Ikerketa Operatiboa

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritza

Bilboko Ingeniaritza Eskola

Programazio lineal osorako sarrera

4.1 Sarrera

4.2 Programazio lineal osoko problema baten ebazpena

4.3 Ebazpen grafikoa

4.4 Adartze- eta bornatze- metodoa

Programazio lineal osorako sarrera

- **4.1 Sarrera:**

- Programazio linealean aldagai guztiak edo aldagai batzuek osoak direnean programazio lineal osoan gaude.
- Aldagaiak kontuan hartuz, lau problema mota daude:
  - Problema oso mistoa: Aldagai osoak eta aldagai errealak dituen problema
  - Problema oso hutsa: Aldagai guztiak osoak dituen problema
  - Problema bitarra: Aldagai guztiak bitarrak dituen problema
  - Problema misto bitarra: Aldagia bitarrak eta aldagai errealak dituen problema

Programazio lineal osorako sarrera

➢ **4.2 Programazio lineal osoko problema baten ebazpena:**

- Onarpen eremu mugatua duten programazio lineal osoko problemen soluzio bideragarrien kopurua finitua da.
- Soluzio multzoan puntu kopuru finitua dago, eta ondorioz, puntu guztiak kalkula daitezke eta bakoitzean helburu funtzioaren balioa aztertu, optimoa aurkitzeko.
- Metodo hau ez da eraginkorra aldagai asko dituzten problematan
- Problema lineal osoaren soluzioen multzoa ez da multzo ganbila
- Programazio lineal osoko problema bat ebaztea programazio linealeko problema bat ebaztea baino zailagoa da.

Programazio lineal osorako sarrera

- Konponbidea problema aldagaiak osoak direla kontuan izan gabe ebaztea eta lortutako aldagaien balioak biribiltzea dela pentsa daiteke.
- Arazoa problema linealeko soluzio optimoa biribildu ondoren onarpen eremutik kanpo egon daitekeela da.
- Are gehiago, problema linealeko soluzio optimoak biribildu ondoren ,onarpen eremuan egon arren, optimaltasuna gal dezake.
- Bestalde, problema handietan hurbilketa asko kalkulatu behar dira.

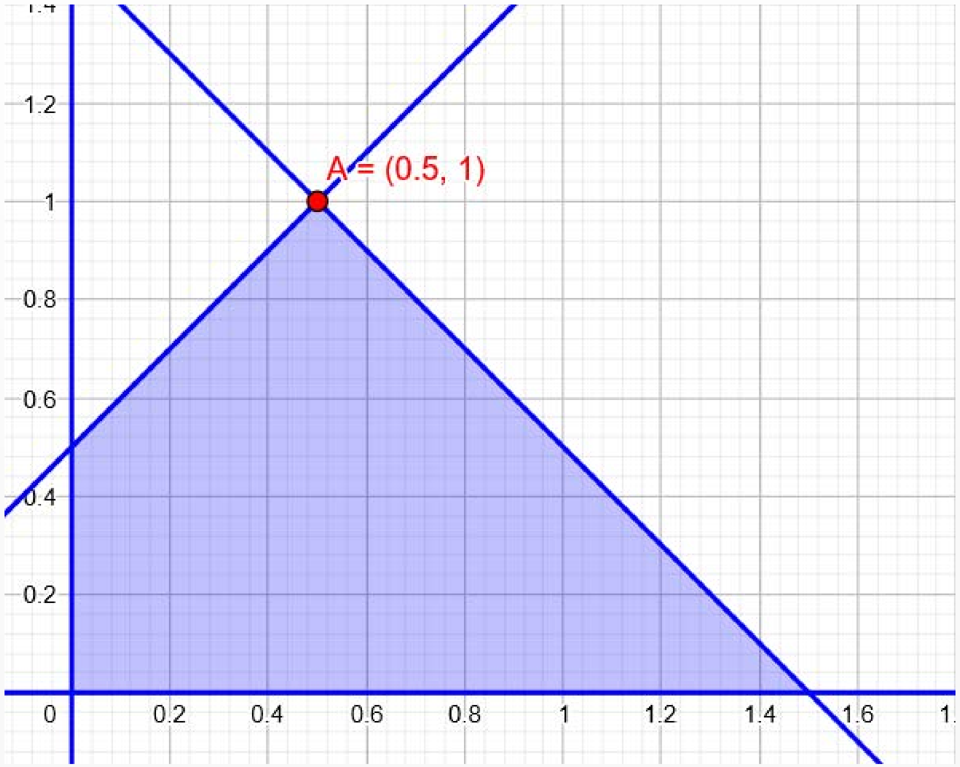
Programazio lineal osorako sarrera

Ondorengo problema aldagaiak osoak izan behar direla kontuan izan gabe ebatziz, optimoa A(0.5,1) puntua da.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & x_2 \\
& -x_1 + x_2 \leq \tfrac{1}{2} \\
& x_1 + x_2 \leq 3\tfrac{1}{2} \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1,\ x_2 \text{ osoak}
\end{aligned}
$$

