2. PRAKTIKA – PROGRAMAZIO LINEALA

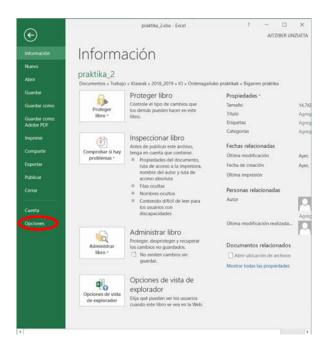
Erabilgarria den informazioa:

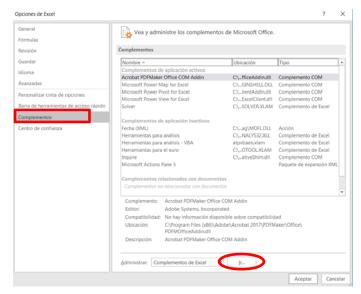
- SUMAPRODUCTO: Bi matrizetako elementuak biderkatu eta biderkadura horien batura ematen du.

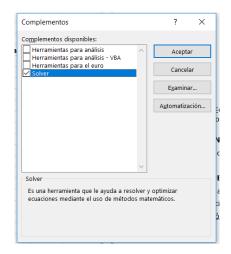
		В	С	D	E	
6		4	5	2		
7		1	3	1		
11			2	4	1	
12			3	2	6	

=SUMAPRODUCTO(B6:D7;C11:E12) instrukzioren emaitza 4.2+5.4+2.1+1.3+3.2+1.6=45 da.

- SOLVER: PLko, PELko eta PLOko problemak ebazten dituen makro automatikoa da. Bertan 3 gelaxka mota daude: Optimizatu behar den gelaxka (*Celda objetivo*)/ aldakorrak diren balioen gelaxkak (*Cambiando las celdas*) / eta murrizketak sartzeko dauden gelaxkak (*Sujetas a las restricciones siguientes*). Seguruaski tresna aktibatu gabe egongo da, aktibatzeko Archivo/Opciones/*Complementos de Excel/Solver* aukeretan klik egin behar da.







Soluzioak endekatuak edo ez-endekatuak bezala sailka daitezke:

SOLUZIO EZ-ENDEKATUA: Positiboak diren aldagaien kopurua (lasaiera-aldagaiak barne) eta problemak dituen murrizketen kopurua bat datozenean.

SOLUZIO ENDEKATUA: Positiboak diren aldagaien kopurua (lasaiera-aldagaiak barne) problemak dituen murrizketen kopurua baino txikiagoa denean.

Beranduago zehaztuko den bezalaxe, nahi izanik gero Solver-ek problemaren soluzioarekin batera hiru txosten mota ematen ditu.

SOLVER tresna erabiliz ebatzitako PLko problema

Ondorengo PLko problema Excel erabiliz ebatzi:

Max
$$Z = x_1 + x_2$$

s.a. $-2x_1 + x_2 \le 2$
 $2x_1 + x_2 = 9$
 $3x_1 + x_2 \ge 11$
 $x_1, x_2 \ge 0$

Hurrengo irudietan problema ebazteko jarraitu beharreko pausuak agertzen dira.

Lehenengo eta behin kalkulu orrian problemaren datuak sartzen dira:

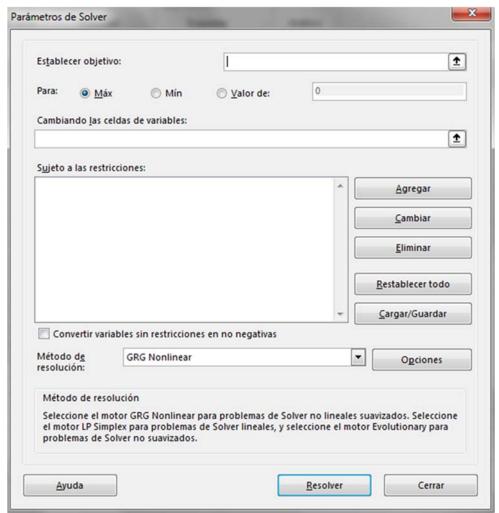
	А	В	С	D	Е	F	G	Н	1	J
1										
2										
3										
4		Erabaki-aldagaiak	x1	x2						
5		Kostuak	1	1		Helburu funtzioa				
6		Aldagaien balioak	0,00	0,00		0,00				
7										
8		Murrizketak	Matrizea			Guztira		Gai askea		Lasaiera
9			-2	1		0,00	<=	2		2,00
10			2	1		0,00	=	9		9,00
11			3	1		0,00	>=	11		11,00
12										
13										

