ziurtatzea, hau da $\phi_A = \phi_B$.

1.4. Definizioa

- Elementuak ez dituen ϕ multzo bakarrari multzo huts deritzo.
- A edozein multzo izanik, $\phi \subset A$ egiaztatuko da.

Multzo osagarria

1.5. Definizioa

- Izan bitez A eta E bi multzo, non A⊂E baita.
- Honako A' multzo honi, A-ren multzo osagarria E-rekiko deritzo:

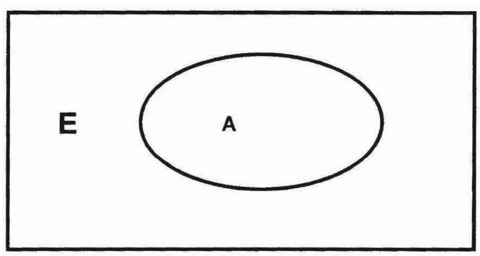
$$A'=\{x \in E \ / \ x \notin A\}$$

- Horrela, adibidez, $A=\{2,4,6,8\}$ eta $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ badira, orduan $A'=\{1,3,5,7,9\}$ izango da.
- $\mathbb{Q}$-ren osagarria $\mathbb{R}$-rekiko, zenbaki irrazionalen multzoa da.

Venn-en diagramak

Venn-en diagramak

- Multzoak kurba itxi ganbilez mugatutako planoko eremuen bidez adieraz daitezke. Adierazpen hauei Venn-en diagrama deritze.



A⊂E

Aurkibidea

2. Eragiketak multzoekin
   - Bildura
   - Ebakidura
   - Diferentzia
   - Oinarrizko propietateak
   - Berretura multzoa
   - Multzo baten partiketa

Eragiketak multzoekin

Sarrera

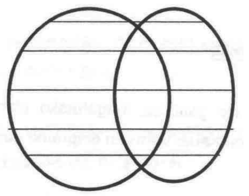
- Multzoen arteko eragiketen bidez multzoak konbina daitezke multzo berriak sortuz. Bildura ($\cup$), ebakidura ($\cap$) eta diferentzia ($-$) eragiketak aztertuko ditugu.

Bildura

2.1. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren bildura A∪B denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean edo B-ren barnean baitaude.

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

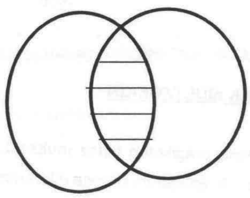


Ebakidura

2.2. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren ebakidura A∩B denotaturiko beste multzo bat izango da, non haren elementuak A-ren barnean eta B-ren barnean baitaude.
- $A \cap B = \phi$ bada A eta B multzo disjuntuak direla diogu.

$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

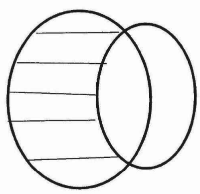


Diferentzia

2.3. Definizioa

- Izan bitez A eta B bi multzo. A eta B-ren diferentzia A-B denotaturiko beste multzoa izango da, non haren elementuak A-ren barnean baitaude, baina ez B-n.
- A⊂E badago, orduan A'=E-A egiaztatuko da.
- Problema konkretu bateko multzo guztien elementuak dituen E multzo bati erreferentzia-multzo edo multzo unibertsal deritzo.

$A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



Oinarrizko propietateak I

2.4. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P edozein azpimultzo izanik, honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$(P')' \equiv P \qquad (1.p)$$

$$\phi' \equiv E \qquad (2.p)$$

$$E' \equiv \phi \qquad (3.p)$$

Oinarrizko propietateak II

2.5. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup \phi \equiv P \tag{4.p}$$
$$P \cup E \equiv E \tag{5.p}$$
$$P \cup P \equiv P \tag{6.p}$$
$$P \cup Q \equiv Q \cup P \tag{7.p}$$
$$(P \cup Q) \cup R \equiv P \cup (Q \cup R) \tag{8.p}$$
$$P \cup P' \equiv E \tag{9.p}$$

