ESTATISTIKA METODOAK INGENIARITZAN

6. Estimazioa

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

6. Estimazioa

6.1 Estimazioaren kontzeptua
6.2 Puntu estimazioa
6.3 Estimatzaileen propietateak
6.4 Tarte estimazioa (konfiantza tarteak)

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

6.4.2 Edozein populazioaren batezbestekorako konfiantza-tartea

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko kenduraren konfiantza-tartea

6. Estimazioa

6.4.4 Edozein bi banaketa independenteen batezbestekoaren arteko kenduraren konfiantza-tartea

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

6.4.6 Bi banaketa normal independenteen bariantzen arteko zatiduraren konfiantza-tartea

6.4.7 Banaketa binomialaren parametrorako konfiantza-tartea (n>100)

6.4.8 Bi banaketa binomial independenteen proportzioen arteko kenduraren konfiantza-tartea (n,m>100)

6. Estimazioa

6.4.9 Bi banaketa normal ez independenteen batezbestekoen diferentziarako konfiantza-tartea

6.5 Laginaren tamaina

6.6 Parametroak

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.1 Estimazioaren kontzeptua

Inferentzia estatistikoa edo Estatistika Induktiboa

Zorizko lagin bakun batetik ateratako informaziotik populaziorako orokortasunak, ondorioak eta aurresanak lortzea ahalbidetzen duen alorra.

Estimazioa

n tamainako zorizko lagin bakunak erabiliz eta laginketaren emaitzez baliatuz, populazioaren parametro ezezagunen balio hurbilduak kalkulatzea du helburu.

Parametroak

$$\mu, \sigma, p$$

6.1 Estimazioaren kontzeptua

Puntu-estimazioa

Lagineko informazioa erabiliz populazioaren parametrorako balio zehatz bat finkatzean datza.

Tarte-estimazioa (konfiantza-tartea)

Lagineko informazioa erabiliz populazioaren parametrorako tarte bat zehaztean datza.

Konfiantza-maila: 1-α

Oharra

Estimazioz lortzen den balioa ez da ziurra, estimazioa burutzean probabilitateak parte hartzen du.

6.2 Puntu estimazioa

Izan bedi X populazioaren ezaugarri bat aztertzen duen zorizko aldagaia.

Demagun θ parametroaren balio hurbildua (estimazioa) lortu nahi dugula:

- n tamainako **zorizko lagin bakuna** hartuko da:

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$

- Parametroaren **estimatzailea:** $\hat{\theta} = \hat{\theta}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- Lortutako balio hurbilduari **estimazioa** deritzo.

Ahal den kasu guztietan **estimatzaile hoberena** erabiliko da.

6.2 Puntu estimazioa

Puntu-estimazioa lortzeko hainbat metodo daude:

1. Momentuen metodoa
2. Egiantz handieneko metodoa
3. ...

Estimatzaile hoberenen zenbait adibide:

1) n eta p parametroetako banaketa binomialeko populazioaren p arrakasta probabilitatearen estimatzailea:

Lagineko arrakasta-kopuruaren proportzioa

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

n proba kopurua eta x arrakasta kopurua izanik

6.2 Puntu estimazioa

2) μ eta σ parametroetako banaketa normalaren batezbestekorako estimatzailea:

Laginaren batezbestekoa

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

3) μ eta σ parametroetako banaketa normalaren bariantzarako estimatzailea:

Laginaren kuasibariantza

$$\hat{\sigma}^2 = S^2$$

6.3 Estimatzaileen propietateak

Egiantz Handieneko Metodoa erabiliz estimatzaile "onak" lortzen dira.

1. Zentratua edo Alboragabea

$\hat{\theta}, \theta$ parametroaren estimatzaile alboragabea edo zentratua da baldin eta hurrengo berdintza betetzen badu:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Alborapena

$$b(\theta) = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.3 Estimatzaileen propietateak

2. Batezbesteko errore koadratikoa

$\hat{\theta}$ -ren , hau da, θ parametroaren estimatzailearen, batezbesteko errore koadratikoa ondoko eran definitzen da:

$$BEK\left(\hat{\theta}\right) = E[\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2] = Var\left[\widehat{\theta}\,\right] + [Alborapena\left(\hat{\theta}\right)]^2$$

Batezbesteko errore koadratikoa txikia bada $\hat{\theta}$ estimatzaileak lagin desberdinetan hartzen duen balioa θ-tik hurbil dago.