C4 eta D4 gelaxketan aldagaien balioak baino ez daude; aldagai hauek optimo lortu arte har ditzaketen balioak C6 eta D6 gelaxketan agertzen dira, problema ebatzi baino lehen gelaxka hauetan nahi den balioa jar daiteke (adibidez, kasu honenta 0 jarri dugu) edo hutsik utz daiteke.

Hurrengo irudian helburu funtzioaren balioa (F6 gelaxka) eta hiru murrizketetako ezker aldeko balioak kalkulatzeko (F9, F10 eta F11 gelaxkak) SUMAPRODUCTO funtzioa nola erabiltzen den ikusten da. Bukatzeko, J zutabean lasaiera-aldagaiak defini daitezke.

	Α	В	С	D	Е	F	G	Н	1	J
1										
2										
3										
4		Erabaki-aldagaiak	x1	x2						
5		Kostuak	1	1		Helburu funtzioa				
6		Aldagaien balioak	0	0		=SUMAPRODUCTO(C5:D5;C6:D6)				
7										
8		<u>Murrizketak</u>	Matrizea			Guztira		Gai askea		Lasaiera
9			-2	1		=SUMAPRODUCTO(C9:D9;\$C\$6:\$D\$6)	<=	2		=H9-F9
10			2	1		=SUMAPRODUCTO(C10:D10;\$C\$6:\$D\$6)	=	9		=H10-F10
11			3	1		=SUMAPRODUCTO(C11:D11;\$C\$6:\$D\$6)	>=	11		=H11-F11
12										
13										

Problema ebazteko Datos/Solver aukeratu behar da. Datos/Solver aukeratu ondoren problema definitzeko beharrezkoak diren datuak sartzeko, hau da helburu funtzioa, erabaki aldagaiak eta murrizketak sartzeko, pantaila bat agertzen da. Solver tresna erabiliz 200 erabaki-aldagai, 100 murrizketa eta 400 murrizketa bankun (goi edo behe borneak edo aldagaia osoa izan behar dela adierazten duten murrizketak) dituzten problemak ebatz daitezke.

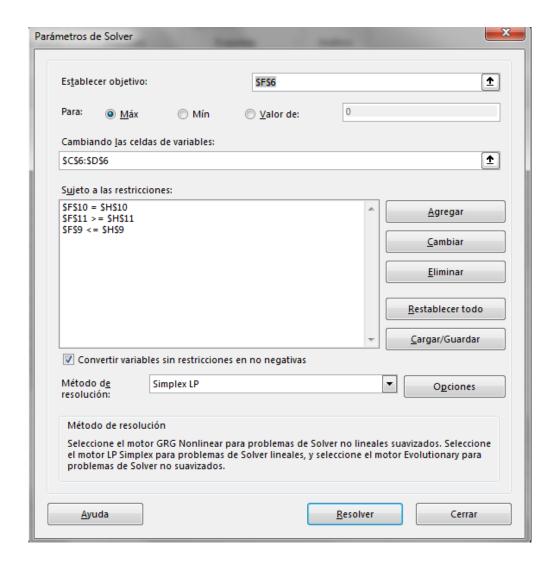


Bertan, "Establecer objetivo" gelaxkan helburu funtzioa (F6) aukeratu, problema maximizazio problema bat dela adierazi, "Cambiando las celdas de variables" gelaxkan aldagaien balioak dituzten gelaxkak aukeratu (C6 eta D6), "Sujeto a las siguientes restricciones" gelaxkan murrizketak sartu eta "Metodo de Resolución" gelaxkan Simplex LP aukeratu behar da.

