Ikerketa Operatiboa

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritza

Bilboko Ingeniaritza Eskola

Programazio Lineala. Simplex metodoa

- **2.1 Sarrera:**

Programazio matematikoa alternatiba anizkoitzak dituzten problemetan baliabide mugatuen esleipen optimoa zehazteko erabiltzen den prozedura analitikoa da. Onargarrienak diren erabakiak hartzeko funtsezko tresna bat da.

Orokorrean, erabakitzaileak irabaziak maximizatu edo galerak minimizatu nahi ditu.

Funtsean, loturak dituzten optimizazio problemak ebaztean datza:

$$
\begin{array}{ll}
\text{optimizatu} & f(X) \\
\text{non} & X \in \Psi \subseteq \mathbb{R}^n \\
\text{non} & X \quad \text{erabakiak} \\
 & f \quad \text{helburu funtzioa} \\
 & \Psi \quad \text{lotura multzoa (gehienetan multzo-ganbila) diren}
\end{array}
$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Kasurik errazena Programazio Lineala da, non loturak eta helburu funtzioa linealak diren.

$$
\begin{array}{ll}
\text{optimizatu} & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\Psi: & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq (\geq) b_i \quad i = 1, 2, \ldots m \\
 & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots m\}
\end{array}
$$

non x_i erabaki-aldagaiak, c_i helburu funtzioko koefizienteak, a_{ij} murrizketetako (loturetako) koefizienteak eta b_i gai askeak diren.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Formulazio mistoa:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizatu} & C^T X \\ \text{non} & AX \leq B \\ & X \geq 0 \end{array}$$

edo

$$\begin{array}{ll} \text{optimizatu} & C^T X \\ \text{non} & A_1 X \leq B_1 \\ & A_2 X \geq B_2 \\ & A_3 X = B_3 \\ & X \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{non} & X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \\ & B^T = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in R^m \\ & A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n+m} \\ & C^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n \end{array}$$

c_i helburu funtzioko koefizienteak, a_{ij} murrizketetako koefizienteak, b_i gai askeak eta x_i erabakiak diren

Programazio Lineala. Simplex metodoa

f funtzioa maximizatzea –f funtzioa minimizatzea da, hortaz optimoa puntu bera da

$$\max\ f(X) = -\min\left(-f(X)\right)$$

Beraz, maximizazio eran idatzita dagoen edozein problema minimizazio eran ere idatz daiteke, eta alderantziz.

Bestalde, ≥ motako edozein desberdintza ≤ eran idatz daiteke

Ondorioz, PLko problema bat forma kanonikoan idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \min\quad & C^T X \\ \text{non}\quad & AX \geq B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

edo

$$\begin{aligned} \max\quad & C^T X \\ \text{non}\quad & AX \leq B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

➨ **2.2 Ebazpen grafikoa:**

PLko problemak bi aldagai dituenean problema grafikoki interpreta eta ebatz daiteke, horretarako ondorengoak kontuan izanik:

- murrizketa multzoa
- onarpen eremua
- helburu-funtzioa
- helburu funtzioaren gradientea

Onarpen eremua murrizketa-multzoa betetzen dituzten puntuek sortzen duten multzoa da

Programazio Lineala. Simplex metodoa

PLko problema grafikoki ebazteko ondorengo pausuak jarraitu behar dira:

1. Murrizketak irudikatu
2. Onarpen eremua zehaztu
3. Helburu funtzioa irudikatu
4. Helburu funtzioaren gradientea kalkulatu
5. Problema maximizazio problema bat bada funtzioa gradienteak zehazten duen noranzkoan mugitu/ Problema minimizazio problema bat bada helburu funtzioa gradienteak zehazten duen aurkako noranzkoan mugitu
6. Optimoa lortu

Dauden kasu desberdinak adibideen bidez garatuko ditugu.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Soluzio bakarra duen problema

$$\begin{aligned} \max \quad z = \; & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Soluzio anizkoitza duen problema

$$\begin{aligned} \max \quad z = \; & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Problema mugatugabea

$$\max \ z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Problema bideraezina

