1. adibidea

$[V]$ multzoa erreferentzia-planoen gainean bi eratan proiektatuz, kalkulatu hurrengo integrala, bi eremu horien gaineko integral bikoitz batera murriztuz:

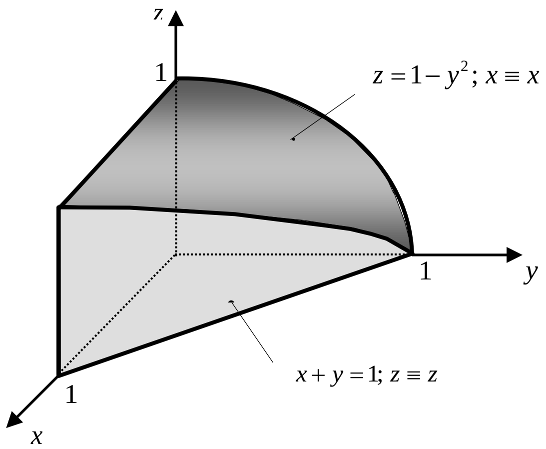
$$I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz\,,$$

non $[V]$ deskribatutako bolumena baita:

$$[V]:\quad 0 \le z \le 1 - y^2\,;\quad x + y \le 1\,;\quad x \ge 0\,;\quad y \ge 0\,.$$

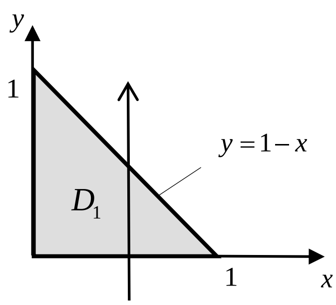
----

(1) irudian agertzen den $[V]$ integrazio eremua hurrengo eskualdeek mugatzen dute: OX -ren sortzaile paraleloak dauzkan eta zuzentzailetzat $z = 1 - y^2$; $x = 0$ parabola daukan zilindro parabolikoa eta $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$ planoak.

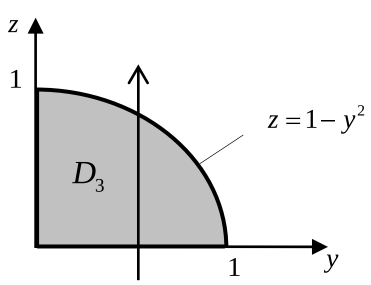


(1) irudia. Integrazio eremua

Ikus daitekeenez, $[V]$ erregularra da hiru ardatzen norabideen arabera. XOY eta YOZ gaineko proiekzio ortogonalak (2) eta (3) irudietan agertzen dira.



(2) irudia. *XOY*-ren gaineko proiekzioa



(3) irudia. *YOZ*-ren gaineko proiekzioa

[D_1] integrazioaren gaineko proiekzioa

$$I=\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\iint_{D_1} dx\,dy\left[\int_0^{1-y^2} z\,dz\right]=(1/2)\iint_{D_1}(1-y^2)^2\,dx\,dy=$$

$$=(1/2)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-y^2)^2\,dy\equiv(1/2)\int_0^1(1-y^2)^2\,dy\int_0^{1-y}dx.$$

Integralek antzeko zailtasuna daukate. Lehenengoa hartuz gero:

$$I=(1/2)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-y^2)^2\,dy=(1/2)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-2y^2+y^4)\,dy=$$

$$=(1/2)\int_0^1\left[(1-x)-2(1-x)^3/3+(1-x)^5/5\right]dx=$$

$$=\left[-(1-x)^2/4+(1-x)^4/12-(1-x)^6/60\right]_0^1=\frac{11}{60}\quad\to\quad I=\frac{11}{60}.$$

[D_3] proiekzioaren gaineko integrazioa

x lehen integrazio aldagaitzat hartuz gero, [D_3]-ren gainean integratzeko hurrengo aukerak dauzkagu:

$$I=\iint_{D_3} z(1-y)dy\,dz=\int_0^1(1-y)dy\int_0^{1-y^2} z\,dz\equiv\int_0^1 zdz\int_0^{\sqrt{1-z}}(1-y)\,dy.$$

Erosoxeago da lehenengoa ebaztea:

$$I=\int_0^1(1-y)dy\int_0^{1-y^2} z\,dz=(1/2)\int_0^1(1-y)(1-y^2)^2dy=$$

$$=(1/2)\int_0^1(1-y-2y^2+2y^3+y^4-y^5)dy=\frac{11}{60}.$$

2. adibidea

Kalkulatu lehenengo oktantean hurrengo zilindro parabolikoek mugatzen duten bolumena:

$$xy = 1; \quad xy = 9; \quad xz = 4; \quad xz = 36; \quad yz = 25; \quad yz = 49 .$$