6.3 Estimatzaileen propietateak

3. Bariantza minimoa

Estimatzaile batek laginean dagoen informazio guztia erabili beharko luke:

$$Var\left[\hat{\theta}\right] \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial lnf(x)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

Laginari buruz θ duen informazioa ← $nE\left[\left(\frac{\partial lnf(x)}{\partial \theta}\right)^2\right]$

$$(\sigma^2\downarrow \Rightarrow \text{informazioa}\uparrow)$$

6.4 Tarte estimazioa

Izan bitez populazioaren θ parametro ezezaguna eta X_1, X_2, ..., X_n n tamainako zorizko lagin bakuna.

Helburua:

$h_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ eta $h_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ estatistikoak lortzea da non:

$P[h_1(X_1, X_2, , X_n) \leq \theta \leq h_2(X_1, X_2, , X_n)] = 1 - \alpha$ α txikia izanik

Konfiantza maila: $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$

Lagin bat dugunean:

$P[h_1(X_1, X_2, , X_n) \leq \theta \leq h_2(X_1, X_2, , X_n)] = 1 - \alpha$

6.4 Tarte estimazioa

Notazioa:

$$I_{\theta}^{1-\alpha} = [L_1 \leq \theta \leq L_2]$$

θ parametroa estimatzeko 1-α konfiantza tartea.

Konfiantza maila erabilienak: **0.90, 0.95, 0.99,...**

(α txikia eta 1-α handia)

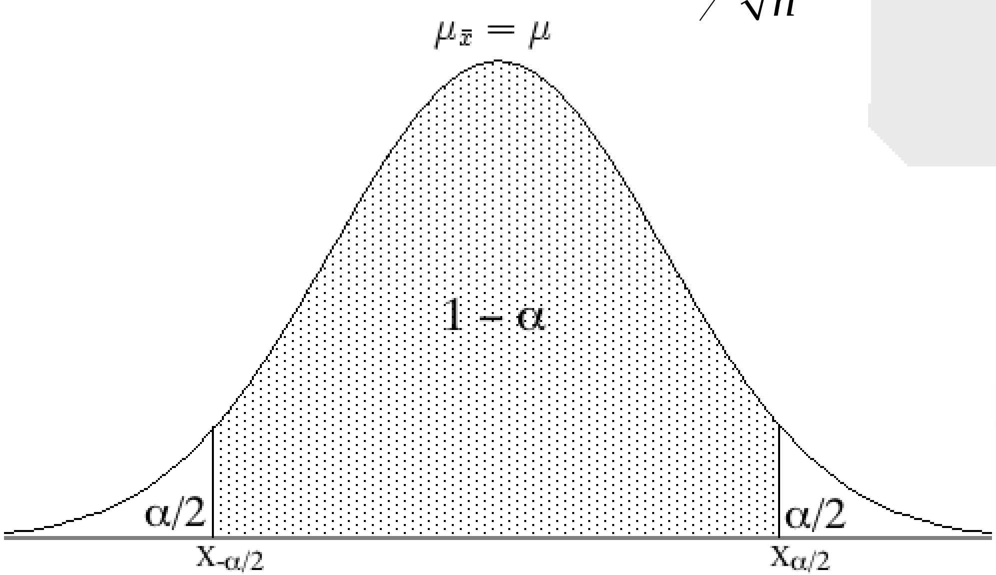
6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

A. σ ezaguna:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



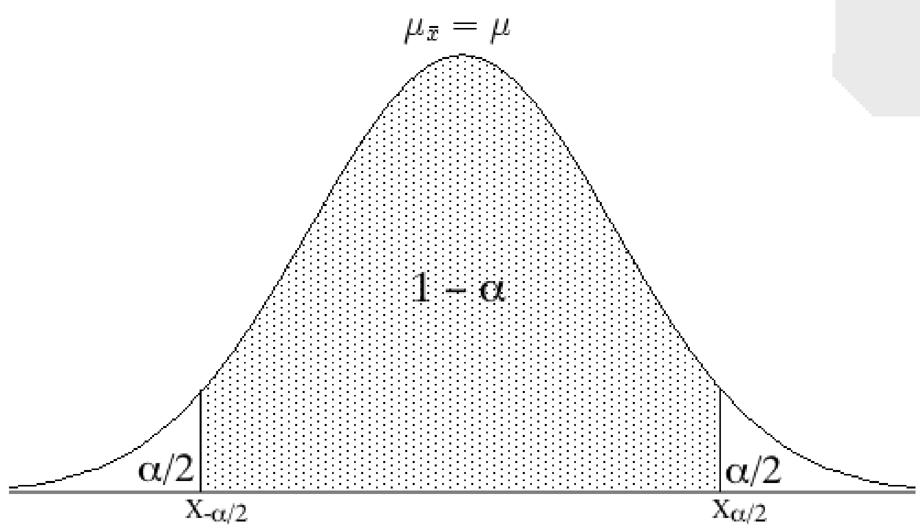
6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