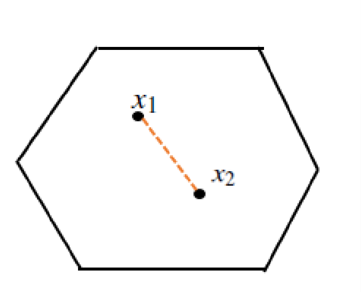
$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

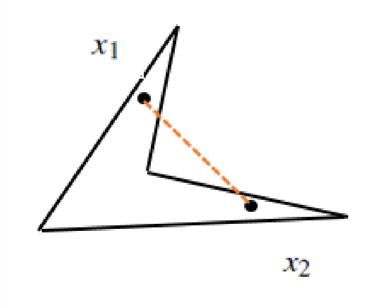
- **2.3 Definizio gehigarriak**

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ multzoa ganbila dela esaten da baldin eta soilik baldin:

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A \quad \text{non} \quad \lambda \in [0,1] \quad \text{den}$$



Multzo ganbila

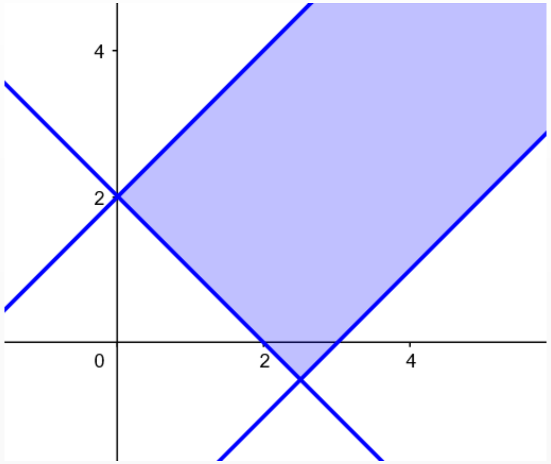


Multzo ez-ganbila

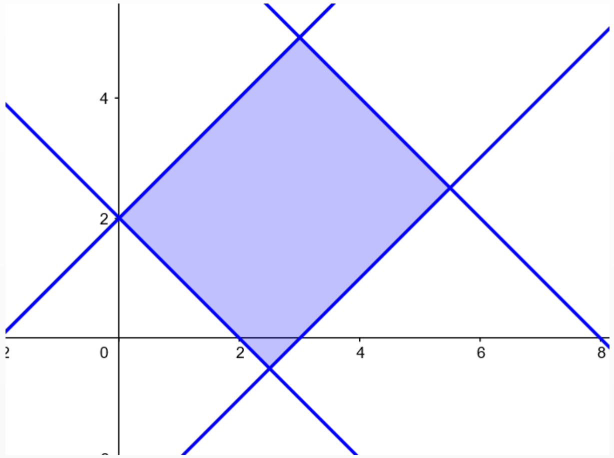
Hau da, $\mathbb{R}^n$-ko A multzoa ganbila da baldin eta multzo hutsa bada, multzoak puntu bakarra badu edo multzoko edozein bi puntutarako bi puntuak lotzen dituen segmentua multzoaren barnean badago.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

- $P \subset \mathbb{R}^n$ azpimultzoa politopoa da baldin hiperplano kopuru finitu batek murrizten duen multzoa bada. Gainera P bornatua badago, orduan poliedroa da.



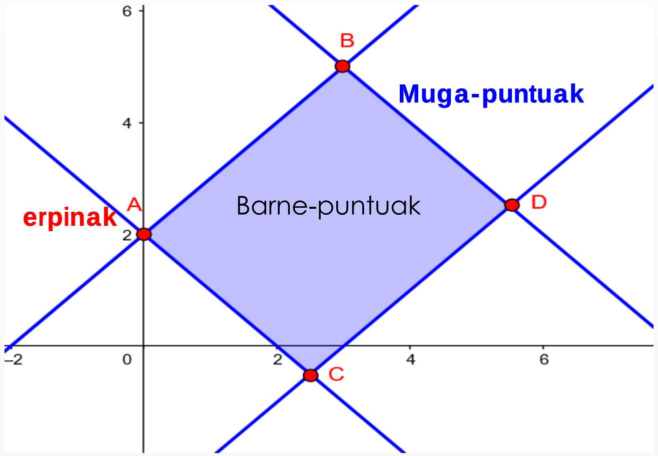
Politopoa



Poliedroa

Programazio Lineala. Simplex metodoa

- Multzo ganbiletan hiru puntu mota desberdin daude:
  - Barne-puntuak
  - Muga-puntuak
  - Erpinak
- Izan bedi $P \subset \mathbb{R}^n$ multzo ganbila, P multzoko erpinak P multzoko beste puntuen konbinazioa lineal gisa idatzi ezin diren puntuak dira.



