2

KONBINATORIA

> There is no problem in all mathematics that cannot be solved by direct counting
>
> Random approaches to Fibonacci identities, Amer. Math. Monthly 107
> Ernst Mach

Multzo batean eragiketarik sinpleena zenbat elementu dauden jakitea da. Kontatzeko, multzoa eta zenbaki arrunten azpimultzo baten arteko aplikazio bijektiboa ezartzen da.

Definizioa 2.1. *Multzo baten elementu-kopurua* ***kardinala****, $Card(A)$, deitzen da.*

ARIKETAK

2.1 — Zenbat zenbaki daude $A = \{87, \ldots, 127\}$ multzoan?

2.2 — Zenbat elementu daude $A = \{m, m+1, m+2, \ldots, n\},\ m \leq n$ multzoan?

2.3 — Xake txapelketa batean partida bat jokatu ondoren galtzailea kanporatuta geratzen da eta ez du berriz jokatzen, hasierako jokalariak $2n$ badira, zenbat partida jokatuko dira?

1 PERMUTAZIOAK, P_n

Permutazioak erabiliz erantzuten den galdera hurrengoa da, zenbat modutan ordena daiteke n elementu desberdineko multzoa?.

Edozein bijekzioa $f : A \to A$, A multzoaren permutazioa deitzen da.

A multzoko elementu kopurua $Card\,(A) = n$, eta permutazio kopurua $Card\,(\tau_A)$ bada argi dago permutazio kopurua n-ren menpekoa dela.

Permutazioak
(1 2 3 4 5)
(1 2 3 5 4)
(1 2 5 3 4)
$\vdots$
(5 4 3 2 1)

$n = 0$ denean permutazio bakarra dago eta $Card\,(\tau_A) = 1 = 0!$
$n = 1$ denean permutazio bakarra dago eta $Card\,(\tau_A) = 1 = 1!$
$n > 1$ denean permutazioak $Card\,(\tau_A) = n!$ dira.
Ondorioz permutazioak idatziko dira

$$P_n = n!$$

ARIKETAK

2.4 — Zenbat modutan kokatu daitezke 8 lagun ilaran?

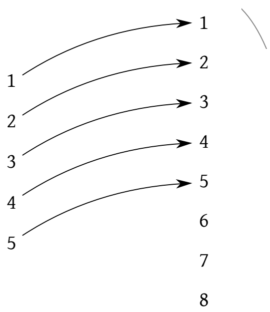
2.5 — $A = \{1,2,3,4,5\}$ multzoko zifrak erabiliz 5 zifrako zenbat zenbaki idatz daitezke zifrak ez badira errepikatzen?

2 ALDAKUNTZAK, V_m^n

Aldakuntzen bidez erantzuten den galdera hurrengoa da, zenbat modu daude multzo batetik elementu desberdin batzuk hartzeko eta ordenan jartzeko?.

Demagun B multzoaren kardinala $Card(B) = 8$ dela, eta B multzoko elementuak 5-naka hartzen direla, aldakuntza posibleak hurrengoak dira:

$$\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5,4\},\{1,2,5,3,4\},\dots,$$
$$\dots,\{5,4,3,2,1\},\dots,\{8,7,6,5,4\}$$

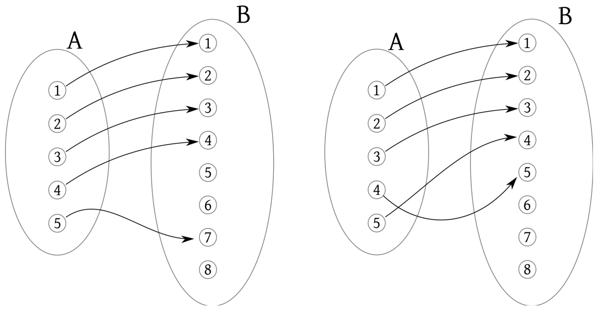


Irudia 2.1: Aplikazio injektiboa, hasiera multzoko elementu guztietatik gezi bakarra sortzen da, geziak, hartu behar den elementua eta ordena finkatzen du.

Ikusten denez $Card(A) = n \le Card(B) = m$, bestela, ezin da aplikazio injektiborik sortu.

Idazten da V_m^n eta m elementuen n-ka hartutako aldakuntzak irakurri. Balioa

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{2.1}$$



Irudia 2.2: Aplikazio injektiboak

izango da.

