Ondorengo problema grafikoki eta analitikoki Adarkatze- eta Bornatze- metodoa erabiliz ebatzi:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

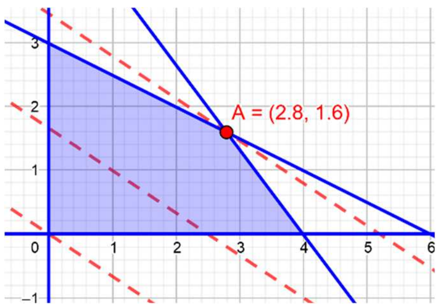
$$\begin{aligned} \textit{non} \qquad & 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 16 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad \textit{eta} \quad x_1, x_2 \quad \text{osoak} \end{aligned}$$

1. pausua: **Hasieraketa**

P1 problema erlaxatua ebazten da:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 16 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Soluzio optimoa $A = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right) = (2.8, 1.6)$ da eta $Z_1 = \frac{104}{5} = 20.8$ dira

Behe-bornea hasieratzen da: $\underline{Z} = -\infty$

2. pausua: **Adarkatzea**

Ez x_1 ez x_2 aldagaia ez dira osoak. Bietako bat aukeratu behar dugu. x_1 aukeratzen dugu.

$[x_1] = 2 \Rightarrow$ P2 eta P3 problemas sortzen dira

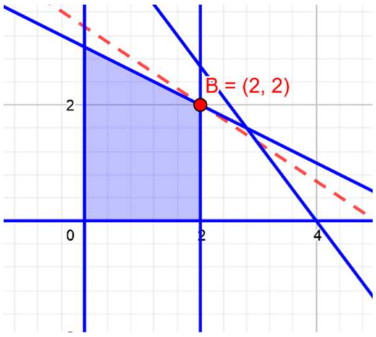
$$x_1 \le [x_1] = 2 \Rightarrow P2$$
$$x_1 \ge [x_1] + 1 = 3 \Rightarrow P3$$

3. pausua: **Bornatzea**

P2 problema

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



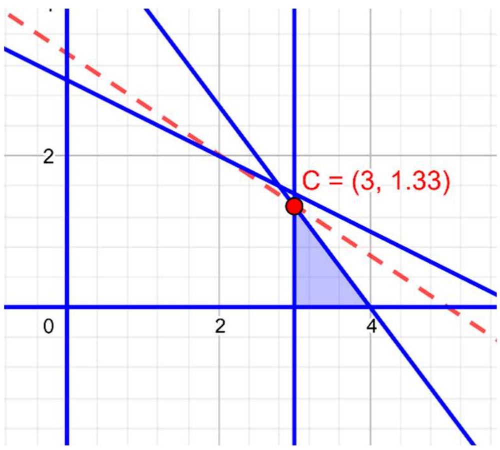
Optimoa $B = (2,2)$ *da eta* $Z_2 = 20$ *dira* $\Rightarrow$ Behe-bornea eguneratzen da $\underline{Z}$=20

P2 problema azkeneko problema da, izan ere bere soluzioa osoa da eta ez da adarkatu behar. Bere soluzioa problemaren soluziogaia da.

P3 problema

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Soluzio optimoa $C=\left(3,\frac{4}{3}\right)=(3,1.33)\ \ da\ \ eta\ \ Z_3=20$

Bere soluzioa ez da osoa, hortaz problema ez da azkeneko problema, adarkatu egin behar da. x_1 osoa da, beraz x_2 aldagaian adarkatu eta 2. pausura joan.

2. pausua: **Adarkatzea**

$\left[x_2\right]=1 \Rightarrow$ P4 eta P5 problemak sortzen dira

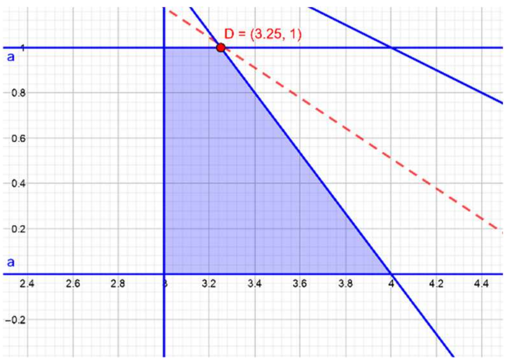
$$x_2 \le \left[x_2\right]=1 \Rightarrow P4$$
$$x_2 \ge \left[x_2\right]+1=2 \Rightarrow P5$$

3. pausua: **Bornatzea**

P4 problema

$$\text{Max} \quad Z=4x_1+6x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2 &\le 12 \\ 4x_1+3x_2 &\le 16 \\ x_1 &\ge 3 \\ x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

