eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

EBALUAZIO FINALA-LEHENENGO DEIALDIA (EKAINA 2019)

1. ARIKETA

Barre Egin enpresak erratzen makila metalikoak ekoizteko makina bat du. Makilen luzerak 1.25 m-ko batezbestekoa eta 0.025m-ko desbiderazio tipikoa duen banaketa bat jarraitzen du. Ekoiztutako makil bat baztertu egiten da baldin eta batezbestekotik gutxienez 0.05 metrotan aldentzen bada erratzen muntaia-katean akatsak sortuko lituzkelako.

Izan bedi X: "enpresak ekoiztutako erratzen makilen luzera metrotan" zorizko aldagaia.

(A) Zein da, gehienez, enpresa honek ekoiztutako akastun makilen portzentajea? **(2 p)**.

X zorizko aldagaiaren itxaropen matematikoa $\mu_X = E[X] = 1.25$ m eta bariantza $V[X] = \sigma_X^2 = 0.025^2$ m^2 dira.

Tschebyscheff-en teorema aplikatuz:

$$\mathrm{P}(|X-\mu_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mu_X - k\sigma_X < X < \mu_X + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Hau da, edozein behaketa multzorako (lagina edo populazioa), batezbestekotik k aldiz desbiderazio tipikora dauden balioen proportzio minimoa gutxienez 1 - 1/k^2 da, non k 1 baina handiagoa den konstante bat den.

$$\mu_X - k\sigma_X = 1.25 - k0.025 = 1.20 \Rightarrow k = \frac{0.05}{0.025} = 2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

Beraz, makila akastuneen portzentaje maximoa %25-ekoa da, $\mathrm{P}(|X-\mu_X| \geq 0.05) \leq 0.25$ baita.

(B) Kontsidera dezagun orain, makinak ekoizten dituen makilen luzerak banaketa normal bat jarraitzen duela aurreko parametro berdinekin. Zein da zoriz aukeratutako makil bat akastuna izateko probabilitatea? **(2 p)**.

Erratzen makilen ekoizpena prozesuan X zorizko aldagaia normala kontsideratzen da ondorengo parametroekin: $X \sim \mathrm{N}\,(\mu = 1.25\,m, \sigma = 0.025\,m)$. Makilen luzerak ez dute batezbestekotik $0.05m$ baina gehiagoko aldea eduki behar, hau da, $|X-\mu_X| \leq 0.05 \Rightarrow \mu_X - 0.05 \leq X \leq \mu_X + 0.05 \Rightarrow X \in [1.20\,m, 1.30\,m]$.

Eskatutako makil akastunen portzentajea modu honetan lortzen da:

$$\mathrm{P}_B = \mathrm{P}\left[(X < x_1 = 1.20) \cup (X > x_2 = 1.30)\right]$$

Banaketa normalaren simetria kontuan edukirik:

$$\mathsf{P}_B = 2\cdot \mathsf{P}\left(X > x_2 = 1.30\right) = 2\left[1-\mathsf{P}\left(X \le x_2 = 1.30\right)\right] \underbrace{=}_{\underbrace{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}_{tipifikazioa}} 2\left[1-\mathsf{P}\left(Z \le z_2 = \frac{1.30-1.25}{0.025} = 2\right)\right]$$

R-ko komandoko informazioa erabiliz, pnorm(2):

$$\mathsf{P}_B = 2\left[1-\mathsf{P}\left(Z \le z_2 = \frac{1.30-1.25}{0.025} = 2\right)\right] = 2\left(1-0.9772499\right) = 2\times 0.02275013 = 0.04550026$$

Enpresan antzeko ezaugarriko beste makina bat dago honek ekoiztutako makilen %1-ekoa akastuna izanik. Makina bakoitzak enpresako ekoizpenaren erdia ekoizten du.
(C) Zein da ekoizpen osotik zoriz aukeratutako makil bat akastuna izateko probabilitatea? **(1 p)**.