$m = 0$ eta $n = 0$ denean aplikazio injektibo bakarra egin daiteke, beraz $V_{0,0} = \frac{0!}{0!} = 1$

ARIKETAK

2.6 — F-1eko lasterketan 20 parte-hartzaileak daude. Zenbat modutan bana daitezke lehenengo, bigarren eta hirugarren postuak?

2.7 — $N = \{1,3,5,7,9\}$ multzoko elementuak errepikatu barik erabiliz

1.Zenbat zenbaki daude hiru zifraz osaturik?

2.Zenbat dira bosten multiploak?

3 KONBINAKETAK, C_m^n

Multzo bat m elementu desberdinez osatuta badago, n elementuko konbinaketak egin daitezken azpimultzoak izango dira, azpimultzoa ez dago ordenatuta, beraz konbinaketa bi desberdinak izango dira elementu bat gutxienez desberdina bada, esaten da *n-ka hartuta m elementuen konbinaketak*, ordena ez da garrantzizkoa. konbinaketak

Multzo bat hutsik badago azpimultzo bakarra bera izango da eta

$$C_0^0 = \binom{0}{0} = 1$$

Multzo bateko elementuak m badira eta hutsik dauden azpimultzoak kalkulatzen badira

$$C_m^0 = \binom{m}{0} = \frac{m!}{(m-0)!0!} = 1$$

Aldakuntzak aztertzen direnean $\{1,2,3,4,5\}$ eta $\{1,2,3,5,4\}$ ez dira berdinak, kontutan hartu behin aukeratuz gero elementu hauek $P_5 = 5!$ modutan antolatzen direla.

Aplikazio injektibo guztien artean hertsiki gorakorrak direnak aukeratuko dira, hau da, aplikazioak non elementuren bat desberdina den.

$C_{m,n}$-ren balioa lortzeko aldakuntzak erabiliko dira, aldakuntza batean elementuak ordenatzen dira eta $P_n = n!$ aldiz kontatzen dira, behin kontatzeko,

$$\frac{V_m^n}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = C_m^n$$

Konbinaketa kopurua izango da,

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Zenbaki konbinatorioen propietateak

- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
- $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

ARIKETAK

2.8 — Multzo baten kardinala 10 bada, hiru elementuko, zenbat azpimultzo egin daitezke?

2.9 — Ospitale batean 30 erizain daude, txanda batean 4 erizain egon behar dira, zenbat modu daude txandak antolatzeko?

4 ERREPIKATURIKO PERMUTAZIOAK, $PR_{n_1,n_2,\ldots,n_p}$

Lista bateko elementu desberdin guztiak ordenatzen direnean permutazioak lortzen dira, elementu bat bitan badago bi elementu hauek lekuz trukatzeagatik ez dugu beste permutazio berri bat lortzen, honela permutazioak

$$\frac{P_n}{2!}$$

izango dira, pentsaera hedatuz lista bateko elementuak $n_1, n_2, \ldots, n_p$ aldiz errepikatzen badira hurrenez hurren, eta $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ bada

$$PR_{n_1,n_2,\ldots,n_p} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots n_p!} = \frac{n!}{\prod_i n_i!} \tag{2.2}$$

errepikaturiko permutazioak izango dira.

ARIKETAK

2.10 — Zenbat zenbaki idatz daitezke 111446 zenbakiaren zifra guztiak erabiliz? Zenbat hasiko dira 61-ekin?

5 ERREPIKATURIKO ALDAKUNTZAK, VR_m^n

Aldakuntzak m elementuen artean n aukeratzeko aukera ematen dute baina elementuak ezin dira errepikatu, aukera hau ematen bada hurrengo listak onartzen dira:

$$(1,1,\ldots,1,1),(1,1,\ldots,1,2),(1,1,\ldots,2,1),\ldots,(m,m,\ldots,m,m)$$

Lehenengo elementua m elementuen artean aukera daiteke, era berean bigarrena eta n.garrena.

$$VR_m^n = m^n$$

ARIKETAK

2.11 — Sei zifrako zenbat zenbaki idatz daitezke 3 eta 6 zifrak erabiliz?

2.12 — 2, 5 eta 8 zifrak erabiliz 5 zifrako zenbat zenbaki idatz daitezke? zenbat dira 60000 baino txikiagoak? Eta zenbat bikoitiak?