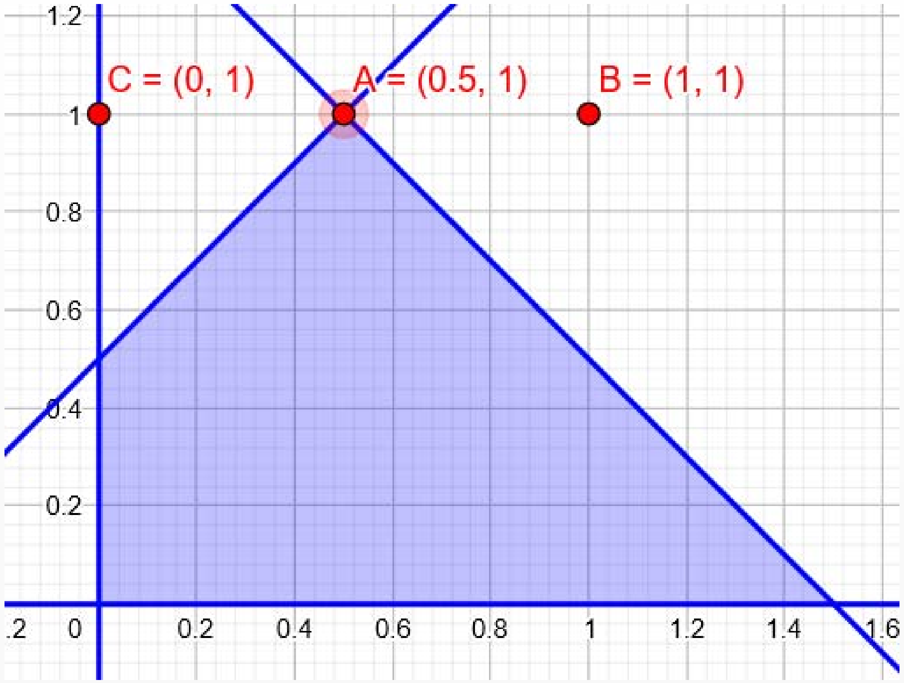
Programazio lineal osorako sarrera

Ondorengo problema aldagaiak osoak izan behar direla kontuan izan gabe ebatziz, optimoa A(0.5,1) puntua da.



Programazio lineal osorako sarrera

Optimoaren lehenengo aldagaiaren balioa biribilduz:



Bideragarritasuna galtzen da. Bideragarritasuna mantentzeko bigarren aldagaiaren balioa ere aldatu beharko zen.

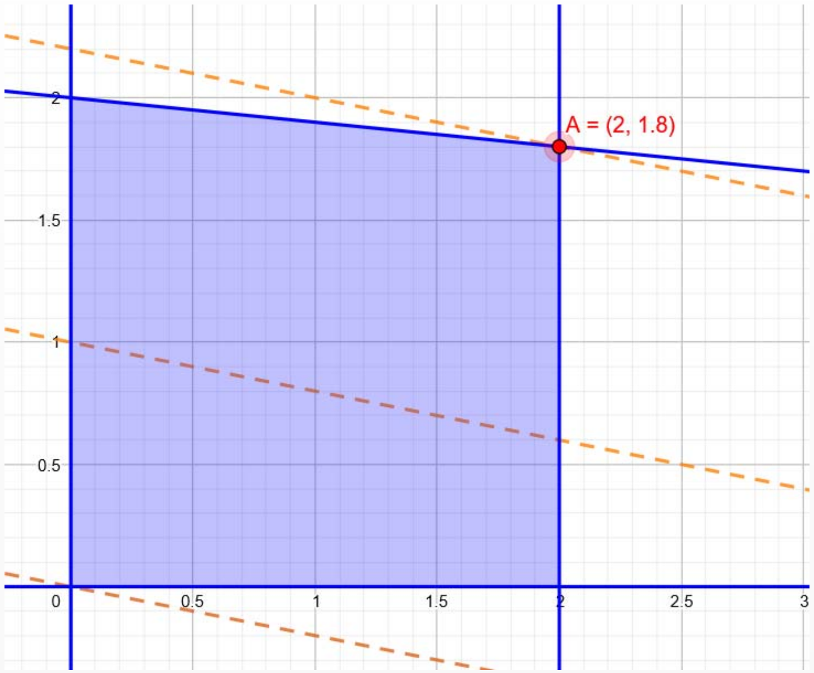
Programazio lineal osorako sarrera

Ondorengo problema aldagaiak osoak izan behar direla kontuan izan gabe ebatziz, optimoa A(2,9/5) puntua da, Z=11 izanik.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & x_1 + 5x_2 \\
& x_1 + 10x_2 \leq 20 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1,\ x_2 \text{ osoak}
\end{aligned}
$$

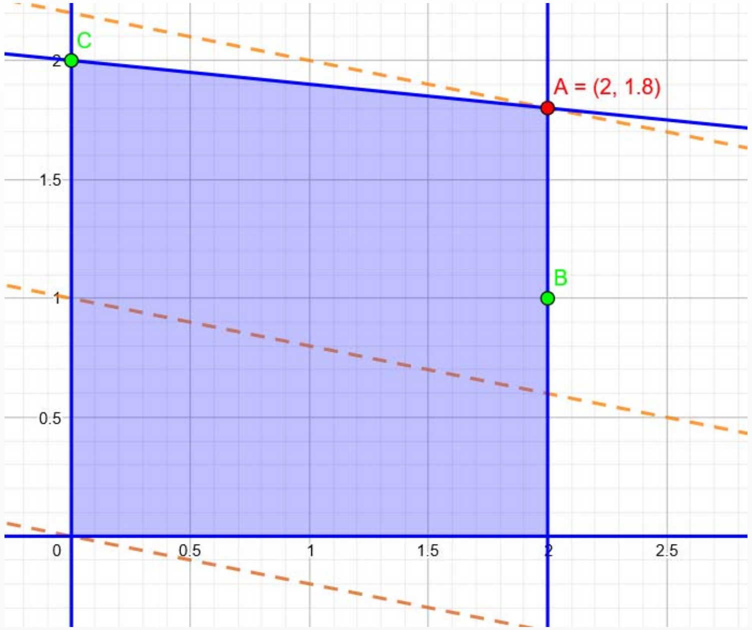
Programazio lineal osorako sarrera

Ondorengo problema aldagaiak osoak izan behar direla kontuan izan gabe ebatziz, optimoa A(2,9/5) puntua da, Z=11 izanik.



Programazio lineal osorako sarrera

Optimoaren bigarren aldagaiaren balioa onarpen eremuan egon dadin biribilduz, B=(2,1) puntua kontsideratuko genuke. Kasu honetan, Z=7 da:



Bestalde, soluzio optimoa C=(2,0) da, Z=10 izanik.