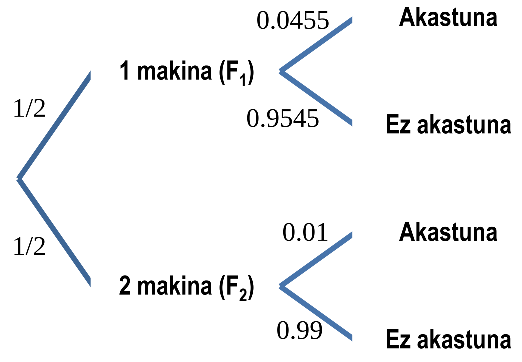
Izan bitez honako gertaerak:

- D : “aukeratutako makila akastuna da”
- F_i : “aukeratutako makila $i = 1,2$ makinak ekoiztua izan da”

Probabilitate-osoaren teorema erabiliz

$$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(D\cap F_1) + \mathsf{P}(D\cap F_2) = \mathsf{P}(F_1)\cdot\mathsf{P}(D\,|\,F_1) + \mathsf{P}(F_2)\cdot\mathsf{P}(\mathrm{D}\,|\,F_2) =$$
$$= \frac{1}{2}0.04550026 + \frac{1}{2}0.01 = \frac{1}{2}0.05550026 = 0.02775013$$

Lagin-espazioaren zuhaitz diagrama ondokoa da:



(D) Zoriz ekoizpen osotik makil bat hartuta akastuna bada, zein da lehenengo makinak ekoiztua izatearen probabilitatea? **(1 p)**.

Kasu honetan Bayes-en teorema aplikatuko dugu:

$$\mathsf{P}(F_1\,|\,D) = \frac{\mathsf{P}(F_1)\mathsf{P}(D\,|\,F_1)}{\mathsf{P}(D)} = \frac{\frac{1}{2}0.04550026}{0.02775013} = 0.81982066$$

Makilak, ekoizpen osotik zoriz aukeratutako 100 unitatez beteriko edukiontzietan igortzen dira. Edukiointzi bat errefusatzen da baldin eta gutxienez makil bat akastuna bada. **(E)** Zer probabilitatearekin errefusatuko da zoriz aukeratutako edukiontzi bat? **(2 p)**

Bernouilliren esperimentuaren errepikapena bat da non:

- A(arrakasta) : "aukeratutako makila akastuna da"
- P (porrota): "aukeratutako makila ez da akastuna"

Kasu honetan, izan bedi arrakasta kopurua zenbatzen dituen zorizko aldagai binomiala Y "100 makil dituen edukiontzi bateko makil akastun kopurua $p=0.02775013$ akastuna izateko probabilitatearekin" non $Y \sim B(n=100, p=0.02775013):=$ Makil bakoitza bestearekiko independentea da. Orduan, eskatutako probabilitatea honela kalkulatzen da:

$$\mathrm{P}_{errefusatu} = \mathrm{P}(Y>0) = 1-\mathrm{P}(Y=0) = 1-F(0) = 1-\binom{100}{0}0.02775013^0(1-0.02775013)^{100-0} =$$
$$= 1-0.97224987^{100} = 1-0.05995003 = 0.94004997$$

Normalaren bidezko hurbilketa ezin da burutu $np = 100\times 0.02775013 = 2.77 < 5$ baita.

Beirateak garbitzeko asmoz, luzera handiagoko makilak ekoiztu nahi dira, bi makil soldadura bidez elkartuz. Soldatze prozesuak luzera totala murrizten du, prozesu honen modeloak banaketa normal bat jarraitzen duelarik batezbestekoa 0.01 m eta desbideratze tipikoa 0.005 m izanik. Soldatze prozesua hasierako erratzen makilen luzerarekiko independentea da.

(F) Kalkulatu 2.48 m eta 2.505 m luzera tarteko erratzen makilak lortzeko probabilitatea. **(2 p)**.

