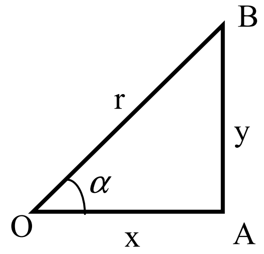
ERANSKINA

1. TRIGONOMETRIA

Sinu, kosinu eta tangente direlako arrazoi trigonometrikoak honela definitzen dira:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{x}{r}$$
$$\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{x}$$



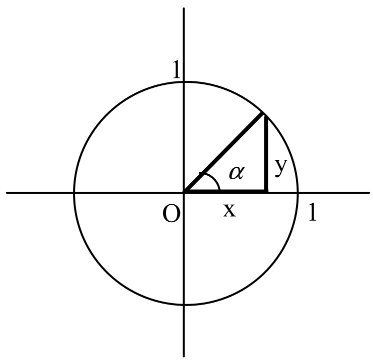
Alderantzizko arrazoi trigonometrikoak:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y} \;;\; \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x} \;;\; \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{x}{y}$$

r arbitrarioa denez, $r = 1$ har daiteke:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Kontsidera dezagun zentroa O jatorrian eta erradioa $r = 1$ dauzkan ***zirkunferentzia trigonometrikoa*** delakoa. Adieraz dezagun α angelu bat koordenatuen ardatzean (erpina O jatorrian eta alde bat abzisen ardatzean egonda). Orduan x eta y segmentuak hurrenez hurren $\cos\alpha$ eta $\sin\alpha$-ren balioak dira.



Beraz, koadrante bakoitzeko arrazoi trigonometrikoen zeinuak honelakoak dira:

	Lehenengo koadrantea	Bigarren koadrantea	Hirugarren koadrantea	Laugarren koadrantea
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–

TRIGONOMETRIAREN OINARRIZKO FORMULA

Zirkunferentzia trigonometrikoa kontutan hartuta eta Pitagorasen teoremaren arabera:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = x^2+y^2=1$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ erlazioa ***trigonometriaren oinarrizko formula*** da. Hartatik, $\cos^2\alpha$ eta $\sin^2\alpha$-z zatituz, hurrengo formulak ondorioztatzen dira:

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \qquad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

ANGELU AZPIMARRAGARRIEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

	0º 0	30º $\pi/6$	45º $\pi/4$	60º $\pi/3$	90º $\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

ANGELU OSAGARRIEN ARRAZOIAK

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

ANGELU BETEGARRIEN ARRAZOIAK

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

AURKAKO ANGELUEN ARRAZOIAK

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

90º-ko DIFERENTZIA DAUKATEN ANGELUEN ARRAZOIAK

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

90º-ko DIFERENTZIA DAUKATEN ANGELUEN ARRAZOIAK

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$\alpha+\beta$ eta $\alpha-\beta$ -ren ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

ANGELU BIKOITZAREN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

ERDIANGELUAREN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

BATUREN ETA KENDUREN TRANSFORMAZIOA BIDERKADURETAN

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

2. FORMULA TRIGONOMETRIKOAK

Errektangelua: $A = a\cdot b$, a eta b aldeen luzerak izanik.
Karratua: $A = a^2$, a aldearen luzera izanik.
Trapezioa: $A = \frac{a+b}{2}h$, a oinarririk handiena, b oinarririk txikiena eta h altuera izanik.
Erronboa: $A = \frac{d\cdot d'}{2}$, d eta d' diagonalak izanik.
Zirkunferentzia: $L = 2\pi r$, r erradioa izanik.
Zirkulua: $A = \pi r^2$, r erradioa izanik.

Sektore zirkularra: $A = \frac{1}{2} l\, r$, l arkuaren luzera eta r zirkunferentziaren erradioa izanik.

Paralelepipedo errectangeluarra: $V = a\,b\,c$**;** $S = 2(a\,b + a\,c + b\,c)$; a, b eta c ertzen luzerak izanik.

Kuboa: $V = a^3$**;** $S = 6a^2$, a ertzaren luzera izanik.

Prisma: $V = B\,h$, B oinarriaren azalera eta h altuera izanik.

