MATEMATIKA APLIKATUA

KALKULUA

AZTERKETA PARTZIALA. 2018ko Apirilaren 13an

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$

b) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$

---

a) ataleren ebazpena

$$\int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t \\ 1+x^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x\,dx = t\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t^2}\,t\,dt = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2} + C$$

b) ataleren ebazpena

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t\,dt}{1+t^4} = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(t^2\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + C$$

2. Ariketa

Izan bedi $[D]$ hurrengo eran definitutako domeinu laua:

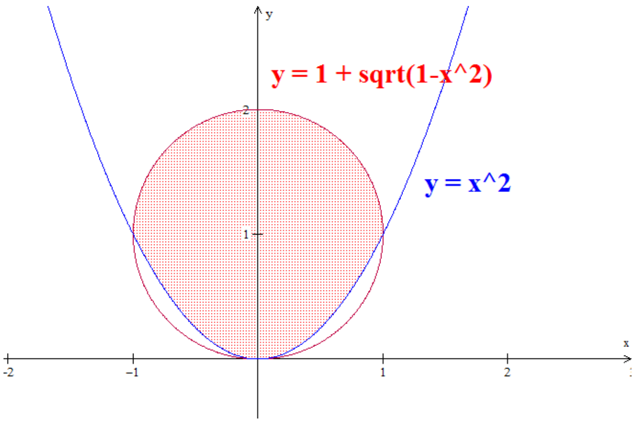
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-2y\le 0,\quad y\ge x^2\right\}$$

Integral mugatuaren kontzeptua erabiliz, kalkulatu:

1.- $[D]$ domeinu lauaren azalera

2.- $[D]$ absiza ardatzen inguruan biratzerakoan sortutako bolumena.

Ebazpena:



Ebakidura puntuak kalkulatu egiten dira:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2y=0 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (x=0;\ y=0)\vee(x=\pm 1;\ y=1)$$

Irudiari begira esan daiteke kalkulatu beharreko azalera hurrengoa dela:

$$A=2\left[\int_0^1 1+\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx\right]=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{4}{3}+J=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{8+3\pi}{6}\quad u^2$$

$$J=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l} x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)\,dt \\ x=1\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=0\rightarrow t=0 \end{array}\right\|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Sortutako bolumena $[D]$ x ardatzaren inguruan biratzerakoan hurrengoa da:

$$V = 2\pi\int_0^1 \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = 2\pi\int_0^1 \left(2-x^2-x^4+2\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+x\sqrt{1-x^2}+\text{arcsen}\, x\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{22}{15}+\frac{\pi}{2}\right] \quad u^3$$

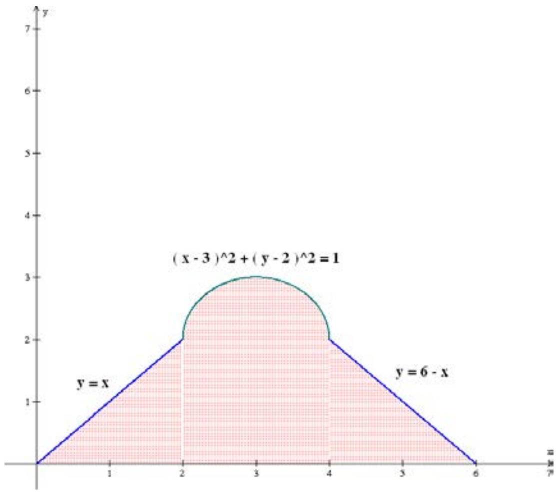
3. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena honako integral honetan:

$$I=\int_0^2 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_2^4 dx\int_0^{2+\sqrt{1-(x-3)^2}} f(x,y)\,dy+\int_4^6 dx\int_0^{6-x} f(x,y)\,dy$$

eta kalkulatu integrazio domeinuaren azalera

Ebazpena:



Integrazio ordena alderantzikatuko dugu. Domeinua bi zatitan deskonposatuko dugu:

$(x-3)^2+(y-2)^2=1 \quad\rightarrow\quad (x-3)^2=1-(y-2)^2 \quad\rightarrow\quad x=3\pm\sqrt{1-(y-2)^2}$

$$I=\int_0^2 dy\int_y^{6-y} f(x,y)\,dx+\int_2^3 dy\int_{3-\sqrt{1-(y-2)^2}}^{3+\sqrt{1-(y-2)^2}} f(x,y)\,dx$$

$$I=\int_0^2 dy\int_y^{6-y} dx+\int_2^3 dy\int_{3-\sqrt{1-(y-2)^2}}^{3+\sqrt{1-(y-2)^2}} dx=\int_0^2(6-2y)\,dy+\int_2^3 2\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy=$$

$$=\left[6y-\frac{2y^2}{2}\right]_0^2+J=8+\frac{\pi}{2}\quad u^2$$

non J hurrengo eran ebazten dugun:

$$J=\int_2^3 2\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy=\left\|\begin{array}{l} y-2=\sin(t)\\ dy=\cos(t)\,dt\\ y=3\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ y=2\rightarrow t=0\end{array}\right\|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

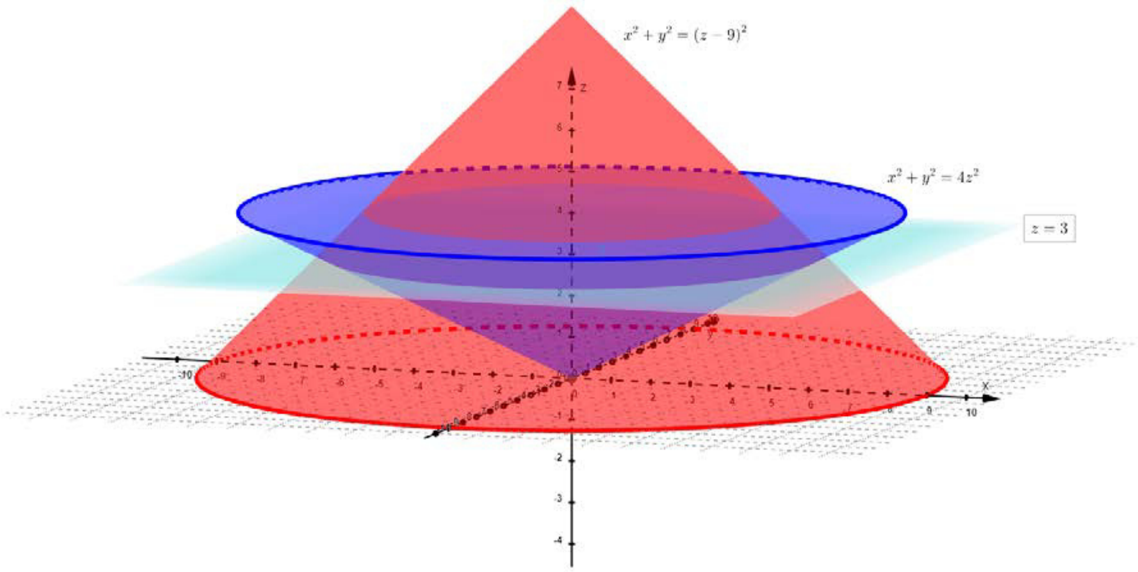
4. Ariketa

Integral hirukoitzak erabiliz, hurrengo gainazalek mugatutako [C] gorputz homogeneoaren bolumena kalkulatu:

$$x^2+y^2-4z^2=0 \;\;(z\geq 0), \quad x^2+y^2-z^2+18z-81=0 \;\;(z\leq 9)$$

Ebazpena:

Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez bi kono ditugu.



Bi konoek mugatutako [C] gorputzaren bolumena, kono urdinetik ($x^2+y^2-4z^2=0$) kono gorrirakoa ($x^2+y^2=(z-9)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

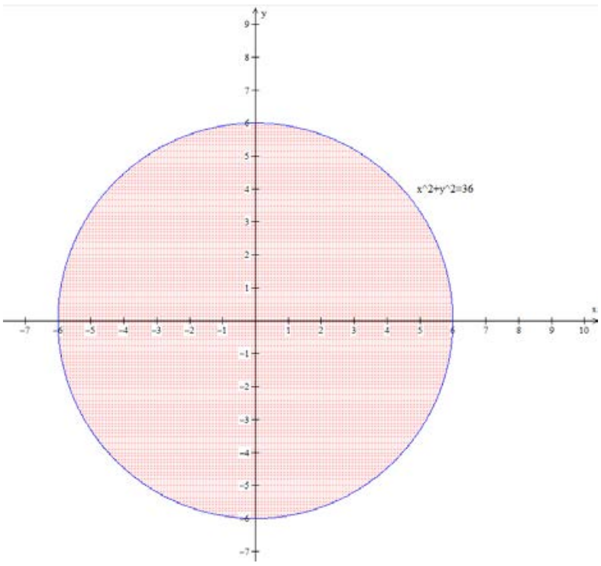
$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=4z^2 \\ x^2+y^2=(z-9)^2 \end{cases}\right\} 4z^2=(z-9)^2 \;\Rightarrow\; 4z^2=z^2+18z-81 \;\Rightarrow\; 3z^2-18z+81=0 \;\Rightarrow\; z^2-6z+27=0$$

$$z^2-6z+27=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} z=-9 \\ \boxed{z=3} \end{cases}$$