Izan bitez, ondorengo zorizko aldagaiak

- L: "soldadurarekin galdutako luzera, metrotan" $\Rightarrow L \sim \mathrm{N}(\mu = 0.01\,m, \sigma = 0.005\,m)$
- U: "makil bikoitzaren luzera, metrotan" non $U = 2X - L$

Orain, erratzen makilen ekoizpen prozesuan U ondorengo parametroak dituen zorizko aldagai normala da

$$\left.\begin{aligned} E[U] &= 2E[X]-E[L] \\ Var[U] &= 2Var[X]+Var[L] \end{aligned}\right\} \Rightarrow U \sim \mathrm{N}(\mu = 2.49\,m, \sigma = 0.035707142\,m)$$

Orduan, eskatutako probabilitatea:

$$\mathrm{P}_F = \mathrm{P}(u_1 = 2.48\,m \le U \le u_2 = 2.505\,m) =$$
$$= \mathrm{P}\left(z_1 = \frac{2.48-2.49}{0.035707142} = -0.280056017 \le Z \le z_2 = \frac{2.505-2.49}{0.035707142} = 0.420084026\right) =$$
$$= \mathrm{P}(z_1 = -0.280056017 \le Z \le z_2 = 0.420084026) = F(z_2 = 0.420084026) - F(z_1 = -0.280056017) =$$
$$= 0.66627938 - 0.3897004 = 0.2730934$$

2. ARIKETA

Telebistako saio batean audientziak telefono bidez botoa eman dezake kanporatua desiratzen duen parte-hartzaileagatik. Boto-emailearen dei bakoitza egindako beste deiengandik independentea dela suposatzen da. Gainera, telefonoko linea okupatuta ez egoteko probabilitatea, eta beraz egindako deiak erantzuna izateko probabilitatea, %20-koa da.
Botoa eman nahi duen pertsona bat kontuan hartzen da. **(A)** Zein da erantzuna jasoko duen lehen deia egindako hamargarrena izateko probabilitatea? **(1 p)**.

Izan bedi X := "erantzunik gabeko dei kopurua lehenengo deia erantzuna jaso arte" zorizko aldagaia. Aldagai honek banaketa geometriko bat edo Pascal-en banaketa bat jarraitzen du: $X \sim G(p=0.2)$. Orduan:

$$\mathrm{P}(X=9)=(1-0.2)^9\,0.2=0.02684355$$

Erantzun berdina lortuko da, probabilitateko teoria erabiliz, dei bakoitza independentea dela kontuan harturik. Horretarako, $A_i :=$ "erantzundako i-garren deia" (beraz $\mathrm{P}(A_i)=0.2$) eta $\bar{A}_i :=$ "erantzunik gabeko i-garren deia" (beraz $\mathrm{P}(\bar{A}_i)=0.8$) definitzen ditugu. Erantzunik gabeko 9 dei eta hamargarren deia erantzuna jaso duen lehenengoa delakoaren probabilitatea definitzean datza:

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{9}\bar{A}_i\right)\mathrm{P}(A_{10})=0.8^9 0.2=0.02684355$$

(B) Zein da parte-hartzaile batengatik bi aldiz bozkatzeko 10 aldiz deitu behar izateko probabilitatea? **(2 p)**

Izan bedi Y := "erantzunik gabeko egindako dei kopurua, bi aldiz erantzuna jaso arte" zorizko aldagaia. Aldagai honek banaketa binomial negatibo bat jarraitzen du: a: $Y \sim \mathrm{BN}\,(r=2, p=0.2)$ parametroak p = 0.2 eta r = 2 izanik. Beraz:

$$\mathrm{P}(Y=8)\Big|_{\substack{p=0.2\\ r=2}}=\binom{y+r-1}{y}0.2^r(1-0.2)^y=\binom{8+2-1}{8}0.2^2(1-0.2)^8=9\times0.2^2\times0.8^8=0.06039798$$

