ESTATISTIKA METODOAK INGENIARITZAN

2. Probabilitatea

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

2. Probabilitatea

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.1 Sarrera

Orain arte ikusitako estatistika deskribatzaileari esker lagin bati dagozkion datuak deskriba ditzakegu, horretarako maiztasun taulak, estatistikoak eta adierazpen grafikoak erabiliz.

Aukeratutako lagina adierazgarria bada, lagin-datuetan oinarrituta emaitzak orokor daitezke, honi **inferentzia estatistikoa** deritzo.

Inferentzia estatistikoa **Probabilitate-teorian** oinarrituta dago.

2.1 Sarrera

Esperimentu deterministak eta zorizko esperimentuak:
Edozein fenomeno edo esperimentutan behaketak lortzen dira. Bi esperimentu-mota daude: esperimentu deterministak eta esperimentu aleatorioak/zorizko esperimentuak.

Esperimentu deterministak:
Emaitza aurresan daiteke.

Esperimentu aleatorioak/zorizkoak:
Emaitza zehatza ezin denean aurresan.

2.1 Sarrera

Adibidea:

Esperimentu determinista: Pilota bat balkoi batetik jaurtitzean lurrera heltzeko behar duen denbora (indarra, pisua,… ezagutuz gero).

Esperimentu aleatorioa / zorizko esperimentua: Dado bat jaurtitzean lortutako emaitza.

Orokorrean, **zorizko esperimentu** batek hurrengo baldintzak bete behar ditu:

a) Esperimentua baldintza antzekotan errepika daiteke.

b) Esperimentua egin aurretik ezin dugu emaitza jakin.

c) Esperimentua askotan errepikatzean, maiztasun erlatiboa egonkortu egiten da. (➡ probabilitatea)

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.2 Lagin espazioa eta gertaerak

2.2.1 Lagin espazio eta gertaerak:

Esperimentu baten emaitza posible guztien multzoari **lagin-espazioa (Ω)** deritzo.

Oharra: Gertaera segurua bezala ere ezagutzen da

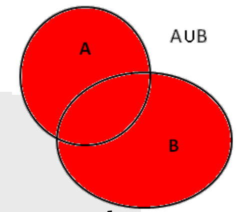
Lagin espazioko elementu sinpleenari, hau da, Ω-ko elementu bakoitzari **oinarrizko gertaera** deritzo

Lagin espazioko edozein azpimultzori **gertaera edo gertaera konposatua** deritzo. Gertaerak letra larriz idatziko ditugu.

Adibidea: Esperimentua: Dado bat botatzea

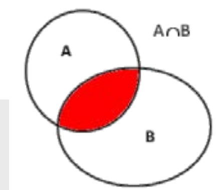
2.2 Lagin espazioa eta gertaerak

2.2.2 Gertaeren arteko eragiketak:



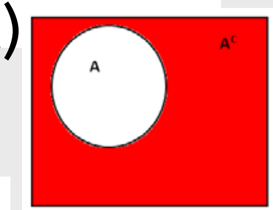
Bildura: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

A-n edo B-n edo bietan dauden oinarrizko gertaerek osatzen duten multzoa (A bil B irakurtzen da)



Ebakidura: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

A-n eta B-n aldi berean dauden oinarrizko gertaerek osatzen duten multzoa (A ebaki B irakurtzen da)



Osagarria: $A^C = \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

A-n ez dauden elementu guztiek sortzen duten multzoa. $\overline{A}$ gertaerari A gertaeraren **kontrako gertaera** esaten zaio.

2.2 Lagin espazioa eta gertaerak

Ohartu $A \cup \bar{A} = \Omega$ dela $\Rightarrow$ $A \cup \bar{A}$ gertaerari **gertaera segurua** deritzo.

Kenketa: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
A-n dauden baina B-n ez dauden oinarrizko elementuak sortzen duten multzoa da

Ezinezko gertaera: ϕ. Gertaera seguruaren osagarria da $\bar{\Omega} = \phi$,hau da, enuntziatu bat inoiz betetzen ez denean, gertaera multzo hutsa ϕ izango da.

Gertaera bateraezinak: $A \cap B = \phi$ bada, A eta B gertaera bateraezinak direla esaten da.