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \\ J(\rho,\theta,z)=\rho \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2=4z^2 \quad \Rightarrow \quad z=\rho/2 \\ x^2+y^2=(z-9)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2=(z-9)^2 \quad \Rightarrow \quad z=9-\rho \end{cases}$$

Behin z-ren mugak zehaztuta daudela, XOY planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=36$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta R=6.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$\theta=[0,2\pi]; \quad \rho=[0,6]; \quad z=[\rho/2, 9-\rho]$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukooitza planteatzen dugu:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^6\rho\,d\rho\int_{\rho/2}^{9-\rho}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^6\rho(9-\rho-\frac{\rho}{2})d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^6(9\rho-\frac{3\rho^2}{2})d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{2}\right]_0^6 d\theta=\pi\left[9\cdot 6^2-6^3\right]=36\pi\left[9-6\right]=108\pi$$

$$\boxed{V=108\pi \quad u^3}$$

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

MATEMATIKA APLIKATUA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

KALKULUA (EBALUAZIO FINALA)

OHIKO DEIALDIA. 2018ko maiatzak 29

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$(x+3)^2 y''+6(x+3)y'+6y=\sin(\ln(x+3))$$

---

2. Ariketa

Klasifikatu eta ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$\left(y+xy^2\tan x\right)dx-\tan x\,dy=0$$

---

3. Ariketa

Kalkulatu C kurbaren gaineko honako integral lerromakurra: $\int_{(1,1)}^{(0,4)}\frac{2x}{y}dx+\frac{y^2-x^2+4}{y^2}dy$

C honela definituta egonik: $C=\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 & \text{non} \quad x>0 \\ x^2+y^2-6y+8=0 & \text{non} \quad x\le 0 \end{cases}$

a) Funtzio potentziala erabiliz, existitzen bada.

b) C kurbaren parametrizazio trigonometrikoa erabiliz

---

4. Ariketa

Izan bedi gainazal hauek mugatzen duten [C] gorputz homogeneoa:

$$x^2+y^2-2z=0,\quad x^2+y^2+z^2=3$$

Kalkulatu integral hirukoitza erabiliz:

a) C gorputzaren bolumena.

b) C gorputzaren grabitate zentroa.

---

5. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena integral honetan:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy$$

eta lortutako integrala ebatziz kalkulatu integrazio domeinuaren azalera.

---

6. Ariketa

Kalkulatu honako integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x + 1}{2 + 16\,\text{sen}^2\, x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 \sqrt{\left(2+\frac{3}{x^2}\right)^3}}\, dx$

KALKULUA (EBALUAZIO FINALA)

EZ-OHIKO DEIALDIA. 2018ko uztailak 2

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu honako integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^3 dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x\left(1+\cos^2 x\right)}$

---

2. Ariketa

Kalkulatu **integral bikoitza** erabiliz, eta **bi era desberdinetan**, $\sin x$, $\cos x$ funtzioek eta abzisa ardatzak mugatutako azalera $[0,\frac{\pi}{2}]$ tartean.

---

3. Ariketa

Izan bedi gainazal hauek mugatzen duten $[C]$ gorputz homogeneoa:

$$x^2+y^2=16\ (z\le 5),\quad x^2+y^2-4z^2=0\ (z\ge 0)$$

Kalkulatu integral hirukoitza erabiliz:

a) C gorputzaren bolumena.

b) C gorputzaren grabitate zentroa.

---

4. Ariketa

Kalkulatu $I=\int_C\left(3+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy$ C kurbaren gainean $A(1,0)$ eta $B(3,0)$ artean. C kurba osatuta dago alde batetik, A eta $D(2,1)$ puntuak lotzen dituen zuzenaz eta bestetik, D eta B puntuak lotzen dituen zuzenaz.

a) C kurbaren parametrizazioa erabiliz.
b) Funtzio potentziala erabiliz, existitzen bada.

---

5. Ariketa

Identifikatu eta ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$\left(x \cdot \cos x - 2y\right) dx - x\, dy = 0$$

---

6. Ariketa

Ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

KALKULUA

AZTERKETA PARTZIALA. 2019ko martxoaren 29an

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ (ez ebatzi berehalako integral bat bezala)

(2 puntu)

a) $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(\tan x+1)}\,dx = \left\| \begin{array}{ll} t=\tan x & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}(t+1)}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)(t+1)}$$

Zatiki sinpleetan deskonposatuz:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t+1)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{C}{(t+1)}$$
$$t^2 = (At+B)(t+1) + C(1+t^2)$$
$$t^2 = At^2 + At + Bt + B + C + Ct^2$$

Koefizienteak berdinduz:

$$\left.\begin{array}{l} t^2 \to 1 = A+C \\ t \to 0 = A+B \\ \text{t. i. } \to 0 = B+C \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{array}\right.$$

Beraz:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(t+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{4}\int \frac{2t}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(t\right) + \frac{1}{2}\ln\left(t+1\right) + C = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\tan^2 x+1\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln\left(\tan x+1\right) + C}$$

b) Zatika integratuz:

$$I = \int \arcsin x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = (\arcsin x)'\, dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y = \arcsin x & \Rightarrow & x = \sin y & \overset{\text{D}}{\Rightarrow} & 1 = \cos y \cdot y' & \Rightarrow \\ y' = \dfrac{1}{\cos y} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} & \Rightarrow & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x - \int x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (-2)x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx =$$

$$= x\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C = \boxed{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

2. Ariketa

Kalkulatu hurrengo kurbek mugatutako [D] eskualdearen perimetroa:

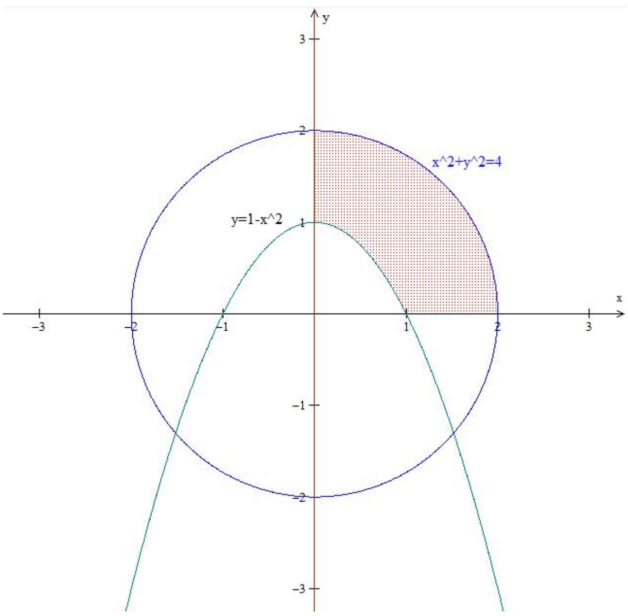
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 1-x^2,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0\right\}$$

Oharra: edozein luzera kalkulatzeko integral mugatua erabili behar da.

(3 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, D domeinuaren adierazpen grafikoa irudikatu egiten dugu. Lehenengo koadrantean ($y\ge 0,\quad x\ge 0$) parabolaren ($y\ge 1-x^2$) eta zirkunferentziaren ($x^2+y^2\le 4$) arteko eskualdea da hain zuzen ere *D* domeinu laua.



Perimetroa kalkulatzeko, eskualdea lau zatitan banatuko dugu:

- L_1: lehenengo koadranteko zirkunferentzia laurdenaren luzera.
- L_2: lehenengo koadranteko parabola zatiaren luzera.
- L_3: *D* eskualdea mugatzen duen *x* ardatzaren zatiaren luzera.
- L_4: *D* eskualdea mugatzen duen *y* ardatzaren zatiaren luzera.

L_1 kalkulatzeko, zirkunferentziaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$x^2+y^2\le 4\quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{4-x^2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\quad\Rightarrow\quad (y')^2=\frac{x^2}{4-x^2}$$

L_1-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_1=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\left[2\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2=2\frac{\pi}{2}=\boxed{\pi}$$

L_2 kalkulatzeko, parabolaren ekuazio esplizitua deribatu beharra dago eta karratura jaso. Beraz,

$$y=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x \quad\Rightarrow\quad (y')^2=4x^2$$

L_2-en kalkulua orduan hurrengoa izango litzateke:

$$L_2=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

Integral mugagabea metodo alemaniarra erabiliz ebatziko dugu eta gero [0,1] tartean ebaluatuko dugu L_2 lortzeko.

$$I_1=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{1+4x^2}+M\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Espresio guztia deribatuz

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}=A\sqrt{1+4x^2}+(Ax+B)\frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}+\frac{M}{\sqrt{1+4x^2}} \quad\Rightarrow\quad 1+4x^2=A\left(1+4x^2\right)+4x(Ax+B)+M$$

Ekuazio sistema ebatzi behar dugu koefiziente indeterminatuak lortzeko.