A. σ ezaguna:

$$P\left[-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[-\bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq -\mu \leq -\bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$



6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

A. σ **ezaguna:**

$$P\left[\bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \geq \mu \geq \bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

μ batezbestekoaren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

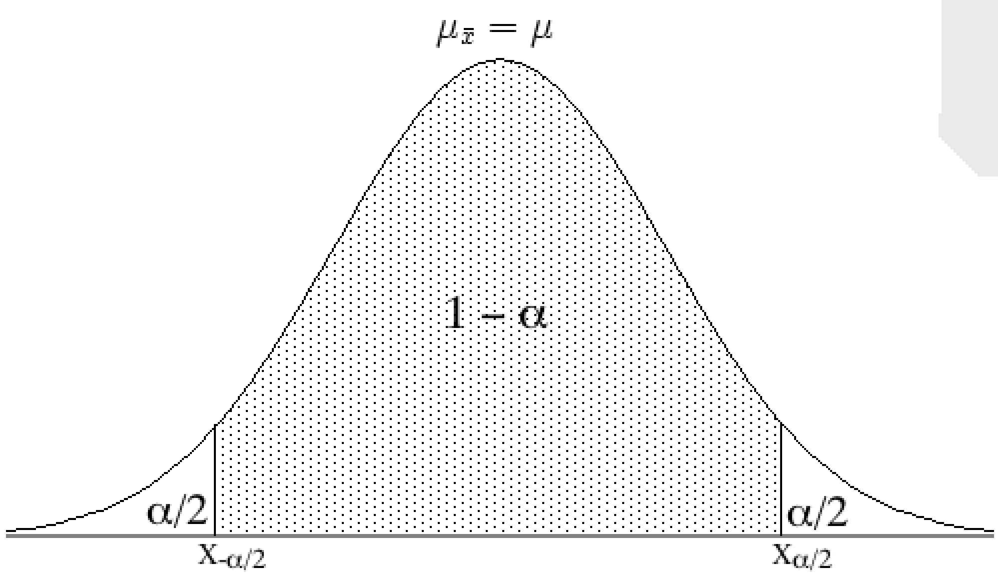
6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

B. σ ezezaguna:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i \qquad t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$



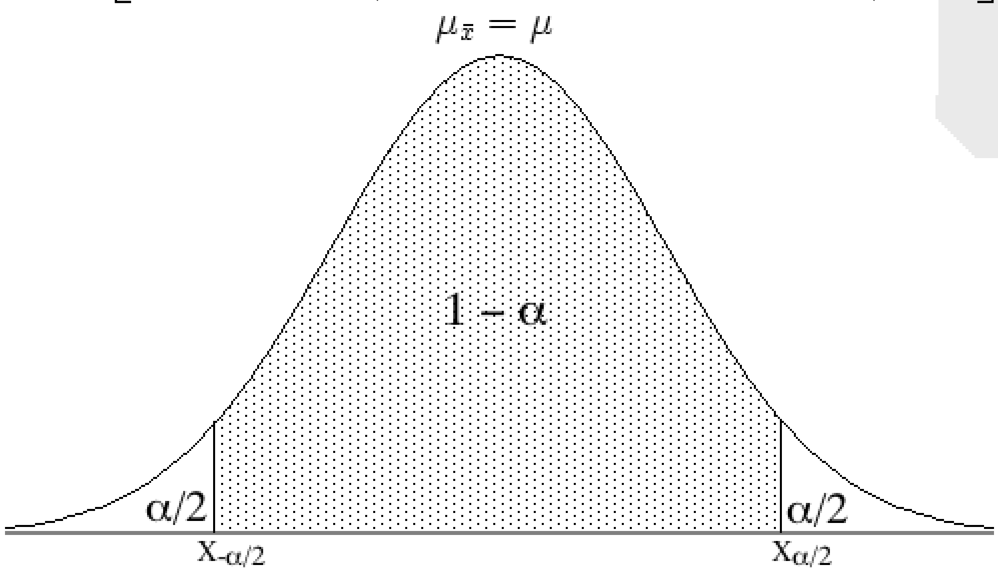
6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