Erantzun berdina lortuko da probabilitateko teoria erabiliz. Izan bedi $\bar{E}$:= "porrota" eta E := "arrakasta" gertaerak. Y-ren kasu partikular bat $\bar{E}\bar{E}\bar{E}\bar{E}\bar{E}\bar{E}\bar{E}\bar{E}\,|\,EE$ izan daiteke, ondorengo probabilitatea $\mathrm{P}_1=0.2^2(1-0.2)^8=0.2^2\times0.8^8=0.006710886$ edukirik; Bernouilliren gertaera independenteak baitira. Hamar dei beharrekoak izateko arrakasta bat azkeneko deian gertatu behar da eta aurreko bederatzi deietan 8 porrot eta arrakasta bat egongo dira. Gertaera guzti hauek modu ezberdinetan konbinatu daitezke $y+r-1$ elementuren errepikapeneneko permutazio bat izanik, non $y=8$ porrotak eta $r-1=1$ arrakasta diren. Hau da $\dfrac{(y+r-1)!}{y!(r-1)!}=\binom{y+r-1}{y}=\binom{8+2-1}{8}=\binom{9}{8}=9$. Horrela, eskatutako probabilitatea
$\mathrm{P}(Y=8)\Big|_{p=0.2}=9\mathrm{P}_1=9\times0.006710886=0.06039798$ da.

(C) Suposatu telebistako saioari 15 dei egitea baimentzen duen txartel bat erosi duela; dei guztiak kontsumitzen baditu, zein da gutxienez hiru aldiz bozkatzeko probabilitatea? **(2 p)**.

Kasu honetan, izan bedi W := "erantzuna jaso duten dei kopurua" zorizko aldagaia. Aldagai honek banaketa binomial bat jarraitzen dun non $n=15$ eta $p=0.2$ diren, w= 0,1,2,3,4,… izanik. Beraz:

$$\mathrm{P}(W\geq 3)=1-\mathrm{P}(W\leq 2)=1-F(2)=1-\sum_{k=0}^{2}\binom{15}{k}p^k(1-p)^{15-k}=$$
$$=1-(0.03518437+0.1319414+0.2308974)=1-0.3980232=0.6019768$$

Ondorengo R-ko komandoak erabili zitekeen ere, dbinom(0,15,0.2), dbinom(1,15,0.2) eta dbinom(2,15,0.2).

(D) Telebista saioko telefono-operadore batek 15 minuturo batezbeste12 dei erantzuten ditu; **(D1)** Zein da 15 minututan zehazki 10 dei erantzuteko probabilitatea? **(1 p)**.

Izan bedi T_1 := "telefono-operadoreak 15 minututan erantzundako dei kopurua" Poisson-en zorizko aldagaia: $T_1 \sim \mathscr{P}\left(\lambda=12\ {}^{\text{dei}}\!/_{15\ \text{minutu}}\right)$ non t_1 = 0,1,2,3,4,… . Ondorengoa kalkulatu behar da:

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_1=k=10)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\frac{12^{10}e^{-12}}{10!}=\frac{61917364224\times 6.144212e-06}{3628800}=\frac{380433.4}{3628800}=0.1048373$$

(D2) Zein da telefono-operadoreak 5 minututan gehienez 5 dei erantzuteko probabilitatea? **(1 p)**.

15 minututan telefono-operadoreak 12 de erantzuten baditu, orduan 5 minututan batezbeste 4 dei erantzungo ditu; T_2:= "telefono-operadoreak 5 minututan erantzundako dei kopurua" Poisson-en zorizko aldagaia da non $T_2 \sim \mathscr{P}\left(\lambda=4\ {}^{\text{dei}}\!/_{5\ \text{minutu}}\right)$ .Beraz,

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_2\leq 5)=F(5)=\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-4}\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!}=0.7851304$$

R-ko komandoa, ppois (5,4), erabili zitekeen ere.