2.2 Lagin espazioa eta gertaerak

Gertaera-sistema osoa: Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertaerak. Gertaera guztien bildura lagin espazio osoa bada eta gertaerak binaka bateraezinak badira, orduan, $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ multzoa gertaera-sistema osoa dela esaten da.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad eta \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j \Rightarrow \{A_i\}_{i=1}^{n}$$

multzoa gertaera-sistema osoa da.

Partekotasuna: $A \subset B$ A parte B irakurtzen da eta A-n dauden oinarrizko elementu guztiak B-n daudela adierazten du.

2.2 Lagin espazioa eta gertaerak

Oharrak:

1) $A \subset B \;\; eta \;\; B \subset A \Rightarrow A = B$

2) Morgan-en legeak: $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3) Banatze propietateak: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4) $A \subset B \;\Rightarrow\; \bar{B} \subset \bar{A}$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.3 Probabilitatea

2.3.1 Probabilitatearen definizioa:

Hiru definizio desberdin ikusiko ditugu:

1. Maiztasun erlatiboen limitea:

Richard Von Misses-ek maiztasun erlatiboen limite bezala definitu zuen probabilitatea. Hau da, saiakera kopurua infinitua denean, maiztasun erlatiboa egonkortu egingo da eta balio hau izango da gertaeraren probabilitatea.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(A)}{n}$$

Arazoa: Esperimentua kopuru oso handia izan behar da, beraz, baliteke oso erabilgarria ez izatea.

2.3 Probabilitatea

Adibidea:

1) Demagun herri batean, A B eta C boligrafo motak saltzen direla. Bezero batek A mota erosteko probabilitatea kalkulatzeko, zoriz herriko 1.000.000 bezero aukeratu eta zenbatek A aukeratuko luketen galdetu da: 120.000.

Kalkulatu A motako boligrafoa erosteko probabilitatea

2.3 Probabilitatea

2. Laplace-ren definizioa (edo definizio klasekoa)

Zorizko esperimentuko **oinarrizko gertaera guztiak ekiprobableak** direnean, hau da, oinarrizko gertaera guztiak gertatzeko probabilitate berdina daukatenean aplika daiteke. A gertaeraren probabilitatea:

$$P(A) = \frac{\text{A gertatzearen aldeko kasu-kopurua}}{\text{kasu posible guztien kopurua}}$$

Adibideak:

2) Trukatu gabeko dadoa badaukagu, kalkula ezazu emaitza bikoitia izateko probabilitatea.

3) Kutxa batean hamar pila daude, eta hamarretatik bat akastuna da. Aleatorioki hiru pila hartzen dira. Zein da akastuna hartzeko probabilitatea?

Oharra: Dadoa trukatuta balego definizio honek ez luke balioko.

2.3 Probabilitatea

3. Definizio matematikoa edo axiomatikoa: KOLMOGOROV-en AXIOMAK

Izan bitez A esperimentu aleatorio bati lotutako edozein gertaera eta Ω lagin-espazioa.

P(A) gaiari, funtzio baten bidez definitzen den gaiari, A gertaeraren probabilitatea deritzo eta ondoko axiomak betetzen ditu:

i) $\forall A:\ 0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $A_1,\ A_2, \ldots, A_n:\ \ A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j \ \Rightarrow$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

iii) $P(\Omega)=1$

2.3 Probabilitatea

2.3.2 Probabilitatearen propietateak

Kolmogorov-en axiometatik abiatuz, hurrengo propietateak ditugu:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

iv) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

v) $P(\phi) = 0$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.3 Probabilitatea

Adibideak:

4) Trukatututako txanpon bat jaurtitzean aurpegia lortzeko probabilitatea 0.3 bada, kalkula ezazu gurutzea lortzeko probabilitatea.

5) Paulak estatistika gainditzeko probabilitatea 2/3 da eta aljebra gainditzekoa 4/9. Biak gainditzeko probabilitatea ¼ bada, zein da gutxienez bat gainditzeko probabilitatea?

6) Bi dado botatzean 36 emaitza posible daudela jakinda, kalkula ezazu 7 edo 11 ateratzeko probabilitatea.