6 ERREPIKATURIKO KONBINAKETAK, CR_m^n

*E*rrepikaturiko konbinaketak n elementuen bildumak dira, berdinak ala desberdinak, bilduma hauek desberdinak izateko gutxienez elementu batean desberdinduko dira.

Adibidea Kasinoan jolasteko fitxak erabiltzen dira, balio tipikoa 1, 2.50, 5, 10, 25, 100, 500 eta 1000 €-koak dira. Zenbat modu daude 1000 € fitxetan aldatzeko?

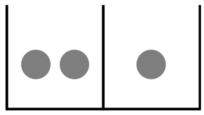
Balioa lortu baino lehenago hurrengo banaketak aztertuko ditugu:

- Zenbat modu daude 3 zenbakia hiru batugai positiboetan banatzeko?
- Zenbat modutan banatu daitezke 3 € hiru lagunen artean?
- Zenbat modu daude 3 bola berdinak 3 kutxetan sartzeko?

Banatu behar diren elementuak gutxi direnez ez dugu arazorik denak idazteko, erantzuna sinplea da, 10 modu daude banaketa hau egiteko.

$$\begin{array}{llll} (3,0,0)\,, & (2,0,1)\,, & (0,2,1)\,, & (1,1,1) \\ (0,3,0)\,, & (2,1,0)\,, & (1,0,2) & \\ (0,0,3)\,, & (1,2,0)\,, & (0,1,2) & \end{array}$$

Erantzuna orokorrean lortzeko azkeneko galdera aztertuko da, zenbat modutan sartzen dira 3 bola 3 kutxetan, ikus 2.3 irudia, suposatzen da bolak beti kutxaren barruan zoriz sartuko direla.



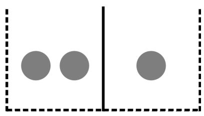
Irudia 2.3: Zoriz sartutako bolak bi kutxatan

Ondoren grafikoa sinplifikatzen da, kutxa definitzeko dauden alboko marrak kenduko dira eta 3 bola eta barra bi geratzen dira, ikus 2.4 irudia.

Deitzen bada λ_i $i$garren kutxan dagoen bola-kopurua, non $\lambda_i \geq 0$,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$$

erlazioa betetzen da, 3 bola eta barra biren arteko antolamendu guztiak lortuko dira, $PR_{3,2}$ kalkulatuz.



Irudia 2.4: Sinplifikatu ondoren hiru bola eta barra bat geratzen dira

Orokorrean, n bola sartzen badira m kutxetan

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n \quad \lambda_i \geq 0$$

$$CR_m^n = \binom{m-1+n}{n} = \binom{m-1+n}{m-1} = \frac{(m-1+n)!}{(m-1)!\; n!}$$

