Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Bilboko Ingeniaritza Eskola (UPV/EHU)

2016-11-10

Ebazpena

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak ordena egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\,]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Eskatutako frogapen hori honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(j), \dots\,]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(j), \dots\,]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:

  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  – $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  – $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:

  – $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  – $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.

- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,075 puntu) Gutxienez a sinboloaren agerpen bat edukitzeaz gain, agerpen horiek denak batera (elkarren jarraian) dituzten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Hitz horietan, b eta c sinboloentzat ez dago inolako murrizketarik. Adibidez, a, aaa, acc, $aacbc$, $baac$, $bccaaacb$, $ccccaaaa$ eta $cbaaaaacbc$ hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina ε, ccc, $aacac$ eta $baaabbaabccaac$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x \quad (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |v| = |v|_a \wedge |v| \geq 1 \wedge |w|_a = |v| \wedge w = uvx)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, k, x \quad (u \in A^* \wedge k \in \mathbb{N} \wedge x \in A^* \wedge k \geq 1 \wedge |w|_a = k \wedge w = ua^k x)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \exists j, k \quad (j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq j \leq k \leq |w| \wedge |w|_a = (k - j) + 1 \wedge \forall \ell (j \leq \ell \leq k \rightarrow w(\ell) = a))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{b, c\}^* \{a\} \{a\}^* \{b, c\}^*$$

2.2. (0,075 puntu) Gutxienez bi b edukitzeaz gain, b denak elkarrengandik bananduta dauden bi zatitan dituzten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Hitz horietan, a eta c sinboloentzat ez dago inolako murrizketarik. Adibidez, $baaba$, $abbbccb$, $bbcabbba$ eta $bbbcbb$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, b, a, bbb, aaa, $aabbbc$ eta $aacbbcbbbcb$ ez.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x, y, z \quad (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge y \in A^* \wedge z \in A^* \wedge |v| = |v|_b \wedge |y| = |y|_b \wedge |v| \geq 1 \wedge |y| \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge |w|_b = |v| + |y| \wedge w = uvxyz)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, j, x, k, z \quad (u \in A^* \wedge j \in \mathbb{N} \wedge x \in A^* \wedge k \in \mathbb{N} \wedge z \in A^* \wedge j \geq 1 \wedge k \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge |w|_b = j + k \wedge w = ub^j x b^k z)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{a, c\}^* \{b\} \{b\}^* \{a, c\} \{a, c\}^* \{b\} \{b\}^* \{a, c\}^*$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{a, c\}^* \{b\}^+ \{a, c\}^+ \{b\}^+ \{a, c\}^*$$

2.3. (0,075 puntu) Gutxienez a bat eta a-ren agerpen denak batera (elkarren jarraian) edo gutxienez bi b eta b denak elkarrengandik bananduta dauden bi zatitan dituzten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, a, aaa, acc, $bacc$, $baaba$, $aaab$, $aaabbb$, $cbbaaabbb$ eta $bbbcbb$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ε, cc, $cbbbc$, $babab$, abc, $aabbbaa$ eta $ababccbb$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = L_1 \cup L_2$$

2.4. (0,075 puntu) Palindromoak ez diren (beraien alderantzizkoen berdinak ez diren) hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, *bbbab*, *ccbca*, *aacc*, *ab*, *ba*, *aabbbcc*, *cababa*, *abab* eta *bccab* hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina ε, *c*, *aaa*, *abbba*, *ccbabcc*, *abcba* eta *abccba* ez.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge w \neq w^R\}$$

2.5. (0,075 puntu) Gutxienez a bat eta a-ren agerpen denak batera (elkarren jarraian) dituzten eta, gainera, palindromoak diren hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, *a*, *aaa*, *bbabb* eta *ccbaaabcc* hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina ε, *aab*, *abaac*, *ccc*, *caabaac* eta *bbaaacc* ez.

$$L_5 = L_1 \cap \overline{L_4}$$

2.6. (0,075 puntu) Posizio bakoiti denetan c sinboloa duten hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Posizio bikoitietan ere ager daiteke c. Adibidez, ε, *c*, *cccc*, *cbcbc*, *cbcb* eta *cccacbcb* hitzak lengoaiakoak dira baina *a*, *bbb*, *aa*, *cabbcac*, *aaaccc* eta *acac* ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0) \rightarrow w(k) = c)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg\exists k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0 \wedge w(k) \neq c)\}$$

2.7. (0,075 puntu) c sinboloaren agerpen denak posizio bakoitietan dituzten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Gerta daiteke posizio bakoiti batean c ez agertzea baina c ezin daiteke posizio bikoitietan agertu. Adibidez, ε, *a*, *bbbb*, *bbaaa*, *cbbbcb*, *bbabaab* eta *abcbbbbb* hitzak lengoaiakoak dira baina *cc*, *acccb*, *acaaaa* eta *cbbcc* ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = c) \rightarrow k \text{ mod } 2 \neq 0)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg\exists k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0 \wedge w(k) \neq c)\}$$

2.8. (0,050 puntu) *cbc* hitza kopuru bakoitian elkartuz lortzen diren hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, *cbc* eta *cbccbccbc* hitzak lengoaiakoak dira baina ε, *aaaab*, *cbccbc*, *cbcaaaa*, *cbcaacbccbc* eta *cbcbc* hitzak ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = \{w | w \in A^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0 \wedge w = (cbc)^k)\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_8 = \{w | w \in A^* \wedge \quad & |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ mod } 3 = 0 \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 3 = 1) \rightarrow w(k) = c) \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 3 = 2) \rightarrow w(k) = b) \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 3 = 0) \rightarrow w(k) = c)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_8 = \{w | w \in A^* \wedge \quad & |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ mod } 3 = 0 \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 3 \neq 2) \rightarrow w(k) = c) \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 3 = 2) \rightarrow w(k) = b)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{cbc\}\{cbccbc\}^*$$