Programazio lineal osorako sarrera

➢ **4.3 Ebazpen grafikoa:**

- Onarpen eremuan puntu oso kopuru finitua dago.

- Soluzio optimoa lortzeko onarpen eremuko puntu oso guztietan helburu funtzio ebaluatu eta maximizazio kasuan baliorik altuena ematen duen puntua eta minimizazio kasuan baliorik txikiena ematen duen puntua kontsideratu,

Programazio lineal osorako sarrera

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

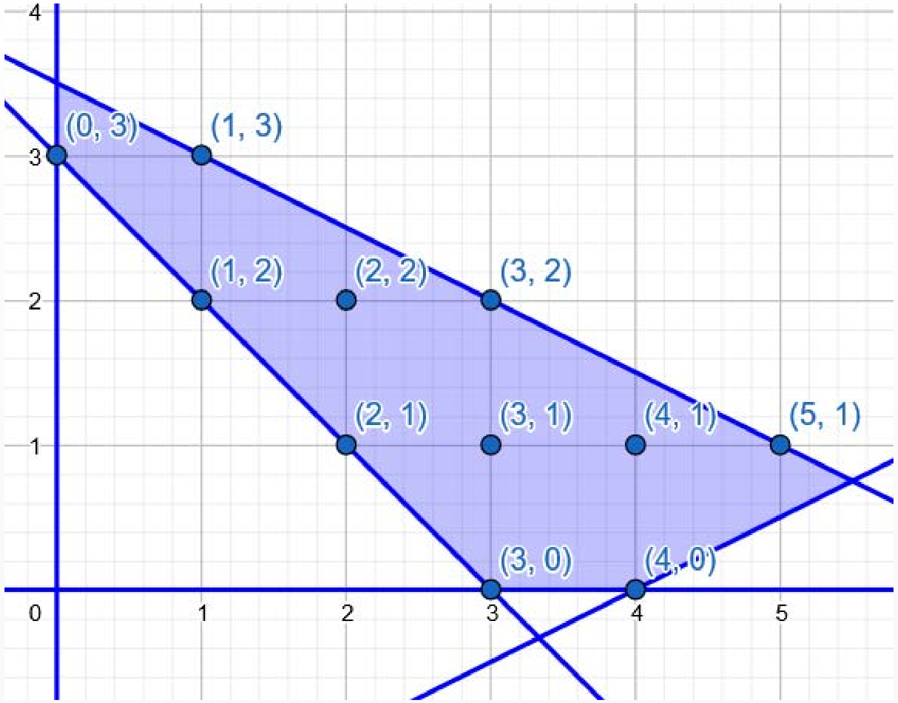
$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$2x_2 - x_1 \geq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1,\ x_2 \text{ osoak}$$

Programazio lineal osorako sarrera



Soluzio optimoa izateko hautagaiak:

(0,3), (1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(5,1)

Helburu funtzioa puntu guztietan ebaluatuz: Maximoa F(5,1)=13 da.

Programazio lineal osorako sarrera

- **4.4 Adartze- eta bornatze- metodoa**

Definizioa:

Problema lineal oso bat emanik, aldagaiak osoak izatearen murrizketa kenduta lortzen den ereduari **problemaren erlaxazio lineala** esaten zaio.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = C^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq B \\ & X \geq 0 \;\; X \text{ osoa} \end{aligned}$$

Problema lineal osoa (PO)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = C^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Problemaren erlaxazio lineala (PL)

Programazio lineal osorako sarrera

- Problema osoaren bideragarritasun-eskualdea dagokion problema erlaxatuaren onarpen eremuaren parte da
- Ondorioz, maximizatze kasurako balio optimoen artean honako erlazioa betetzen da:

$$Z_{PO} \leq Z_{PL}$$

- Eta minimizatze kasurako ondorengo erlazioa betetzen da:

$$Z_{PL} \leq Z_{PO}$$

Programazio lineal osorako sarrera

Definizioa:

Problema oso bat izanik, problemaren ebazpenaren iterazio bakoitzean ordura arte lortutako soluzio oso onenak **soluziogai** izena hartzen du.

Maximizazio kasuan soluziogaiak problema osoaren behe-bornea zehazten du, behe bornea $\underline{z}$ erabiliz denotatuko dugu.

Minimizazio kasuan berriz, soluziogaiak problema osoaren gohi-bornea zehazten du, gohi bornea $\overline{z}$ erabiliz denotatuko dugu.

Programazio lineal osorako sarrera

Adarkatze- eta bornatze-metodoa, bere izenak adierazten duen bezalaxe, problema ardatzean eta bornatzean datza. Prozesua behin eta berriro jarraitu behar da, aztertzeko geratzen diren problema guztiak azkeneko problemak izan arte.

Definizioa:

Problema oso bat ebazterakoan, ondoko baldintzetako bat betetzen duen problema erlaxatu oro **azkeneko problema** dela esaten da:

(1) Bideraezina bada

(2) Helburu funtzioaren balio optimoa behe-bornea baino txikiagoa edo berdina bada maximizazio kasuan (gohi-bornea baino handiagoa edo berdina bada minimizazio kasuan)

(3) Soluzioa osoa bada.

Programazio lineal osorako sarrera

Adarkatze- eta bornatze- algoritmoan, problema erlaxatu bakoitzaren helburu funtzioaren balio optimoa z_g notazioaz adieraziko dugu.

Maximizazio kasuan, z_g problema osoaren balio optimorako goi-borne bat finkatuko du adarrean.

Minimizazio kasuan berriz, z_g problema osoaren balio optimorako behe-borne bat finkatuko du adarrean.

Programazio lineal osorako sarrera

Algoritmoa

Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa maximizazio kasuan ondorengoa da

1. Pausua: **Hasieraketa**

Problema osoaren erlaxazio lineala ebatzi:

- Soluzio optimoa osoa bada, soluzio optimoa lotu dugu. Amaitu.