B. *σ ezezaguna:*

$$P\left[-t_{n-1;\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1;\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[-\bar{X} - t_{n-1;\alpha/2} \cdot S/\sqrt{n} \le -\mu \le -\bar{X} + t_{n-1;\alpha/2} \cdot S/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$



6.4 Tarte estimazioa

6.4.1 Populazio normalaren batezbestekorako konfiantza-tartea

B. σ **ezezaguna:**

$$P\left[\bar{X}+t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\geq\mu\geq\bar{X}-t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\bar{X}-t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\leq\mu\leq\bar{X}+t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\right]=1-\alpha$$

μ batezbestekoaren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu}^{1-\alpha}=\left[\bar{x}-t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n},\bar{x}+t_{n-1;\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.2 Edozein populazioren batezbestekorako konfiantza-tartea

A. σ ezaguna n>30: (Limite zentralaren teorema)

$\hat{\mu} = \bar{X}$ (Puntu estimazioa)

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i \qquad \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

μ batezbestekoaren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.2 Edozein populazioren batezbestekorako konfiantza-tartea

B. σ ezezaguna n›100:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i \qquad \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

μ batezbestekoaren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot S/\sqrt{n}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

A. σ_1^2 eta σ_2^2 ezagunak:

$$\left(\widehat{\mu_1 - \mu_2}\right) = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1); \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right); \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

Batezbestekoen kenduraren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

B. σ_1^2 *eta* σ_2^2 *ezezagunak baina berdinak* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$*:*

$$\widehat{(\mu_1 - \mu_2)} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1); \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

B. σ_1^2 eta σ_2^2 ezezagunak baina berdinak $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

Batezbestekoen kenduraren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \mp t_{v;\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right]}$$

$v = n + m - 2$ izanik

6.4 Tarte estimazioa

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

B. σ_1^2 *eta* σ_2^2 *ezezagunak baina desberdinak* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$*:*

$$\widehat{(\mu_1 - \mu_2)} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1);\ \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}} \sim t_v \ : v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(S_1^2 / n_1\right)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{\left(S_2^2 / n_2\right)^2}{n_2 + 1}} - 2$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.3 Bi banaketa normal independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

B. σ_1^2 *eta* σ_2^2 *ezezagunak baina desberdinak* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$*:*

Batezbestekoen kenduraren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t_{\nu;\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}, \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t_{\nu;\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right]}$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2+1}} - 2 \quad \text{izanik}$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.4 Edozein bi banaketa independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

A. *σ_1^2 eta σ_2^2 ezagunak eta n,m>15:*

$$\left(\widehat{\mu_1 - \mu_2}\right) = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

Batezbestekoen kenduraren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]}$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.4 Edozein bi banaketa independenteen batezbestekoaren arteko konfiantza-tartea

B. σ_1^2 *eta* σ_2^2 *ezezagunak eta n,m>100:*

$$\widehat{(\mu_1-\mu_2)} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right)$$

Batezbestekoen kenduraren $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}, (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right]}$$