Oinarrizko propietateak III

2.6. Proposizioa

- Izan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cap \phi \equiv \phi \tag{10.p}$$
$$P \cap E \equiv P \tag{11.p}$$
$$P \cap P \equiv P \tag{12.p}$$
$$P \cap Q \equiv Q \cap P \tag{13.p}$$
$$(P \cap Q) \cap R \equiv P \cap (Q \cap R) \tag{14.p}$$
$$P \cap P' \equiv \phi \tag{15.p}$$

Oinarrizko propietateak IV

2.7. Proposizioa

- fzan bedi E erreferentzia-multzo bat. E-ren P, Q eta R edozein azpimultzo izanik honako propietate hauek egiaztatuko dira:

$$P \cup (P \cap Q) \equiv P \qquad (16.p)$$

$$P \cap (P \cup Q) \equiv P \qquad (17.p)$$

$$P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R) \qquad (18.p)$$

$$P \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \qquad (19.p)$$

$$(P \cup Q)' \equiv P' \cap Q' \qquad (20.p)$$

$$(P \cap Q)' \equiv P' \cup Q' \qquad (21.p)$$

Oinarrizko propietateak V

2.8. Proposizioa

- P eta Q edozein multzo finitu izanik, honako hau egiaztatuko da:

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$$

Berretura multzoa

2.9. Definizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A-ren azpimultzo guztiek osatzen duten P(A) multzoari A-ren berretura multzoa deritzo.

2.10. Proposizioa

- Izan bedi A multzo ez huts bat:
- A multzo finitua bada eta n(A)=r orduan honako hau egiaztatuko da: $n[P(A)]=2^r$.

Multzo baten partiketa

Sarrera

- Izan bedi A multzo ez huts bat eta $F=\{S_i \mid i\in I\}$ A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat.

2.11. Proposizioa

- F, A-ren partiketa bat dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:
  1. $\bigcup_{i\in I} S_i = A$
  2. $\forall i,j\in I \;/\; i\neq j \quad S_i\cap S_j = \phi$
- 1. atala baino ez bada egiaztatzen, F, A-ren estaldura dela diogu.

Aurkibidea

3. Multzoen biderkadura kartesiarra

Multzoen biderkadura kartesiarra I

3.1. Definizioa

- A eta B bi multzoren biderkadura kartesiarra AxB denotaturiko honako multzo hau izango da:

$$AxB=\{(x,y)\ /\ x\in A \wedge y\in B\}$$

- AxB multzoko (x,y) elementuei bikote ordenatu deritze.

3.2. Definizioa

- A, B eta C hiru multzoren biderkadura kartesiarra AxBxC denotaturiko multzo hau izango da:

$$AxBxC=\{(x,y,z)\ /\ x\in A \wedge y\in B \wedge z\in C\}$$

- AxBxC multzoko (x,y,z) elementuei hirukote ordenatu deritze.

Multzoen biderkadura kartesiarra II

3.3. Definizioa

- A_1, A_2,... eta A_m, m multzoren biderkadura kartesiarra $A_1xA_2x...xA_m$ denotaturiko multzo hau izango da:

$$A_1xA_2x...xA_m=\{(x_1,x_2,...,x_m)\ /\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2... \wedge x_m \in A_m\}$$

- $A_1xA_2x...xA_m$ multzoko $(x_1,x_2,...,x_m)$ elementuei n-kote deritze.
- $A_1=A_2=...=A_m$ berdinak badira, orduan AxAx...xA multzoa A^m adieraziko da.
- Bereziki interesgarriak dira plano arrunta eta espazio arrunta adierazten dituzten $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoak, non $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoa baita.

Multzoen biderkadura kartesiarra III

3.4. Proposizioa

- A_1, A_2,... eta A_m multzo finituak badira honako hau egiaztatuko da:

$$n(A_1xA_2x...xA_m)=n(A_1)\cdot n(A_2)...n(A_m)$$

Aurkibidea

4 Aplikazioak
- Korrespondentziak
- Aplikazioak
- Zenbait aplikazio berezi
- Aplikazioen sailkapena
- Aplikazioen konposaketa
- Alderantzizko aplikazioa

Korrespondentziak I

4.1. Definizioa

Izan bitez A eta B bi multzo ez huts.