Ikusita nola planteatu den argumentazioa, nabaria da

$$CR_m^n = PR_{m-1,n}$$

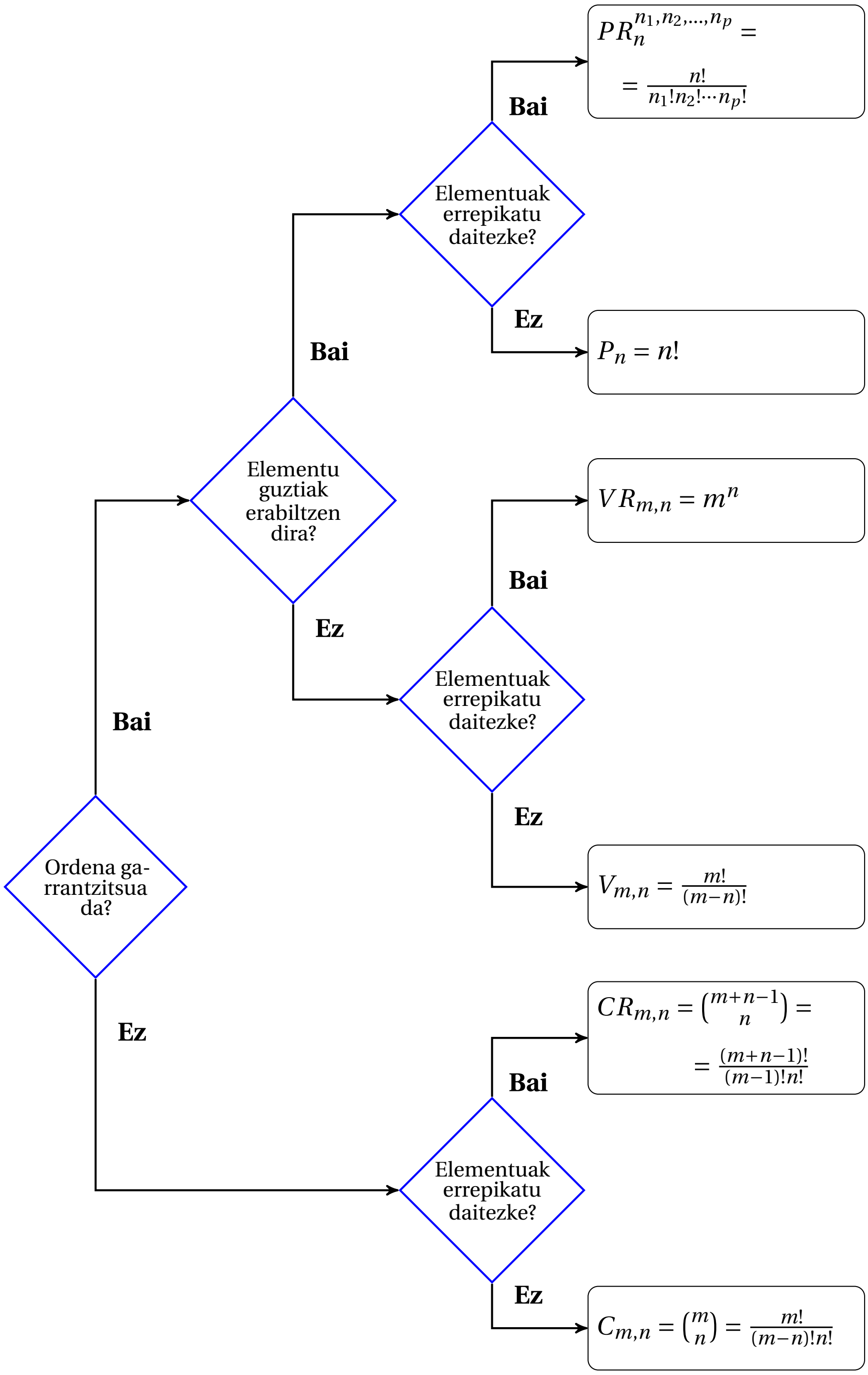
dela, kontuz! hau multzo honen kardinala besterik ez da!

Elementu kopurua kalkulatzeko, permutazio eta errepikaturiko konbinaketen esanahia desberdina da

ARIKETAK

2.13 — Zenbat modutan bana daitezke 20 gozoki berdinak 12 mutilen artean? Eta gutxienez gozoki bat ematen bazaio mutil bakoitzari?

2.14 — Zenbat zenbaki daude 1000 baino txikiagoak zifren arteko batura 9 izan dadin? Eta batura 10 bada?



Irudia 2.5: Konbinakeraren laburpena, lista sinple bateko kontaketa

ARIKETAK

2.15 — 5000 metroko lasterketa batean 12 korrikalarik parte hartzen dute. Zenbat modutan bana ditzakete urrezko, zilarrezko eta brontzezko dominak?

2.16 — $A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ multzoko digituekin:

a) Hiru zifra desberdineko zenbat zenbaki era daitezke? (0 ezin da lehenengoa izan)

b) Zenbat izango dira bosten multiploak?

2.17 — 3 eta 6 digituekin, lau zifrako zenbat zenbaki desberdin era daitezke? Zenbat izango dira 5000 baino handiagoak?

2.18 — $A = \{2, 4, 6, 8\}$ digituekin, bi zifrako zenbat zenbaki era daitezke? (zifrak errepikatu daitezke) Horietako zenbatek edukiko dituzte bi zifra desberdin? Azken horietako zenbat izango dira 30 baino handiagoak?

2.19 — 14 hautagai daudela jakinik, zenbat modu desberdinetan bete daitezke kirol elkarte bateko lehendakari, lehendakariorde, idazkari eta diruzainaren postuak?

2.20 — $A = \{3, 5, 8\}$ multzoko digituekin, bost zifrako zenbat zenbaki era daitezke? Zenbat dira 60000 baino txikiagoak? Zenbat dira bikoitiak?

2.21 — Zine bateko hamabi eserlekuko ilara batean, zenbat modu desberdinetan eser daitezke hamabi pertsona, horietako bik muturretan eseri behar badute beti.