Programazio Lineala. Simplex metodoa

- **2.4 Sentikortasun-analisia grafikoaren bidez**

Problemaren soluzio optimoa lortu ondoren parametroetan egon daitezkeen aldaketek soluzioari nola eragiten dioten aztertzen da.

Arrazoia praktikan problemen koefizienteak ziurgabeak izaten direla da.

Sentikortasun-analisian optimoa aldatu gabe parametroak zein tarteetan mugi daitezkeen aztertzen da edo optimoa aldatzen bada zenbateko aldaketa eman den aztertzen da.

Bi aldagaien kasuan sentikortasun-analisia grafikoki egin daiteke.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

$$\max \quad z = 5x_1 + 7x_2$$
$$8x_1 + 14x_2 \leq 63$$
$$10x_1 + 4x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Soluzio optimoa lortu
- Helburu-funtzioko koefizienteak optimoa aldatu gabe nola alda daitezkeen aztertu
- Gai-askea txikitzean zer gertatzen den aztertu

Programazio Lineala. Simplex metodoa

2.5 Problemaren forma estandarra

Lasaiera-aldagaik erabiliz desberdintza bat berdintza bilaka daiteke, lasaiera-aldagai hauek kostu nulua izaten duten aldagai positiboak izaten dira.

Hortaz, problema maximizazio problema bat bada eta desberdintzak ≤ motakoak badira, lasaiera-aldagaiak batuz jartzen dira:

$$\begin{array}{ll} \max & C^T X \\ \text{non} & AX \leq B \\ & X \geq 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} \max & C^T X \\ \text{non} & AX + X_h = B \\ & X, X_h \geq 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} \max & C^T X \\ \text{non} & AX = B \\ & X \geq 0 \end{array}$$

Forma kanonikoa — Forma estandarra — Lasaiera aldagaiak X bektorean sartuz

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Eta problema minimizazio problema bat bada eta desberdintzak ≥ motakoak badira, lasaiera-aldagaiak kenduz jartzen dira:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX \geq B \\ & X \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX - X_h = B \\ & X, X_h \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Forma kanonikoa | Forma estandarra | Lasaiera aldagaiak X bektorean sartuz

PLko problema baten forma-estandarra lasaiera aldagaiak sartu ondoren lortzen den forma edo eredua da:

$$\begin{aligned} \max \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

edo

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Bukatzeko, problema bateko murrizketak aktiboak edo inaktiboak izan daitezke.

Murrizketa bat aktiboa dela esaten da bere lasaiera aldagaia nulua bada. Grafikoki murrizketa bat aktiboa da, optimoa edo puntu optimoak murrizketa horrek definitzen duen hiperplanoan badago /badaude.

Murrizketa bat ez-aktiboa dela esaten da bere lasaiera aldagaia nulua ez bada. Grafikoki murrizketa bat inaktiboa da, optimoa edo puntu optimoak murrizketa horrek definitzen duen hiperplanoan ez badago/badaude.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

- **2.6 Simplex metodoaren oinarrizko teoremak**

Izan bedi ondoko eredu lineala forma estandarrarean:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & C^T X \\
\text{non} & & AX = B \\
 & & X \geq 0
\end{array}
$$

$A \in M_{mxn}(\mathbb{R}),\ c_i \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R}^m$ izanik.