- AxB multzoko edozein G azpimultzori A-ren B gaineko korrespondentzia deritzo.
- A, B eta G multzoei korrespondentziaren hasiera multzo, helburu multzo eta grafo deritze hurrenez hurren.
- D⊂A multzoari, non x∈D elementu bakoitzarentzat y∈B elementu bat existitzen den (x,y)∈G izanik, korrespondentziaren definizio-eremu deritzo. Era berean, I⊂B multzoari, non y∈I bakoitzarentzat x∈A elementu bat existitzen den (x,y)∈G izanik, korrespondentziaren irudi edo balio-eremu deritzo.

Korrespondentziak II

4.1. Definizioa

- Korrespondentziak adierazteko f:A→B erabiliz gero, orduan (x,y)∈G badago "y, x-ren irudi f-ren arabera" dela esango da, eta y=f(x) denotatuko da. Gainera, korrespondentziaren definizio-eremua eta irudia edo balio-eremua honako era honetan adieraziko dira:

$$D(f)=\{x\in A \ / \ \exists y\in B: f(x)=y\}=\{x\in A \ / \ \exists y\in B: (x,y)\in G\}$$
$$Im(f)=\{y\in B \ / \ \exists x\in A: f(x)=y\}=\{y\in B \ / \ \exists x\in A: (x,y)\in G\}$$

Aplikazioak

4.2. Definizioa

- f:A→B korrespondentzia bat, aplikazio bat dela diogu baldin eta D(f)=A bada eta x∈D(f) bakoitzarentzat y∈Im(f) bakarra existitzen bada, non f(x)=y baita.
- Hots, A-ren B gaineko f aplikazio bat A-ren elementu bakoitzari B-ren elementu bakarra egokitzen dion erregela baten bidez definituko da.
- f aplikazio batentzat y=f(x) bada, orduan "y elementua x jatorrizkoaren irudia f-ren arabera" dela esango dugu.

Zenbait aplikazio berezi I

4.3. Definizioa

- $A \subset B$ bada, honako i_A:A→B aplikazio honi A-ren B gaineko inklusio aplikazio deritzo:

$$i_A(x)=x \quad \forall x \in A$$

4.4. Definizioa

- Honako I_A:A→A aplikazio honi A-ren identitate aplikazio deritzo:

$$I_A(x)=x \quad \forall x \in A$$

- Kontuan izan identitate aplikazioa, inklusio aplikazioaren kasu berezi bat dela.

Zenbait aplikazio berezi II

4.5. Definizioa

- Izan bedi $k \in B$ elementu bat. Honako f_k:A→B aplikazio honi aplikazio konstante deritzo:

$$f_k(x)=k \quad \forall x \in A$$

4.6. Definizioa

- Izan bedi A, E-ren azpimultzo bat. Honako c_A:E→$\{0,1\}$ aplikazio honi A-ren funtzio karakteristiko deritzo:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ badago} \\ 0 & x \in E\text{-}A \text{ badago} \end{cases}$$

Zenbait aplikazio berezi III

4.7. Definizioa

- Kontsidera ditzagun f:A→B aplikazio bat eta A-ren S azpimultzo bat. Honako f_s:S→B aplikazio honi f-ren murrizketa aplikazio S gainean deritzo:

$$f_s(x)=f(x) \qquad \forall x \in S$$

Aplikazioen sailkapena I

4.8. Definizioa

- f:A→B aplikazio bat injektiboa dela diogu baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \;/\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta A-ren jatorrizko desberdinei f-ren arabera B-ko irudi desberdinak egokitzen bazaizkie.

Aplikazioen sailkapena II

4.8. Definizioa

- 4.8 definizioa honako definizio honen baliokidea da:
- f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x_1, x_2 \in A \ / \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Hots, f:A→B aplikazio bat injektiboa da baldin eta B-ko irudi berdinei A-ren jatorrizko berdinak egokitzen bazaizkie f-ren arabera.