$x^2:\quad 4=4A+4A \quad\Rightarrow\quad A=1/2$

$x\ :\quad 4B=0 \quad\Rightarrow\quad B=0$

$x^0:\quad 1=A+M \quad\Rightarrow\quad M=1/2$

$$I_1=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|+C$$

Beraz, L_2 honela geratzen da:

$$L_2=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right|=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

L_3-ren kalkulua egiteko, y=0 zuzena integratu beharra dago:

$$L_3=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1}\,dx=\boxed{1}$$

L_4-ren kalkulua egiteko, x=0 zuzena integratu beharra dago, kasu honetan y-rekiko integratuko dugu:

$$L_4 = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1}\,dy = \boxed{1}$$

Azkenik,

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \pi + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| + 2}$$

3. Ariketa

Alderantzikatu integrazio ordena honako integral honetan:

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{4-\sqrt{y}} f\left(x,y\right)dx+\int_1^2 dy\int_{2-\sqrt{-(y-2)}}^{2+\sqrt{-(y-2)}} f\left(x,y\right)dx$$

eta lortutako integrala erabiliz kalkulatu integrazio domeinuaren azalera.

(2 puntu)

Ebazpena:

Lehendabizi, integrazio domeinua identifikatu egiten dugu:

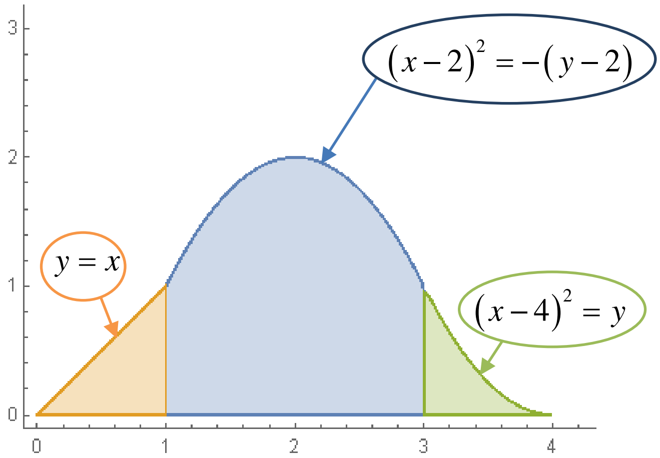
Lehenengo integralaren limiteak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=0\rightarrow \text{zuzena} \\ y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ x=y\rightarrow \text{zuzena} \\ x=4-\sqrt{y}\rightarrow \left(x-4\right)=-\sqrt{y}\rightarrow \left(x-4\right)^2=y\rightarrow \text{OY ardatzarekiko paraleloa den ardatza duen parabola,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{erpina (4,0) puntuan dago} \end{cases}$$

Bigarren integralaren limiteak, aldiz, hurrengoak dira:

$$\begin{cases} y=1\rightarrow \text{zuzena} \\ y=2\rightarrow \text{zuzena} \\ \left.\begin{array}{l} x=2-\sqrt{-\left(y-2\right)} \\ x=2+\sqrt{-\left(y-2\right)} \end{array}\right\}\rightarrow \left(x-2\right)=\pm\sqrt{-\left(y-2\right)}\rightarrow \underbrace{\left(x-2\right)^2=-\left(y-2\right)}_{\downarrow} \\ \qquad\qquad \text{OY ardatzarekiko paraleloa den simetria ardatza duen parabola, erpina (2,2) puntuan dago} \end{cases}$$

Beraz, domeinua hurrengoa da:



y lehenengo integrazio aldagaitzat hartuz gero domeinua ez da erregularra eta hiru domeinu partzial erregularretan banandu beharra dago:

- Lehenengo domeinu partzialean *x* aldagaiaren mugak 0 eta 1 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y=x$ zuzena.
- Bigarren domeinu partzialean *x* aldagaiaren mugak 1 eta 3 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $(x-2)^2=-(y-2)$ parabola.
- Hirugarren domeinu partzialean x aldagaiaren mugak 3 eta 4 dira, eta y aldagaiarenak 0 eta $y=(x-4)^2$ parabola.

Beraz:

$$\boxed{I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{2-(x-2)^2} f(x,y)\,dy+\int_3^4 dx\int_0^{(x-4)^2} f(x,y)\,dy}$$

Azaleraren kalkulua orduan hurrengo eran egin daiteke:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy+\int_1^3 dx\int_0^{2-(x-2)^2} dy+\int_3^4 dx\int_0^{(x-4)^2} dy=$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3\left(2-(x-2)^2\right)dx+\int_3^4 (x-4)^2\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_3^4=\frac{1}{2}+6-\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{25}{6}u^2}$$

4. Ariketa

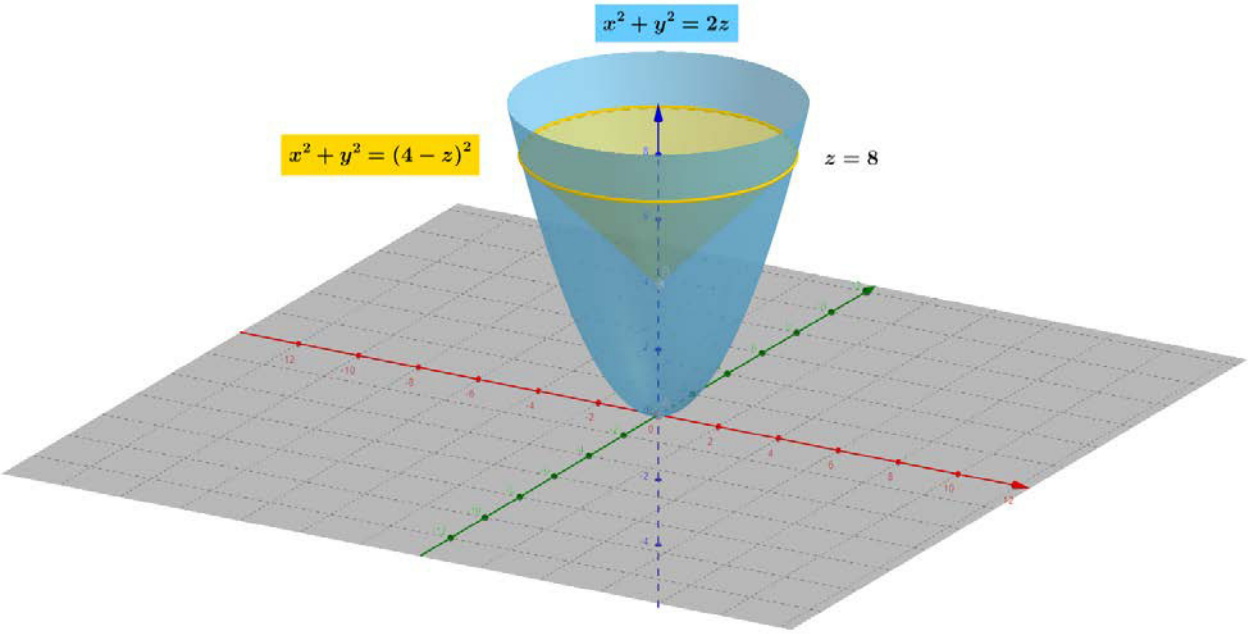
Integral hirukoitzak erabiliz, hurrengo gainazalek mugatutako [C] gorputz homogeneoaren grabitate zentroa kalkulatu:

$$x^2 + y^2 - (4-z)^2 \geq 0 \;\; (z \geq 4), \quad x^2 + y^2 - 2z \leq 0$$

(3 puntu)

Ebazpena:

Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez kono bat eta paraboloide bat ditugu.



Konoak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa ($x^2 + y^2 \leq 2z$) eta konoaren kanpokoa ($x^2 + y^2 \geq (4-z)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

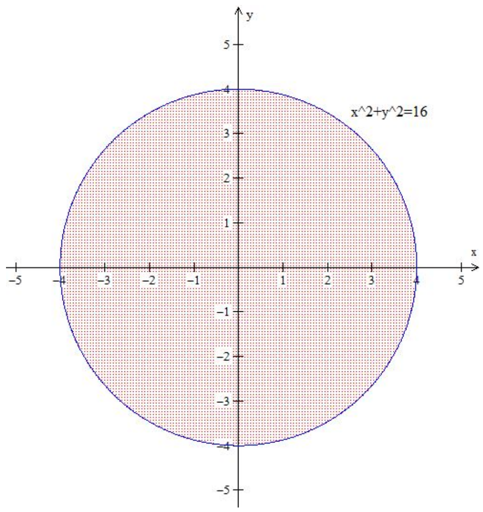
$$\left.\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = (4-z)^2 \end{cases}\right\} 2z = (4-z)^2 \;\Rightarrow\; 2z = z^2 - 8z + 16 \;\Rightarrow\; z^2 - 10z + 16 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{10 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z = 8} \\ z = 2 \end{cases}$$

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \\ J(\rho,\theta,z) = \rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2 = 2z \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 2z \quad \Rightarrow \quad z = \rho^2/2 \\ x^2+y^2 = (4-z)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = (4-z)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z = 4+\rho} \\ z = 4-\rho \end{cases} \end{cases}$$