Murrizketak sartzeko Agregar aukeratu hurrengoa agertzen da:



Pausu horiek jarraituz gero ondorengo pantaila lortzen da:



[&]quot;Resolver" aukeran klik egin ondoren

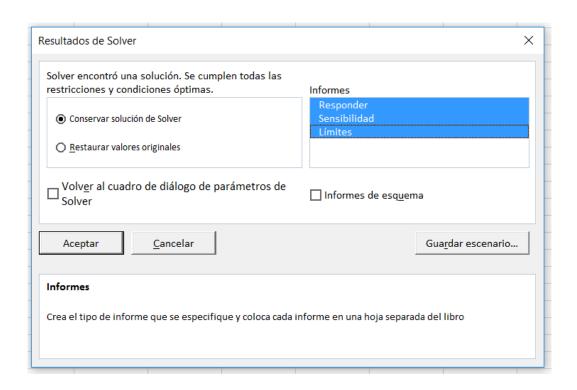
Resultados de Solver		×
Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.	Informes	
 Conservar solución de Solver Restaurar valores originales 	Responder Sensibilidad Límites	
Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver	☐ Informes de esq <u>u</u> en	na
Aceptar <u>C</u> ancelar		Gua <u>r</u> dar escenario
Solver encontró una solución. Se cumplen todas las	restricciones y condicio	nes óptimas.
Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una s que Solver ha encontrado una solución óptima global.	olución óptima local. Al us	sar Simplex LP, significa

agertzen den pantailan "Aceptar" aukeratu eta problemaren **soluzio optimoa** lortzen da:

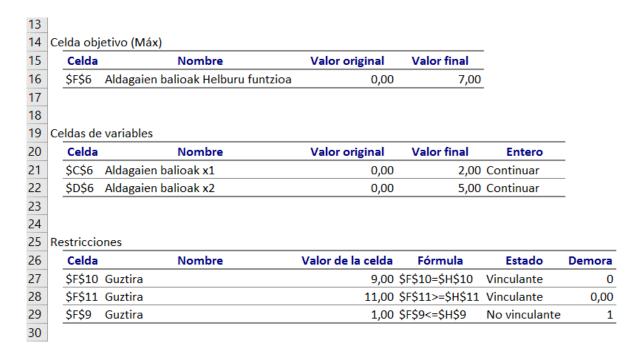
	Α	В	С	D	Е	F	G	Н	1	J	
1											
2											
3											
4		Erabaki-aldagaiak	x1	x2							
5		Kostuak	1	1		Helburu funtzioa					
6		Aldagaien balioak	2,00	5,00		7,00					
7											
8		Murrizketak	Matrizea			Guztira		Gai askea		Lasaiera	
9			-2	1		1,00	<=	2		1,00	
10			2	1		9,00	=	9		0,00	
11			3	1		11,00	>=	11		0,00	
12											

Soluzio optimoa ez-endekatua da, izan ere positiboak diren aldagai-kopurua (lasaiaera aldagaiak barne) eta murrizketa kopurua bat datoz ($x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $h_1 = 1$).

Hasieran aipatu dugun bezala Solver tresnak, nahi izanez gero, hiru txosten bueltatzen ditu (soluzio ez-endekatuen kasuan soilik baliagarriak direnak). Txostenak optimizazioa egin ondoren ondoko pantailan aukeratzen dira:



ERANTZUN TXOSTENA: Helburu gelaxkaren eta aldakorrak diren gelaxken hasierako eta bukaerako balioak agertzen dira. Gainera murrizketak aktiboak ("viculante") edo ez-aktiboak ("No vinculante") diren ere zehazten da. "*Demora"* zutabean lasaiera-aldagaien balioak agertzen dira.