(D3) Zenbat dei espero dira erantzutea ordu batean? **(1 p)**.

Izan bedi T := "ordu batean telefono-operadoreak erantzundako dei kopurua" zorizko aldagaia $T=\sum_{i=1}^{4}T_i\,/\,T_i\sim \mathrm{P}\left(\lambda_{T_i}=12\right)$. Kasu honetan zorizko aldagaiaren itxaropen matematikoa μ_T eskatzen digute.

Zorizko aldagai honek ondorengo parametro karakteristikoa dauka:

$$T\sim\mathscr{P}\left(\lambda_T=\sum_{i=1}^{4}\lambda_{T_i}=12\times 4\right)=\mathscr{P}\left(\lambda_T=48\ {}^{\text{dei}}\!/_{\text{ordu}}\right).$$

Beraz, $\mu_T=E(T)=\lambda_T=12\times 4=48$ dei edukiko dira ordu batean.

(E) Jakina da, ordu bateko tartean, telebista saioarekin komunikatzen saiatu ziren 100 pertsonetatik soilik 40 pertsonek bozkatu ahal izan zutela. Erregistratutako dei zenbakien 20 tamainako zorizko lagin bat harturik, zein da zehazki 8 deik bozkatu ahal izan duten probabilitatea? **(2 p)**

Izan bedi M := " Erregistratutako 20 deitik bozkatu ahal izan duten dei kopurua". Enuntziatutik ondoriozta daiteke zorizko aldagaiak banaketa hipergeometriko bat jarraitzen duela:
$M \sim \mathrm{H}(N=100, n=20, p=0.4)$. Beraz,

$$p(M=k=8)=\frac{\binom{pN}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{40}{8}\binom{100-40}{20-8}}{\binom{100}{20}}=\frac{\binom{40}{8}\binom{60}{12}}{\binom{100}{20}}=$$

$$=\frac{76904685\times 1.399359\times 10^{12}}{5.359834\times 10^{20}}=\frac{1.076173\times 10^{20}}{5.359834\times 10^{20}}=0.2007847$$

Kontuan harturik $n/N = 20/100 = 0.2 > 0.1$ ezin da $\mathrm{H}(N,n,p) \underset{n/N<0.1}{\longrightarrow} \mathrm{B}(n,p)$ hurbilketa burutu.

3. ARIKETA

Felipe-k, aseguru-agenteak, 20 urtetan zehar Algorta/Plentzia norabideko adarra aztertu du Las Arenas-eko biribilgunean, ondorengo istripu taula jaso duelarik:

Istripu kopurua/eguneko	Egun kopurua
0	2415
1	2670
2	1520
3	500
4	154
5	40
6	1

(A) Aztertutako aldagaiak Poisson-en banaketa bat, $\mathrm{P}(\lambda)$, jarraitzen al duen jakiteko, $\alpha = \%5$ adierazgarritasun-maila duen hipotesi-kontraste bat burutu **(4 p)**.

Doikuntzaren egokitasuneko problema bat da. Definitu dezagun X zorizko aldagaia. X:= "egunero Las Arenas-eko biribilgunean behatutako istripu kopurua". Lehenik eta behin hipotesi-kontrastea definitu:

$$\begin{cases} H_0: & \text{X zorizko aldagaiak Poisson-en banaketa jarraitzen du} \\ H_a: & \text{X zorizko aldagaiak ez du Poisson-en banaketa jarraitzen} \end{cases}$$

Orain, itxarotako maiztasunak kalkulatzeko λ parametroa estimatuko da, hau da, lagineko batezbestekoa kalkulatuko da.