Behin z-ren mugak zehaztuta daudela, XOY planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=16$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta R=4.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$\theta = [0, 2\pi]; \quad \rho = [0,4]; \quad z = [\rho^2/2, 4+\rho]$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\, d\rho \int_{\rho^2/2}^{4+\rho} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho(4+\rho-\frac{\rho^2}{2})d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (4\rho+\rho^2-\frac{\rho^3}{2})d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\rho^2 + \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{8} \right]_0^4 d\theta = 2\pi\left[32+\frac{64}{3}- \ 32\right] = \frac{128\pi}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{128\pi}{3} \quad u^3}$$

Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko z_c koordenatua soilik lortu behar dugu [C] gorputza simetrikoa baita OX eta OY ardatzekiko. Beraz, $z_C = \frac{1}{V}\int\int\int_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\, d\rho \int_{\rho^2/2}^{4+\rho} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho((4+\rho)^2 - \frac{\rho^4}{4})d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (16\rho + 8\rho^2 + \rho^3 - \frac{\rho^5}{4})d\rho =$$

$$= \pi\left[8\rho^2 + \frac{8\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{24}\right]_0^4 = \pi\left[2^3\cdot 2^4 + \frac{2^3\cdot 2^6}{3} + \frac{2^8}{2^2} - \frac{2^{12}}{3\cdot 2^3}\right] = \pi\left[2^7 + \frac{2^9}{3} + 2^6 - \frac{2^9}{3}\right] = \pi 2^6(2+1) = 192\pi$$

Beraz, z_c koordenatua hurrengoa da:

$$z_C = \frac{1}{V}\int\int\int_C z\,dx\,dy\,dz = \frac{3\cdot 192\pi}{128\pi} = \frac{9}{2}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0,0,\frac{9}{2}\right)$ da.

KALKULUA (EBALUAZIO FINALA)

OHIKO DEIALDIA. 2019ko maiatzak 27

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$x^2 y''+5xy'+4y=\frac{x^2-x^{-2}}{2}$$

(2 puntu)

Ebazpena:

Euler-en ekuazio bat da. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa planteatzen da:

$$x=e^t \quad \Rightarrow \quad t=\ln x \quad (x>0) \qquad \frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Beraz:

$$x^2 y''+5xy'+4y=\frac{x^2-x^{-2}}{2} \xrightarrow{x=e^t} e^{2t}e^{-2t}\left(y''(t)-y'(t)\right)+5e^te^{-t}y'(t)+4y(t)=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$$

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$$

Ekuazio karakteristikoa lortzen dugu:

$$r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-4\pm0}{2}=\begin{cases} r=-2 \\ r=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r=-2\,(2)$$

$$y_h=C_1e^{-2t}+C_2\,t\,e^{-2t} \xrightarrow{x=e^t} y_h=C_1x^{-2}+C_2x^{-2}\ln x$$

Orain, ekuazio osoaren soluzio orokorra t parametroaren menpe planteatuko dugu parametroen aldakuntzaren metodoa erabiltzeko:

$$y=L_1(t)e^{-2t}+L_2(t)\,t\,e^{-2t}$$

Baldintzak zehazten ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} L_1'(t)e^{-2x}+L_2'(t)t\,e^{-2t}=0 \\ -2L_1'(t)e^{-2t}+L_2'(t)\left(e^{-2t}-2t\,e^{-2t}\right)=\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} \end{array}\right\}$$

Wronskiarra kalkulatzen dugu:

$$W=\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t}-2te^{-2t} \end{vmatrix}=e^{-4t}-2te^{-4t}+2te^{-4t}=e^{-4t}$$

$L_1'(t)$ eta $L_2'(t)$ kalkulatuko ditugu Kramerren erregela erabiliz:

$$L_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{-2t} \\ \dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} & e^{-2t}-2te^{-2t} \end{vmatrix}}{W}=\frac{-te^{-2t}\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}}{e^{-4t}}=-te^{2t}\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}=\frac{t}{2}-\frac{t}{2}e^{4t}$$

$$L_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & \dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} \end{vmatrix}}{W}=\frac{e^{-2t}\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}}{e^{-4t}}=e^{2t}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)=\frac{e^{4t}-1}{2}$$

$L_1'(t)$ eta $L_2'(t)$ integratuko ditugu $L_1(t)$ eta $L_2(t)$ kalkulatzeko:

$$L_1(t)=\int\left(\frac{t}{2}-\frac{t}{2}e^{4t}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-\int te^{4t}dt\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-I_1\right]$$

non $I_1=\int te^{4t}dt=\left\|\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=e^{4t}dt & v=\dfrac{e^{4t}}{4} \end{array}\right\|=\dfrac{t}{4}e^{4t}-\dfrac{1}{4}\int e^{4t}dt=\dfrac{t}{4}e^{4t}-\dfrac{1}{16}e^{4t}+C$

Beraz, $L_1(t)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2}-I_1\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t}{4}e^{4t}+\dfrac{1}{16}e^{4t}+C\right]=\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{t}{8}e^{4t}+\dfrac{1}{32}e^{4t}+A$

$$L_2(t)=\int\frac{e^{4t}-1}{2}dt=\frac{e^{4t}}{8}-\frac{t}{2}+B$$

$L_1(t)$ eta $L_2(t)$ kalkulatuta daudela, ekuazio osoaren soluzio orokorra hurrengoa izango litzateke:

$$y=L_1(t)e^{-2t}+L_2(t)te^{-2t}=\left[\frac{t^2}{4}-\frac{t}{8}e^{4t}+\frac{1}{32}e^{4t}+A\right]e^{-2t}+\left[\frac{e^{4t}}{8}-\frac{t}{2}+B\right]te^{-2t}=$$

$$= Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{8}e^{4t} + \frac{1}{32}e^{4t} + \frac{t}{8}e^{4t} - \frac{t^2}{2} \right) e^{-2t} = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \left(\frac{1}{32}e^{4t} - \frac{t^2}{4} \right) e^{-2t} =$$

$$= Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{32}e^{2t} - \frac{t^2}{4}e^{-2t}$$

$$\boxed{y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{32}e^{2t} - \frac{t^2}{4}e^{-2t}}$$

$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x$ aldagai aldaketa desegitea besterik ez da geratzen soluzioa x-ren menpe uzteko:

$$\boxed{y(x) = Ax^{-2} + Bx^{-2}\ln x + \frac{x^2}{32} - \frac{x^{-2}\ln^2 x}{4}}$$

---

2. Ariketa

Sailkatu eta ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$\left(xy\cos x + 2x^2e^y \right) dx + \left(x\sin x + x^3e^y \right) dy = 0$$

(2 puntu)

Ebazpena:

Zehatza da?:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= x\cos x + 2x^2e^y \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \sin x + x\cos x + 3x^2e^y \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Desberdinak direnez, ez da zehatza}$$

Faktore integratzaile bat lor daiteke?:

$$\frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial y}{Y} = \frac{x\cos x + 2x^2e^y - \sin x - x\cos x - 3x^2e^y}{x\sin x + x^3e^y} =$$

$$= -\frac{x^2e^y + \sin x}{x\left(\sin x + x^2e^y\right)} = -\frac{1}{x} = \phi(x) \rightarrow \; z(x) \text{ erako faktore integratzaile bat lor daiteke}$$

Faktore integratzailea hurrengoa da:

$$z(x) = A \cdot e^{\int \phi(x)dx} = A \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx} = A \cdot e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Ekuazioa biderkatuz:

$$\left(y\cos x + 2xe^{y}\right)dx + \left(\sin x + x^{2}e^{y}\right)dy = 0 \rightarrow \text{Zehatza da}$$

Soluzio orokorra hurrengoa da:

$$\int_0^x \left(y\cos x + 2xe^{y}\right)dx + \int_0^y 0dy = C$$

$$\left. y\sin x + x^{2}e^{y} \right]_0^x = C$$

$$\boxed{y\sin x + x^{2}e^{y} = C}$$

---

3. Ariketa

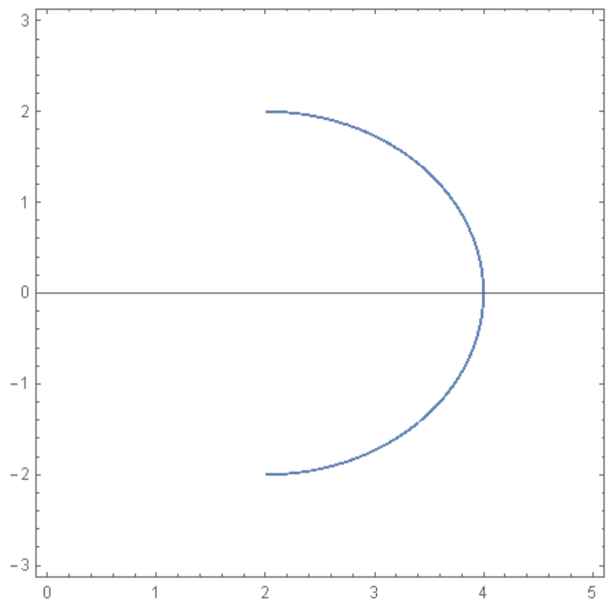
Kalkulatu C kurbaren gaineko honako integral lerromakurra: $\int_C xy^4 \, dS$