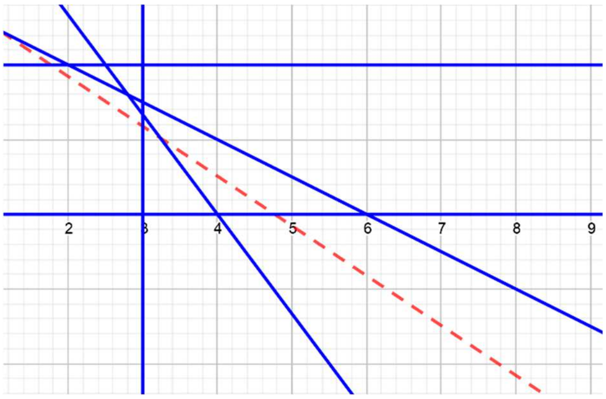


Soluzio optimoa $D=\left(\frac{13}{4},1\right)=(3.25,1)\ \ da\ \ eta\ \ Z_4=19$. Problemaren soluzioa osoa izan ez arren, problema azkenekoa da $Z_4=19<\underline{Z}=20$ betezen delako.

P5 problema

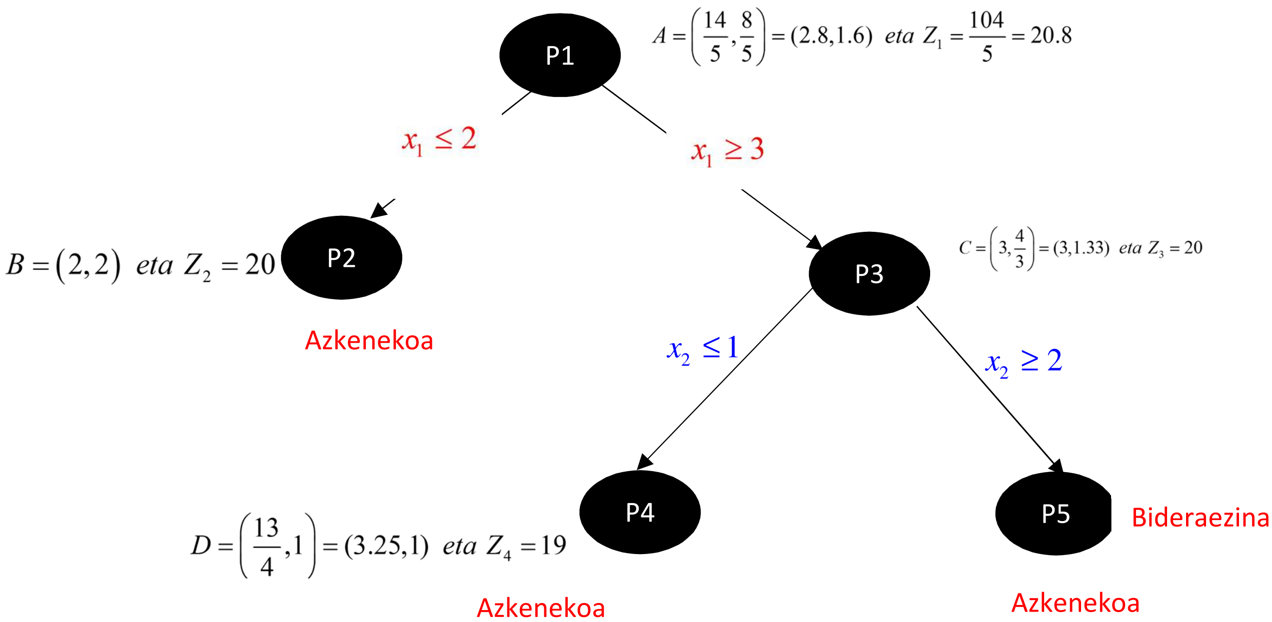
$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Problema bideraezina da.

4. pausua: **Azkeneko problemak**



Ondorioz, problemaren soluzioa $B = (2,2)$ eta $Z_2 = 20$ da

Problema analitikoki Adarkatze- eta Bornatze- metodoa erabiliz ebatzi:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} non \qquad & 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 16 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad eta \quad x_1, x_2 \quad \text{osoak} \end{aligned}$$

1. pausua: **Hasieraketa**

P1 problema erlaxatua ebazten da:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Problema hau **Simplex metodoa** erabiliz ebazten da:

Problema era estandarrean idazten da:

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 &= 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $x_3 = 12$, $x_4 = 16$ da eta Simplex metodoaren hasierako taula eraikitzen da:

		C_j	**4**	**6**	**0**	**0**
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	12	*2*	*4*	*1*	*0*
0	x_4	16	*4*	*3*	*0*	*1*
Z=0		**Z_j**	*0*	*0*	*0*	*0*
		Z_j-C_j	*-4*	*-6*	*0*	*0*

Kostu-murriztuak kalkulatzen dira. $\exists W_j < 0$, algoritmoarekin jarraitu beharra dago.