$[V]$ mugatzen duten gainazalen ekuazioek argi eta garbi adierazten dute hurrengo erlazioek definitutako transformazioa:

$$u = xy, \quad v = xz, \quad w = yz ,$$

zeren eta transformatutako $[R]$ eremua oktaedro bat baita, bere aurpegiak erreferentzia berriko planoen paraleloak izanik:

$$\begin{cases} xy = 1 & \to \quad u = 1 \\ xy = 9 & \to \quad u = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} xz = 4 & \to \quad v = 4 \\ xz = 36 & \to \quad v = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} yz = 25 & \to \quad w = 25 \\ yz = 49 & \to \quad w = 49. \end{cases}$$

Jakobiarra determinatzeko aukera bat hurrengoa erabiltzea da, x, y eta z aldagaietako transformazio formulak ebatzi behar izan gabe:

$$J(x,y,z) \equiv \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -2xyz.$$

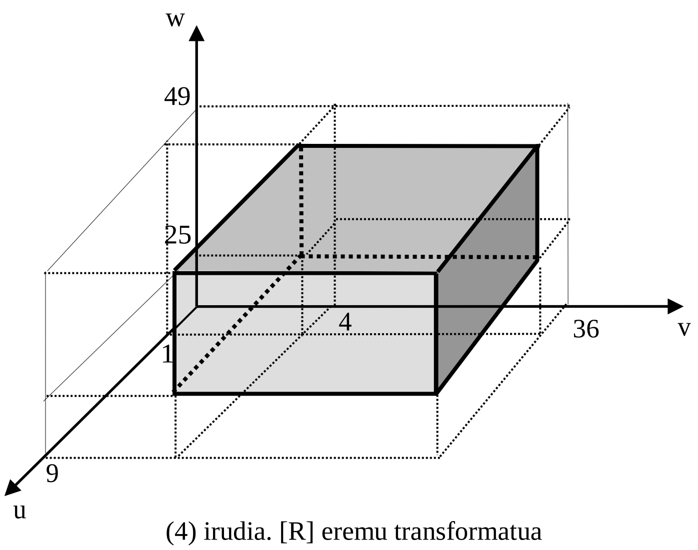
Baina $x^2y^2z^2 = uvw \quad \to \quad xyz = \sqrt{uvw}.$ Hortik:

$$|J(x,y,z)| = 2xyz \equiv 2\sqrt{uvw} \quad \to \quad |J(u,v,w)| = \frac{1}{|J(x,y,z)|} = \frac{1}{2\sqrt{uvw}}.$$

Bolumena kalkulatzeko integrala hurrengo integral honetan transformatzen da:

$$V = \iiint_V |J(u,v,w)|\, du\, dv\, dw = \iiint_R \frac{du\, dv\, dw}{2\sqrt{uvw}} ,$$

(4) irudian erakutsitako $[R]$ ortoedroaren gainean erakutsita.



(4) irudia. [R] eremu transformatua

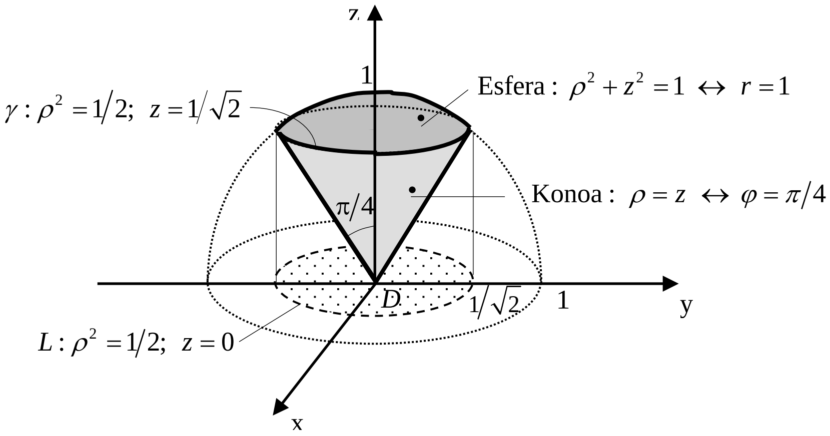
$$V = \iiint_R \frac{du\,dv\,dw}{2\sqrt{uvw}} = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}}\int_4^{36} \frac{dv}{\sqrt{v}}\int_{25}^{49} \frac{dw}{\sqrt{w}} = 4\left[\sqrt{u}\;\right]_1^9 \left[\sqrt{v}\;\right]_4^{36} \left[\sqrt{w}\;\right]_{25}^{49} = 64.$$

Kontsidera bedi $I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, non $[V]$ hurrengo bolumena baita:

$$[V] \equiv \left\{ (x,y,z) \in R^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad x^2+y^2 \le z^2, \quad z \ge 0 \right\}.$$

(a) Garatu limiteak koordenatu cartesiarretan.
(b) Egin kalkulua koordenatu zilindrikoak erabiliz.
(c) Egiaztatu emaitza koordenatu esferikoak erabiliz.