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{6} f_i x_i = \frac{8032}{7300} = 1.100273973 \frac{\text{istripu}}{\text{egun}}$$

Behin λ parametroa estimatuta, behatutako eta itxarotako maiztasunekin taula bat eraikiko da. Itxarotako maiztasunak $X \sim \mathscr{P}\left(\lambda = \hat{\lambda} = \bar{x} = 1.100273973\right)$ zorizko aldagaiaren probabilitate funtzioa erabiliz kalkulatuko dira:

$$p_i = \mathrm{P}\left(X = k\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \; k = 0,1,2,3,4,5,6$$

Egunero behatutako istripuak $X = x_i$	Egun kopurua f_i	$p_i = P(X = x_i)$	$e_i = n.p_i$	$\left(f_i - e_i\right)^2 / e_i$
0	2415	0.3328	2429.2933	0.0841
1	2670	0.3661	2672.8882	0.0031
2	1520	0.2014	1470.4546	1.6694
3	500	0.0739	539.3010	2.8640
4	154	0.0203	148.3447	0.2156
5	40	0.0044	32.6440	1.6576
6	1	0.0008	5.9862	4.1533
	n= 7300			**10.6471**

Ikusi daitekenez $e_i \geq 5, i \in \left[0,6\right]$ klase bakoitzerako eta kontrasterako estatistikoaren balioa honakoa da:

eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

$$\chi_c^2 = \sum_{i=0}^{6} \frac{[f_i - e_i]^2}{e_i} = 10.6470945$$

Onarpen-eremua eskualde kritikotik banantzen duen balio kritikoa:

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\alpha=5\%,\nu=k-1-r=7-1-1=5\,ag} \equiv \chi^2_{\alpha=95\%,\nu=5\,ag} = qchisq(0.05, 5, lower.tail = F) = 11.0705$$

$\chi_c^2 < \chi_1^2$ denez, enuntziatuko laginetik abiatuz ez dago hipotesi-nulua errefusatzeko ebidentziarik %5-eko adierazgarritasun mailaz. Ondorioz, enuntziatuko zorizko aldagaia honakoa dela onartu dezakegu, $X \sim \mathscr{P}(\lambda = 1.100273973)$.

(B) Zehaztu zorizko aldagai honen itxaropen matematikoa eta desbideratze tipikoa. **(2 p)**.

X zorizko aldagaiak Poisson-en banaketa bat jarraitzen duela onartu denez:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{P}(X = k) = \lambda = 1.100273973 \text{ istripu/egun}$$

$$\sigma_X = \sqrt{E(X - \mu_X^2)} = \sqrt{E(X^2) - \mu_X^2} = \sqrt{\lambda} = 1.04893945 \text{ istripu/egun}$$

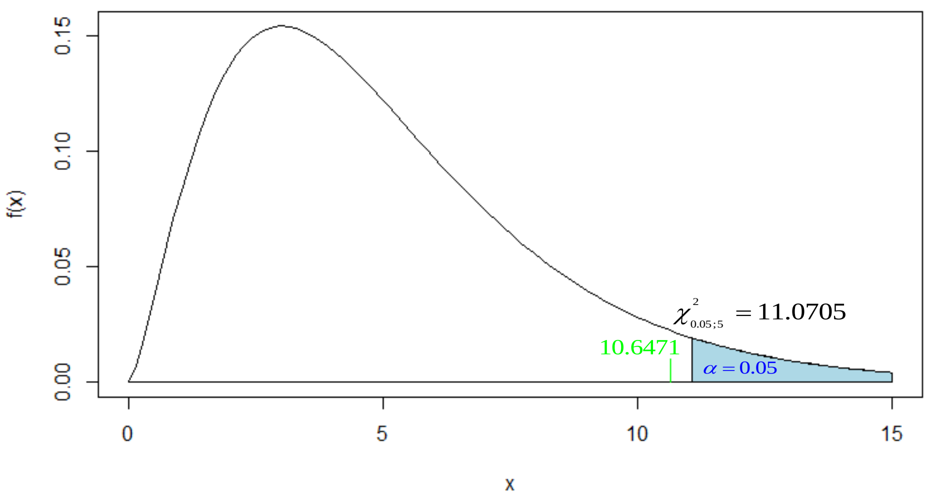
Balio hau laginetik estimatzen badugu

$$\hat{s}_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{6} f_i (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{7912.599452}{7299}} = 1.0411850 \text{ istripu/egun}$$

(C) Zein da kontrastearen p-balioa? Arrazoitu grafikoki erantzuna, **(A)** atalean egindako hipotesi-kontrastearekin alderatuz.**(2 p)**.

