MATEMATIKA APLIKATUA

KALKULUA

AZTERKETA PARTZIALA. 2019ko martxoaren 29an

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ (ez ebatzi berehalako integral bat bezala)

(2 puntu)

---

a) $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx = \left\| \begin{array}{ll} t=\tan x & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}(t+1)}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)(t+1)}$$

Zatiki sinpleetan deskonposatuz:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t+1)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{C}{(t+1)}$$
$$t^2 = (At+B)(t+1) + C(1+t^2)$$
$$t^2 = At^2 + At + Bt + B + C + Ct^2$$

Koefizienteak berdinduz:

$$\left. \begin{array}{l} t^2 \to 1 = A+C \\ t \to 0 = A+B \\ \text{t. i.} \to 0 = B+C \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{array} \right.$$

Beraz:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(t+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{4}\int \frac{2t}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(t\right) + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) + C = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\tan^2 x+1\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln\left(\tan x+1\right) + C}$$

b) Zatika integratuz:

$$I = \int \arcsin x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = (\arcsin x)' dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y = \arcsin x & \Rightarrow & x = \sin y & \overset{D}{\Rightarrow} & 1 = \cos y \cdot y' & \Rightarrow \\ y' = \dfrac{1}{\cos y} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin x - \int x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (-2)x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx =$$

$$= x\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C = \boxed{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

2. Ariketa

Kalkulatu hurrengo kurbek mugatutako [D] eskualdearen perimetroa:

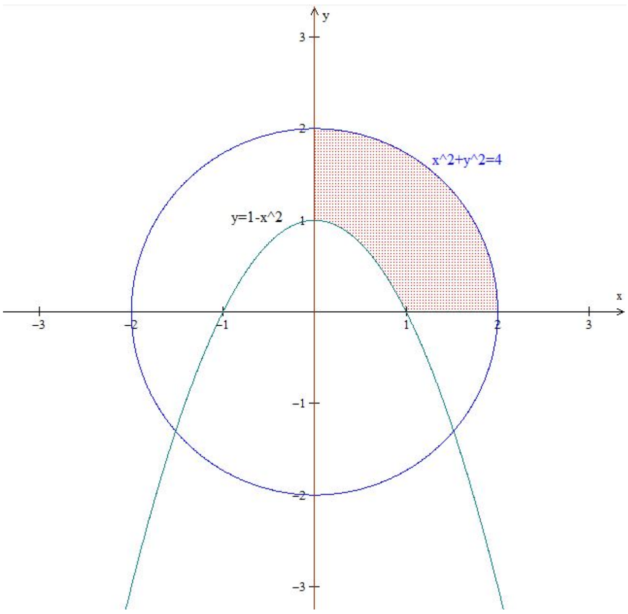
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 1-x^2,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\right\}$$

Oharra: edozein luzera kalkulatzeko integral mugatua erabili behar da.

(3 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, D domeinuaren adierazpen grafikoa irudikatu egiten dugu. Lehenengo koadrantean ($y\ge 0,\quad x\ge 0$) parabolaren ($y\ge 1-x^2$) eta zirkunferentziaren ($x^2+y^2\le 4$) arteko eskualdea da hain zuzen ere *D* domeinu laua.



Perimetroa kalkulatzeko, eskualdea lau zatitan banatuko dugu:

- L_1: lehenengo koadranteko zirkunferentzia laurdenaren luzera.
- L_2: lehenengo koadranteko parabola zatiaren luzera.
- L_3: *D* eskualdea mugatzen duen *x* ardatzaren zatiaren luzera.
- L_4: *D* eskualdea mugatzen duen *y* ardatzaren zatiaren luzera.