- Bestela, $\underline{z} = -\infty$ finkatu

Programazio lineal osorako sarrera

2. Pausua: **Adarkatzea**

Azkenekoa ez den problema bat aukeratu. Osoa izan behar den eta osoa ez den x_j aldagaia aukeratu.

Problema adarkatu:

Bi problema berri sortu:

1. Problema: Erlaxazio linealean $x_j \leq \lfloor x_j \rfloor$ murrizketa gehitu
2. Problema: Erlaxazio linealean $x_j \geq \lfloor x_j \rfloor + 1$ murrizketa gehitu

Oharra: $\lfloor x_j \rfloor$ balioa x_j aldagaiaren zati osoa da

Programazio lineal osorako sarrera

3. Pausua: **Bornatzea**

Aurreko adarkatze-urratsean sortu berri ditugun bi problemak simplex dual metodoa erabiliz ebatzi eta problema bakoitzerako z_g kalkulatu.

4. Pausua: **Azkeneko problemak**

Azkeneko ez diren problema guztiak aztertu. Azkeneko dira ondoko baldintzetako bat betetzen dutenak.

(1) Problema bideraezina da.

(2) $z_g \leq \underline{z}$

(3) Problemaren soluzioa osoa da eta $z_g > \underline{z}$. Behe-bornea eguneratu $\underline{z} = z_g$ eginez; soluzio oso hori soluziogaia da.

Programazio lineal osorako sarrera

Azkenekoa ez den problemarik existitzen bada, algoritmoaren 2.urratsean joan eta berriro adarkatu.

Problema guztiak azkenekoak badira, soluziogaia problema osoaren soluzio optimoa da. Soluziogairik ez badago, problema osoa bideraezina da.

Oharra: 2. pausuan adarkatua izango den problema aukeratzeko irizpide erraz bat azkenekoa ez den z_g handieneko problema aukeratzea da.

Programazio lineal osorako sarrera

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & 80x_1 + 45x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 7 \\
& 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \;\; x_1,\; x_2 \text{ osoak}
\end{aligned}
$$

Programazio lineal osorako sarrera

1. Pausua: **Hasieraketa:**

Erlaxazio lineala ebatzi

P1: $$\max 80x_1 + 45x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

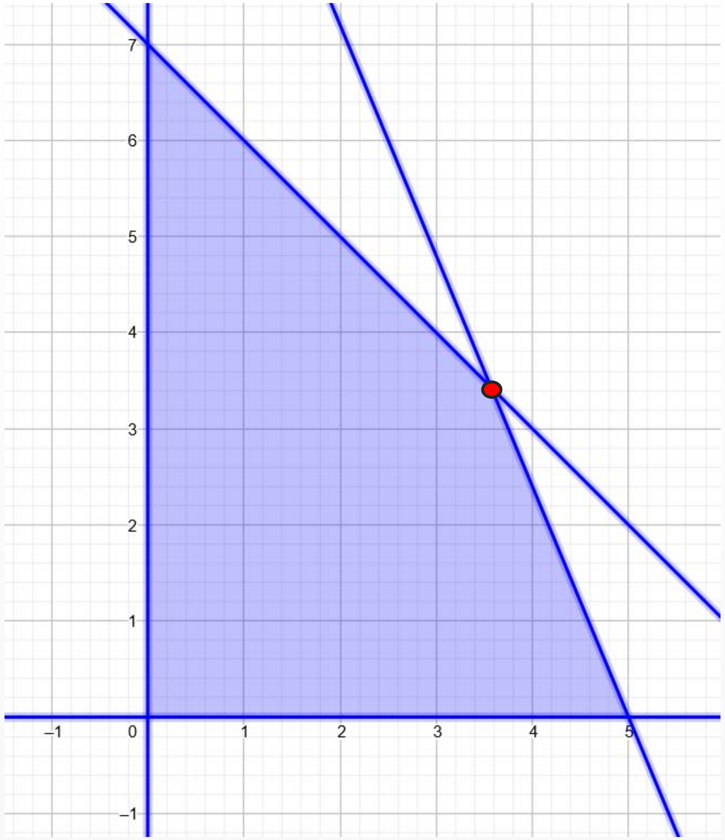
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Soluzio optimoa:

$$x_1 = \frac{25}{7}, x_2 = \frac{24}{7} \text{ eta } Z_1 = 440$$

$$x_1 = 3{,}571$$

$$[x_1] = 3$$

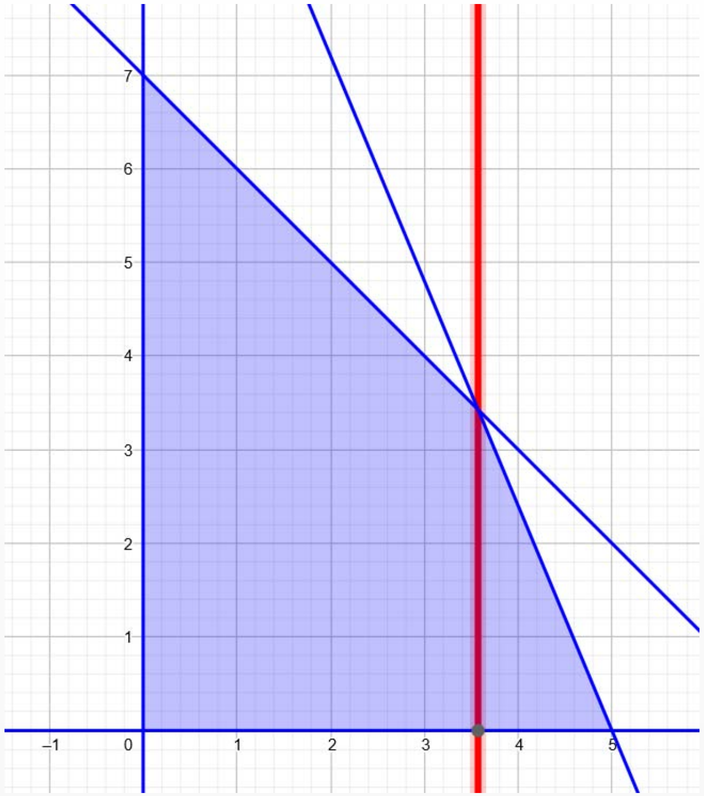


Programazio lineal osorako sarrera

2. Pausua: **Adarkatzea**

$$x_1 \leq [x_1] = 3 \ \Rightarrow P2$$

$$x_1 \geq [x_1] + 1 = 4 \ \Rightarrow P3$$



Programazio lineal osorako sarrera

3. Pausua: **Bornatzea**

P2:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

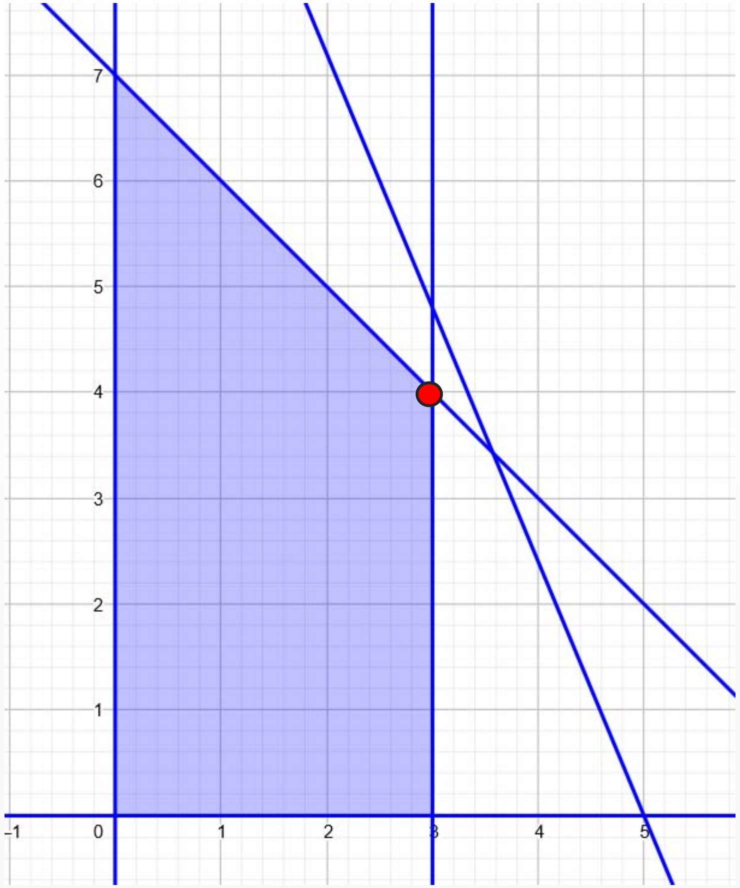
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Soluzio optimoa:
$x_1 = 3$, $x_2 = 4$ eta $Z_2 = 420$



Programazio lineal osorako sarrera

P3:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

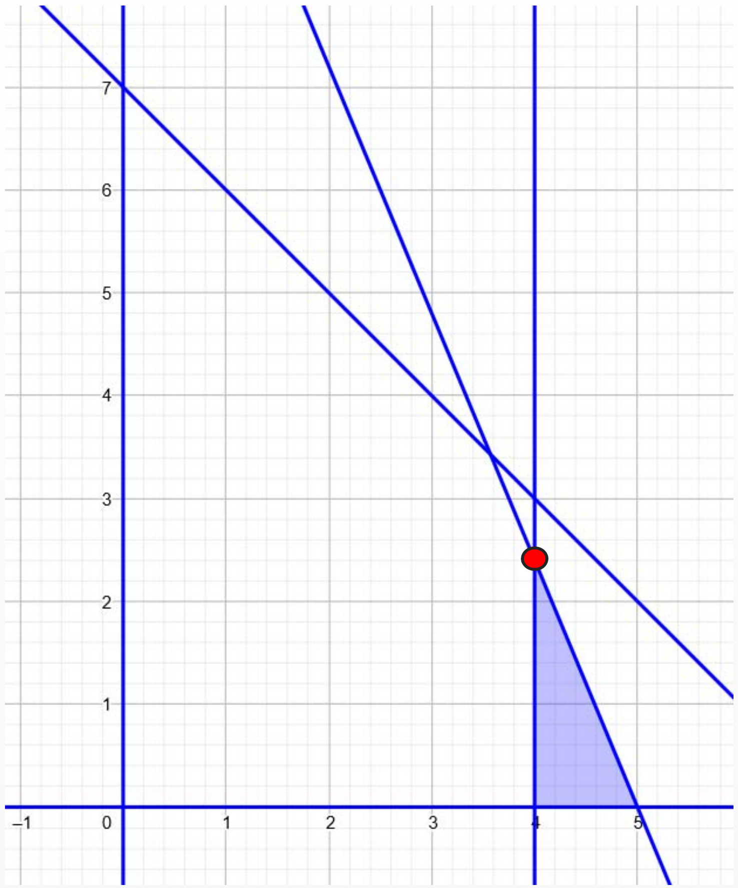
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Soluzio optimoa:

$x_1 = 4,\ x_2 = \frac{12}{5}$ eta $Z_3 = 428$

$$x_2 = 2{,}4$$

$$[x_2] = 2$$

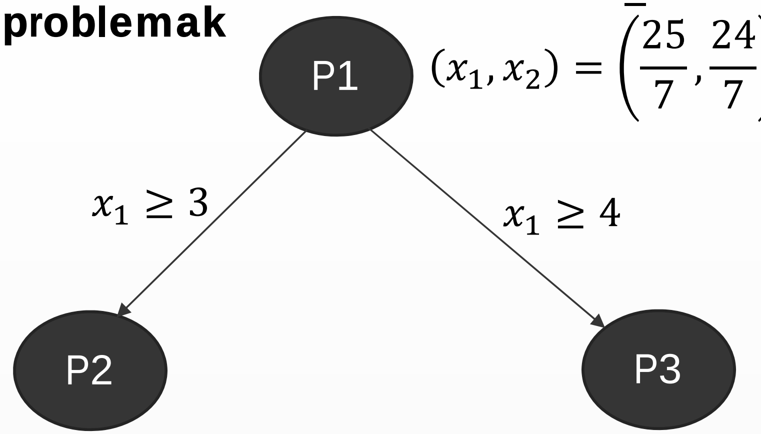


Programazio lineal osorako sarrera

4. Pausua: **Azkeneko problemak**

$\underline{z} = -\infty$

$(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{7}, \frac{24}{7}\right)$, $z_1 = 440$



$(x_1, x_2) = \left(4, \frac{12}{5}\right)$, $z_3 = 428$

$(x_1, x_2) = (3,4)$

$z_2 = 420$

$z_2 = 420 > \underline{z} = -\infty \Rightarrow \underline{z} = 420$

AZKENEKOA

Programazio lineal osorako sarrera

P3 azkenekoa ez denez

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

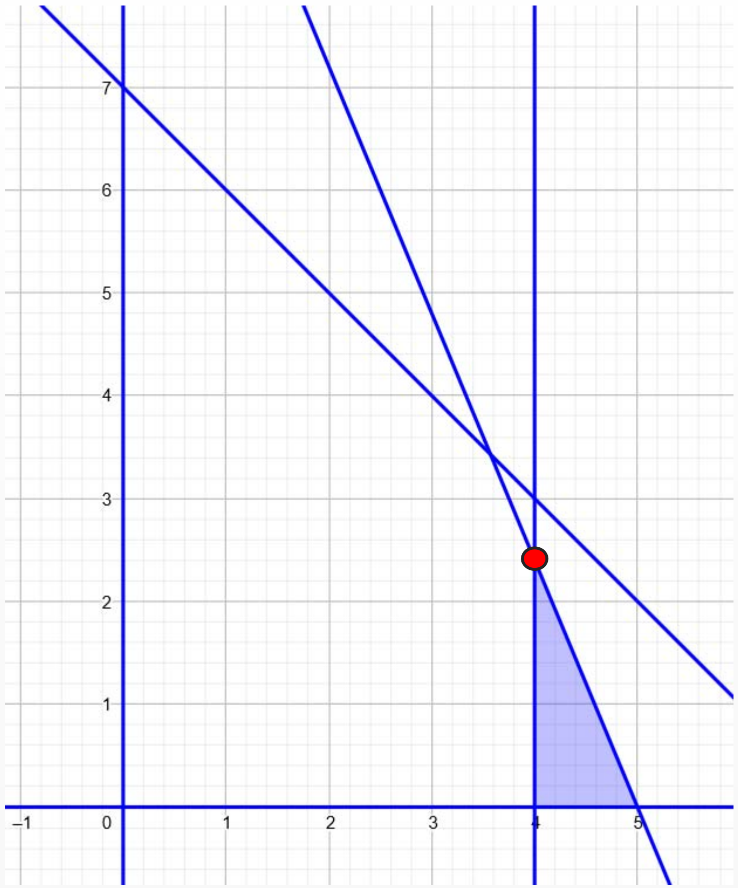
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. pausura joan, adarkatzen jarraitu