Aplikazioen sailkapena III

4.9. Definizioa

- f:A→B aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta Im(f)=B egiaztatzen bada.
- Hots, f:A→B aplikazio bat suprajektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza A-ren elementu baten irudia bada gutxienez. Sinbolikoki:

$$\forall y \in B : \exists x \in A \ / \ f(x) = y$$

Aplikazioen sailkapena IV

4.10. Definizioa

- f:A→B aplikazio bat bijektiboa da baldin eta injektiboa eta suprajektiboa bada.
- Hots, f:A→B aplikazio bat bijektiboa da baldin eta B-ren elementu bakoitza Aren elementu bakarraren irudia bada. Sinbolikoki:

$$\forall y \in B : \exists! x \in A \; / \; f(x)=y$$

Aplikazioen konposaketa

4.11. Definizioa

- Izan bitez f:A→B eta g:B→C bi aplikazio. Honako g∘f:A→C aplikazio honi f eta g-ren aplikazio konposatu deritzo:

$$g \circ f(x)=g[f(x)] \qquad \forall x \in A$$

- f:A→A aplikazio bat izanik, f∘f aplikazioa f^2 denotatuko da.
- 4.11 definizioa erabiliz erraz defini daiteke hiru edo aplikazio gehiagoren arteko konposaketa.

Alderantzizko aplikazioa

4.12. Definizioa

- Izan bedi f:A→B aplikazio bijektibo bat. B-ren y elementu bakoitzari A-ren x jatorrizkoa f-ren arabera egokitzen dion f^{-1}:B→A aplikazioari f-ren alderantzizko aplikazio deritzo.
- Kontuan izan $f \circ f^{-1} = I_B$ eta $f^{-1} \circ f = I_A$ egiaztatzen direla.

Aurkibidea

5 Zenbaki osoak eta zatidura
Zenbaki osoen zatidura
Zatitzaile komunetako handiena eta multiplo komunetako txikiena
Kongruentziak modulu m

Zenbaki osoen zatidura I

5.1. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$, non "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen duela diogu baldin eta c $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non b = ac baita. "a", "b"-ren zatitzailea dela ere esango da, edo "b", "a"-ren multiploa dela eta honela denotatuko da: $a|b$. "a" zenbakiak "b" zenbakia zatitzen ez badu, honela denotatuko da: $a\nmid b$.

5.2. Definizioa

- p>1 zenbaki arrunt bat lehena dela diogu baldin eta haren zatitzaile arrunt bakarrak 1 eta zenbaki bera badira. Aurkako kasuan konposatua deritzo.

Zenbaki osoen zatidura II

5.3. Proposizioa

- Izan bitez a, b, c $\in \mathbb{Z}$. Orduan, honako hau egiaztatuko da:
  1. $a|b$ bada eta $a|c$ bada, $a|(b+c)$ egiaztatuko da.
  2. $a|b$ bada, orduan $a|bc$ $\forall c \in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.
  3. $a|b$ bada eta $b|c$ bada, orduan $a|c$ egiaztatuko da. Kasu honetan, $a|(mb+nc)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ egiaztatuko da.

5.4. Proposizioa (aritmetikaren funtsezko teorema)

- Izan bedi z zenbaki oso bat 1 baino handiagoa. Orduan, z zenbakia era bakarrean idatziko da zenbaki lehen gisa, edo bi edo zenbaki lehen gehiagoren berreturen batura gisa.

Zenbaki osoen zatidura III

5.5. Proposizioa

- Izan bedi $z \in \mathbb{Z}$ zenbaki oso konposatu bat. Orduan, z zenbakiak $\sqrt{z}$ baino txikiagoa edo berdina den zatitzaile lehen bat izango du.

5.6. Proposizioa (Zatidura osoaren algoritmoa)

- Izan bitez a zenbaki oso bat eta b zenbaki oso positibo bat. p eta r bi zenbaki oso bakarrak existituko dira, non $a = pb + r$ den, $0 \leq r < b$ izanik.