Kontrastearen p-balioa ondokoa da:

$$\chi^2_{p-balioa,\nu=5\,\mathrm{gdl}} = \chi_c^2 = 10.6470945 \Rightarrow p - balioa = 1 - pchisq(10.6470945, 5) =$$
$$= pchisq(10.6470945, 5, lower.tail = F) = 0.05884385$$



Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

(D) Proposatutako ereduaren baliotasuna suposatuz, zein da egun jakin batean istripu 1 baino gutxiago edo gutxienez 4 istripu egoteko probabilitatea? **(2 p)**.

Izan bitez: S_1 := " egun jakin batean istripu bat baino gutxiago egotea" eta S_2 := "egun jakin batean gutxienez lau istripu baino gehiago egotea" gertaerak. S_1 y S_2 gertaerak independenteak direla kontuan harturik eta probabilitatearen batuketa-legea aplikatuz:

$$\mathrm{P}\left[\left(X<1 \text{ istripu}\right)\cup\left(X\geq 4 \text{ istripu}\right)\right]=\mathrm{P}\left(X<1 \text{ istripu}\right)+\mathrm{P}\left(X\geq 4 \text{ istripu}\right)=$$
$$\left[\mathrm{P}\left(X=0\right)\right]+1-\left[\mathrm{P}\left(X=0\right)+\mathrm{P}\left(X=1\right)+\mathrm{P}\left(X=2\right)+\mathrm{P}\left(X=3\right)\right]=$$
$$=0.3327799+1-\left(0.3327799+0.3661491+0.2014321+0.07387685\right)=0.358542$$

Edo R-ko komandoa erabiliz, ppois(3,1.1003)

$$\mathrm{P}\left[\left(X<1 \text{ istripu}\right)\cup\left(X\geq 4 \text{ istripu}\right)\right]=\mathrm{P}\left(X<1 \text{ istripu}\right)+\mathrm{P}\left(X\geq 4 \text{ istripu}\right)=$$
$$=\left[\mathrm{P}\left(X=0\right)\right]+\left[1-\mathrm{P}\left(X\leq 3\right)\right]=0.3327799+1-0.974236=0.3585439$$

eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

Orri hau (behar bezala beteta) **proba bukatzerakoan ebatzitako gainerako ariketekin batera entregatu beharko da. Emandako erantzunak kualitatiboki arrazoituak egon beharko dira** (ez da kalkulu handirik egin behar)**: baieztapen/ukapen sinpleak ez du balio izango.**

4. ARIKETA (galdera guztiak balio berbera dute)

1.	Baldin $\mathrm{P}(A)=0.3$ eta $\mathrm{P}(B)=0.5$, orduan derrigorrez $\mathrm{P}(A\mid B)=0.6$.

Baldintzazko probabilitatea $\mathrm{P}(A\mid B) \underset{\mathrm{P}(B)\neq 0}{\triangleq} \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ moduan definitzen da. Emandako datuekin ezin da gehiago jakin, ez baita $A\cap B$ gertaeraren probabilitateari buruzko informaziorik ematen. A eta B gertaerak independenteak direla suposatzen badugu (ez da zehazten)

$\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)=0.3$ izango litzateke.

Beraz, **gezurra** da baieztapena.

2.	Baldin f(x) dentsitate-funtzioa bada, orduan f(x) beti izango da ez-negatiboa. Baldin $f(x)=2x,\ x\in[0,1]$, orduan $\mathrm{P}(X>0.5)=0.664$.

