IKERKETA OPERATIBOA TALDE LANA - 3. ARIKETA

Ander Prieto, Aitor Elorza, Josu Ferreras, Gorka Del Rio

Tratamendu termikoak egiten dituen enpresa batek, hiru pieza mota desberdinei, P1, P2 eta P3 piezei, tratamendua egiteko mota zehatz bateko labea du.

Aipatutako labea 24 orduz lanean egon daiteke, baina labeak ezin ditu mota desberdineko piezak aldi berean tratatu.

P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzak, 3, 1 eta 2 ordu behar izaten ditu, hurrenez hurren.

Egunean langileak 32 orduz lan egin dezakete. Eta P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzak 1, 3 eta 2 eskulan-ordu behar ditu. Azkenik, P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzagatik 30, 20 eta 38 unitate-monetario irabazten dira.

Eskatzen da:

1) Irabaziak maximizatzen dituen eguneroko ekoizpen-plana zehaztea.

Simplex metodoa erabiliz ebatzi.

$$\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$$

$$3P_1 + P_2 + 2P_3 \leq 24$$

$$P_1 + 3P_2 + 2P_3 \leq 32$$

$$P_1, P_2, P_3 \geq 0$$

Lasaiera aldagaiak sartuz:

$$\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$$

$$3P_1 + P_2 + 2P_3 + r = 24$$

$$P_1 + 3P_2 + 2P_3 + s = 32$$

$$P_1, P_2, P_3, r, s \geq 0$$

X_B oinarrizko soluzioa:

$$A \cdot X = b \quad \Rightarrow \quad (B|N)\begin{pmatrix} X_B \\ Y_N \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad B \cdot X_B + N \cdot X_N = b$$

$$X_N = 0 \text{ denez} \quad \Rightarrow \quad B \cdot X_B = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X_B = B^{-1} \cdot b}$$

$$\begin{aligned} 3P_1 + P_2 + 2P_3 + r &= 24 \\ P_1 + 3P_2 + 2P_3 + s &= 32 \end{aligned}$$

Kasu honetan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(B|N) \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_B = (r, s) \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_N = (P_1, P_2, P_3)$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \boldsymbol{X_B = (r, s) = (24, 32)} \\ \boldsymbol{X_N = (P_1, P_2, P_3) = (0, 0, 0)} \end{cases}$$

$$B^{-1} = I = B$$

1. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
0	r	24	3	1	**2**	1	0
0	s	32	1	3	2	0	1
Z = 0		z_j	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	-30	-20	-38	0	0

Kostu Murriztual: ∃ Wj <0 ⇒ Jarraitu

Sartze-Irizpidea: Wj = min zk – ck

min {-30, -20, -38} = -38 ⇒ P3 sartu

Irtetze-Irizpidea: XBI/Yij =min {XBk/Ykj |Ykj >0}

min{24/2 , 32/2}=12 ⇒ r atera

Errenkaden arteko eragiketak:

e1=e1/2

e2=e2-e1

2. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	12	3/2	1/2	1	1/2	0
0	s	8	-2	**2**	2	-1	1
Z = 456		z_j	57	19	38	19	0
		$z_j - c_j$	27	-1	0	19	0

Kostu Murriztual: ∃ Wj <0 ⇒ Jarraitu

Sartze-Irizpidea: Wj = min zk – ck

min {-1}= -1 ⇒ P2 sartu

Irtetze-Irizpidea: XBI/Yij =min {XBk/Ykj |Ykj >0}

min{12/½ ,8/2}=4 ⇒ s atera

Errenkaden arteko eragiketak:

e2=e2/2

e1=e1-e2/2

3. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	10	2	0	1	3/4	-1/4
20	P_2	4	-1	1	0	-1/2	1/2
Z = 460		z_j	56	20	38	37/2	1/2
		$z_j - c_j$	26	0	0	37/2	1/2

Kostu Murriztuak: $\nexists$ Wj<0 ⇒ gelditu ⇒ optimoa lortu dugu

r eta s aldagai artifizialak oinarritik kanpo daude ⇒ soluzioa dauka

Ez-oinarrizkoak diren kostu murriztu (Wj = zj - cj) guztiak ≠ 0 dira ⇒ soluzio bakarra

SOLUZIO OPTIMOA:

$P_1^* = 0,\quad P_2^* = 4,\quad P_3^* = 10,\quad r^* = 0,\quad s^* = 0$

Helburu-funtzioaren balioa: $z^* = 460$

2) 36 orduz lan egin badaiteke, zein izango litzateke irabazia?

Hasierako egoera:

$$\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$$

$$3P_1 + P_2 + 2P_3 \leq 24$$

$$P_1 + 3P_2 + 2P_3 \leq 32$$

$$P_1, P_2, P_3 \geq 0$$

Egoera berria:

$$\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$$

$$3P_1 + P_2 + 2P_3 \leq 24$$

$$P_1 + 3P_2 + 2P_3 \leq \boxed{36}$$

$$P_1, P_2, P_3 \geq 0$$

3. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	10	2	0	1	3/4	-1/4
20	P_2	4	-1	1	0	-1/2	1/2
Z = 460		z_j	56	20	38	37/2	1/2
		$z_j - c_j$	26	0	0	37/2	1/2

Aldaketa egon denez b bektorean, $\hat{b}$ gai-aske berria sortzen da. Aurreko ataleko azken taulan oinarrituz:

$$\hat{X}_B = B^{-1} \cdot \hat{b} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ \mathbf{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\hat{X}_B \geq 0$ denez, **bideragarritasuna mantentzen da.**

SOLUZIO OPTIMOA:

$$\boldsymbol{P_1^* = 0, \qquad P_2^* = 6, \qquad P_3^* = 9, \qquad r^* = 0, \qquad s^* = 0}$$

Helburu-funtzioaren balioa: $\boldsymbol{z^* = 462}$

36 orduz lan egingo balute, irabazia **462** unitate-monetariokoa izango litzateke.

3) Zenbat unitate handitu beharko zen P1 piezen labealdiaren irabazia, bere tratamendua interesgarria izateko?

1. ariketako 3. Simplex taula

			$\boxed{c_1}$	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	10	2	0	1	3/4	-1/4
20	P_2	4	-1	1	0	-1/2	1/2
Z = 460		z_j	56	20	38	37/2	1/2
		$z_j - c_j$	56 - c_1	0	0	37/2	1/2

Soluzioa bideragarria ez izateko:

$$\exists W_j < 0 \quad \Rightarrow \quad 56 - c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 > 56}$$

P_1 motako piezen tratamendua interesgarria izan dadin, mota horretako piezen irabazia labealdi bakoitzeko **56** unitate-monetariokoa **baino handiagoa** izan beharko litzateke