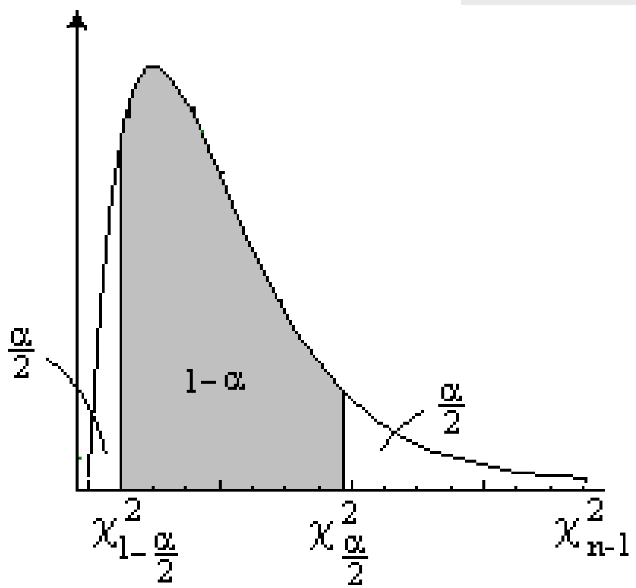
6.4 Tarte estimazioa

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

A. μ ezezaguna:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

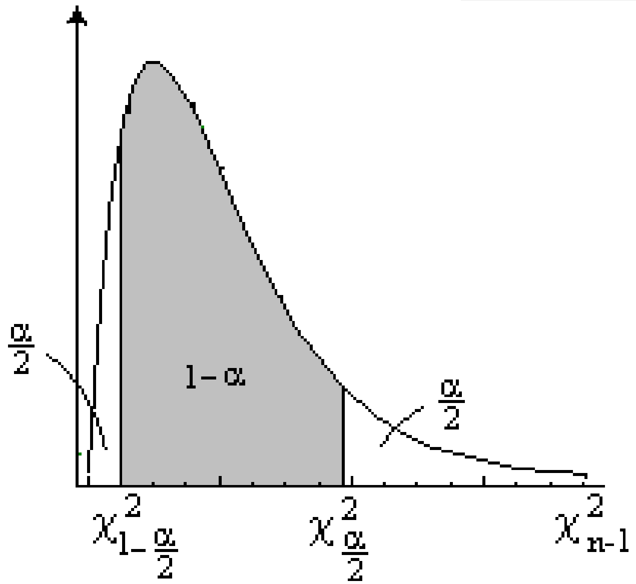


6.4 Tarte estimazioa

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

A. μ ezezaguna:

$$P\left[\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

A. *μ ezezaguna:*

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right] = 1-\alpha$$

Bariantzarako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I^{1-\alpha}_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]}$$

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

B. μ ezaguna:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$ (Puntu estimazioa, estimatzaile alboratua)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$P\left[\chi^2_{n;1-\alpha/2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n;\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.5 Banaketa normalaren bariantzarako konfiantza-tartea

B. μ ezaguna:

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}} \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}} \geq \sigma^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]=1-\alpha$$

Bariantzarako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea:

$$\boxed{I^{1-\alpha}_{\sigma^2}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

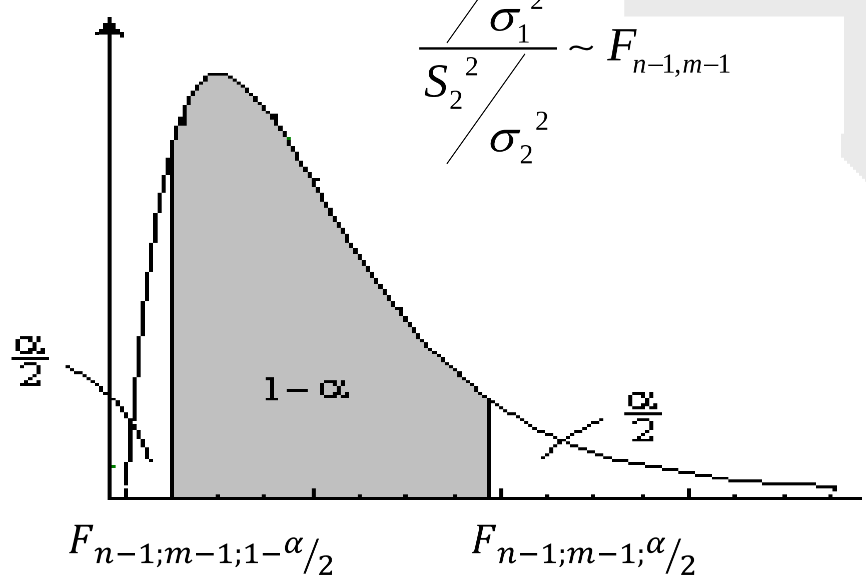
6.4 Tarte estimazioa

6.4.6 Bi banaketa normala independenteen bariantzen arteko zatiduraren konfiantza-tartea

A. μ_1 eta μ_2 ezezagunak:

$$\widehat{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{(Puntu estimazioa)}$$