Egia da dentsitate-funtzio bat beti ez-negatiboa izan behar dela S gertaera bati dagokion probabilitatea beti positiboa baita $0\le \mathrm{P}(S)\le 1$. Hala ere , **gezurra** da $\mathrm{P}(X>0.5)=0.664$,

$$\mathrm{P}(X>0.5)=1-\mathrm{P}(X\le 0.5)=1-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1-\int_0^{0.5}2dx=1-\left(x^2\right|_0^{0.5}=1-0.25=0.75 \text{ delako}$$

3.	Populazio jakin batetik n tamainako lagin bat hartzen da. Zein da laginaren kuasibariantzak, populazioaren bariantza gainetik estimatzeko probabilitatea

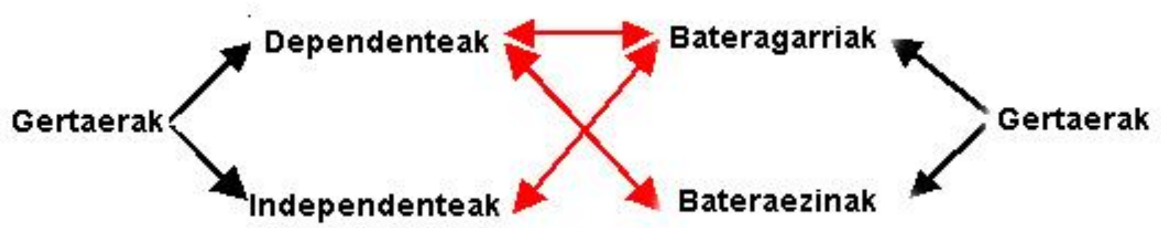
$\mathrm{P}\left(S^2>\sigma^2\right)$ kalkulatzea eskatzen da . Beraz,

$$\mathrm{P}\left(S^2>\sigma^2\right)=\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right)\underset{\chi^2_{\alpha,n-1}\triangleq\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{=}\mathrm{P}\left(\chi^2_{\alpha,n-1}>n-1\right)$$

Departamento de Matemática Aplicada
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

4. Baldin A eta B gertaera independenteak badira; orduan A eta B-k ez dute elementurik komunean.

A eta B bi gertaerak independenteak dira $\mathsf{P}(A\cap B)\triangleq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ denean. A eta B bi gertaerak bateraezinak dira baldin eta hauen arteko ebakidura $A\cap B$ ez du elementurik (hau da, baldin $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow \mathsf{P}(A\cap B)=0$). Baina, bi zenbaki errealen biderkadura nulua izateko bietako bat nulua izatea beharrezkoa da. Hau da, bateraezinak diren gertaera independenteentzako: $\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(\varnothing)=0=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\Rightarrow\left[\left(\mathsf{P}(A)=0\vee\mathsf{P}(B)=0\right)\Leftrightarrow\left(A=\varnothing\vee B=\varnothing\right)\right]$.
Komunean elementurik ez duten bi gertaera independenteak izateko hauetako bat ezinezko gertaera izan behar dela ondorioztatzen da. Beraz, orokorrean bi gertaera independente ez dira inoiz bateraezinak.



5. Batezbesteko aritmetikoen estimazioko prozesu bateko errorea, **beti** murrizten da erreferentzia bezala hartutako laginaren tamaina handitzen denean.

Errore estandarra edo estimazio errorea populazio bateko $\sigma_{\hat{\mu}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ edo bi populazioko $\sigma_{\mu_1-\mu_2}=\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}$ batezbesteko aritmetikoen estimazioko problema batean $\sqrt{n}$-rekiko alderantziz proportzionala dela adierazten du. Ondorioz, edozein kasutan $n\uparrow\uparrow\Rightarrow\sigma_{\hat{\mu}}\downarrow\downarrow$. Hortaz, enuntziatuko baieztapena **egia** da.