5.7. Definizioa

- Aurreko proposizioan b zatitzailea da, a zatikizuna, p zatidura eta r hondarra.

z.k.h eta m.k.t I

5.8. Definizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$. $d|a$ eta $d|b$ betetzen dituen d zenbaki oso handienari a eta b-ren zatitzaile komunetako handiena deritzo eta honela denotatuko da:
$$d = \text{zkh}(a, b).$$

5.9. Proposizioa (Euclides-en algoritmoa)

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. $a = pb + r$ bada, non $0 \leq r < b$ den, honako hau egiaztatuko da:
$$\text{zkh}(a, b) = \text{zkh}(b, r).$$

5.10. Definizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$. a eta b berekiko lehenak dira baldin eta $\text{zkh}(a, b) = 1$ egiaztatzen bada.

z.k.h eta m.k.t II

5.11. Definizioa

- Izan bitez $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. $a_1, a_2, \dots, a_n$ binaka berekiko lehenak direla diogu baldin eta $zkh(a_i, a_j) = 1$ egiaztatzen bada, non $1 \leq i < j \leq n$ den.

5.12. Proposizioa (Bezout-en teorema)

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b berekiko lehenak dira, baldin eta soilik baldin $p,q \in \mathbb{Z}$ existitzen badira non honako hau egiaztatzen den: $ap + bq = 1$.

5.13. Definizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. a eta b-rekin zatigarria den zenbaki oso positibo txikienari a eta b-ren multiplo komunetako txikiena deritzo eta honela denotatuko da:

$$mkt(a, b)$$

z.k.h eta m.k.t III

5.14. Proposizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Honako hau egiaztatuko da:

$$ab = zkh(a, b)\, mkt(a, b)$$

5.15. Proposizioa

- Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. $zkh(a, b)=1$ bada, orduan $mkt(a, b)=ab$ egiaztatuko da.

Kongruentziak modulu m I

5.16. Definizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a eta b kongruente modulu m direla esango dugu, m zenbaki positibo bat delarik, baldin eta m|(a-b) egiaztatzen bada eta honela denotatuko da: a≡b (mod m).

5.17. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. Orduan honako hau egiaztatuko da: a≡b (mod m) baldin eta soilik baldin k $\in \mathbb{Z}$ existitzen bada, non a=b+km den.

Kongruentziak modulu m II

5.18. Proposizioa

- Izan bitez a, b $\in \mathbb{Z}$. a≡b (mod m) eta c≡d (mod m) badira, honako hau egiaztatuko da:

$$a+c \equiv b+d \pmod{m}$$
$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

- Hau da, modulu berdinekiko kongruentziak gaika batu eta biderkatu daitezke. Hots, batura eta biderkadura bateragarriak dira kongruentzia-erlazioarekin.

Aurkibidea

6 Erlazio bitarrak
  Erlazio bitarraren kontzeptuak
  Erlazio bitarren propietateak

Erlazio bitarraren kontzeptuak

6.1. Definizioa

- AxA-ko G edozein azpimultzori A gaineko erlazio bitar deritzo. Hots, erlazio bitar bat A-ren A gaineko korrespondentzia bat da.
- R ikurraren bidez adierazten bada erlazio bitarra, orduan (x,y)$\in$G badago "x, y-rekin erlazionatuta dago" esango dugu eta xRy denotatuko da. (x,y)$\notin$G bada "x ez dago y-rekin erlazionatuta" esango dugu eta x$\not R$y denotatuko da. Gainera R erlazio bitarra karakterizatzen duen G azpimultzoari R-ren grafo deritzo.

Erlazio bitarren propietateak I

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat, haren grafoa G izanik.

6.2. Definizioa

- R bihurkorra dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in A \qquad xRx$$
$$\text{edo}$$
$$\forall x \in A \qquad (x,x) \in G$$

6.3. Definizioa

- R simetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \Rightarrow yRx$$
$$\text{edo}$$
$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$$

Erlazio bitarren propietateak II

6.4. Definizioa

- R antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$$
$$\text{edo}$$
$$\forall x,y \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow x=y$$

6.4. Definizioa (Beste era bat)

- R antisimetrikoa dela diogu, baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow x\not{R}y \vee y\not{R}x$$
$$\text{edo}$$
$$\forall x,y \in A \qquad x \neq y \Rightarrow (x,y) \notin G \vee (y,x) \notin G$$

Erlazio bitarren propietateak III

6.5. Definizioa

- R iragankorra dela diogu baldin eta honako hau egiaztatzen bada:

$$\forall x,y,z \in A \qquad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

edo

$$\forall x,y,z \in A \qquad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$$

Aurkibidea

7 Baliokidetasun-erlazioak
  Baliokidetasun-erlazioen kontzeptua
  Baliokidetasun klaseak
  Zatidura multzoa

Baliokidetasun-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat.