2.22 — Zenbat modutan sar daitezke sei postal desberdin kolore desberdinetako sei gutun-azaletan, kontuan izanik gutun-azal bakoitzean postal bakarra sartu ahal dela?

2.23 — Zenbat zenbaki desberdin idatz daitezke 828282 zenbakiko zifra guztiak erabiliz? Zenbat hasiko dira 88-z?

2.24 — Zenbat kiniela ezberdin egin daitezke, partida bakoitzean ikur bakarra ipini (1, X ala 2) eta guztira 15 partida badira?

b) eta 14 aldiz "1" eta bariante (X, 2), bakarra ipintzen badira?

b) eta bariante bi (X, 2) ipiniz?

2.25 — Zenbat era ezberdinetan bete daiteke loto jokoaren apustu bat, 49 zenbakietatik 6 aukeratu behar direla jakinik?

2.26 — Zenbat hitz desberdin era daitezke, esanahirik ez badute ere, *ezkondu* hitzeko letrekin? Zenbat hasiko dira bokalez?

2.27 — Iduneko bat egiteko 30 ale dauzkagu. Jakinik 12 gorriak direla, 14 beltzak, 2 zuriak eta beste 2 horiak, zenbat iduneko desberdin egin ahal izango ditugu 30 ale horiek hari batean sartuz? Eta ale zuriak muturretan geratzea nahi badugu?

2.28 — Heptagono baten 5 erpin lotuz gero, zenbat pentagono aterako ditugu?

2.29 — Batxilergoaren amaiera ospatzeko, 30 ikasleko talde batek euren arteko zazpi kideko antolaketa-batzorde bat izendatzea erabaki dute. Zenbat batzorde desberdin era ditzakete?

2.30 — Plano batean 15 puntu jarri dira, hiru puntu elkarrekin lerrokaturik geratuko ez diren eran. Zenbat marra egin daitezke?

2.31 — Zenbat modu desberdinetan bana daitezke 15 gozoki 20 umeren artean, bakoitzari gehienez gozoki bana emanez? eta edozein modutan bana badaitezke?

2.32 — Azterketa bateko hamabi galderetatik, lehendabiziko laurak derrigorrezkoak badira, eta guztira zortzi erantzun beharra badago, zenbat modutan erantzun ditzakegu azterketako zortzi galderak?

2.33 — Zenbat diagonal daude hexagono batean?

2.34 — Autobus enpresa batek 25 geltoki dauzka. Geltoki guztietako txarteldegietan bertatik beste edozein geltokirako txartelak eduki behar dituzte, argi ageri dutenak zein diren irteera eta iristeko puntuak. Zenbat txartel desberdin egin behar ditu enpresa horrek?

2.35 — Hamaika lagun jatetxe batera joan dira ikasturtearen amaiera ospatzera. Prestaturik duten mahai biribilean esertzerakoan, zer ordenatan jesarriko ote diren eztabaidatzen hasi dira. Zerbitzariak esan die edozein ordenatan jazartzeko, eta hurrengo egunean berriz etorri eta beste ordena batean jesartzeko; orden erlatiboa errepikatu arte horrela egiten segitzen badute, zerbitzariak berak gonbidatuko ditu bazkaltzera egun horretatik aurrera. Noiz izango dute dohainik bazkaltzeko aukera?

2.36 — Futbol talde bat osatzeko 11 jokalari behar ditugu eta 22 dauzkagu.

a) Zenbat modutan aukera ditzakegu 11 jokalari horiek, betetzen duten postuaz arduratzen ez bagara?

b) Horietako bi atezain baino ez badabiltza, zenbat modu desberdinetan aukeratu ahal izango ditugu taldeak orduan?

2.37 — Zazpi bateko, bost ekiseko eta hiru biko dituen zenbat kiniela desberdin egin daitezke?

2.38 — A eta B jokalarien arteko pilota partidua 22 – 14 bukatu da, zenbat modu daude emaitza hau lortzeko?

2.39 — Kodigo bitar baten hitzak 8 bit (0 edo 1) erabiliz eratzen dira. (adib: 01101100)

a) Zenbat hitz desberdin daude?

b) Zenbat hasten dira zero batekin?

c) N biteko kodigo bitarra erlazio konstantekoa esaten da hitz bakoitzean N biteko M "1" badira eta beste guztiak "0". Zenbat hitz desberdin eratu daitezke $N = 8$ eta $M = 3$ badira?$P_{M,N-M} = C_{M,N}$

2.40 — Kalkulatu $2, 5, 7$ zifrak erabiliz idatz daitezken sei zifrako zenbaki guztien batura, zenbaki batean behin 2, hiru aldiz 5 eta bitan 7 agertzen badira.