Zilindroa: $V = \pi\, r^2\, h$**;** $S = 2\pi\, r\, h + 2\pi\, r^2$**,** r erradioa eta h altuera izanik.

Konoa: $V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$; $S = \pi\, r\, g$, r erradioa, h altuera eta g sortzailea izanik.

Kono-enborra: $V = \frac{\pi\, h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, R eta r erradioak eta h altuera izanik.

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$; $S = 4\pi\, r^2$, r erradioa izanik.

Piramidea: $V = \frac{1}{3} B\, h$, B oinarriaren azalera eta h altuera izanik.

3. PROGRESIOAK

PROGRESIO ARITMETIKOA

Segida bat ***progresio aritmetiko*** bat dela esaten da, baldin gai bakoitza aurrekoa gehi ***diferentzia*** deritzon kantitate konstante bat bada. Beraz: $a_{n+1} = a_n + d$.

Gai orokorra $a_n = a_1 + (n-1)d$ formularen bidez lortzen da; halaber, n gairen batura $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ da, $a_n + a_1 = a_k + a_{n-k+1}$ erlaziotik abiatuz.

PROGRESIO GEOMETRIKOA

Segida bat ***progresio geometriko*** bat dela esaten da, baldin gai bakoitza aurrekoa bider ***arrazoia*** deritzon kantitate konstante bat bada. Beraz: $a_{n+1} = a_n \cdot r$.

Gai orokorra $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ formularen bidez lortzen da; halaber, n gairen batura $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ da.

Baldin progresio geometriko baten arrazoia $|r| < 1$ bada, orduan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

$a_n \cdot a_1 = a_k \cdot a_{n-k+1}$ erlaziotik abiatuz, n gairen biderkadura lortzen dugu:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \,.$$

4. NEWTONEN BINOMIOA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \;\cdots\; + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 - \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 - \;\cdots\; \mp \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} \pm \binom{n}{n} a^0\, b^n$$

Era laburtuan: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$,

non ***zenbaki konbinatorioak*** honela definituta baitaude:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Gogora bedi $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ dela.

Gainera, definizioz, $0! = 1$.

n-ren ***erdifaktoriala*** $n!! = n\,(n-2)\,(n-4)\cdots$ da.

Hortaz: $(2n)! = 2n\,(2n-2)\,(2n-4)\cdots 4\cdot 2 = 2^n \cdot n!$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!}$$

Newtonen binomioan agertzen diren koefizienteak lortzeko era azkar eta eraginkorra ***Tartagliaren triangelua*** delakoa da. Hartan, zenbaki konbinatorioen hurrengo propietatea erabiltzen da: $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

Triangeluan, aldeetako zenbakiek bat balio dute; beste zenbakiak lortzeko, aipatutako propietatearen arabera, zenbaki bakoitzak justu goian dauzkan bi zenbakien batura burutzen da.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

NEWTONEN BINOMIOAREN ETA BIDERKETA LABURTUAREN FORMULAK

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,a\,b + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3$$

$$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$$

$$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^4 - b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

5. GEOMETRIA ANALITIKO LAUA

$P_1(x_1, y_1)$ **eta** $P_2(x_2, y_2)$ **puntuen arteko distantzia:**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$P_1(x_1, y_1)$ **eta** $P_2(x_2, y_2)$ **puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$P_1(x_1, y_1)$ **puntutik igarotzen den eta** m **malda daukan zuzenaren ekuazioa:**

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$P_1(x_1, y_1)$ **puntuaren eta** $ax + by + c = 0$ **zuzenaren arteko distantzia:**

$$d = \left| \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

m_1 eta m_2 maldako bi zuzenen arteko angelua:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Erpintzat $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ eta $P_3(x_3, y_3)$ puntuak dauzkan triangelu baten azalera:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

6. GEOMETRIA ANALITIKOA ESPAZIOAN

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ eta $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntuen arteko distantzia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ eta $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ puntutik igarotzen den eta norabide bektoretzat $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ daukan zuzenaren ekuazioa:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