LIMITE TXOSTENA:

Helburu funtzioaren eta erabaki-aldagaien balio optimoez gain ondorengo informazioa ere agertzen da:

Behe-limitea: Beste gelaxka aldakor guztiak finko mantenduz eta murrizketak betez gelaxka horrek har dezakeen balio minimoa.

Goi-limitea: Aurrekoaren berdina balio maximorako.

Helburu gelaxka: Gelaxka aldakorrak behe-limiteko edo goi-limiteko balioa hartzen duenean eta beste aldagaiak balio optimoan mantentzen direnean helburu gelaxkak hartzen duen balioa.

Problema honetako murrizketa bat berdintza bat da, honen ondorioz, ezinezkoa da aldaketaren bat egitea.

	Objetivo	
Celda	Nombre	Valor
\$F\$6	Aldagaien balioak Helburu funtzioa	7,00

Celda	Variable a Nombre Valo		_	Objetivo Resultado		Objetivo Resultado
\$C\$6	Aldagaien balioak x1	2,00	2,00	7,00	2,00	7,00
\$D\$6	Aldagaien balioak x2	5,00	5,00	7,00	5,00	7,00

SENTIKORTASUN TXOSTENA (soluzio ez-endekatua denean soilik balio du):

Datu bat aldatu eta beste guztiak finko mantendu ondoren helburu funtzioaren balio optimoa nola aldatzen den adierazten du (baina ez soluzio optimoa nola aldatzen den). Analisi matematikoko deribatu partzialaren edo ekonomia saileko analisi marginalaren parekoa da.

Txosten honek bi zati ditu:

a) Gelaxka aldakorrak:

Kostu edo gradiente murriztua: Simplex taulako z_i – c_i balioa da.

Aldagai baten balio optimoa positiboa izateko aldagai horren helburu funtzioaren koefizientea zenbat unitateetan aldatu behar den da. Ondorioz, soluzio optimoan parte hartzen duten aldagaiek (oinarrizko aldagaiek) kostu murriztu nulua dute eta soluzio optimoan parte hartzen ez dutenek (oinarrizkoak ez diren aldagaiek), berriz, kostu murriztu negatiboa dute (maximizazioaren kasuan).

Igoera edo jaitsiera onargarria: Helburu funtzioaren koefizientea tarte honen barnean egonez gero, soluzio optimoa ez da aldatzen. Hala ere, aldaketa hauen eraginez helburu funtzioaren balioa aldatu egingo da.

b) Murrizketak:

Itzal-prezioa: Murrizketaren eskumako aldea unitate batean handitzean edo txikitzean eta beste parametrokoak finko mantentzean helburu funtzioa zenbat unitate aldatzen den da ($\partial Z/\partial b_i$). Ez-aktiboa den murrizketa baten itzal-prezioa nulua da, izan ere murrizketa horretako eskumako aldeak ez du soluzioan eragiten, hortaz, Z konstante mantentzen da.

Igoera edo jaitsiera onargarria: Murrizketaren eskumako aldea tarte honetan egonez gero, itzalprezioa konstante mantentzen da.

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente		Permisible Reducir
\$C\$6	Aldagaien balioak x1	2	0	1	1	1E+30
\$D\$6	Aldagaien balioak x2	5	0	1	1E+30	0,5

Restricciones

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
\$F\$10	Guztira	9	2	9	0,2	1,666666667
\$F\$11	Guztira	11	-1	11	2,5	0,25
\$F\$9	Guztira	1	0	2	1E+30	1

ONDORIOAK

Problemaren soluzioa $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ da, z-ren balio optimoa 7 izanik.

Bigarren eta hirugarren ekuazioak aktikoak dira, hortaz, ekuazio horietako baliabide guztiak erabili dira. Bestalde, lehenengo ekuazioak unitate bateko soberakin bat du.

Problemako bi aldagaiak positiboak dira, ondorioz, beraien kostu murriztua nulua da.