2.3 Probabilitatea

7) Karta multzo batean hainbat karta kendu ditugu. Geratzen direnen artean, multzotik ateratzeko probabilitateak hurrengoak dira:

$$P(Erregea) = 0.15, \quad P(Bastoia) = 0.3, \quad P(\overline{Erregea} \cap \overline{Bastoia}) = 0.6$$

Zein da errege bastoia lortzeko probabilitatea?

8) Kutxa batean hamar pila daude, eta hamarretatik bat akastuna da. Aleatorioki hiru pila hartzen dira. Zein da akastuna ez hartzeko probabilitatea?

2.4 Baldintzazko probabilitatea

Izan bitez lagin-espazioa eta A eta B bi gertaera.

A gertaeraren baldintzapeko B gertaeraren probabilitatea

A gertatu dela jakinda B gertatzeko probabilitatea da

$$\boxed{P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad P(A)>0}$$

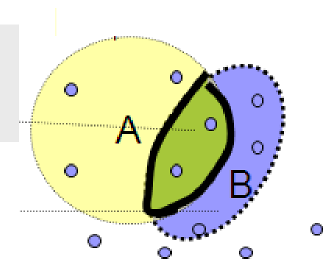
Era berean, B gertaeraren baldintzapeko A gertaeraren probabilitatea:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0$$

2.4 Baldintzazko probabilitatea

Oharra:

Baldintzazko probabilitatea eta ebakidura desberdinak dira:



i) $P(A \cap B)$ $P(\Omega)=1$ −ekiko neurtzen da.

ii) $P(A|B)$ - n $P(A \cap B)$ $P(B)$-ekiko neurtzen da.

Adibidea:

9) Aireportuan hegazkina garaiz irteteko probabilitatea 0.83 da. Garaiz heltzekoa 0.82 eta biak batera emateko probabilitatea 0.78 da.

a) Garaiz irten dela jakinik, zein da garaiz heltzeko probabilitatea?

b) Garaiz heldu dela jakinik, zein da garaiz irteteko probabilitatea?

2.4 Baldintzazko probabilitatea

Gertaera independenteak: Izan bitez A eta B gertaera bi, A eta B gertaera independenteak dira, baldin eta soilik baldin:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bi gertaera independenteak dira, bat gertatzeak besteari buruzko informazioa ematen ez badu.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \begin{cases} P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \\ P(B \mid A) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \end{cases}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.4 Baldintzazko probabilitatea

- A eta B gertaerak elkarrekiko independenteak dira, baldin eta soilik baldin:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- A, B eta C gertaerak elkarrekiko independenteak dira, baldin eta soilik baldin:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

- Orokorrean: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertaerak elkarrekiko independenteak dira, baldin eta soilik baldin:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.4 Baldintzazko probabilitatea

Adibideak:

10) Dado ez trukatua botatzeko zorizko esperimentuan ondorengo A eta B gertaerak baditugu:
   - ✓ B=emaitza 3 baino handiagoa izatea
   - ✓ A=zenbaki karratua ateratzea

   Zein da B-rekiko baldintzazko A gertaeraren probabilitatea?

   A eta B gertaerak independenteak dira?

11) Aireportuan hegazkina garaiz irteteko probabilitatea 0.83 da. Garaiz heltzekoa 0.82 eta biak batera emateko probabilitatea 0.78 da.

   Garaiz heltzea eta garaiz irtetea independenteak dira?

2.5 Erregela biderkatzaileak

Erregela biderkatzailea: Izan bitez A eta B bi gertaera, baldintzazko probabilitateagatik:

$$\begin{cases} P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A\cap B)=P(A).P(B\mid A) \\ P(A\cap B)=P(B).P(A\mid B) \end{cases}$$

Hau da, $P(A\cap B)=P(A).P(B\mid A)=P(B).P(A\mid B)$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B\mid A).P(C\mid A\cap B)$$

Orokorrean, n gertaera baditugu : $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\boxed{P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2\mid A_1)\ldots P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdots P\left(A_n\mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

2.5 Erregela biderkatzaileak

Adibidea:

12) Unibertsitate bateko talde eragilean 80 irakasle daude, eta horietatik 16 Medikuntza Fakultatekoak dira. Talde eragileko irakasleen arteko bi kargu berri ezartzeko asmoa dago, karguak aleatorioki banatuko direlarik.