Planoaren ekuazio orokorra:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

$\vec{v} = (a, b, c)$ planoarekiko bektore perpendikularra izanik.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ eta $P_3(x_3, y_3, z_3)$ puntuetatik igarotzen den planoaren ekuazioa:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ puntutik igarotzen den eta $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ planoaren perpendikularra den zuzenaren ekuazioa:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ puntuaren eta $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ planoaren arteko distantzia:

$$d = \left| \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

7. INTEGRALEN TAULA

x^n DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$a + b\,x$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $\displaystyle\int \frac{x}{a+bx}\,dx = \frac{bx - a\ln|a+bx|}{b^2} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{(a+bx)^n}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}}\right) + C \qquad n \neq 1,2$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(-\frac{bx(2a-bx)}{2} + a^2\ln|a+bx|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(bx - \frac{a^2}{a+bx} - 2a\ln|a+bx|\right) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a+bx)^3}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(\frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} + \ln|a+bx|\right) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a+bx)^n}\,dx = \frac{1}{b^3}\left(-\frac{1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right) + C \qquad n \neq 1,2,3$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a+bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a+bx)^2}\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a+bx)}\,dx = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a+bx)^2}\,dx = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a+2bx}{x(a+bx)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|\right) + C$

$a+b\,x+c\,x^2$; $b^2 \neq 4ac$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $$\int \frac{dx}{a+b\,x+c\,x^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C & b^2 > 4ac \end{cases}$$

2. $$\int \frac{x}{a+b\,x+c\,x^2}\,dx = \frac{1}{2c}\left(\ln\left|a+bx+cx^2\right| - b\int \frac{dx}{a+b\,x+c\,x^2} \right)$$

$\sqrt{a+b\,x}$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $$I_n = \int x^n \cdot \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{b\,(2n+3)}\left(x^n\,(a+bx)^{3/2} - n\,a\,I_{n-1} \right)$$

2. $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \right| + C & a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}} + C & a < 0 \end{cases}$$

3. $$I_n = \int \frac{dx}{x^n \cdot \sqrt{a+bx}} = \frac{-1}{a(n-1)}\left(\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{2} I_{n-1} \right) \qquad n \neq 1$$

4. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

5. $$I_n = \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}\,dx = \frac{-1}{a(n-1)}\left(\frac{(a+bx)^{3/2}}{x^{n-1}} + \frac{b(2n-5)}{2} I_{n-1} \right) \qquad n \neq 1$$

6. $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{-2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C$$

7. $$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b(2n+1)}\left(x^n\sqrt{a+bx} - n\,a\,I_{n-1} \right)$$

$a^2 \pm x^2$; $a > 0$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

2. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

3. $$I_n = \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right) \qquad n \neq 1$$

$\sqrt{x^2 \pm a^2}$; $a > 0$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C$$

2. $$\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{8} \left(x(2x^2 \pm a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} - a^4 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C$$

4. $$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arcsin \frac{|x|}{a} + C$$

5. $$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \arg\sinh x + C$$

7. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C = \arg\cosh x + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

9. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C$$

10. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{|x|}{a} + C$$

11. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C$$

12. $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C$$

13. $$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

$\sqrt{a^2 - x^2}$; $a > 0$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C$$

2. $$\int x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{8}\left(x(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C$$

3. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln\left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

4. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

6. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

7. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C$$

8. $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$\sin x$; $\cos x$ **DAUZKATEN FUNTZIOAK**

1. $I_n = \int \sin^n x\,dx = -\dfrac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

2. $I_n = \int \cos^n x\,dx = \dfrac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

3. $\int x \sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C$

4. $\int x \cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$

5. $I_n = \int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\,I_{n-1}$

6. $I_n = \int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\,I_{n-1}$

7. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \sin x} = \tan x \mp \sec x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \cos x} = -\cot x \pm \csc x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \ln\left|\tan x\right| + C$

$\tan x$; $\cot x$; $\sec x$; $\csc x$ **DAUZKATEN FUNTZIOAK**

1. $\int \tan x\,dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$

2. $\int \cot x\,dx = \ln\left|\sin x\right| + C$

3. $\int \sec x\,dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$

4. $\int \csc x\,dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

5. $I_n = \int \tan^n x\,dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \qquad n \neq 1$

6. $I_n = \int \cot^n x\,dx = \dfrac{\cot^{n-1} x}{1-n} - I_{n-2} \qquad n \neq 1$