L_1 kalkulatzeko, zirkunferentziaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$x^2+y^2\le 4 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{4-x^2} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \quad\Rightarrow\quad (y')^2=\frac{x^2}{4-x^2}$$

L_1-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_1=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\left[2\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2=2\frac{\pi}{2}=\boxed{\pi}$$

L_2 kalkulatzeko, parabolaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$y=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x \quad\Rightarrow\quad (y')^2=4x^2$$

L_2-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_2=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

Integral mugagabea metodo alemaniarra erabiliz ebatziko dugu eta gero [0,1] tartean ebaluatuko dugu L_2 lortzeko.

$$I_1=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{1+4x^2}+M\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Espresio guztia deribatuz

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}=A\sqrt{1+4x^2}+(Ax+B)\frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}+\frac{M}{\sqrt{1+4x^2}} \quad\Rightarrow\quad 1+4x^2=A\left(1+4x^2\right)+4x(Ax+B)+M$$

Ekuazio sistema ebatzi behar dugu koefiziente indeterminatuak lortzeko.

$x^2:\quad 4=4A+4A \quad\Rightarrow\quad A=1/2$

$x\ :\quad 4B=0 \quad\Rightarrow\quad B=0$

$x^0:\quad 1=A+M \quad\Rightarrow\quad M=1/2$

$$I_1=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|+C$$

Beraz, L_2 honela geratzen da:

$$L_2=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right|=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

L_3-ren kalkulua egiteko, y=0 zuzena integratu beharra dago:

$$L_3=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1}\,dx=\boxed{1}$$

L_4-ren kalkulua egiteko, x=0 zuzena integratu beharra dago, kasu honetan *y*-rekiko integratuko dugu:

$$L_4 = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1}\,dy = \boxed{1}$$

Azkenik,

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \pi + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| + 2}$$

3. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena honako integral honetan:

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{4-\sqrt{y}} f\left(x,y\right)dx+\int_1^2 dy\int_{2-\sqrt{-(y-2)}}^{2+\sqrt{-(y-2)}} f\left(x,y\right)dx$$

eta lortutako integrala erabiliz kalkulatu integrazio domeinuaren azalera.

(2 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, integrazio domeinua identifikatu egiten dugu:

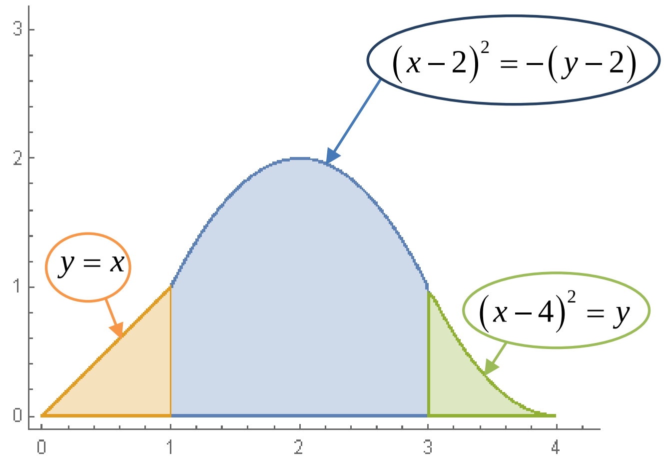
Lehenengo integralaren limiteak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=0\rightarrow \text{zuzena} \\ y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ x=y\rightarrow \text{zuzena} \\ x=4-\sqrt{y}\rightarrow\left(x-4\right)=-\sqrt{y}\rightarrow\left(x-4\right)^2=y\rightarrow \text{OY ardatzarekiko paraleloa den ardatza duen parabola,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{erpina (4,0) puntuan dago} \end{cases}$$

Bigarren integralaren limiteak, aldiz, hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ y=2\rightarrow \text{zuzena} \\ \left.\begin{array}{l} x=2-\sqrt{-\left(y-2\right)} \\ x=2+\sqrt{-\left(y-2\right)} \end{array}\right\}\rightarrow\left(x-2\right)=\pm\sqrt{-\left(y-2\right)}\rightarrow\underbrace{\left(x-2\right)^2=-\left(y-2\right)}_{\downarrow} \\ \qquad\qquad \text{OY ardatzarekiko paraleloa den simetria ardatza duen parabola, erpina (2,2) puntuan dago} \end{cases}$$