<u>Sartze-irizpidea:</u>

$$W_j = \underset{k\in\{1,2,\ldots,4\}}{m\acute{\imath}n} \{z_k - c_k\} = -6 \Rightarrow x_2$$ oinarrira sartzen da.

<u>Irtetze-irizpidea:</u>

$$x_{B_i} = m\acute{\imath}n \left\{ \frac{x_{B_k}}{y_{kj}} \;/\; y_{kj} > 0 \right\} = m\acute{\imath}n \left\{ \frac{12}{4}, \frac{16}{3} \right\} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow x_3$$ oinarritik irtetzen da

Taula berria eraikitzen da: $e_1 \leftarrow e_1/4$, $e_2 \leftarrow e_2 - 3\, e_1$

		C_j	**4**	**6**	**0**	**0**
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4
6	x_2	3	1/2	1	1/4	0
0	x_4	7	5/2	0	-3/4	1
Z=18		**Z_j**	3	6	3/2	0
		Z_j-C_j	-1	0	3/2	0

$\exists W_j < 0$, jarraitu

<u>Sartze-irizpidea:</u>

$$W_j = \underset{k\in\{1,2,\ldots,4\}}{m\acute{\imath}n} \{z_k - c_k\} = -1 \Rightarrow x_1$$ oinarrira sartzen da.

<u>Irtetze-irizpidea:</u>

$$x_{B_i} = m\acute{\imath}n \left\{ \frac{x_{B_k}}{y_{kj}} \;/\; y_{kj} > 0 \right\} = m\acute{\imath}n \left\{ \frac{3}{1/2}, \frac{7}{5/2} \right\} = \frac{14}{5} = 3 \Rightarrow x_4$$ oinarritik irtetzen da

Taula berria eraikitzen da: $e_2 \leftarrow 2\, e_2/5$, $e_1 \leftarrow e_1 - (1/2)\, e_2$

		C_j	**4**	**6**	**0**	**0**
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4
6	x_2	8/5	0	1	2/5	-1/5
4	x_1	14/5	1	0	-3/10	2/5
Z=104/5		**Z_j**	4	6	6/5	2/5
		Z_j-C_j	0	0	6/5	2/5

Kostu-murriztu guztiak ez-negatiboak direnez, taula optimoa lortu dugu.

Problemaren erlaxazio linealaren soluzioa $A=\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5}\right)=(2.8,1.6)\ \ eta\ \ Z_1=\frac{104}{5}=20.8$ da

Behe-bornatua hasieratu egiten da: $\underline{Z}=-\infty$

2. pausua: **Adarkatzea**

Ez x_1 ez x_2 aldagaia ez dira osoak. Bietako bat aukeratu behar dugu. x_1 aukeratzen dugu.

$[x_1]=2 \Rightarrow$ P2 eta P3 problemas sortzen dira

$$x_1 \le [x_1]=2 \Rightarrow P2$$
$$x_1 \ge [x_1]+1=3 \Rightarrow P3$$

3. pausua: **Bornatzea**

P2 eta P3 problemak ebazten dira:

P2 problema

$$\text{Max} \quad Z=4x_1+6x_2$$
$$2x_1+4x_2 \le 12$$
$$4x_1+3x_2 \le 16$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Simplex metodoaren taula optimoan $x_1 \le 2 \Rightarrow x_1+x_5=2$ murrizketa sartzen da:

		C_j	**4**	**6**	**0**	**0**	
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	8/5	*0*	*1*	*2/5*	*-1/5*	*0*
4	x_1	14/5	*1*	*0*	*-3/10*	*2/5*	*0*
0	x_5	2	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
Z=104/5		**Z_j**	*4*	*6*	*6/5*	*2/5*	*0*
		Z_j-C_j	*0*	*0*	*6/5*	*2/5*	*0*

x_1 zutabe-bektorea, bektore kanoniko bat izan behar denez: $e_3 \leftarrow e_3 - e_2$

		C_j	4	6	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	8/5	0	1	2/5	-1/5	0
4	x_1	14/5	1	0	-3/10	2/5	0
0	x_5	-4/5	0	0	3/10	-2/5	1
Z=104/5		Z_j	4	6	6/5	2/5	0
		Z_j-C_j	0	0	6/5	2/5	0

$\exists x_{Dk} < 0$ bideragarritasuna galdu da, ondorioz Simplex Dual metodoa erabili behar da:

<u>Irtetze-irizpidea:</u>

$$\max \left\{ |x_{DK}| \ / x_{DK} < 0 \ \right\} = \frac{4}{5} \Rightarrow x_5$$ oinarritik irtetzen da.

