IKERKETA OPERATIBOA - 3. ARIKETA - ANDER PRIETO - 46. TALDEA

Tratamendu termikoak egiten dituen enpresa batek, hiru pieza mota desberdinei, P1, P2 eta P3 piezei, tratamendua egiteko mota zehatz bateko labea du.

Aipatutako labea 24 orduz lanean egon daiteke, baina labeak ezin ditu mota desberdineko piezak aldi berean tratatu.

P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzak, 3, 1 eta 2 ordu behar izaten ditu, hurrenez hurren.

Egunean langileak 32 orduz lan egin dezakete. Eta P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzak 1, 3 eta 2 eskulan-ordu behar ditu. Azkenik, P1, P2 eta P3 piezen labealdi bakoitzagatik 30, 20 eta 38 unitate-monetario irabazten dira.

Eskatzen da:

1) Irabaziak maximizatzen dituen eguneroko ekoizpen-plana zehaztu. Simplex metodoa erabiliz ebatzi.

$$\mathbf{\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3} \qquad\qquad \max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$$

$$\mathbf{3P_1 + P_2 + 2P_3 \le 24} \quad \xrightarrow{\text{lasaiera aldagaiak sartuz}} \quad 3P_1 + P_2 + 2P_3 + r = 24$$

$$\mathbf{P_1 + 3P_2 + 2P_3 \le 32} \quad \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \quad P_1 + 3P_2 + 2P_3 + s = 32$$

$$\mathbf{P_1, P_2, P_3 \ge 0} \qquad\qquad P_1, P_2, P_3, r, s \ge 0$$

X_B oinarrizko soluzioa:

$$A \cdot X = b \quad \Rightarrow \quad (B|N)\begin{pmatrix} X_B \\ Y_N \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad B \cdot X_B + N \cdot X_N = b$$

$$X_N = 0 \text{ denez} \quad \Rightarrow \quad B \cdot X_B = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X_B = B^{-1} \cdot b}$$

Kasu honetan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(B|N) \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = (r, s) \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_N = (P_1, P_2, P_3)$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{X_B} = (\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\mathbf{24}, \mathbf{32}) \\ \boldsymbol{X_N} = (\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{cases}$$

$$B^{-1} = I = B$$

Simplex taulak:

1. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
0	r	24	3	1	**2**	1	0
0	s	32	1	3	2	0	1
Z = 0		z_j	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	-30	-20	-38	0	0

Kostu murriztuak: $\exists W_j < 0 \quad \Rightarrow \quad$ jarraitu

- Sartze irizpidea: $\mathbf{W_j = min\ z_k - c_k}$

  min {-30, -20, -38} = -38 $\quad \Rightarrow \quad$ **P_3 sartu**

- Irtetze irizpidea: $\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} = \min \{\frac{x_{B_k}}{y_{kj}} \,/\, y_{kj} > 0\}$

  $\min\{\frac{24}{2}, \frac{32}{2}\} = \frac{24}{2} \quad \Rightarrow \quad$ **r atera**

Errenkaden arteko eragiketak:

$$\begin{cases} e_{1B} = {e_1}/{2} \\ e_{2B} = e_2 - e_1 \end{cases}$$

2. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	12	3/2	1/2	1	1/2	0
0	s	8	-2	**2**	2	-1	1
Z = 456		z_j	57	19	38	19	0
		$z_j - c_j$	27	-1	0	19	0

Kostu murriztuak: $\exists W_j < 0 \quad \Rightarrow \quad$ jarraitu

- Sartze irizpidea: $\mathbf{W_j = min\ z_k - c_k}$

  min {-1} = -1 $\quad \Rightarrow \quad$ **P_2 sartu**

- Irtetze irizpidea: $\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} = \min \{\frac{x_{B_k}}{y_{kj}} \,/\, y_{kj} > 0\}$

  $\min\{\frac{12}{1/2}, \frac{8}{2}\} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad$ **s atera**

Errenkaden arteko eragiketak:

$$\begin{cases} e_{1B} = e_1 - {e_{2B}}/{2} \\ e_{2B} = {e_2}/{2} \end{cases}$$

3. Simplex taula			30	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	10	2	0	1	3/4	-1/4
20	P_2	4	-1	1	0	-1/2	1/2
Z = 460		z_j	56	20	38	37/2	1/2
		$z_j - c_j$	26	0	0	37/2	1/2

Kostu murriztuak: $\nexists W_j < 0 \quad \Rightarrow \quad$ gelditu $\quad \Rightarrow \quad$ **optimoa lortu dugu**

- r eta s aldagai artifizialak ez daude oinarrian $\quad \Rightarrow \quad$ **soluzioa dauka**
- Ez-oinarrizkoak diren kostu murriztu ($W_j = z_j - c_j$) guztiak $\neq 0$ dira $\quad \Rightarrow$ **soluzio bakarra dauka**

SOLUZIO OPTIMOA:

$\boldsymbol{P_1^* = 0,} \quad \boldsymbol{P_2^* = 4,} \quad \boldsymbol{P_3^* = 10,} \quad \boldsymbol{r^* = 0,} \quad \boldsymbol{s^* = 0}$

Helburu-funtzioaren balioa: $\boldsymbol{z^* = 460}$

2) 36 orduz lan egin badaiteke, zein izango litzateke irabazia?

$\max z = 30P_1 + 20P_2 + 38P_3$

$3P_1 + P_2 + 2P_3 \geq 24$

$P_1 + 3P_2 + 2P_3 \geq \boxed{36}$

$P_1, P_2, P_3 \geq 0$

Aldaketa egon denez b bektorean, $\hat{b}$ gai-aske berria sortzen da. Aurreko ataleko azken taulan oinarrituz:

$$\hat{X}_B = B^{-1} \cdot \hat{b} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ \mathbf{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\hat{X}_B \geq 0$ denez, **bideragarritasuna mantentzen da.**

SOLUZIO OPTIMOA:

$\boldsymbol{P_1^* = 0,} \quad \boldsymbol{P_2^* = 6,} \quad \boldsymbol{P_3^* = 9,} \quad \boldsymbol{r^* = 0,} \quad \boldsymbol{s^* = 0}$

Helburu-funtzioaren balioa: $\boldsymbol{z^* = 462}$

36 orduz lan egingo balute, irabazia **462** unitate-monetariokoa izango litzateke.

3) Zenbat unitate handitu beharko zen P1 piezen labealdiaren irabazia, bere tratamendua interesgarria izateko?

Lehenengo ataleko azken taulan oinarrituz:

1. ariketako 3. Simplex taula

			c_1	20	38	0	0
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	P_1	P_2	P_3	r	s
38	P_3	10	2	0	1	3/4	-1/4
20	P_2	4	-1	1	0	-1/2	1/2
Z = 460		z_j	56	20	38	37/2	1/2
		$z_j - c_j$	$56 - c_1$	0	0	37/2	1/2

Soluzioa bideragarria ez izateko:

$$\exists W_j < 0 \quad \Rightarrow \quad 56 - c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 > 56}$$

P_1 motako piezen tratamendua interesgarria izan dadin, mota horretako piezen irabazia labealdi bakoitzeko **56** unitate-monetariokoa **baino handiagoa** izan beharko litzateke