C honela definituta egonik: $C = \{x^2 + y^2 = 4x \quad \text{non} \quad x \geq 2$

(2 puntu)

Ebazpena:

C kurba marraztuko dugu:



C kurba parametrizatuz:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \rightarrow \dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \\ y = 2\sin\theta \quad \rightarrow \dfrac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2,]$$

Integralean ordezkatuz:

$$\int_C xy^4\, dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+2\cos\theta)(2\sin\theta)^4 \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^5 (\sin\theta)^4 + 2^5 \cos\theta (\sin\theta)^4 \sqrt{4(\sin\theta)^2 + 4(\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

$$2^6 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin\theta)^4\, d\theta}_{I} + 2^6 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta (\sin\theta)^4 d\theta}_{J}$$

I integralaren kalkulua:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin\theta)^4\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta)}{4}\right) d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1-2\cos(2\theta)}{4}\right) d\theta + \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(2\theta)\, d\theta = \left[\frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}$$

J integralaren kalkulua:

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta (\sin\theta)^4 d\theta = \left\| \begin{array}{l} t = \sin\theta \\ dt = \cos\theta d\theta \\ d\theta = dt / \cos\theta \end{array} \right\| = \int t^4 dt = \left. \frac{\sin^5\theta}{5} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{5}$$

Beraz:

$$\int_C xy^4\, dS = 2^6 \left[\frac{3\pi}{8}\right] + 2^6\left[\frac{2}{5}\right] = \boxed{64\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2}{5}\right)}$$

---

4. Ariketa

Izan bedi gainazal hauek mugatzen duten [C] gorputz homogeneoa:

$$x^2+y^2-4z=0, \quad x^2+y^2-z^2+16z-64=0 \ \left(z\le 8\right)$$

Kalkulatu integral hirukoitza erabiliz:

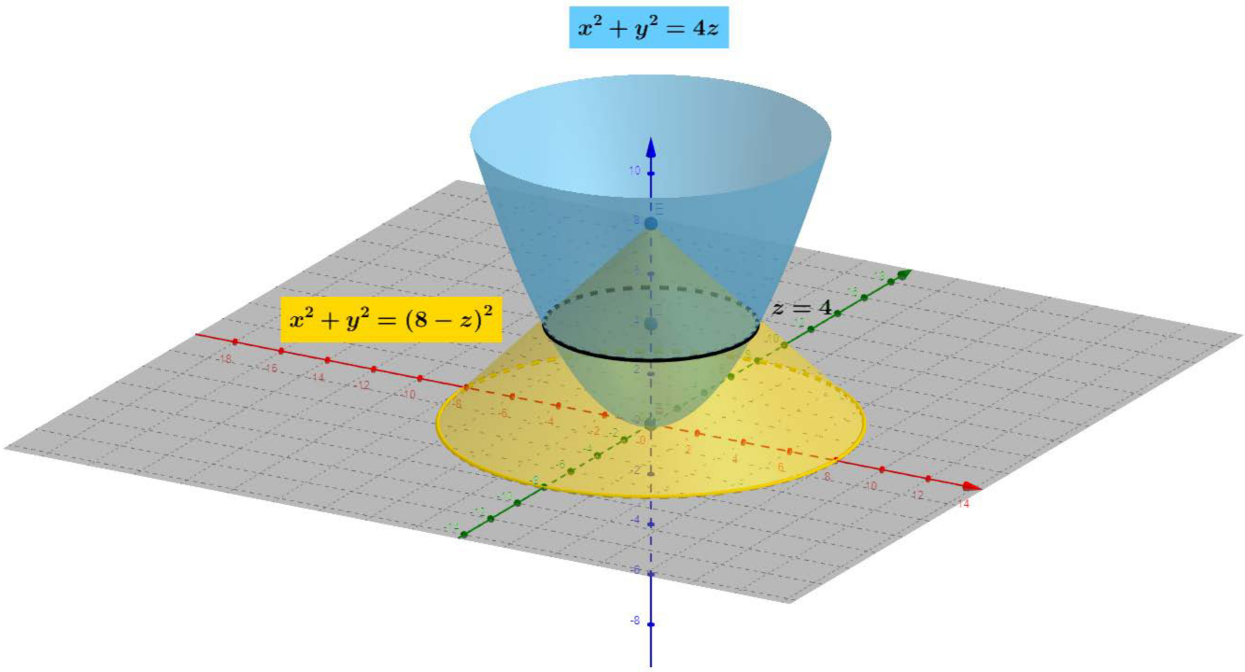
a) C gorputzaren bolumena.

b) C gorputzaren grabitate zentroa.

(2 puntu)

Ebazpena:

a) Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez horiz esfera erdi bat ($x^2+y^2+\left(z-10\right)^2=16$) eta urdinez paraboloide bat ($x^2+y^2=z$) ditugu.



Konoak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa ($x^2+y^2=4z$) eta konoaren barrukoa ($x^2+y^2=(8-z)^2$) da. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=4z \\ x^2+y^2=(8-z)^2 \end{array}\right\} 4z=(8-z)^2 \quad\Rightarrow\quad 4z=z^2-16z+64 \quad\Rightarrow\quad z^2-20z+64=0$$

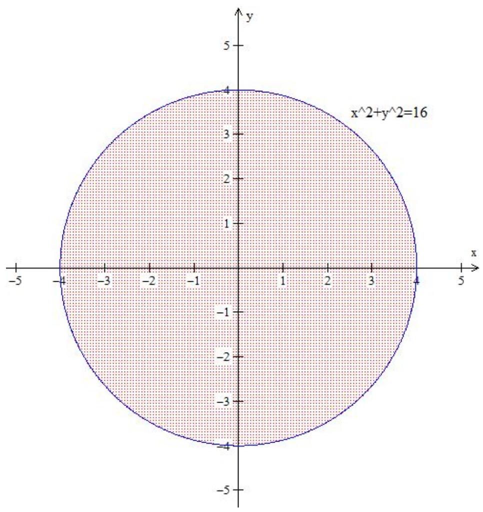
$$\Rightarrow \quad z=\frac{20\pm\sqrt{400-4\cdot 1\cdot 64}}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{20\pm 12}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z=4} \\ z=16 \end{cases}$$

Ebakidura planoa $z=4$ da, izan ere konoa $z\le 8$ -rako definituta baitago.

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \\ J(\rho,\theta,z)=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=4z \quad \Rightarrow \quad \rho^2=4z \quad \Rightarrow \quad z=\rho^2/4 \\ x^2+y^2=(8-z)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2=(8-z)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z=8-\rho} \\ z=8+\rho \end{cases} \end{cases}$$

Behin z-ren mugak zehaztuta daudela, *XOY* planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=16$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta R=4.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$$\theta=[0,2\pi]; \quad \rho=[0,4]; \quad z=[\rho^2/4, 8-\rho]$$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^4 \rho\, d\rho\int_{\rho^2/4}^{8-\rho} dz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^4 \rho(8-\rho-\frac{\rho^2}{4})d\rho=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^4 (8\rho-\rho^2-\frac{\rho^3}{4})d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[4\rho^2-\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{16}\right]_0^4 d\theta=2\pi\left[64-\frac{64}{3}-16\right]=\frac{160\pi}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{160\pi}{3} \quad u^3}$$

b) Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko z_c koordenatua soilik lortu behar dugu [C] gorputza simetrikoa baita OX eta OY ardatzekiko. Beraz, $z_C = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\, d\rho \int_{\rho^2/4}^{8-\rho} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho\left[(8-\rho)^2 - \frac{\rho^4}{16}\right] d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (64\rho - 16\rho^2 + \rho^3 - \frac{\rho^5}{16}) d\rho =$$

$$= \pi\left[32\rho^2 - \frac{16\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{96}\right]_0^4 = \pi\left[2^5 \cdot 2^4 - \frac{2^4 \cdot 2^6}{3} + \frac{2^8}{2^2} - \frac{2^{12}}{3 \cdot 2^5}\right] = \pi\left[2^9 - \frac{2^{10}}{3} + 2^6 - \frac{2^7}{3}\right] =$$

$$= \pi 2^6\left(2^3 - \frac{2^4}{3} + 1 - \frac{2}{3}\right) = 64\pi\left(9 - \frac{18}{3}\right) = 192\pi$$

Beraz, z_c koordenatua hurrengoa da:

$$z_C = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = \frac{3 \cdot 192\pi}{160\pi} = \frac{18}{5}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0, 0, \frac{18}{5}\right)$ da.

(2 puntu)

5. Ariketa

Izan bedi hurrengo eran definituriko [D] domeinu laua:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 4x \geq 0, \quad (x-2)^2 + 4y^2 - 16 \leq 0, \quad x \geq 2\right\}$$

Kalkulatu [D] domeinu lauaren azalera **integral bikoitzaren kontzeptua erabiliz**.