Teorema: PL problema bateko soluzio bideragarrien multzoa (onarpen eremua) politopo ganbila da

Teorema: PLko minimizazio problema bateko onarpen eremua multzo ez-hutsa bada eta helburu funtzioa onarpen eremuan behe-bornatua badago, PLko problemak gutxienez soluzio bat du. PLko problema maximizazio problema bat bada, helburu funtzioa goi-bornatua egon behar da.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Definizioa: $Ax = b$ murrizketak betetzen dituen x bektorea problemako soluzioa dela esaten da

Definizioa: Problemako soluzioa den x bektorea bideragarria dela esaten da $x \geq 0$ bada

Definizioa: A matrizearen m zutabez osatutako B oinarri-matrize bat izanik, x_B oinarrizko soluzioa dela esaten da $Bx_B = \mathrm{b}$ betetzen badu. x_B bektorearen osagai guztiak ez-negatiboak badira, oinarrizko soluzio bideragarria dela esaten da. Oinarrizkoak ez diren aldagai guztiak 0 dira, $x_N = \mathbf{0}$.

Definizioa: Oinarrizko soluzio bideragarri bat endekatua dela esaten da baldin oinarrizkoa den aldagairen batek 0 balioa hartzen badu. Oinarrizko soluzio bideragarriaren osagai guztiak 0 baino handiagoak badira oinarrizko soluzio bideragarri ez-endekatua dela esaten da.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Izan bedi

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & 4x + 3y \\
& x - 2y \geq -4 \\
& 2x + 3y \leq 13 \\
& x - y \leq 4 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Teorema

Izan bedi $K \neq \emptyset$ PLko problema baten soluzio bideragarrien multzoa $\Rightarrow$ K multzo ganbila da.

Oharrak:

- PLko problema batek soluzio optimo finitua badu, optimoaren balioa poliedro bideragarriaren erpin bat da.
- Balio optimoa multzo bideragarriaren puntu bat baino gehiagotan lortzen bada, puntu horien konbinazio lineal ganbila den edozein puntutan ere lortzen da (soluzio anizkoitza)

Programazio Lineala. Simplex metodoa

<u>Teorema:</u>

- PLko problemak soluzio bideragarria badu, orduan oinarrizko soluzio bideragarria du
- PLko problemak soluzio optimo bideragarria badu, orduan oinarrizko soluzio bideragarri optimoa du

<u>Teorema:</u>

x PLko problemaren onarpen eremuko erpin bat da $\Longleftrightarrow$ x oinarrizko soluzio bideragarria da

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Emaitza guzti hauek kontuan izanda, PLko problema bornatua badago optimoa lortzeko ondorengo pausuak jarrai daitezke:

1. PLko problema forma estandarrean idatzi
2. Problemaren oinarrizko soluzio bideragarri guztiak lortu eta helburu-funtzioa guztietan ebaluatu
3. Problema bornatua badago eta maximizatzen bagaude helburu-funtzio handiena ematen duen oinarrizko soluzio bideragarria aukeratu. Minimizatzen bagaude berriz helburu-funtzio minimoa ematen duen oinarrizko soluzio bideragarria aukeratu

ARAZOAK:

1. Problema bornatua egon behar da
2. Oinarrizko soluzio bideragarri guztiak kalkulatu behar dira

KONPONBIDEA: **Simplex metodoa**

Programazio Lineala. Simplex metodoa

- **2.7 Simplex metodo**
- Aurrean aipatutako kalkuluak sinplifikatu
- Problema bornatua edo ez-bornatua den zehazten du
- Bornatua den kasuan soluzio optimoa zehazten du

Metodo honek oinarrizko soluzio bideragarri batetik abiatuz, ondoz ondoko muturreko puntu berriak ematen ditu. Hau da, oinarrizko soluzio bideragarri batetik abiatuz ondoz ondoko soluzio bideragarri bat ematen du.