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

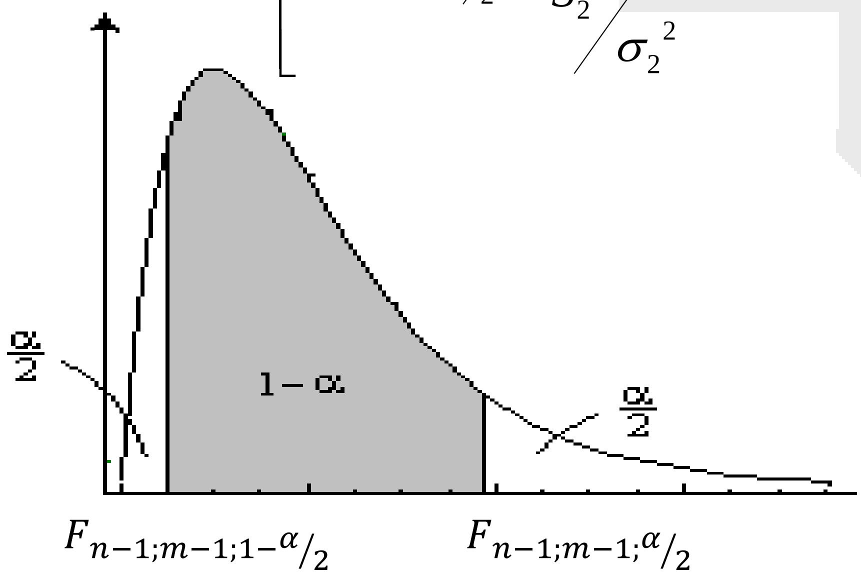


6.4 Tarte estimazioa

6.4.6 Bi banaketa normala independenteen bariantzen arteko zatiduraren konfiantza-tartea

A. μ_1 eta μ_2 ezezagunak:

$$P\left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2} \le \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \le F_{n-1,m-1;\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$



Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.6 Bi banaketa normala independenteen bariantzen arteko zatiduraren konfiantza-tartea

A. μ_1 eta μ_2 ezezagunak:

$$P\left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}\cdot {S_2}^2\big/{S_1}^2 \le \frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2} \le F_{n-1,m-1;\alpha/2}\cdot {S_2}^2\big/{S_1}^2\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\frac{{S_1}^2\big/{S_2}^2}{F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}} \ge \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} \ge \frac{{S_1}^2\big/{S_2}^2}{F_{n-1,m-1;\alpha/2}} F_{n-1,m-1;\alpha/2}\cdot {S_2}^2\big/{S_1}^2\right]=1-\alpha$$

Bariantzaren arteko zatidurarako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea

$$\boxed{I^{1-\alpha}_{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\left[\frac{{S_1}^2\big/{S_2}^2}{F_{n-1,m-1;\alpha/2}},\frac{{S_1}^2\big/{S_2}^2}{F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}}\right]}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.6 Bi banaketa normala independenteen bariantzen arteko zatiduraren konfiantza-tartea

B. μ_1 *eta* μ_2 *ezagunak:*

$$\frac{\widehat{\sigma_1^{\,2}}}{\sigma_2^{\,2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{1i}-\mu_1)^2}{n}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{2i}-\mu_2)^2}{m}} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{1i}-\mu_1)^2}{n} \Big/ \sigma_1^{\,2}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{2i}-\mu_2)^2}{m} \Big/ \sigma_2^{\,2}} \sim F_{n,m}$$

Aurreko arrazonamendu bera erabiliz:

Bariantzaren arteko zatidurarako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea

$$\boxed{I^{1-\alpha}_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{1i}-\mu_1)^2}{n}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{2i}-\mu_2)^2}{m}} \cdot \frac{1}{F_{n,m;\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{1i}-\mu_1)^2}{n}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{2i}-\mu_2)^2}{m}} \cdot \frac{1}{F_{n,m;1-\alpha/2}} \right]}$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.7 Banaketa binomialaren parametrorako konfiantza- tartea (n>100)

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \qquad \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Banaketa binomialaren parametrorako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea

$$\boxed{I_p^{1-\alpha} = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]}$$

6.4 Tarte estimazioa

6.4.8 Bi banaketa binomial independenteen proportzioen arteko kenduraren konfiantza- tartea (n,m›100)

$$\widehat{p_1 - p_2} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \qquad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n} + \frac{p_2 q_2}{m}} \right)$$

Banaketa binomialaren parametrorako $1-\alpha$ konfiantza-mailako konfiantza tartea

$$\boxed{I_{p_1-p_2}^{1-\alpha} = \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{m}}, (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{m}} \right]}$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6.4 Tarte estimazioa

6.4.9 Bi banaketa normal ez independenteen batazbestekoen diferentziarako konfiantza-tartea

$$D = X - Y \qquad \bar{d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)}{n} \qquad S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}$$

Oharra:

Parekatutako datuak direnean (lagin ez independenteak) bikoteen diferentziak kalkulatu eta lagin bakarra dela kontsideratu.