<u>Sartze-irizpidea:</u>

$$mín \left\{ \frac{|z_k - c_k|}{|a_{ik}|} \ / a_{ik} < 0 \ \right\} = mín \left\{ \frac{2/5}{2/5} \right\} = 1 \Rightarrow x_4$$ Oinarrian sartzen da.

Taula berria: $e_3 \leftarrow (-5/2)e_3$, $e_1 \leftarrow e_1 + (1/5)e_3$, $e_2 \leftarrow e_2 - (2/5)e_3$

		C_j	4	6	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	2	0	1	1/4	0	-2/25
4	x_1	2	1	0	0	0	4/25
0	x_5	2	0	0	-3/4	1	-2/5
Z=20		Z_j	4	6	3/2	2/5	4/25
		Z_j-C_j	0	0	3/2	2/5	4/25

Taula optimoa da. P2 problemaren soluzioa $B = (2,2)$ *da eta* $Z_2 = 20$. Behe-bornea eguneratu egiten da: $\underline{Z} = 20$. P2 problema azkeneko problema da, izan ere bere soluzioa osoa da eta ez da adarkatu behar. Bere soluzioa problemaren soluziogaia da.

P3 problema ebazten da:

Problema P3

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Simplex metodoaren taula optimoan $x_1 \ge 3 \Rightarrow x_1 - x_5 = 3 \Rightarrow -x_1 + x_5 = -3$ murrizketa sartzen da:

		C_j	4	6	0	0	
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	8/5	*0*	*1*	*2/5*	*-1/5*	*0*
4	x_1	14/5	*1*	*0*	*-3/10*	*2/5*	*0*
0	x_5	-3	*-1*	*0*	*0*	*0*	*1*
Z=104/5		**Z_j**	*4*	*6*	*6/5*	*2/5*	*0*
		Z_j-C_j	*0*	*0*	*6/5*	*2/5*	*0*

x_1 zutabe-bektorea, bektore kanoniko bat izan behar denez: $e_3 \leftarrow e_3 + e_2$

		C_j	4	6	0	0	
c_B	**OA_B**	**$B^{-1}.b$**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	8/5	*0*	*1*	*2/5*	*-1/5*	*0*
4	x_1	14/5	*1*	*0*	*-3/10*	*2/5*	*0*
0	x_5	-1/5	*0*	*0*	*-3/10*	*2/5*	*1*
Z=104/5		**Z_j**	*4*	*6*	*6/5*	*2/5*	*0*
		Z_j-C_j	*0*	*0*	*6/5*	*2/5*	*0*

$\exists x_{Dk} < 0$ bideragarritasuna galdu da, ondorioz Simplex Dual metodoa erabili behar da:

Irtetze-irizpidea:

$\max\left\{ \left| x_{DK} \right| \ / \ x_{DK} < 0 \ \right\} = 3 \Rightarrow x_5$ oinarritik irtetzen da.

Sartze-irizpidea:

$mín \left\{ \dfrac{\left| z_k - c_k \right|}{\left| a_{ik} \right|} \ / \ a_{ik} < 0 \ \right\} = mín \left\{ \begin{matrix} 6/5 \\ 3/10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_3$ oinarrira sartzen da.

Taula berria: $e_3 \leftarrow (-10/3)e_3$, $e_1 \leftarrow e_1 - (2/5)e_3$, $e_2 \leftarrow e_2 + (3/10)e_3$

		C_j	4	6	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	$4/3$	0	1	0	$1/3$	$4/3$
4	x_1	3	1	0	0	0	-1
0	x_3	$2/3$	0	0	1	$-4/3$	$-10/3$
$Z=20$		Z_j	4	6	0	2	4
		Z_j-C_j	0	0	0	2	4

Soluzio optimoa $C = \left(3, \dfrac{4}{3}\right) = (3, 1.33)$ $da \ \ eta \ \ Z_3 = 20$

Bere soluzioa ez da osoa, hortaz problema ez da azkeneko problema, adarkatu egin behar da. x_1 osoa da, beraz x_2 aldagaian adarkatu eta 2. pausura joan.