Kalkula bedi kargu berriak Medikuntza fakultateko irakasleei egokitzeko probabilitatea:

a) Irakasle bakoitzak kargu berri bat onar dazakelarik.

b) Irakasle batek bi kargu berri onar datzakelarik.

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.6 Probabilitate osoaren teorema

Probabilitate osoaren teorema:

Izan bedi $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ gertaera-sistema osoa eta B beste gertaera bat.

Gogoratu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertaera-sistema osoa izateko

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad eta \quad A_i \cap A_j = \phi \qquad \forall i \neq j \Rightarrow \{A_i\}_{i=1}^{n}$$

Orduan,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) \Rightarrow$$

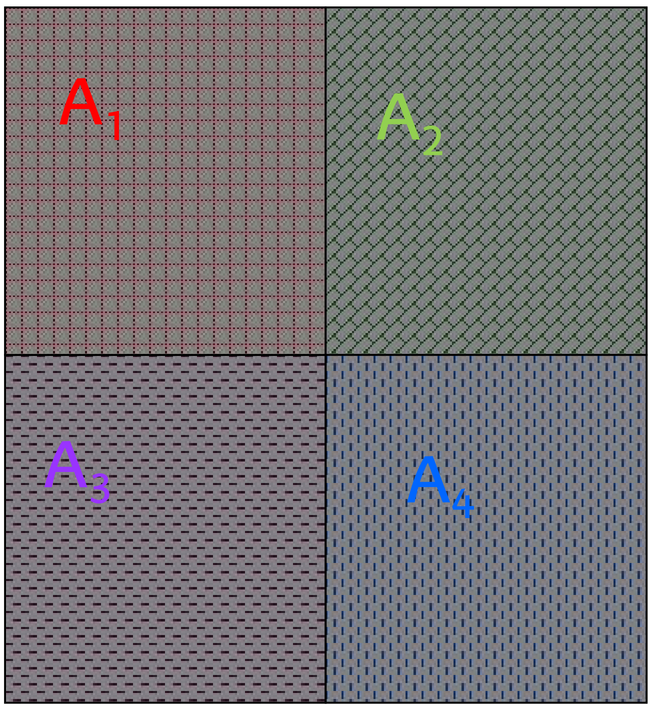
$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

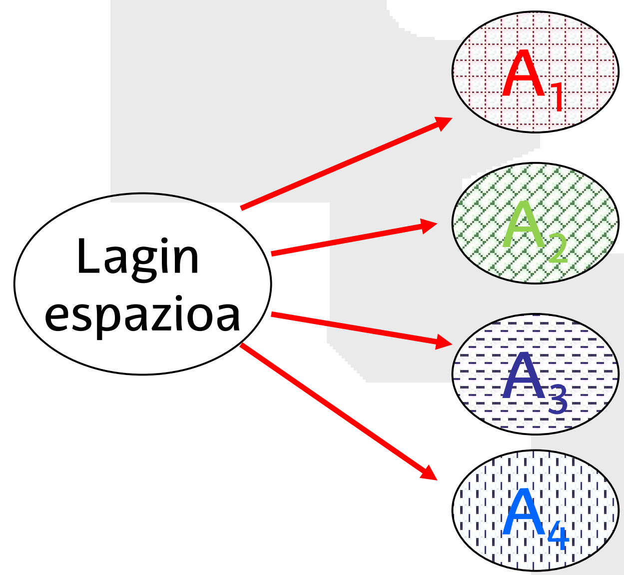
non $P(A_i) > 0$ den.

2.6 Probabilitate osoaren teorema

Hau da, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$.