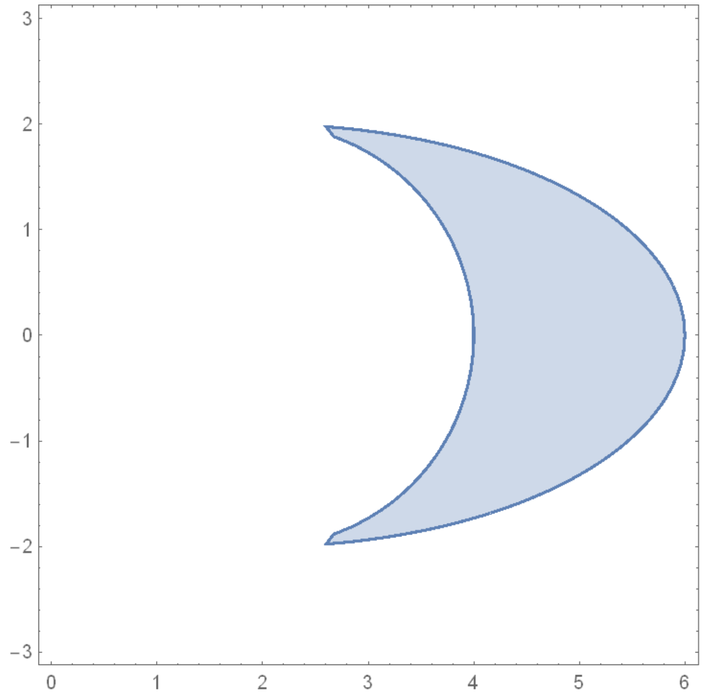
(2 puntu)

Ebazpena:

Lehengo eta behin, D domeinua marraztuko dugu:

$(x-2)^2 + 4y^2 - 16 \leq 0 \rightarrow$ (2,0) zentroko elipsea

$x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \rightarrow$ (2,0) zentroko eta 2 erradioko zirkunferentzia



Koordenatu polarrak erabiliz:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Domeinuan agertzen diren kurben ekuazioak koordenatu polarretan hurrengoak dira:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \to \rho = 2 \\ \\ (x-2)^2 + 4y^2 - 16 = 0 \to \rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\sin^2\theta = 16 \to \rho^2\left(1-\sin^2\theta\right) + 4\rho^2\sin^2\theta = 16 \to \\ \to \rho^2\left(1+3\sin^2\theta\right) = 16 \to \rho = \dfrac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}} \end{cases}$$

Orain, azalera kalkulatuko dugu, integral bikoitza erabiliz:

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{2}^{16/\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{16}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}-4\right)d\theta=\frac{1}{2}\cdot 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{4}{1+3\sin^2\theta}-1\right)d\theta=$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{4-1-3\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}\right)d\theta=6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}\right)d\theta=6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\cos^2\theta}{1+3\sin^2\theta}\right)d\theta=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{aldagai aldaketa:}\\ t=\tan\theta;d\theta=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ \cos^2\theta=\dfrac{1}{1+t^2};\sin^2\theta=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{array}\right\|=6\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2+3t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=6\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+4t^2\right)}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{zatiki sinpleetan}\\ \text{deskonposatuz}\end{array}\right\|=6\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-1/3}{\left(1+t^2\right)}+\frac{4/3}{\left(1+4t^2\right)}\right)dt==6\left[-\frac{1}{3}\arctan t+\frac{2}{3}\arctan 2t\right]_{-\infty}^{\infty}=\boxed{2\pi}$$

---

6. Ariketa

Kalkulatu honako integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x-1}}$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

(2 puntu)

---

a) $$\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x-1}}=\left\|\begin{array}{l}x-1=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt\end{array}\right\|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+\frac{t+1}{t}-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{t^2+2t+1+t^2+t-t^2}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{t}{\sqrt{t^2+3t+1}}dt=-\int\frac{t}{\sqrt{t^2+3t+1}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{2t+3-3}{\sqrt{t^2+3t+1}}dt=-\frac{1}{2}\left[\int\frac{2t+3}{\sqrt{t^2+3t+1}}dt-\int\frac{3}{\sqrt{t^2+3t+1}}dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{t^2+3t+1}-\int\frac{3}{\sqrt{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}dt\right]=-\sqrt{t^2+3t+1}+\frac{3}{2}\ln\left|t+\frac{3}{2}+\sqrt{t^2+3t+1}\right|+C=$$

$$= \boxed{-\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3}{x-1}+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+1}\right|+C}$$

b) 1. ebazpen posiblea

$$I=\int\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx=\int x^{-2}\left(x^2-4\right)^{-1/2}\,dx=\left\|\begin{matrix} m=-2 & n=2 & p=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} & & \frac{m+1}{n}+p=-1\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\|=\begin{pmatrix}\text{binomia}\\ \text{3. kasua}\end{pmatrix}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} x^2=t\to x=t^{1/2} \\ dx=\frac{1}{2}t^{-1/2}dt\end{matrix}\right\|=\int t^{-1}(t-4)^{-1/2}\,\frac{1}{2}t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-3/2}(t-4)^{-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-3/2}\cdot t^{-1/2}\left(\frac{t-4}{t}\right)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{-2}\cdot\left(\frac{t-4}{t}\right)^{-1/2}\,dt=\left\|\begin{matrix} \frac{t-4}{t}=z^2 \;\Rightarrow\; t=\frac{-4}{z^2-1} \\ dt=\frac{8z}{\left(z^2-1\right)^2}dz\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{-4}{z^2-1}\right)^{-2}\cdot z^{-1}\cdot\frac{8z}{\left(z^2-1\right)^2}dz=\frac{1}{4}\int dz=\frac{1}{4}z+K=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{t-4}{t}}+K=\boxed{\frac{1}{4x^2}\sqrt{x^2-4}+K}$$

2. ebazpen posiblea

$$I=\int\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx=\left\|\begin{matrix} x=\frac{2}{\cos t} & dx=2\cos^{-2}t\cdot\sin t\cdot dt \\ \cos t=\frac{2}{x} & \sin t=\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}\end{matrix}\right\|=\int\frac{2\cos^{-2}t\cdot\sin t}{\left(\frac{2}{\cos t}\right)^2\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{\cos t}\right)^2-4}}\,dt=$$

$$=\int\frac{\sin t}{2\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\sin t}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\sin t}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\sin t}{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}\,dt=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+K=\left\|\cos t=\frac{2}{x}\qquad \sin t=\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}\right\|=\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}+K=\boxed{\frac{1}{4x^2}\sqrt{x^2-4}+K}$$

KALKULUA (EBALUAZIO FINALA)

EZ-OHIKO DEIALDIA. 2019ko uztailak 2

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

1. Ariketa

Ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$y''+4y'+4y=\sinh(2x)$$

(1.5 puntu)

Ebazpena:

Elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra lortzeko:

Ekuazio karakteristikoa lortzen dugu:

$$r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\frac{-4\pm 0}{2}=\begin{cases} r=-2 \\ r=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r=-2\,(2)$$

$$y_h=C_1\,e^{-2x}+C_2\,xe^{-2x}$$

Orain, ekuazio osoaren soluzio orokorra planteatuko dugu parametroen aldakuntzaren metodoa erabiltzeko:

$$y=L_1(x)e^{-2x}+L_2(x)xe^{-2x}$$

Baldintzak zehazten ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} L_1'(x)e^{-2x}+L_2'(x)xe^{-2x}=0 \\ -2L_1'(x)e^{-2x}+L_2'(x)\left(e^{-2x}-2xe^{-2x}\right)=\sinh(2x) \end{array}\right\}$$

Wronskiarra kalkulatzen dugu:

$$W=\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}=e^{-4x}-2xe^{-4x}+2xe^{-4x}=e^{-4x}$$

$L_1'(x)$ eta $L_2'(x)$ kalkulatuko ditugu Kramerren erregela erabiliz:

$$L_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{-2x}\\ \sinh(2x) & e^{-2x}-2xe^{-2x}\end{vmatrix}}{W}=\frac{-xe^{-2x}\sinh(2x)}{e^{-4x}}=-xe^{2x}\sinh(2x)=-xe^{2x}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}e^{4x}$$

$$L_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-2x} & 0\\ -2e^{-2x} & \sinh(2x)\end{vmatrix}}{W}=\frac{e^{-2x}\sinh(2x)}{e^{-4x}}=e^{2x}\sinh(2x)=e^{2x}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)=\frac{e^{4x}-1}{2}$$

$L_1'(x)$ eta $L_2'(x)$ integratuko ditugu $L_1(x)$ eta $L_2(x)$ kalkulatzeko:

$$L_1(x)=\int\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}e^{4x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\int xe^{4x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-I_1\right]$$

non $I_1=\int xe^{4x}dx=\left\|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=e^{4x}dx & v=\dfrac{e^{4x}}{4}\end{matrix}\right\|=\frac{x}{4}e^{4x}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx=\frac{x}{4}e^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+C$

Beraz, $L_1(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-I_1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}e^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+C\right]=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+A$

$$L_2(x)=\int\frac{e^{4x}-1}{2}dx=\frac{e^{4x}}{8}-\frac{x}{2}+B$$

$L_1(x)$ eta $L_2(x)$ kalkulatuta daudela, ekuazio osoaren soluzio orokorra hurrengoa izango litzateke:

$$y=L_1(x)e^{-2x}+L_2(x)xe^{-2x}=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+A\right]e^{-2x}+\left[\frac{e^{4x}}{8}-\frac{x}{2}+B\right]xe^{-2x}=$$

$$=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+\frac{x}{8}e^{4x}-\frac{x^2}{2}\right)e^{-2x}=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\left(\frac{1}{32}e^{4x}-\frac{x^2}{4}\right)e^{-2x}=$$

$$=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\frac{1}{32}e^{2x}-\frac{x^2}{4}e^{-2x}$$

$$\boxed{y=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\frac{1}{32}e^{2x}-\frac{x^2}{4}e^{-2x}}$$

---

2. Ariketa

Sailkatu eta ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$(2x+y-3)\,dy-(x+2y-3)\,dx=0$$

(1.5 puntu)

Ebazpena:

Ekuazioa era normalean idatziz:

$$y'=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$

Beraz, homogeneoen kasura murrizgarria da.