Beraz, domeinua hurrengoa da:



y lehenengo integrazio aldagaitzat hartuz gero domeinua ez da erregularra eta hiru domeinu partzial erregularretan banandu beharra dago:

- Lehenengo domeinu partzialean *x* aldagaiaren mugak 0 eta 1 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y = x$ zuzena.
- Bigarren domeinu partzialean *x* aldagaiaren mugak 1 eta 3 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $(x-2)^2 = -(y-2)$ parabola.
- Hirugarren domeinu partzialean x aldagaiaren mugak 3 eta 4 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y = (x-4)^2$ parabola.

Beraz:

$$\boxed{I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{2-(x-2)^2} f(x,y)\,dy + \int_3^4 dx \int_0^{(x-4)^2} f(x,y)\,dy}$$

Azaleraren kalkulua orduan hurrengo eran egin daiteke:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^3 dx \int_0^{2-(x-2)^2} dy + \int_3^4 dx \int_0^{(x-4)^2} dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 \left(2-(x-2)^2\right) dx + \int_3^4 (x-4)^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 + \left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_3^4 = \frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{25}{6}u^2}$$

4. Ariketa

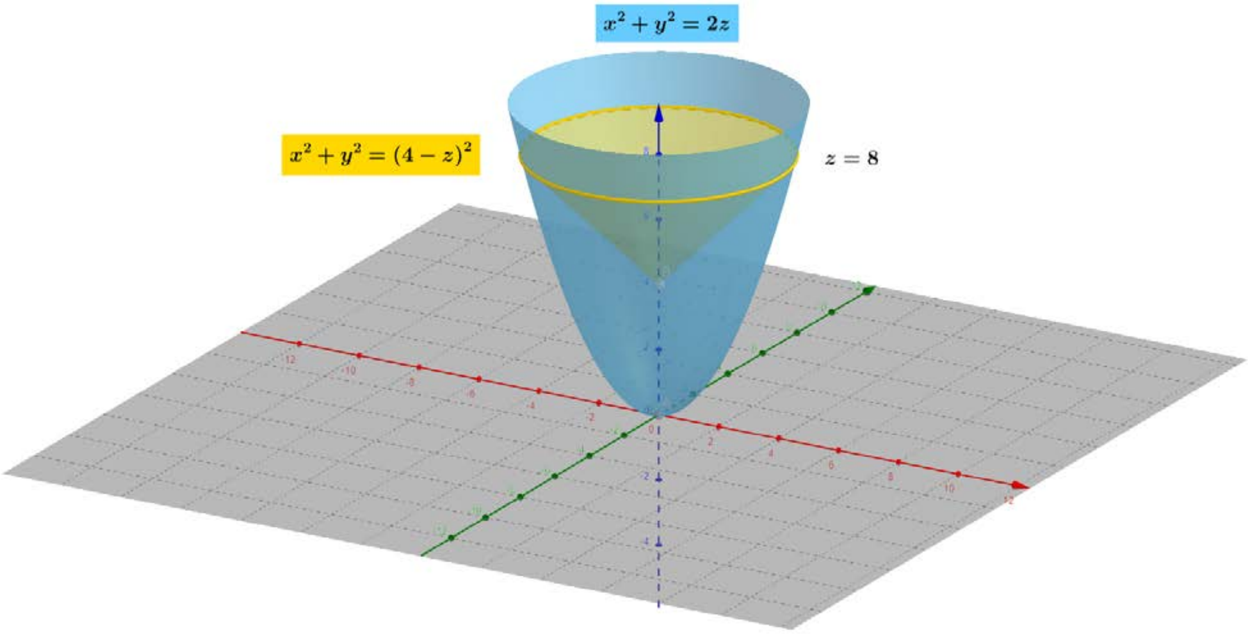
Integral hirukoitzak erabiliz, hurrengo gainazalek mugatutako [C] gorputz homogeneoaren grabitate zentroa kalkulatu:

$$x^2 + y^2 - (4-z)^2 \geq 0 \;\; (z \geq 4), \quad x^2 + y^2 - 2z \leq 0$$

(3 puntu)

Ebazpena:

Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez kono bat eta paraboloide bat ditugu.