Helburu funtzioaren balioa ez da aldatzen lehenengo ekuazioko baliabidea unitate batean txikitzen edo nahi beste handitzen badugu (beste parametro guztiak finko mantenduz).

Bukatzeko, bigarren murrizketako baliabidea unitate batean handitzen badugu, zehaztutako tartearen barnean egonik, helburu funtzioa 2 unitatetan handitzen da. Bestalde, hirugarren murrizketan gauza bera egitean helburu funtzioa unitate batean txikitzen da.

PHPSimplex tresna erabiliz ebatzitako kasu praktikoa:

Interneteko helbidean adierazten den bezalaxe PHPSimplex-a ikasleen ikaskuntza-prozesuan lagungarria izateko pentsatua dago, azken emaitzez gain bitarteko eragiketak ere erakusten baititu. Bestalde, soluzioa zuzenean eta problemak bi aldagai dituenean grafikoa ere eskaintzen du. Tresna honen beste abantaila batzuk hauek dira: bere interfazeari esker problema enuntziatzeko lengoaiarik behar ez izatea, erabiltzeko erraza eta intuitiboa izatea, eta instalaziorik behar ez izatea.

Izan bedi hurrengo problema:

Max
$$Z = 5x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 50x_4$$

s.a. $3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40$
 $x_1 + 2x_3 \le 40$
 $2x_2 + x_4 \le 40$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

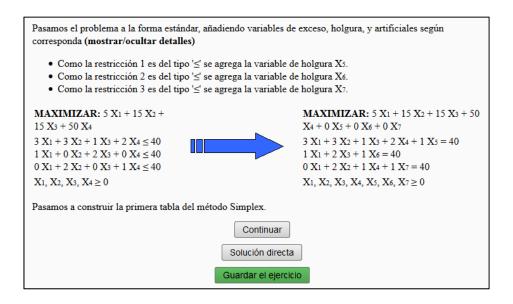
PHPSimplex tresna erabiliz problema ebazteko jarraitu beharreko pausuak ondoren agertzen dira. Lehenik eta behin, problemak forma kanonikoan dituen erabaki-aldagai kopurua eta murrizketa kopurua eskatzen ditu:

PHPSimplex

Método: Simplex / Dos Fases ▼
¿Cuántas variables de decisión tiene el problema? 4
¿Cuántas restricciones? 3
Continuar

Problemako datuak sartzen dira:

Fund	ción: 5	X1 + 15	X ₂ + 15	X ₃ + 50 X ₄
		Restri	cciones:	
	X1 + 3	X2 + 1	X ₃ + 2	X4 ≤ ∨ 40
	X1 + 0	X ₂ + 2	X ₃ + 0	X4 ≤ ∨ 40
	X1 + 2	X2 + 0	X ₃ + 1	X4 ≤ ✓ 40



PHPSimplex tresnak problema forma estandarrean idazten du, horretarako beharrezkoak diren lasaiera-aldagaiak eta aldagai artifizialak gehituz. Ondoren, soluzioa zuzenean lortzeko edo bitarteko eragiketa guztiak erakusteko aukera ematen du.

	Tabla 1			5	15	15	50	0	0	0
	Base	Сь	P ₀	Pı	P2	P 3	P4	P5	P 6	P 7
	P 5	0	40	3	3	1	2	1	0	0
	P6	0	40	1	0	2	0	0	1	0
	P 7	0	40	0	2	0	1	0	0	1
	Z		0	-5	-15	-15	-50	0	0	0
La	Mostrar ro a variable q			base		/ la que	e entra	es P4.	•	

Hurrengo irudian soluzio optimoa lortzen da.