2. pausua: **Adarkatzea**

$\left[x_2 \right] = 1 \Rightarrow$ P4 eta P5 problemak sortzen dira

$x_2 \le \left[x_2 \right] = 1 \Rightarrow P4$

$x_2 \ge \left[x_2 \right] + 1 = 2 \Rightarrow P5$

3. pausua: **Bornatzea**

P4 eta P5 problemak ebazten dira

P4 problema

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

P3 problemaren taula optimoan $x_2 \le 1 \Rightarrow x_2 + x_6 = 1$ murrizketa sartzen da:

		C_j	4	6	0	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	4/3	0	1	0	1/3	4/3	0
4	x_1	3	1	0	0	0	-1	0
0	x_3	2/3	0	0	1	-4/3	-10/3	0
0	x_6	1	0	1	0	0	0	1
Z=20		Z_j	4	6	0	2	4	0
		Z_j-C_j	0	0	0	2	4	0

x_2 zutabe-bektorea, bektore kanoniko bat izan behar denez: $e_4 \leftarrow e_4 - e_1$

		C_j	4	6	0	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	4/3	0	1	0	1/3	4/3	0
4	x_1	3	1	0	0	0	-1	0
0	x_3	2/3	0	0	1	-4/3	-10/3	0
0	x_6	-1/3	0	0	0	-1/3	-4/3	1
Z=20		Z_j	4	6	0	2	4	0
		Z_j-C_j	0	0	0	2	4	0

$\exists x_{Dk} < 0$ bideragarritasuna galdu da, ondorioz Simplex Dual metodoa erabili behar da:

Irtetze-irizpidea:

$$\max\left\{\left|x_{DK}\right| \ / \ x_{DK} < 0 \ \right\} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_6$$ irtetzen da.

Sartze-irizpidea:

$$mín\left\{\frac{\left|z_k - c_k\right|}{\left|a_{ik}\right|} \ / \ a_{ik} < 0 \ \right\} = mín\left\{\frac{2}{1/3}, \frac{4}{4/3}\right\} = 3 \Rightarrow x_5$$ oinarrira sartzen da.

Taula berria: $e_4 \leftarrow (-3/4)e_4$, $e_1 \leftarrow e_1 - (-4/3)e_4$, $e_2 \leftarrow e_2 + e_4$, $e_3 \leftarrow e_3 + (10/13)e_4$

		C_j	4	6	0	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	1	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
4	x_1	13/4	*1*	*0*	*0*	*1/4*	*0*	*-3/4*
0	x_3	3/2	*0*	*0*	*1*	*-1/2*	*0*	*-5/2*
0	x_5	1/4	*0*	*0*	*0*	*1/4*	*1*	*-3/4*
Z=19		Z_j	*4*	*6*	*0*	*1*	*0*	*3*
		Z_j-C_j	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*3*

Soluzio optimoa $D = \left(\frac{13}{4}, 1\right) = (3.25, 1)$ *da eta* $Z_4 = 19$. Problemaren soluzioa osoa izan ez arren, problema azkenekoa da $Z_4 = 19 < \underline{Z} = 20$ betezen delako.

P5 problema

$$\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

P3 problemaren taula optimoan $x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 - x_6 = 2 \Rightarrow -x_2 + x_6 = -2$ murrizketa sartzen da:

		C_j	4	6	0	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	4/3	0	1	0	1/3	4/3	0
4	x_1	3	1	0	0	0	-1	0
0	x_3	2/3	0	0	1	-4/3	-10/3	0
0	x_6	-2	0	-1	0	0	0	1
Z=20		Z_j	4	6	0	2	4	0
		Z_j-C_j	0	0	0	2	4	0

x_2 zutabe-bektorea, bektore kanoniko bat izan behar denez: $e_4 \leftarrow e_4 + e_1$

		C_j	4	6	0	0	0	0
c_B	OA_B	$B^{-1}.b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	4/3	0	1	0	1/3	4/3	0
4	x_1	3	1	0	0	0	-1	0
0	x_3	2/3	0	0	1	-4/3	-10/3	0
0	x_6	-2/3	0	0	0	1/3	4/3	1
Z=20		Z_j	4	6	0	2	4	0
		Z_j-C_j	0	0	0	2	4	0

$\exists x_{Dk} < 0$ bideragarritasuna galdu da, ondorioz Simplex Dual metodoa erabili behar da:

Irtetze-irizpidea:

$$\max \left\{ \left| x_{DK} \right| \; / \, x_{DK} < 0 \; \right\} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_6$$ oinarritik irtetzen da

Sartze-irizpidea:

$a_{ik} > 0 \;\; \forall k$ betetzen denez, problema duala bornatugabea da. Hortaz, P5 problema bideraezina da.

Ondorioz, problema osoaren soluzioa P2 problemaren soluzioa da.