Lehenengo eta behin $x+2y-3$ eta $2x+y-3$ zuzenen arteko ebakidura puntua kalkulatuko dugu:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \rightarrow x=1;\ y=1$$

Ebakidura puntua (1,1) da, beraz hurrengo aldaketa egingo dugu:

$$\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+1 \rightarrow y'=Y' \end{cases}$$

Hasierako ekuazioan ordezkatuz:

$$Y'=\frac{X+1+2Y+2-3}{2X+2+Y+1-3}=\frac{X+2Y}{2X+Y}$$

Aldaketa egin ondoren, ekuazioa homogeneoa da (0. gradukoa), beraz, hurrengo eran idatz daiteke:

$$Y'(1,Y/X)=\frac{1+2(Y/X)}{2+(Y/X)}$$

Orain, hurrengo aldaketa egingo dugu:

$$z=Y/X \rightarrow z+z'X=Y'$$

Orduan:

$$z + z' X = \frac{1+2z}{2+z}$$

$$z' X = \frac{1+2z-2z-z^2}{2+z} = \frac{1-z^2}{2+z}$$

$$\frac{2+z}{1-z^2} dz = \frac{dX}{X}$$

Lortu dugun ekuazioa aldagai banangarrien ekuazio bat da, beraz, integratuz ebatziko dugu:

$$\int \frac{2+z}{1-z^2} dz = \int \frac{dX}{X}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-4-2z}{1-z^2} dz = \ln X + C$$

$$-\frac{1}{2} \left[\ln\left(1-z^2\right) - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \right] = \ln X + C$$

$$-\frac{1}{2} \ln(1+z) - \frac{1}{2} \ln(1-z) + \ln(1+z) - \ln(1-z) = \ln X + C$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+z) - \frac{3}{2} \ln(1-z) = \ln X + C$$

Bukatzeko, aldaketak desegingo ditugu:

$$\frac{1}{2} \ln(1+Y/X) - \frac{3}{2} \ln(1-Y/X) = \ln X + C$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{X+Y}{X}\right) - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{X-Y}{X}\right) = \ln X + C$$

$$\frac{1}{2} \ln(X+Y) - \frac{1}{2} \ln X - \frac{3}{2} \ln(X-Y) + \frac{3}{2} \ln X = \ln X + C$$

$$\frac{1}{2} \ln(X+Y) - \frac{3}{2} \ln(X-Y) = C$$

$$\frac{1}{2} \ln(x-1+y-1) - \frac{3}{2} \ln(x-1-y+1) = C$$

$$\frac{1}{2} \ln(x+y-2) - \frac{3}{2} \ln(x-y) = C$$

$$\ln(x+y-2) - 3\ln(x-y) = D$$

$$\ln\left[(x+y-2) \cdot (x-y)^{-3}\right] = D$$

$$\boxed{\frac{x+y-2}{(x-y)^3} = E}$$

---

3. Ariketa

Izan bedi hurrengo integral lerromakurra: $\int_A^B -\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy$ C kurbaren gainean, non C kurba A(1,-1) eta B(2,2) puntuak lotzen dituen zuzena den:

a) Aztertu bidearekiko independentzia.

b) Ebatzi integral lerromakurra parametrizazioa erabiliz eta posible bada, ebatzi berriro integrala funtzio potentziala erabiliz.

____ (2 puntu)

Ebazpena:

a) Bidearekiko independentzia aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} X(x,y)=\frac{-1}{y}\rightarrow\frac{\partial X}{\partial y}=-\left(\frac{-1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2} \\ Y(x,y)=\frac{x}{y^2}\rightarrow\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Berdinak dira, beraz, integrala bidearekiko independentea da}$$

b) Integrala bidearekiko independentea denez, funtzio potentziala erabiltzea posible da. Lehengo eta behin, funtzio potentziala kalkulatuko dugu:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}X(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}Y(x_0,t)\,dt=\left\|(x_0,y_0)=(0,1)\right\|=$$

$$=\int_0^x\frac{-1}{y}dt+\int_1^y 0dt=\left.\frac{-1}{y}t\right]_0^x+C=\boxed{\frac{-x}{y}+C}$$

Funtzio potentziala erabiliz, integrala ebatziko dugu:

$$\int_A^B\frac{-1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy=U(2,2)-U(1,-1)=\frac{-2}{2}+C-\left(\frac{-1}{-1}+C\right)=\boxed{-2}$$

Bukatzeko, integrala, parametrizazioa erabiliz, ebatziko dugu:

C kurba A(1,-1) eta B(2,2) puntuak lotzen dituen zuzena da, beraz, bere ekuazioa hurrengoa izango da:

$$\left(y-2\right)=\frac{2+1}{2-1}\left(x-2\right)$$
$$\left(y-2\right)=3\left(x-2\right)$$
$$y=3x-4$$

$$\text{Parametrizazioa}\rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{y+4}{3} & \rightarrow dx=\dfrac{dy}{3} \\ y=y & \rightarrow dy=dy \end{cases}\rightarrow y\in\left[-1,2\right]$$

Integralean ordezkatuz:

$$\int_{-1}^{2}\frac{-1}{y}\frac{dy}{3}+\frac{y+4}{3y^2}dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(\frac{-1}{y}+\frac{y+4}{y^2}\right)dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(\frac{-1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{4}{y^2}\right)dy=$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\frac{4}{y^2}dy=\left.\frac{-4}{3y}\right]_{-1}^{2}=\frac{-4}{6}-\frac{4}{3}=\boxed{-2}$$

---

4. Ariketa

Izan bedi gainazal hauek mugatzen duten $[C]$ gorputz homogeneoa:

$$x^2+y^2-z=0, \quad x^2+y^2+z^2-20z+100=16 \ \left(z\geq 10\right)$$

Kalkulatu integral hirukoitza erabiliz:

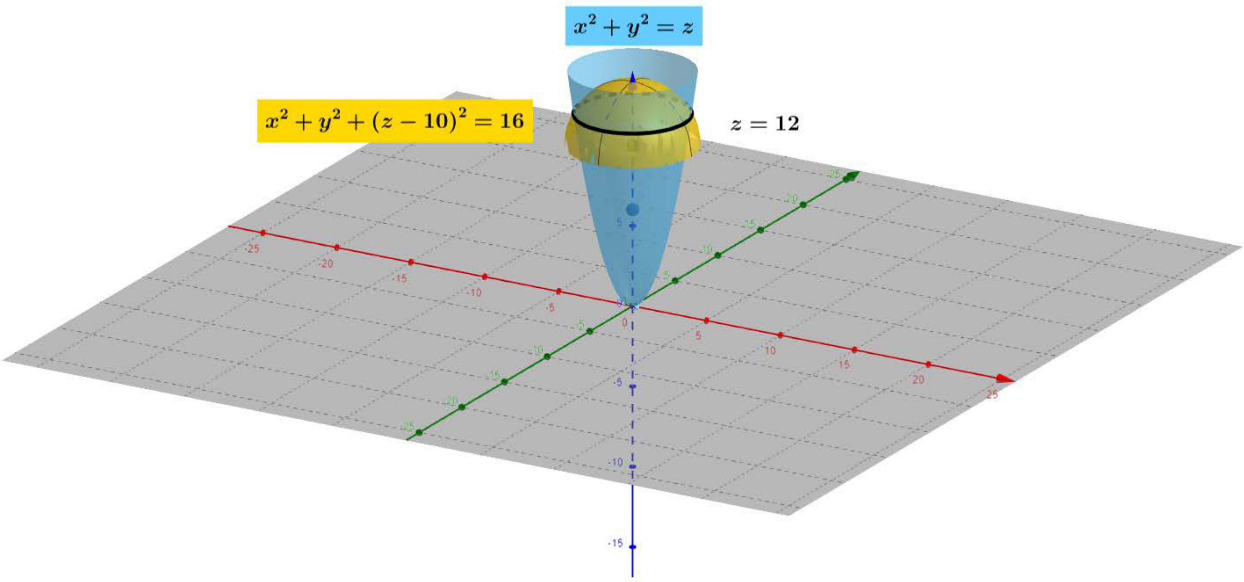
a) C gorputzaren bolumena.

b) C gorputzaren grabitate zentroa.