7.1. Definizioa

- R erlazio bitarra, baliokidetasun-erlazioa dela diogu, baldin eta bihurkorra, simetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, xRy bada "x baliokide y" esango da.
- Baliokidetasun-erlazioak $\sim$ ikurrarekin adieraziko dira.

Baliokidetasun klaseak I

Izan bedi A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazio bat.

7.2. Definizioa

- Kontsidera dezagun a$\in$A elementu bat. Honako A-ren C(a) multzo honi "a elementuaren baliokidetasun klase, modulu $\sim$" deritzo:

$$C(a)=\{x\in A \ / \ x\sim a\}$$

- Baliokidetasun klaseen beste notazio batzuk honako hauek dira: $[a]$ edo $\bar{a}$.

Baliokidetasun klaseak II

7.3. Proposizioa

- A gainean definitutako $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagozkion baliokidetasun klaseak kontsideratzen badira, honako propietate hauek egiaztatuko dira:
  1. $\forall x \in A \quad C(x) \neq \emptyset$
  2. $\forall x,y \in A \quad x \sim y \Rightarrow C(x) = C(y)$
  3. $\{C(x) \ / \ x \in A\}$ A-ren partiketa bat da.
- 2. atalaren ondorioz, C(x), baliokidetasun klase bat, klasearen adierazle deritzon haren edozein elementuren bidez zehaztu daiteke.

Zatidura multzoa

7.4. Definizioa

- Honako multzo honi, $\sim$ baliokidetasun-erlazioari dagokion zatidura multzo deritzo eta $A/\sim$ denotatuko da:

$$A/\sim = \{C(x) \ / \ x \in A\}$$

- Hots, $A/\sim$ zatidura multzoa $\sim$ moduluko baliokidetasun klaseekin osatuta dago eta 7.3 proposizioaren 3. atalaren arabera A-ren partiketa bat.

Aurkibidea

8. Ordena-erlazioak
   - Ordena-erlazioen kontzeptua
   - Elementu nabarmenak
   - Multzo bornatuak

Ordena-erlazioen kontzeptua

Izan bedi A gainean definitutako R erlazio bitar bat.

8.1. Definizioa

- R erlazio bitarra, ordena-erlazioa dela diogu, baldin eta R bihurkorra, antisimetrikoa, eta iragankorra bada. Gainera, xRy bada "x, y-ren aurreko" esango da.
- Ordena-erlazioak $\preccurlyeq$ ikurrarekin adieraziko dira.

8.2. Definizioa

- "$\preccurlyeq$" erlazio bitar batez horniturIko A multzo ez huts bati, multzo ordenatu deritzo. Gainera, $x \preccurlyeq y$ edo $y \preccurlyeq x$ egiaztatzen bada, x eta y A-ren edozein elementurentzat, orduan A multzo guztiz ordenatua dela esango dugu.

Elementu nabarmenak I

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" erlazio bitar baten bidez eta kontsidera dezagun A-ren H azpimultzo ez huts bat.

8.3. Definizioa

- m$\in$H elementu bat H-ren minimo bat izango da, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad m \preccurlyeq x$$

8.4. Proposizioa

- H-ren minimo bat existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren minimoaren kontzeptua izango dugu.

Elementu nabarmenak II

8.5. Definizioa

- i$\in$A elementu bat H-ren behe-borne bat (edo minorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad i \preccurlyeq x$$

- Kontuan izan:
  1. i$\in$A H-ren behe-borne bat bada eta i'$\in$A elementuak i'$\preccurlyeq$i baldintza egiaztatzen badu, orduan i' ere H-ren behe-borne bat izango da.
  2. H-k m$\in$H minimo bat badu, orduan m H-ren behe-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{\imath}\in$H behe-borne bat badu, orduan $\hat{\imath}$ H-ren minimoa da.