Definizioa: Bi oinarrizko soluzio bideragarri ondoz ondokoak direla esaten da, beraien arteko desberdintasun bakarra oinarrizko osagai bat bada.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Algoritmoa

Simplex algoritmoa minimizazio (maximizazio) kasuan ondorengoa da:

1. Pausua: PIko problema forma estandarrean idatzi:

$$\begin{aligned} \max \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

non $b_i \geq 0$ diren, $b_i < 0$ bada murrizketa -1 zenbakiagatik biderkatu

2. Pausua: $(OA_1, OA_2, \dots, OA_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ hasierako oinarrizko soluzio bideragarria kalkulatu (gogoratu beste osagai guztiak nulua direla) eta Simplex metodoaren taula eraiki

Programazio Lineala. Simplex metodoa

<table>
<tr><td></td><td></td><td>c_i</td><td>c_1</td><td>c_2</td><td>…</td><td>c_{n+m}</td></tr>
<tr><td>$C_{oinarrizkoa}$</td><td>$A_{oinarrizkoa}$</td><td>$B^{-1} \cdot b$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_{n+m}</td></tr>
<tr><td>c_{B_1}</td><td>OA_1</td><td>x_{B_1}</td><td colspan="4" rowspan="4">$Y = B^{-1} \cdot A$</td></tr>
<tr><td>c_{B_2}</td><td>OA_2</td><td>x_{B_2}</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>c_{B_m}</td><td>OA_m</td><td>x_{B_m}</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$Z = \sum_{k=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i}$</td><td>$z_j$</td><td>$z_1$</td><td>$z_2$</td><td>…</td><td>$z_{n+m}$</td></tr>
<tr><td>z_j-c_j</td><td>z_1-c_1</td><td>z_2-c_2</td><td>…</td><td>z_{n+m}-c_{n+m}</td></tr>
</table>

Programazio Lineala. Simplex metodoa

3. Pausua: Kostu-murriztuak kalkulatu:

$$W_j = z_j\text{-}c_j = c_B^T y_j - c_j \quad \forall j \in \{1,2,\dots,n+m\}$$

y_j $\; Y = B^{-1} \cdot A$ matrizearen j. zutabea izanik

$W_j = z_j\text{-}c_j \leq 0$ $(W_j = z_j\text{-}c_j \geq 0)$ $\forall j \in \{1,2,\dots,n+m\}$ ➡ GELDITU, optimoa lortu dugu.

4. Pausua: Sartze-irizpidea:

Kalkulatu $W_j = \max_{k \in \{1,2,\dots,n+m\}} z_k\text{-}c_k$ $\left(W_j = \min_{k \in \{1,2,\dots,n+m\}} z_k - c_k\right)$ ➡ j. aldagaia oinarrian sartzen da

Programazio Lineala. Simplex metodoa

5. Pausua: Irtetze-irizpidea:

- $y_{ij} \leq 0$ bada, oinarrizkoak diren aldagai guztientzat (j aurreko pausuan zehaztutako zutabea izanik) $\Longrightarrow$ GELDITU, problema mugatugabea da
- Kontrako kasuan:

$$\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} = \min \left\{ \frac{x_{B_k}}{y_{kj}} \quad / \quad y_{kj} > 0 \right\} \Rightarrow x_{B_i} \text{ aldagaia oinarritik irteten da}$$

6. Pausua: x_{B_i} aldagaia j. aldagaiagatik ordezkatu eta j. aldagaiaren zutabean (oinarrira sartzen den aldagaiaren zutabean) oinarri kanonikoko bektore bat agertzeko beharrezkoak diren kalkulu aljebraikoak egin.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Adibidea:

$$\min \quad z = 2x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6$$

$$-x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$-4x_2 + 4x_3 + 8x_5 + x_6 = 12$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 6$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Adibidea:

Bi ontzi mota desberdin egiteko, K eta L ontziak egiteko, M_1 eta M_2 makinak erabiltzen dira. K motako ontzi bat ekoizteko M_1 makinak 2 minutu eta M_2 makinak 4 minutu behar ditu. Era berean, L motako ontzi bat egiteko M_1 makinak 8 minutu eta M_2 makinak 4 minutu behar ditu. K motako ontzien irabazi-garbia unitateko 29 eurokoa da eta L motako ontzien irabazi-garbia unitateko 45 eurokoa da. Orduko irabazia maximizatzen duen ekoizpen-plana zehaztu

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Adibidea:

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & -x_1 + 3x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_i \geq 0 \;\; i = 1,2 \end{aligned}$$

Programazio Lineala. Simplex metodoa

Adibidea:

$$\max \quad z = \quad 60x_1 + 35x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$