Demagun A_1, A_2, A_3, A_4 gertaera sistema osoa dela

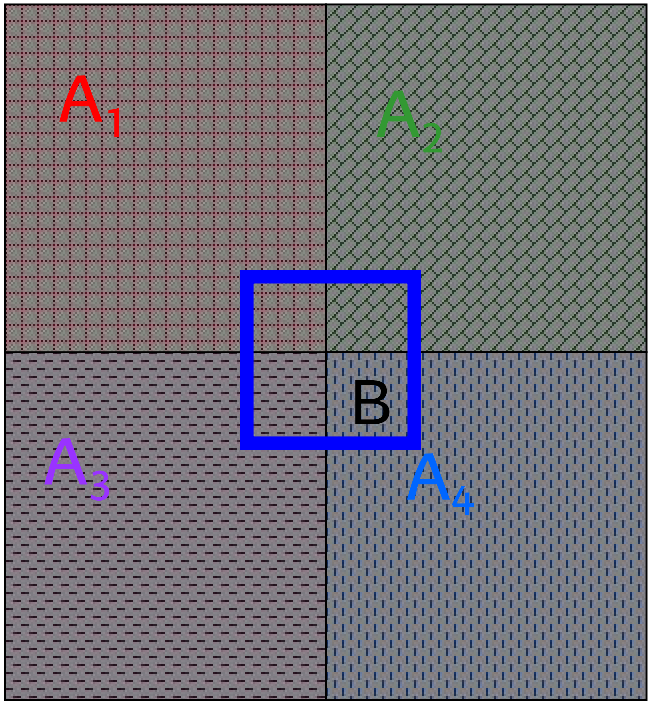


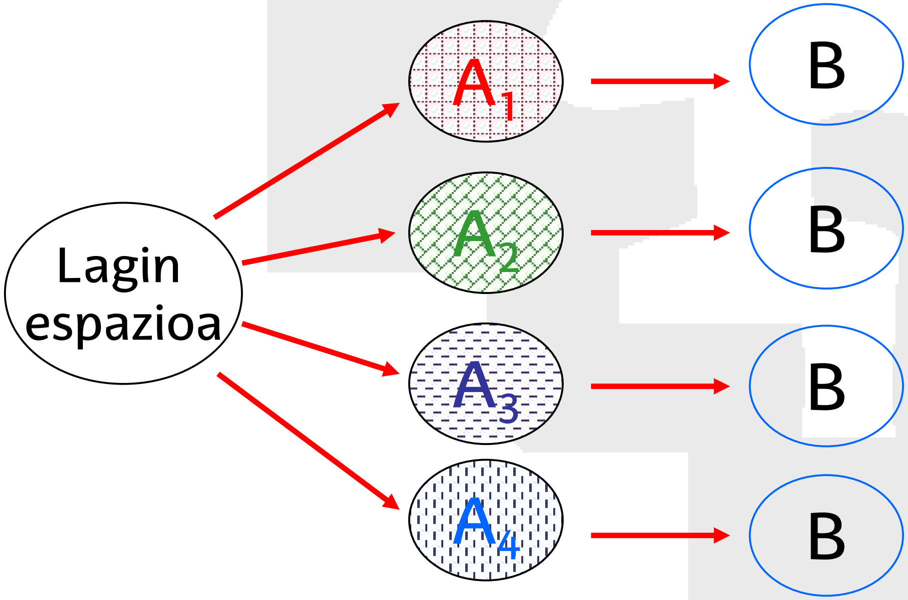


2.6 Probabilitate osoaren teorema

Edozein gertaera B hurrengo eran deskonposatu daiteke

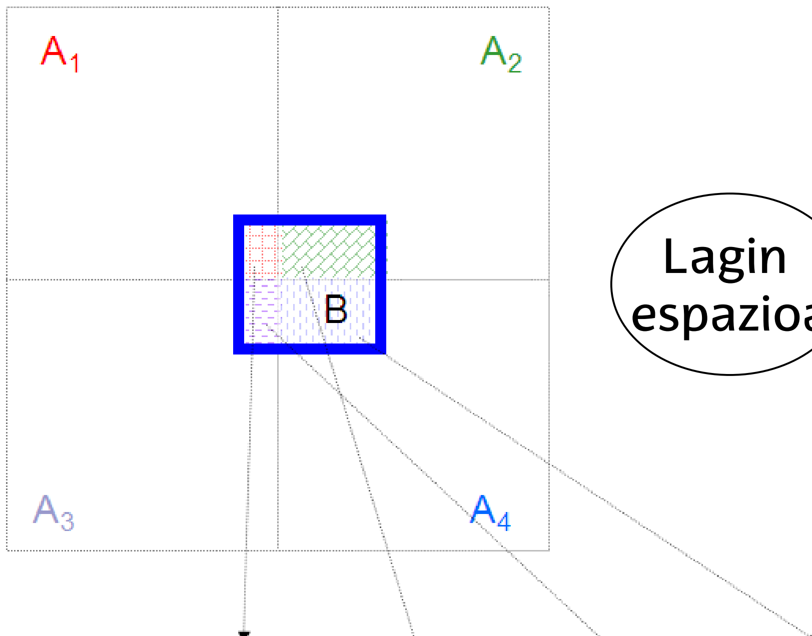
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$