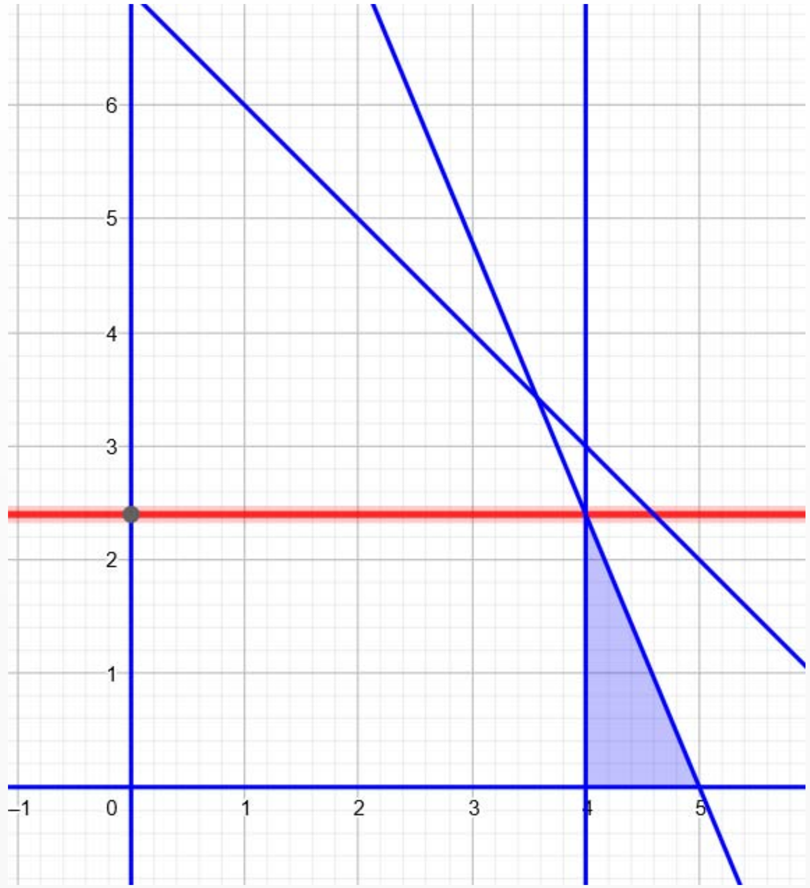


Programazio lineal osorako sarrera

2. Pausua: **Adarkatzea**

$$x_2 \leq [x_2] = 2 \;\Rightarrow P4$$

$$x_2 \geq [x_2] + 1 = 3 \;\Rightarrow P5$$



Programazio lineal osorako sarrera

3. Pausua: **Bornatzea**

P4:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

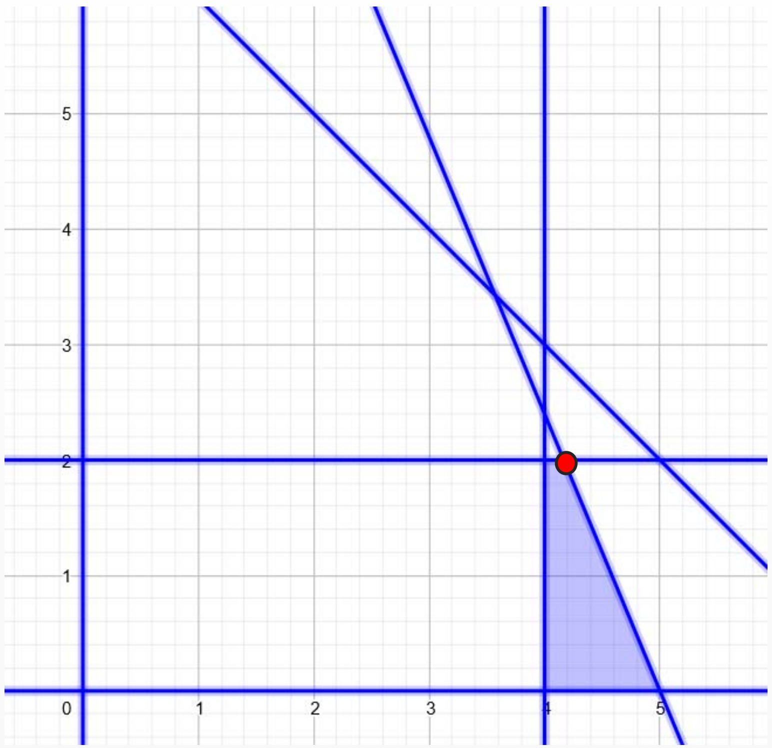
$$x_1 + x_2 \le 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \le 60$$

$$x_1 \ge 4$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Soluzio optimoa:

$$x_1 = \frac{25}{6},\ x_2 = 2 \text{ eta } \quad Z_4 = \frac{1270}{3}$$

$$x_1 = 4{,}16$$

$$[x_2] = 4$$

Programazio lineal osorako sarrera

P5:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

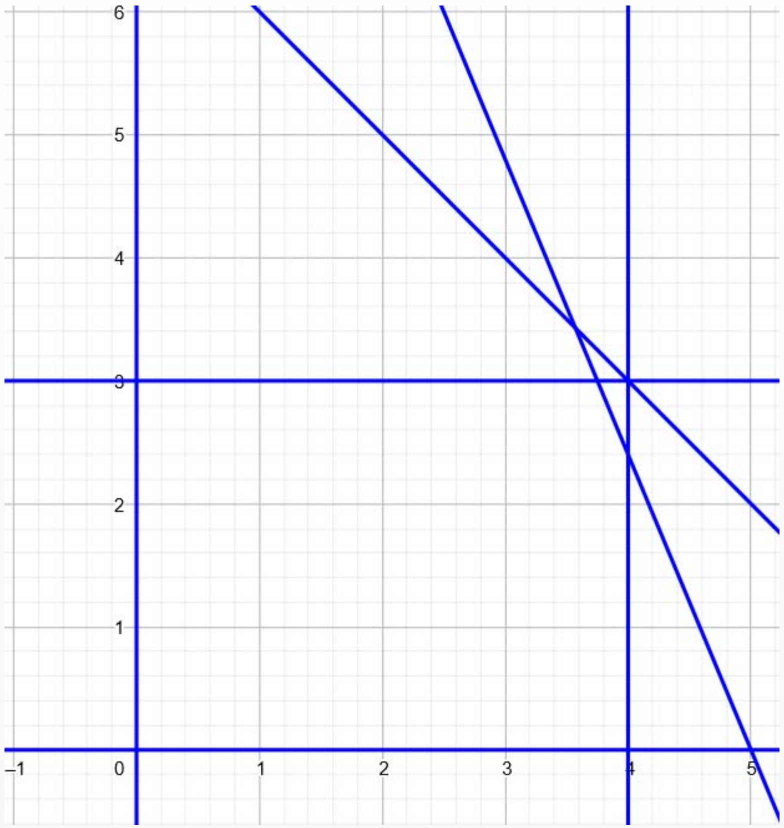
$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