7. $I_n = \int \sec^n x \, dx = \dfrac{\sec^{n-2} x \cdot \tan x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2} \qquad n \neq 1$

8. $I_n = \int \csc^n x \, dx = \dfrac{\csc^{n-2} x \cdot \cot x}{1-n} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2} \qquad n \neq 1$

9. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \tan x} = \dfrac{1}{2}\left(x \pm \ln\left|\cos x \pm \sin x\right|\right) + C$

10. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \cot x} = \dfrac{1}{2}\left(x \mp \ln\left|\cos x \pm \sin x\right|\right) + C$

11. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \sec x} = x + \cot x \mp \csc x + C$

12. $\int \dfrac{dx}{1 \pm \csc x} = x - \tan x \pm \sec x + C$

ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK DAUZKATEN FUNTZIOAK

1. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

2. $\int \arccos dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

3. $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$

4. $\int \operatorname{arc\,cot} x \, dx = x \operatorname{arc\,cot} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C$

5. $\int \operatorname{arc\,sec} x \, dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

6. $\int \operatorname{arc\,csc} x \, dx = x \operatorname{arc\,csc} x + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

e^x DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$

2. $\int \dfrac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$

3. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

4. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

$\ln x$ DAUKATEN FUNTZIOAK

1. $\int x^n \ln x \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left(-1 + (n+1)\ln x\right) + C \qquad n \neq -1$

2. $I_n = \int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - nI_{n-1}$

8. LAPLACEREN TRANSFORMATUEN TAULA

FUNTZIO SORTZAILEA	FUNTZIO TRANSFORMATUA
$u_a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases}$	$\dfrac{e^{-pa}}{p}$
$u_0 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2 + a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2 + a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{p}{p^2 - a^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p + a}$
$t^n, \; n > -1$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
$t^n, \; n \in \mathbb{Z}^+$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \sinh bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2 - b^2}$
$e^{-at} \cosh bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2 - b^2}$
$\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(p-b)(p-a)}$
$\dfrac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{p}{(p-b)(p-a)}$
$\dfrac{1 - \cos at}{a^2}$	$\dfrac{1}{p(p^2 + a^2)}$
$\dfrac{at - \sin at}{a^2}$	$\dfrac{1}{p^2(p^2 + a^2)}$

FUNTZIO SORTZAILEA	FUNTZIO TRANSFORMATUA
$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{t\sin at}{2a}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{2\cos at - at\sin at}{2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$	$\dfrac{1}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{t\sinh at}{2a}$	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{2\cosh at + at\sinh at}{2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
$t\cosh at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{\sinh at - \sin at}{2a^3}$	$\dfrac{1}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\cosh at - \cos at}{2a^2}$	$\dfrac{p}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\sinh at + \sin at}{2a}$	$\dfrac{p^2}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\cosh at + \cos at}{2}$	$\dfrac{p^3}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\sin at\cosh at - \cos at\sinh at}{4a^3}$	$\dfrac{1}{p^4+4a^4}$
$\dfrac{\sin at\sinh at}{2a^2}$	$\dfrac{p}{p^4+4a^4}$
$\dfrac{\sin at\cosh at + \cos at\sinh at}{2a}$	$\dfrac{p^2}{p^4+4a^4}$
$\cos at\cosh at$	$\dfrac{p^3}{p^4+4a^4}$

9. TRANSFORMATUAREN OINARRIZKO PROPIETATEAK

FUNTZIO SORTZAILEA	FUNTZIO TRANSFORMATUA
$\sum_{1}^{n} C_i f_i(t)$	$\sum_{1}^{n} C_i F_i(p)$
$f(at)$	$\dfrac{F(p/a)}{a}$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$t^n f(t)$	$\dfrac{(-1)^n d^n F(p)}{dp^n}$
$\int_0^t f(t)dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(u)du$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$
$u_a(t)$	$\dfrac{e^{-pa}}{p}$
$f(t)u_a(t)$	$e^{-pa}\mathfrak{L}[f(t+a)]$
$f(t-a)u_a$	$e^{-pa}F(p)$
$f(t) = f(t+a)$	$\dfrac{\int_0^a e^{-pu} f(u)du}{1-e^{-pa}}$