Konoak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa ($x^2 + y^2 \leq 2z$) eta konoaren kanpokoa ($x^2 + y^2 \geq (4-z)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

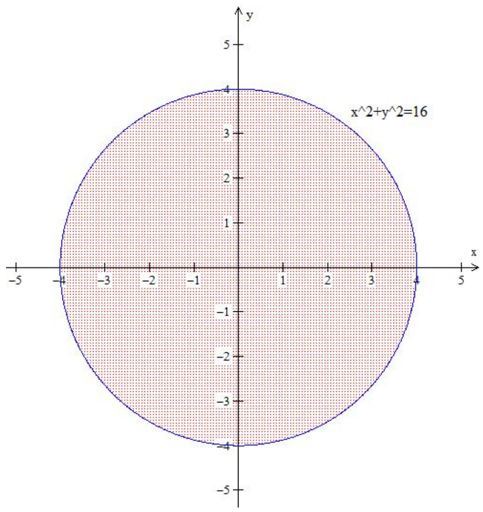
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2=(4-z)^2 \end{array}\right\} 2z=(4-z)^2 \;\Rightarrow\; 2z=z^2-8z+16 \;\Rightarrow\; z^2-10z+16=0 \;\Rightarrow\; z=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 1\cdot 16}}{2}$$

$$\Rightarrow\; z=\frac{10\pm 6}{2} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \boxed{z=8} \\ z=2 \end{array}\right.$$

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \\ J(\rho,\theta,z)=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=2z \quad\Rightarrow\quad \rho^2=2z \quad\Rightarrow\quad z=\rho^2/2 \\ x^2+y^2=(4-z)^2 \quad\Rightarrow\quad \rho^2=(4-z)^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \boxed{z=4+\rho} \\ z=4-\rho \end{cases} \end{cases}$$

Behin *z*-ren mugak zehaztuta daudela, *XOY* planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=16$ zirkunferentzia, zentroa *C*(0,0) eta *R*=4.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$$\theta=[0,2\pi]; \quad \rho=[0,4]; \quad z=[\rho^2/2, 4+\rho]$$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 \rho\, d\rho\int_{\rho^2/2}^{4+\rho}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 \rho(4+\rho-\frac{\rho^2}{2})d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 (4\rho+\rho^2-\frac{\rho^3}{2})d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2\rho^2+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{8}\right]_0^4 d\theta=2\pi\left[32+\frac{64}{3}-32\right]=\frac{128\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{128\pi}{3} \quad u^3}$$

Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko z_c koordenatua soilik lortu behar dugu [C] gorputza simetrikoa baita *OX* eta *OY* ardatzekiko. Beraz, $z_c = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\, d\rho \int_{\rho^2/2}^{4+\rho} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\left(\left(4+\rho\right)^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left(16\rho + 8\rho^2 + \rho^3 - \frac{\rho^5}{4}\right)d\rho =$$

$$= \pi\left[8\rho^2 + \frac{8\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{24}\right]_0^4 = \pi\left[2^3\cdot 2^4 + \frac{2^3\cdot 2^6}{3} + \frac{2^8}{2^2} - \frac{2^{12}}{3\cdot 2^3}\right] = \pi\left[2^7 + \frac{2^9}{3} + 2^6 - \frac{2^9}{3}\right] = \pi 2^6\left(2+1\right) = 192\pi$$

Beraz, z_c koordenatua hurrengoa da:

$$z_c = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = \frac{3\cdot 192\pi}{128\pi} = \frac{9}{2}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0, 0, \frac{9}{2}\right)$ da.