PROBLEMA BIDERAEZINA

AZKENEKOA



Programazio lineal osorako sarrera

4. Pausua: **Azkeneko problemak**

$\underline{z} = -\infty$

P1 $\quad (x_1, x_2) = \left(\frac{25}{7}, \frac{24}{7}\right),\ z_1 = 440$

$x_1 \geq 3$ → P2

$x_1 \geq 4$ → P3

P2

$(x_1, x_2) = (3{,}4)$

$z_2 = 420$

$z_2 = 420 > \underline{z} = -\infty \Rightarrow \underline{z} = 420$

AZKENEKOA

P3 $\quad (x_1, x_2) = \left(4, \frac{12}{5}\right),\ z_3 = 428$

$x_2 \leq 2$ → P4

$x_2 \geq 3$ → P5

P4

$(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{6}, 2\right)$

$z_4 = \frac{1270}{3}$

P5

Bideraezina

AZKENEKOA

Programazio lineal osorako sarrera

P4 azkenekoa ez denez

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

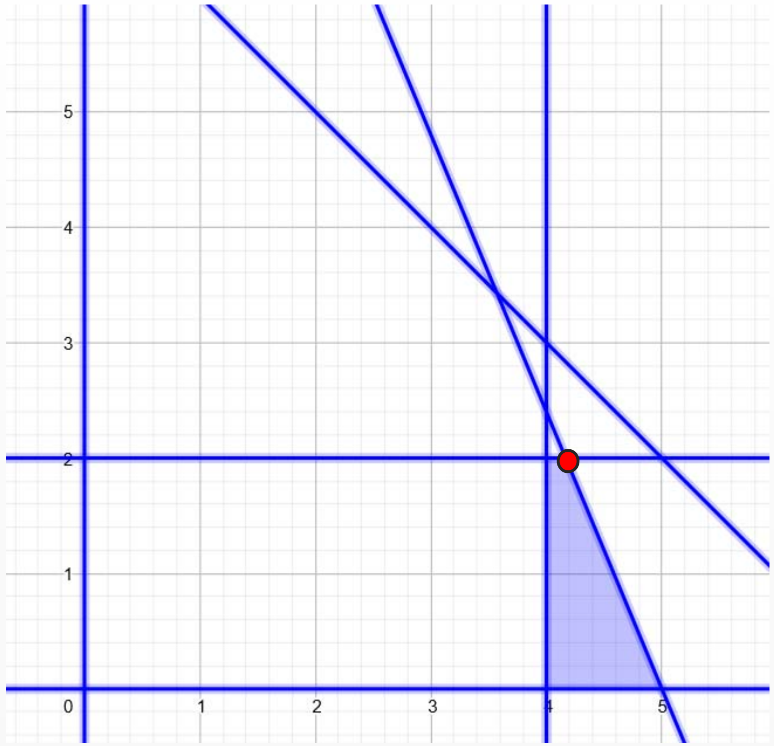
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



2. pausura joan, adarkatzen jarraitu

Programazio lineal osorako sarrera

P6:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Soluzio optimoa:

$x_1 = 4$, $x_2 = 2$ eta $Z_4 = 410$

AZKENEKOA

Programazio lineal osorako sarrera

P7:

$$\max 80x_1 + 45x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 5$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

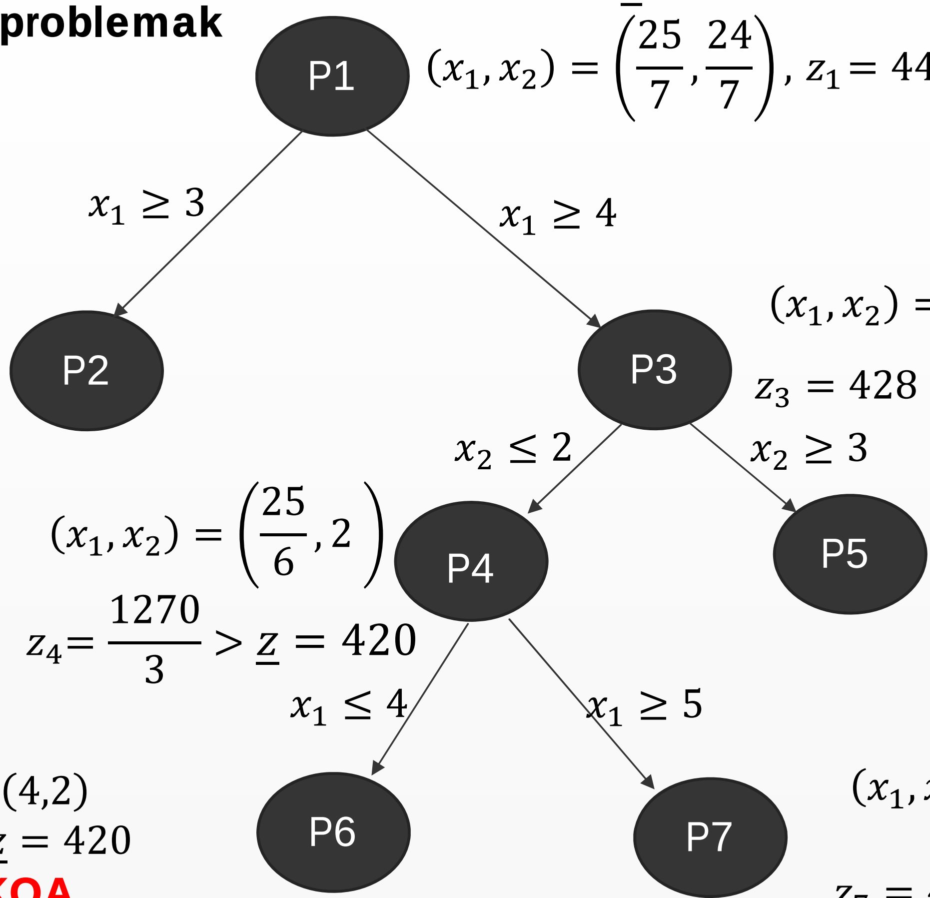
Soluzio optimoa:

$x_1 = 5,\ x_2 = 0$ eta $Z_4 = 400$

AZKENEKOA

Programazio lineal osorako sarrera

4. Pausua: **Azkeneko problemak**



$\underline{z} = -\infty$

P1: $(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{7}, \frac{24}{7}\right)$, $z_1 = 440$

P2: $(x_1, x_2) = (3,4)$

$z_2 = 420$

$z_2 = 420 > \underline{z} = -\infty \Rightarrow \underline{z} = 420$

AZKENEKOA

P3: $(x_1, x_2) = \left(4, \frac{12}{5}\right)$,

$z_3 = 428 > \underline{z} = 420$

P4: $(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{6}, 2\right)$

$z_4 = \frac{1270}{3} > \underline{z} = 420$

P5: Bideraezina

AZKENEKOA

P6: $(x_1, x_2) = (4,2)$

$z_6 = 410 < \underline{z} = 420$

AZKENEKOA

P7: $(x_1, x_2) = \left(4, \frac{12}{5}\right)$,

$z_7 = 400 < \underline{z} = 420$

AZKENEKOA