Tabla 2			5	15	15	50	0	0	0	
Base	Сь	P ₀	P 1	P2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	
P4	50	20	3/2	3 / 2	1/2	1	1/2	0	0	
P ₆	0	40	1	0	2	0	0	1	0	
P 7	0	20	-3 / 2	1/2	-1/2	0	-1/2	0	1	
Z		1000	70	60	10	0	25	0	0	
Mostrar resultados como fracciones. La solución óptima es $Z = 1000$ $X_1 = 0$ $X_2 = 0$ $X_3 = 0$										

Problemak bi erabaki-aldagai baditu PHPSimplex tresnak grafikoa irudika dezake.

Kasu bereziak:

Ondoren Excel eta PHP Simplex erabiliz kasu bereziak ebazten dira:

Problema bideraezina

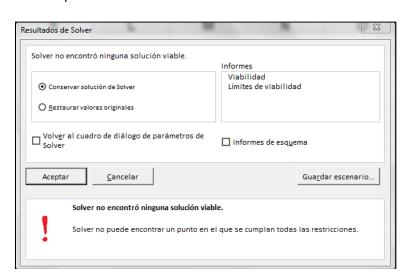
Max
$$Z = x + y$$

s.a. $2x + y \le 5$
 $x \ge 4$
 $x, y \ge 0$

Excel erabiliz:

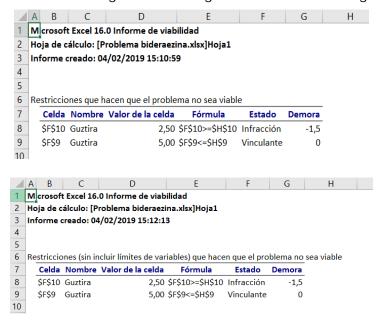
	Α	В	C	D	E	F	G	Н	J	
1										
2										
3										
4		Erabaki-aldagaiak	X	Υ						
5		Irabaziak	1	1		Helburu funtzioa				
6		Aldagaien balioak	0,00	0,00		0,00				
7										
8		Murrizketak	Matrizea			Guztira		Gai askea	Lasaiera	
9			2	1		0,00	<=	5	5,00	
10			1	0		0,00	>=	4	4,00	
11										
12										

"Parámetros de Solver" pantaila bete eta "Resolver" aukeratu ondoren:

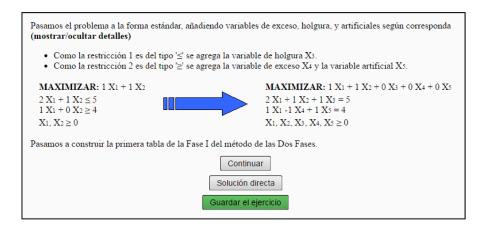


Pantaila honetan "Solver no puede encontrar un punto en el que se cumplan todas las restricciones" bueltatzen du, hortaz soluzioa bideraezina da.

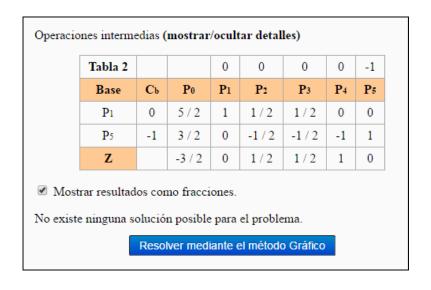
Bideragarritasun-txostena eta bideragarritasun-mugen txostenak ondorengoak dira:



PHPSimplex erabiliz:



Azken taula lortu arte "Continuar" aukeratzen da:



Irudian "No existe ninguna solución posible para el problema" ikus daiteke. Grafikoki ebaztean ez da informazio nabarmenik ikusten, problema bideraezina dela baino ez du zehazten.