6.5 Laginaren tamaina

Adibide bezala σ^2 bariantza ezaguneko populazio normalaren batezbestekoaren konfiantza-tartea kontsideratu da:

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \right]$$

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \right] = 1-\alpha$$

$$P\left[-z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \le \mu - \bar{x} \le +z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\left| \bar{x} - \mu \right| \le z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \right] = 1-\alpha$$

6.5 Laginaren tamaina

Demagun bestalde:

$$P\left[\left|\overline{x}-\mu\right|\leq\varepsilon\right]=1-\alpha$$

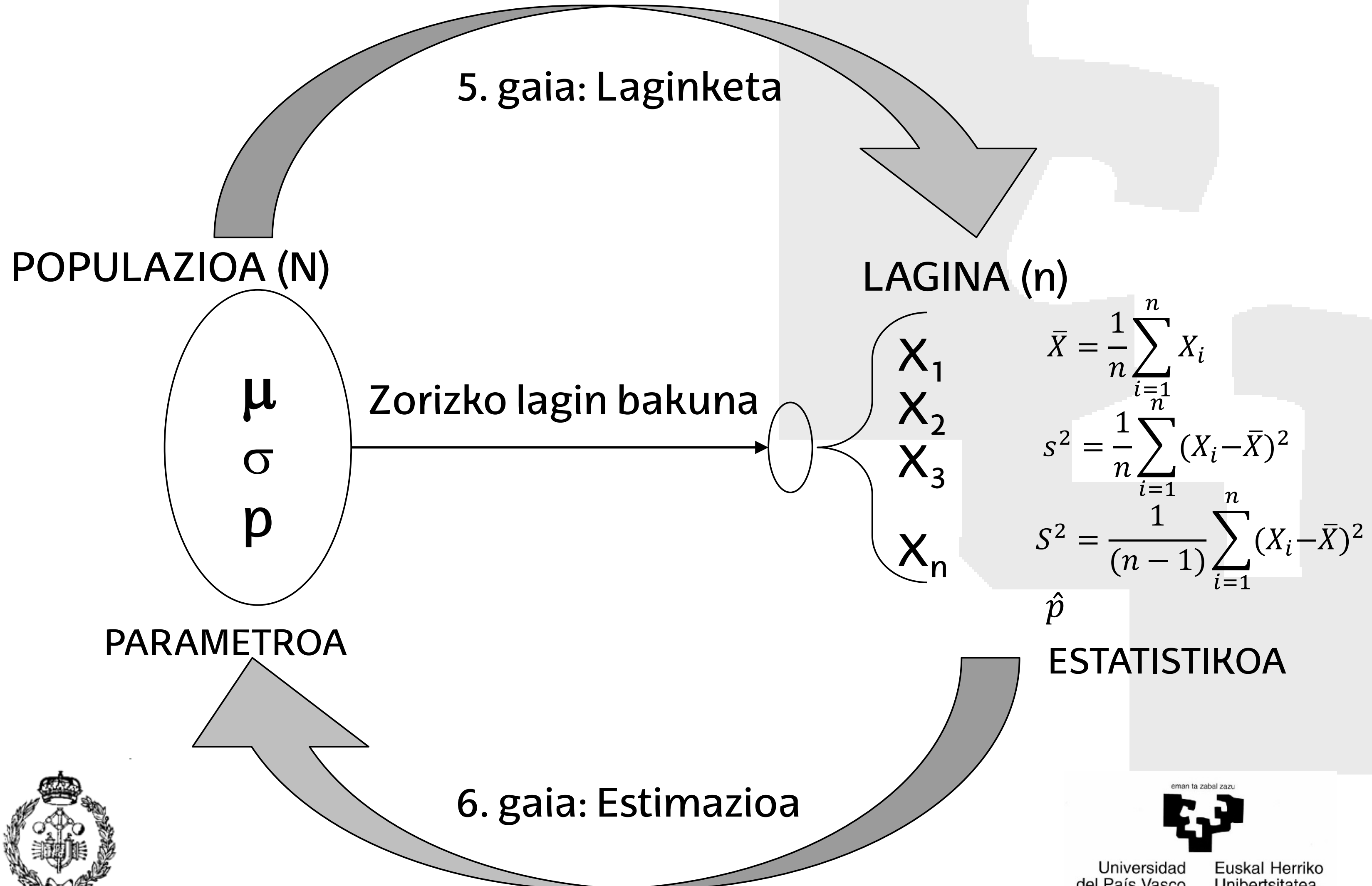
Ondorioz:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n} \Rightarrow n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\varepsilon\right)^2$$

Oharrak:

1. Laginaren tamaina zenbat eta handiagoa izan, konfiantza tartearen luzera hainbat eta txikiagoa da, hau da, estimazioa zehatzagoa da.
2. Ez da komenigarria tamaina handiegiko laginak hartzea (denbora arazoak,...)
3. Laginaren tamaina txikiegia bada, emaitzak oso fidagarriak ez izatea gerta daiteke.