Elementu nabarmenak III

8.6. Definizioa

- M∈H elementu bat H-ren maximoa dela diogu, baldin eta honako baldintza hau egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq M$$

8.7. Proposizioa

- H-ren maximoa existitzen bada, hau bakarra da.
- Bereziki, H=A kontsideratuz A-ren maximoaren kontzeptua izango dugu.

Elementu nabarmenak IV

8.8. Definizioa

- s∈A elementu bat H-ren goi-borne bat (edo maiorante bat) dela diogu, baldin eta honako baldintza egiaztatzen bada:

$$\forall x \in H \qquad x \preccurlyeq s$$

- Kontuan izan:
  1. s∈A H-ren goi-borne bat bada eta s'∈A elementuak $s \preccurlyeq s'$ baldintza egiaztatzen badu, orduan s' ere H-ren goi-borne bat izango da.
  2. H-k M∈H maximo bat badu, orduan M H-ren goi-borne bat izango da.
  3. H-k $\hat{s}$∈H goi-borne bat badu, orduan $\hat{s}$ H-ren maximoa da.

Elementu nabarmenak V

8.9. Definizioa

- H-ren behe-borne guztien multzoak maximoa badu, orduan maximo horri H-ren infimo deritzo, eta inf(H) denotatuko da.

8.10. Proposizioa

- H-k minimo bat badu, orduan inf(H)=m egiaztatuko da.

8.11. Definizioa

- H-ren goi-borne guztien multzoak minimo bat badu, orduan minimo horri H-ren supremo deritzo, eta sup(H) denotatuko da.

8.12. Proposizioa

- H-k M maximo bat badu, orduan sup(H)=M egiaztatuko da.

Multzo bornatuak

8.13. Definizioa

- H behe-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez behe-borne bat badu.

8.14. Definizioa

- H goi-bornatua dela diogu, baldin eta H-k gutxienez goi-borne bat badu.

8.15. Definizioa

- H bornatua dela diogu, baldin eta goi-bornatua eta behe-bornatua bada.

Aurkibidea

9 Saretxoak eta multzo ordenatuak
Saretxoak eta multzo ondo ordenatuak

Saretxoak eta multzo ondo ordenatuak

Izan bedi A multzo ordenatu bat "$\preccurlyeq$" ordena-erlazioaren arabera.

9.1. Definizioa

- A saretxo bat dela diogu baldin eta $x,y \in A$ edozein elementurako $H=\{x,y\}$ multzoak infimoa eta supremoa dituela egiaztatzen bada.

9.2. Definizioa

- A multzoa ondo ordenatua dela diogu baldin eta A-ren H edozein azpimultzo ez-hutsak minimoa badu.

Aurkibidea

10 Indukzio-printzipioa
Indukzio-printzipioa

Indukzio-printzipioa

Izan bedi $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten multzoa $\preccurlyeq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioarekin. $\mathbb{N}$ multzo ondo ordenatua da esandako ordena-erlazioarekiko eta indukzio-printzipio deritzon honako emaitza hau egiaztatzen da:

10.1. Proposizioa

- Izan bedi P(n) n zenbaki arruntei dagozkien propietate bat, orduan honako emaitza hau egiaztatzen bada:
  1. n_0 zenbaki arrunt bat existituko da, non $P(n_0)$ egia den.
  2. $k \geq n_0$ edozein zenbaki arrunterako, P(k) egia bada P(k+1) ere egia izango da.
- P(n) propietatea egia da n edozein zenbaki arrunterako.

Aurkibidea

11 Proposatutako ariketak
Proposatutako ariketak

Proposatutako ariketak

1. Ariketa

- 140 ikasletik, 120-k gutxienez matematika (M), fisika (F) edo kimika (K) ikasten dute. Gainera, 80 ikaslek matematika ikasten dute, 75-ek fisika, 50-ek kimika, 40-k matematika eta fisika, 35-ek matematika eta kimika eta 20-k fisika eta kimika.