2.41 — Demagun 17 bola ditugula, berdinak kolorea izan ezik, 3 gorriak (G), 5 berdeak (B) eta 9 horiak (O).
Kalkulatu zenbat ilara dauden hurrengo baldintzak betetzen direnean:

a) bola berde guztiak jarraian daude.

b) 4 edo 5 bola berde jarraian daude.

c) 3 bola berde baino gehiago ez daude jarraian.

d) bola berde 2 (edo gehiago) ez daude jarraian.

e) bola berdeak jarraian eta bola gorriak jarraian.

f) bai bola berdeak bai bola gorriak jarraian.

g) kolore bereko bolak jarraian.

2.42 — Karta espainolak $P_{40} = 40!$ modutan ordenatzen dira.
Kalkulatu zenbat modu daude kartak ordenatzeko hurrengo baldintzak betetzen badira:

a) Lehenengo karta kopakoa da.

b) Lehenengo eta bigarren karta palo desberdinekoak dira.

c) Errege guztiak jarraian daude.

d) Palo bereko kartak jarraian daude (palo guztiak).

e) Errege bi ala gehiago ez daude jarraian.

f) kopako karta guztiak ezpata guztien aurretik daude.

g) Lehenengo urrezko karta lehenengo ezpataren aurretik dago eta hau lehenengo koparen aurretik.

h) Lehenengo 8 karta artean:

  i) ez dago urrezko kartarik

  ii) urrezko karta bakarra dago

  iii) urrezko karta bi daude (solik bi)

  iv) urrezko karta bi baino gehiago daude.

i) Kopako bata eta urrezko bataren artean basto bi (soilik bi) daude beste paloko edozer egon daitekeela.

SOLUZIOAK

Em (2.1) — 41
Em (2.2) — $n-m+1$
Em (2.3) — $2n-1$
Em (2.4) — 8!
Em (2.5) — 5!
Em (2.6) — 20.19.18
Em (2.7) — *a*) 60; *b*) 12
Em (2.8) — 120
Em (2.9) — $\binom{30}{4}$
Em (2.10) — *a*) 60; *b*) 12
Em (2.11) — 64
Em (2.12) — *a*) 3^5; *b*) 2.3^4; *c*) 2.3^4
Em (2.13) — *a*)$\binom{31}{20}$; *b*)$\binom{19}{8}$
Em (2.14) — *a*)$\binom{11}{2}$; *b*)$\binom{12}{2}-3$
Em (2.15) — 12.11.10
Em (2.16) — *a*) 100; *b*) 36
Em (2.17) — *a*) 16; *b*) 8
Em (2.18) — *a*) 16; *b*) 12; *c*) 9
Em (2.19) — 14.13.12.11
Em (2.20) — *a*) 243; *b*) 2.3^4; *c*) 81
Em (2.21) — 2.10!
Em (2.22) — 6!
Em (2.23) — *a*)$\binom{6}{3}$; *b*)$\binom{4}{3}$
Em (2.24) — *a*) 3^{15}; *b*) 2.15; *c*) 4.15.14
Em (2.25) — $\binom{49}{6}$
Em (2.26) — *a*) 7!; *b*) 3.6!
Em (2.27) — *a*) $\frac{30!}{12!14!2!2!}$; *b*) $\frac{28!}{12!14!2!}$
Em (2.28) — $\binom{7}{5}$
Em (2.29) — $\binom{30}{7}$
Em (2.30) — $\binom{15}{2}$
Em (2.31) — *a*)$\binom{20}{15}$; *b*)$\binom{34}{15}$
Em (2.32) — $\binom{8}{4}$
Em (2.33) — 9
Em (2.34) — 25.24
Em (2.35) — 10!
Em (2.36) — *a*)$\binom{22}{11}$; *b*)$2.\binom{20}{10}$
Em (2.37) — $\frac{15!}{7!3!5!}$
Em (2.38) — $\binom{35}{14}$
Em (2.39) — *a*)2^8; *b*)2^7; *c*)$\binom{8}{3}$
Em (2.40) — 34444410
Em (2.41) — *Ikusi garatutako soluzioetan*
Em (2.42) — *Ikusi garatutako soluzioetan*