Serieak

1. Serieen konbergentzia
2. Serieen konbergentzia aztertzeko irizpideak

Serieen Konbergentzia

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie konbergente bat bada, S= $\lim_{n\to\infty}[S(n)]$ izanik, orduan S zenbaki errealari seriearen **batura** deritzo:

$$S=\lim_{n\to\infty}[S(n)]=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bat konbergentea izateko, beharrezkoa da (**baina ez nahikoa**):

$$\lim_{n\to\infty}[a_n]=0$$

Serieen Konbergentzia

Serie konbergenteen oinarrizko propietateak:

Izan bitez $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ bi serie konbergente, non haien batura partzialak S_a eta S_b diren. Orduan:

1- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ seriea konbergentea da eta bere batura $S_a + S_b$ da.

2- $\forall\lambda\in\mathbf{R}$ izanik, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(a_n)$ seriea konbergentea da eta bere batura λS_a da.

3- $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ izanik, $\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(a_n) + \mu(b_n)]$ seriea konbergentea da eta bere batura $\lambda S_a + \mu S_b$ da.

Baina, nola jakin $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ konbergentea den ala ez?

Hurrengo ataletan Irizpide batzuk ikasiko ditugu konbergentzia aztertzeko

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Gai positiboko serieak:

Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bat, serie hau gai positibozko serie izango da baldin eta $a_n > 0\ \forall n \in N$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bati non $a_n = \frac{1}{n^k}$ **serie harmoniko** orokortua deritzo non k konstante erreala baita. Serie harmonikoa konbergentea da, baldin eta soilik baldin $k>1$.

Gai positiboko serieak aztertzeko hurrengo irizpideak erabil ditzakegu:

- Zatiduraren Irizpidea (D'Alembert)
- Raabe-ren Irizpidea
- Erroaren Irizpidea
- Konparaziozko Irizpidea

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Zatiduraren Irizpidea:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ gai positibozko serie bat baldin bada eta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ existitzen bada. Orduan:

- $L<1$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie konbergentea da.
- $L>1$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie dibergentea da.
- $L=1$ bada, zalantzazko kasua da.

Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)!}\right)$

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Raabe-ren Irizpidea:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ gai positibozko serie bat baldin bada eta $\lim_{n\to\infty} n[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}]=L$ existitzen bada. Orduan:

- $L>1$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie konbergentea da.
- $L<1$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie dibergentea da.
- $L=1$ bada, zalantzazko kasua da.

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Erroaren Irizpidea:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ gai positibozko serie bat baldin bada eta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$=L existitzen bada. Orduan:

- L<1 bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie konbergentea da.
- L>1 bada, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie dibergentea da.
- L=1 bada, zalantzazko kasua da.

Adibidea:$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3 e^{-n^2}\right)$

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Konparaziozko irizpidea:

Izan bitez $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ gai positibozko bi serie:

- $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathrm{N}$ bada eta $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ konbergentea bada orduan $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ konbergentea da.
- $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathrm{N}$ bada eta $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ dibergentea bada orduan $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ dibergentea da.

Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Serie Alternatuak:

Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bat, serie alternatua izango da baldin eta

$a_n a_{n+1} \leq 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$. <u>Adibidea</u>: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ =-1+1/2-1/3+…$\frac{1}{n}$

Serie alternatuaren konbergentzia aztertzeko Leibnitz-en irizpidea erabil dezakegu:

Leibnitz-en Irizpidea:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie alternatu batek $\lim_{n\to\infty}[a_n]=0$ egiaztatzen badu eta

$|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathrm{N}$ bada, orduan seriea konbergentea da.

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Serie Absolutuki Konbergenteak

Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bat, serie honi absolutuki konbergente deritzo baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|)$ gai positibozko seriea konbergentea bada.

Edozein serie absolutuki konbergentea dena konbergentea da.

Serie Bereziak

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bati non $a_n = a_1 r^{n-1}$ $r \neq 1$, arrazoidun **serie geometriko** deritzo. Serie geometrikoaren batura partziala:

$$S(n) = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{r^n - 1}{r-1} a_1$$

Serie geometrikoa konbergentea da baldin eta soilik baldin $|r|<1$bada, eta orduan bere batura:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Serie Bereziak

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bati non $a_n = [a_1 + (n-1)r_1]\cdot r_2^{n-1}$, r_1 arrazoi aritmetikodun eta $r_2 \neq 1$ arrazoi geometrikodun **serie aritmetiko-geometriko** deritzo. Serie aritmetiko-geometrikoaren batura partziala:

$$S(n) = \left(\frac{a_1(1-r_2^n)}{1-r_2}\right) + \frac{r_1 r_2[1 - n r_2^{n-1} + (n-1) r_2^n]}{(1-r_2)^2}$$

Serie aritmetiko-geometrikoa konbergentea da baldin eta soilik baldin $|r_2|<1$bada, eta orduan bere batura:

$$S = \left(\frac{a_1}{1-r_2}\right) + \frac{r_1 r_2}{(1-r_2)^2}$$

Konbergentzia aztertzeko irizpideak

Serie Bereziak

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ serie bati non $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{pn+q}{pn+r}$ egiaztatzen baita, *p*,*q* eta *r* zenbaki errealak izanik eta $p \neq 0$ eta $(r\text{-}q)/p \neq 1$ **serie hipergeometriko** deritzo. Serie hipergeometrikoaren batura partziala:

$$S(n) = \frac{(p \cdot n + q)a_n - a_1 \cdot r}{p + q - r}$$

Serie hipergeometrikoa konbergentea da baldin eta soilik baldin (r-q)/p >1 bada, eta orduan bere batura:

$$S = \frac{a_1 \cdot r}{r - p + q}$$