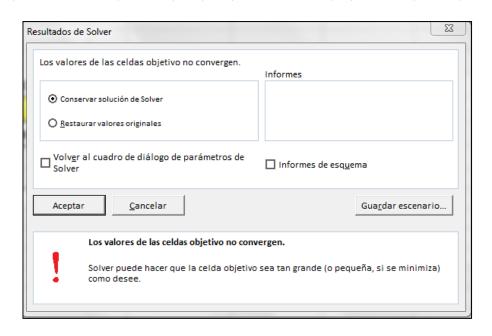
Problema mugatugabea:

Max
$$Z = 2x + y$$

s.a. $x-2y \le 2$
 $-4x+3y \le 12$
 $x, y \ge 0$

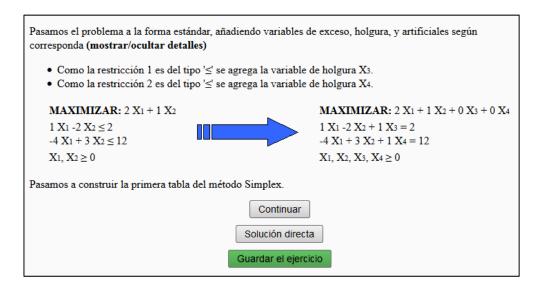
Excel erabiliz:

	Α	В	С	D	Е	F	G	Н	- 1	J
1										
2										
3										
4		Erabaki-aldagaiak	X	Υ						
5		Irabaziak	2	1		Helburu funtzioa				
6		Aldagaien balioak	0,00	0,00		0,00				
7										
8		Murrizketak	Matrizea			Guztira		Gai askea		Lasaiera
9			1	-2		0,00	<=	2		2,00
10			-4	3		0,00	<=	12		12,00
11										
12										

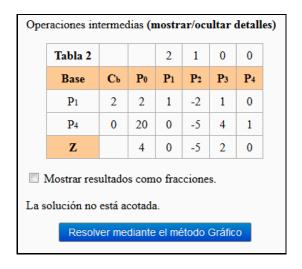


"Resultados de Solver" pantailan ondorengo irakur daiteke "Solver puede hacer que la celda objetivo sea tan grande (o pequeña, si se minimiza) como desee", ondorioz problema mugatugabea da.

PHPSimplex erabiliz

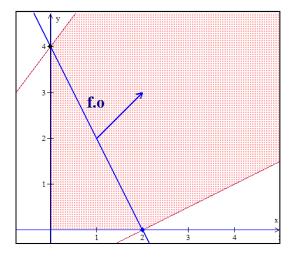


"Continuar" aukeratuz ondoz-ondoko taulak lortzen dira azken taula lortu arte:



Irudian "La solución no está acotada" irakur daiteke.

Adierazpen grafikoan onarpen-eremua bornatubea dela ikus daiteke.



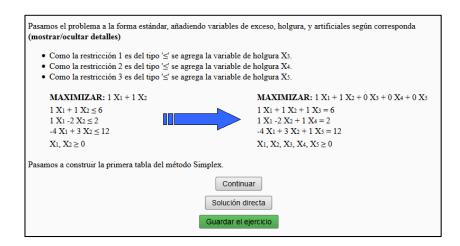
Ondorioz, PLko problema mugatugabea da.

Soluzio anizkoitza

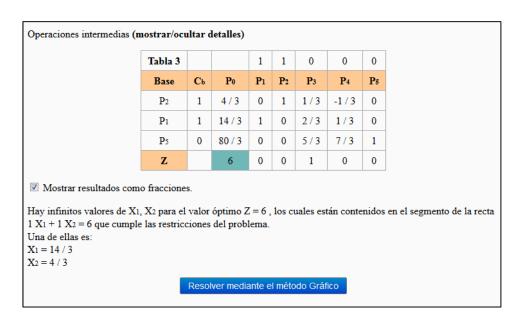
Max
$$Z = x + y$$

s.a. $x + y \le 6$
 $x - 2y \le 2$
 $-4x + 3y \le 12$
 $x, y \ge 0$

PHPSimplex erabiliz:



Azken taula lortu arte "Continuar" aukeratzen da:



PHPSimplex tresnak bueltatzen duen azken pantailan problemak infinitu soluzio dituela adierazten da, gainera dauden infinitu soluzioetatik bat zehazten du.

Bestalde, adierazpen grafikoan ondorengoa adierazten da: *El problema tiene infinitas soluciones*".