(2 puntu)

Ebazpena:

a) Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez horiz esfera erdi bat ($x^2+y^2+\left(z-10\right)^2=16$) eta urdinez paraboloide bat ($x^2+y^2=z$) ditugu.



Esfera erdiak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa da esfera erdiak mugatzen duena. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2+(z-10)^2=16 \end{cases}\right\} z+(z-10)^2=16 \quad \Rightarrow \quad z+z^2-20z+100=16 \quad \Rightarrow \quad z^2-19z+84=0$$

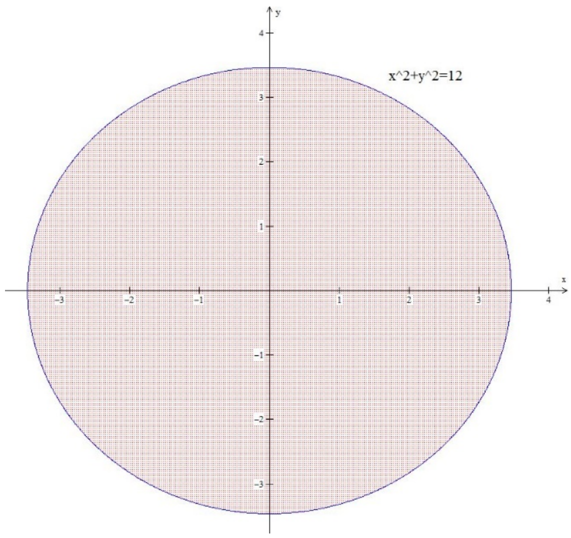
$$\Rightarrow \quad z=\frac{19\pm\sqrt{361-336}}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{19\pm\sqrt{25}}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{19\pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z=12} \\ z=7 \end{cases}$$

Ebakidura planoa $z=12$ da, izan ere esfera $z \geq 10$-rako definituta baitago.

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \\ J(\rho,\theta,z)=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=z \quad \Rightarrow \quad z=\rho^2 \\ \\ x^2+y^2+(z-10)^2=16 \quad \Rightarrow \quad \rho^2+(z-10)^2=16 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z=10+\sqrt{16-\rho^2}} \\ z=10+\sqrt{16-\rho^2} \end{cases} \end{cases}$$

Behin *z*-ren mugak zehaztuta daudela, *XOY* planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2+y^2=12$ zirkunferentzia, zentroa *C*(0,0) eta *R*= $2\sqrt{3}$.



Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$$\theta=[0,2\pi]; \quad \rho=[0,2\sqrt{3}]; \quad z=[\rho^2,10+\sqrt{16-\rho^2}\,]$$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_{\rho^2}^{10+\sqrt{16-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\left(10+\sqrt{16-\rho^2}-\rho^2\right) d\rho =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \left(10\rho+\rho\sqrt{16-\rho^2}-\rho^3\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left[5\rho^2-\frac{\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{3}} d\theta = 2\pi\frac{128}{3}=\frac{256\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{256\pi}{3}\quad u^3}$$

b) Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko z_c koordenatua soilik lortu behar dugu $[C]$ gorputza simetrikoa baita OX eta OY ardatzekiko. Beraz, $z_C=\frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{10+\sqrt{16-\rho^2}}z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{3}}\rho\left[\left(10+\sqrt{16-\rho^2}\right)^2-\rho^4\right]d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{3}}\rho\left[100+20\sqrt{16-\rho^2}+16-\rho^2-\rho^4\right]d\rho=$$

$$=\pi\left[58\rho^2-\frac{20}{3}\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{2236\pi}{3}$$

Beraz, z_c koordenatua hurrengoa da:

$$z_C=\frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz=\frac{\frac{2236\pi}{3}}{\frac{256\pi}{3}}=\frac{2236}{256}=\frac{559}{64}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0,0,\frac{559}{64}\right)$ da.

---

5. Ariketa

Izan bedi hurrengo eran definituriko [D] domeinu laua:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y\geq 2,\quad (x-1)^2+y^2\leq 1\right\}$$

Kalkulatu [D] domeinu lauak x ardatzaren inguruan biratzerakoan sortzen duen bolumena **integral mugatuaren kontzeptua erabiliz**.

(1 puntu)

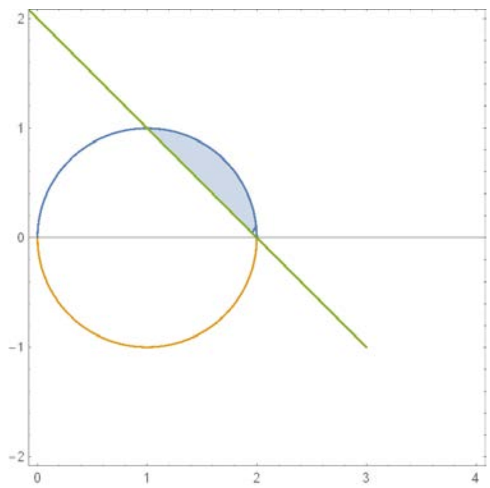
Ebazpena:

Lehenengo eta behin, D domeinua marraztuko dugu:

$(x-1)^2+y^2\leq 1 \rightarrow (1,0)$ zentroko eta 1 radioko zirkunferentziaren barruan dagoen eskualdea

$x+y\geq 2 \rightarrow x+y=2$ zuzenaren gainean dagoen eskualdea

Beraz:



D domeinu lauak x ardatzaren inguruan biratzerakoan sortzen duen bolumena hurrengoa izango da:

$$V=V_1-V_2=\pi\int_1^2\left(\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2dx-\pi\int_1^2(2-x)^2\,dx=$$

$$=\pi\int_1^2 1-\left(x^2-2x+1\right)dx-\pi\int_1^2\left(4+x^2-4x\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{-x^3}{3}+x^2\right]_1^2-\pi\left[4x+\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_1^2=\boxed{\frac{\pi}{3}u^3}$$

6. Ariketa

Kalkulatu honako integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{x^2-4}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx$

(2 puntu)

a) *Ebazpena*:

$$\int \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{x^2-4}}\,dx = \int x^{-3}\left(x^2-4\right)^{-1/2}\,dx = \left\| \begin{matrix} m=-3 & n=2 & p=-\dfrac{1}{2}\notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{m+1}{n}=-1\in\mathbb{Z} & & \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} \text{binomia} \\ \text{2. kasua} \end{pmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x^2=t \to x=t^{1/2} \\ dx=\dfrac{1}{2}t^{-1/2}dt \end{matrix} \right\| = \int t^{-3/2}\left(t-4\right)^{-1/2}\frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}\left(t-4\right)^{-1/2}\,dt = \left\| \begin{matrix} t-4=z^2 \;\Rightarrow\; t=z^2+4 \\ dt=2z\,dz \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(z^2+4\right)^{-2}\cdot z^{-1}\cdot 2z\cdot dz = \int \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$$

Hermiteren metodoa erabiltzen da integral ebazteko:

$$\int \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{Az+B}{z^2+4} + \int \frac{Mz+N}{z^2+4}dz$$

Adierazpen guztia deribatu egiten da.

$$\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{A\left(z^2+4\right)+\left(Az+B\right)2z}{\left(z^2+4\right)^2} + \frac{Mz+N}{z^2+4}$$

$$1 = A\left(z^2+4\right)+\left(Az+B\right)2z+\left(Mz+N\right)\left(z^2+4\right)$$

$$z^3: \quad \boxed{M=0}$$
$$z^2: \quad 0 = A - 2A + N \Rightarrow N = A$$
$$z: \quad 0 = -2B + 4M \Rightarrow B = 2M \Rightarrow \boxed{B=0}$$
$$z^0: \quad 1 = 4A + 4N \Rightarrow \boxed{N = A = 1/8}$$

Koefiziente indeterminatuak ordezkatuz:

$$\int \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) + K =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\sqrt{t-4}}{t} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{\sqrt{t-4}}{2}\right) + K = \boxed{\frac{1}{8}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + K}$$

b) Ebazpena

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = \sqrt{3}\tan t \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{3\tan^2 t+3}}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{\tan^2 t+1}}\,dt = \int \frac{1}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(3\tan^2 t+1\right)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\cos t\left(3\tan^2 t+1\right)}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(\dfrac{3\sin^2 t}{\cos^2 t}+1\right)}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(\dfrac{3\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{1}{\cos t}\left(3\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt = \int \frac{\cos t}{\left(2\sin^2 t+1\right)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\left(\sin^2 t+\dfrac{1}{2}\right)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin t\right) + C =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = \sqrt{3}\tan t \\ t = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{array} \right\| = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

Ebazpena sinplifikatzea posiblea da hurrengo aldaketak aplikatuz:

$x=\sqrt{3}\tan t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan t=\frac{x}{\sqrt{3}}}$ dela kontuan izanda, sinuaren adierazpena tangentearenaren menpe utziko dugu eta beraz, x-ren menpe geratuko da.

$$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow$$

$$1-\sin^2 t=\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t=1-\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t=\frac{x^2}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}$$

Beraz, integralaren emaitza horrela sinplifika daiteke:

$$\boxed{\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2+3}}\right)+C}$$