  Honakoa hau kontuan izanik:
  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

  Aurkitu:
  1. Hiru irakasgaiak batera ikasten dituzten ikasle-kopurua.
  2. Matematika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Fisika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua. Kimika bakarrik ikasten duten ikasle-kopurua.
  3. Matematika eta fisika baina ez kimika ikasten duten ikasle-kopurua.
  4. Matematika eta kimika baina ez fisika ikasten duten ikasle-kopurua.
  5. Fisika eta kimika baina ez matematika ikasten duten ikasle-kopurua.

Proposatutako ariketak

2. Ariketa

1. Aurkitu A eta B bi multzo finitu honako hau jakinik:
   A–B=$\{1,2,3,4\}$; B–A=$\{5,6,7\}$; A∩B=$\{8,9\}$
2. Aurkitu C eta D bi multzo finitu honako hau jakinik:
   C–D=$\{1,2,4\}$; D–C=$\{7,8\}$; C∪D=$\{1,2,4,5,7,8,9\}$

Proposatutako ariketak

3. Ariketa

- Izan bedi E=$\{1,2,3,4,\ldots,10\}$ multzoa eta kontsidera ditzagun honako E-ren azpimultzo hauek:
  A=$\{1,2,3,4,5\}$, B=$\{1,2,4,8\}$, C= $\{1,2,3,5,7\}$, D = $\{2,3,5,8\}$
  Aurkitu:
  1. (A∪B)∩C
  2. (C∩D)'
  3. (A∪B)–C
  4. (A∪B)–(C∩D)
  5. C'∪D'

Proposatutako ariketak

4. Ariketa

- 25 liburu erabiliz irakasle batek hiru gai aztertu nahi ditu: A (konpilagailuak), B (datu-egiturak) eta C (itzultzaileak). Gai horiei buruzko liburu-kopurua honako datu hauekin bat datorrela jakinik:

  $n(A)=9$, $n(B)=13$, $n(C)=12$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=3$, $n(B\cap C)=6$ eta $n(A\cap B\cap C)=2$

  Aurkitu:

  1. Gutxienez gai bati buruzko liburu-kopurua.
  2. Zenbatek ez dute horrelako gai bat ere aztertzen?
  3. Soilik itzultzaileei buruz diren liburu-kopurua.
  4. Soilik konpilagailuei buruz diren liburu-kopurua.

Proposatutako ariketak

5. Ariketa

- Kontsidera ditzagun $\mathbb{Z}$-ren honako azpimultzo hauek:

  $A=\{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  $B = \{2x+1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $C = \{2x-1 \ / \ x\in\mathbb{Z}\}$

  $D = \{2x+3 \ / \ x\in\mathbb{N}\}$

  Aztertu honako emaitzen egiatasuna::

  1. $A\subset B$ eta $A\subset D$
  2. $A=B$ eta $B=C$
  3. $1\in A$, $-3\in C$, $-4\in B$, $6\notin D$
  4. $A\cup D=A$ eta $A\cap D=D$

Proposatutako ariketak

6. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. (A∩B) ∪ (A∩B')=A
  2. A∪B=(A∩B') ∪ (A'∩B) ∪ (A∩B)
  3. (A∩B) ∪ [B ∩ ((C∩D) ∪ (C∩D'))]=B∩(A∪C)

7. Ariketa

- Oinarrizko propietateak erabiliz froga itzazue honako berdintza hauek:
  1. A-(A∩B)=A-B
  2. (A-B)-C=A-(B∪C)

Proposatutako ariketak

8. Ariketa

- A=[0,5] eta B=[2,8)∈ℝ badira, aurkitu:
  1. A∩B
  2. A∪B
  3. A' eta B'
  4. A-B eta B-A

MATEMATIKA DISKRETUA

2. GAIA - MULTZOAK ETA ERLAZIO BITARRAK

Erik Alonso González

Matematika Aplikatua Saila
Bilboko Ingeniaritza Eskola (Industria Ingeniaritza Teknikoa)
Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)