6.6 Parametroak



Laburpena

Parametroa	Populazioa	Lagina	Konfiantza tartea
μ	Normala σ ezaguna		$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z\alpha/_2 . \sigma/_{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\alpha/_2 . \sigma/_{\sqrt{n}}\right]$
μ	Normala σ ezezaguna		$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - t_{n-1;\alpha/_2} . S/_{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1;\alpha/_2} . S/_{\sqrt{n}}\right]$
μ	Edozein σ ezaguna	n > 30	$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z\alpha/_2 . \sigma/_{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\alpha/_2 . \sigma/_{\sqrt{n}}\right]$
μ	Edozein σ ezezaguna	n > 100	$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left[\bar{x} - z\alpha/_2 . S/_{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\alpha/_2 . S/_{\sqrt{n}}\right]$

Laburpena

Parametroa	Populazioa	Lagina	Konfiantza tartea
$\mu_1 - \mu_2$	Normalak independenteak σ$_1$, σ$_2$ ezagunak		$I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$
$\mu_1 - \mu_2$	Normalak independenteak σ$_1$, σ$_2$ ezezagunak $\sigma_1 = \sigma_2$		$I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{v;\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right]$ non $\nu = n + m - 2$
$\mu_1 - \mu_2$	Normalak independenteak σ$_1$, σ$_2$ ezezagunak $\sigma_1 \neq \sigma_2$		$I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{v;\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}\right]$ non $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n}\right)^2}{n+1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{m}\right)^2}{m+1}} - 2$ OHARRA: Formula hauetan kuasibariantza dira S guztiak
$\mu_1 - \mu_2$	Edozein independenteak σ$_1$, σ$_2$ ezagunak	n › 15 m ›15	$I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$
$\mu_1 - \mu_2$	Edozein independenteak σ$_1$, σ$_2$ ezezagunak	n › 100 m ›100	$I_{\mu_1-\mu_2}^{1-\alpha} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}\right]$

Laburpena

Parametroa	Populazioa	Konfiantza tartea
σ^2	Normala μ ezaguna	$I_{\sigma^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\right]$
σ^2	Normala μ ezezaguna	$I_{\sigma^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$

Parametroa	Populazioa	Konfiantza tartea
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	Normalak μ_1, μ_2 ezagunak	$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)/n}{\sum_{i=1}^{m}(x_{2i}-\mu_2)/m}\cdot\frac{1}{F_{n,m;\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)/n}{\sum_{i=1}^{m}(x_{2i}-\mu_2)/m}\cdot\frac{1}{F_{n,m;1-\alpha/2}}\right]$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	Normalak μ_1, μ_2 ezezagunak	$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n-1,m-1;\alpha/2}}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}}\right]$

Laburpena

Parametroa	Lagina	Konfiantza tartea
p	n >100	$I_p^{1-\alpha}=\left[\hat{p}-z\alpha/_2.\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\hat{p}+z\alpha/_2.\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$

Parametroa	Lagina	Konfiantza tartea
p_1-p_2	n >100 m >100	$I_{p_1-p_2}^{1-\alpha}=\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm z\alpha/_2.\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{m}}\right]$

Adibideak

Adibidea

1) Demagun litiozko baterien iraupena banaketa normalekoa dela. Zoriz 20 bateria hartu dira, batez besteko iraupena 12.300 ordukoa eta kuasibariantza 2.500 $(\text{ordu})^2$ direlarik.

   a) %98 konfiantza-mailaz, zehatz bedi litiozko baterien batez besteko iraupena.

   b) %98 konfiantza-mailaz, estima bedi litiozko baterien iraupenaren bariantza.

Adibideak

Adibidea

2) Enpresa handi bateko gazteen proportzioa (30 urtetik behera) aztertu nahi da. Zoriz enpresako 150 langileko talde bat hartu da, horietatik 27 gazteak izanik.

   a) Kalkulatu errorearen balioa, konfiantza-maila %95 denean.

   b) %98 konfiantza-mailaz, zein tartetan koka daiteke enpresako gazteen proportzioa?