$[V]$-ren deskribapen grafikoa hurrengoa da:



(5) Irudia. Integrazio Bolumena

$[V]$ bolumena jatorrian zentroko eta unitate erradioko $x^2+y^2+z^2=1$ esferaren eta $z \ge 0$ erdiespazioko eta erpinean 45°-ko erdiangeluko $x^2+y^2=z^2$ konoaren barnealdean dago.

Esferaren eta konoaren arteko $[\gamma]$ ebakidura-kurba hurrengo da:

$$[\gamma] \quad \equiv \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2=1/2 \\ z=1/\sqrt{2}, \end{cases}$$

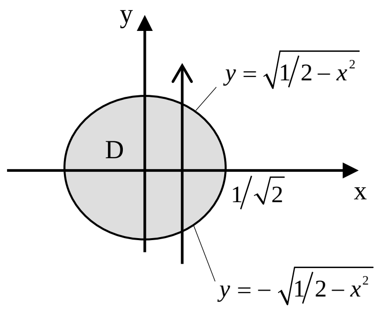
hots, $z=1/\sqrt{2}$ planoko $R=1/\sqrt{2}$ erradioko zirkunferentzia da, XOY-ren gaineko haren proiekzioa $L:\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2};\ z=0$ izanik.

(a) Koordenatu cartesiarrezko planteamendua

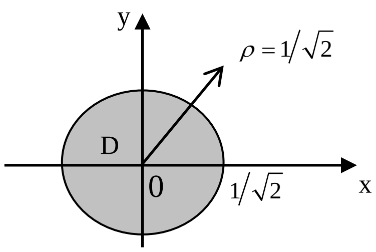
$z-y-x$ integrazio ordena jarraituz (ikus (5) eta (6) irudiak):

$$I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx \int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\,.$$

Kalkulua luzeegia da eta, beraz, era errazago bat bilatuko dugu.



(6) irudia. Koordenatu cartesiarrezko limiteak



(7) irudia. Koordenatu polarrezko limiteak

(b) Koordenatu zilindrikoen bidezko ebazpena

$$T:\quad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z\equiv z;\quad |J|=\rho$$

Gainazalen ekuazioak:

$$\begin{cases}\text{Goiko hemisferioa}: & x^2+y^2+z^2=1 \quad\rightarrow\quad z=\sqrt{1-\rho^2}\\ \text{Konoaren goiko azala}: & x^2+y^2=z^2 \quad\rightarrow\quad z=\rho.\end{cases}$$

(5) eta (7) irudien arabera:

$$I=\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\rho(1-2\rho^2)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2-\rho^4}{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}\quad\rightarrow\quad\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{8}.$$

(c) Koordenatu esferikoen bidezko ebazpena

$$x=r\sin\varphi\cos\theta;\quad y=r\sin\varphi\sin\theta;\quad z=r\cos\varphi;\quad |J|=r^2\sin\varphi.$$

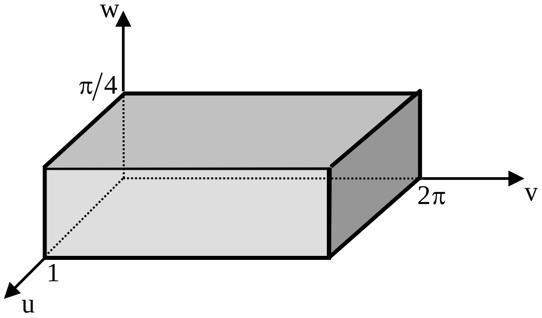
Gainazalen ekuazioak:

$$\begin{cases}\text{Goiko hemisferioa}: & x^2+y^2+z^2=1 \quad\rightarrow\quad r=1\\ \text{Konoaren goiko azala}: & x^2+y^2=z^2\rightarrow r^2\sin^2\varphi=r^2\cos^2\varphi\rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Eraldatutako $[R]$ domeinua irudiko ortoedrora murrizten da. Limite konstantezko integrala oso erraza da:

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^1\cos\varphi\sin\varphi\,r^3dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^3dr=$$

$$=[\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{8}\quad\rightarrow\quad\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{8}.$$



(8) irudia. [R] eremua koordenatu esferikoetan