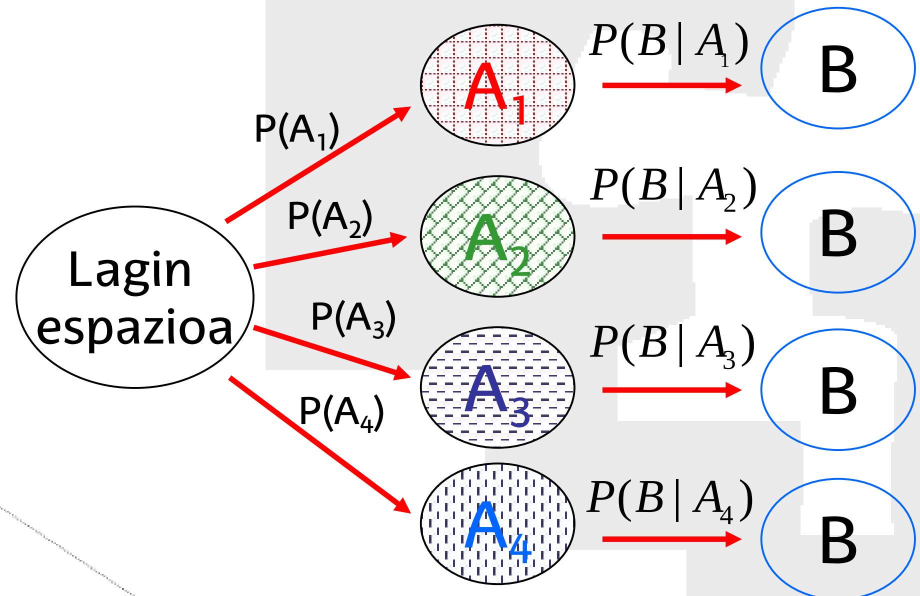




2.6 Probabilitate osoaren teorema

Ondorioz B gertaeraren probabilitatea hurrengo eran kalkula daiteke:





$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) + P(B\cap A_4)$$

$$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \dots$$

2.6 Probabilitate osoaren teorema

Adibideak:

13) Gela bateko ikasleen %70-a emakumeak dira, hauetatik %10-k erre egiten du. Bestalde, gela horretako gizonen %20-a erretzailea da. Zein da erretzaileen portzentaia?

14) Bi kutxa ditugu, non, lehenengoak lau bola urdin eta 3 beltz dituen eta bigarrenak hiru urdin eta bost beltz. Lehenengo kutxatik bola bat atera eta zein koloretako den ikusi gabe, bigarrenean sartzen dugu. Zein da bigarren kutxatik beltza ateratzeko probabilitatea?

2.7 Bayes-en teorema

Bayes-en teorema:

Izan bitez A eta B bi gertaera, non $P(A) > 0$ eta $P(B) > 0$ betetzen diren. Orduan, B gertaeraren baldintzapeko A gertaeraren probabilitatea hurrengo eran kalkula daiteke:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

2.7 Bayes-en teorema

Bayes-en teorema:

Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertaera-sistema osoa eta B beste gertaera bat non $P(A_i) > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$ eta $P(B) > 0$ betetzen diren. Orduan, B gertaeraren baldintzapeko A_i gertaeraren probabilitatea, hurrengo eran kalkula daiteke:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{P(B \mid A_1) P(A_1) + \ldots + P(B \mid A_n) P(A_n)} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$P(A_1),\ P(A_2), \ldots, P(A_n)$ probabilitateei "a priori" deritze, eta

$P(A_1 \mid B),\ P(A_2 \mid B), \ldots, P(A_n \mid B)$ probabilitateei berriz "a posteriori".

Sarrera

Lagin espazioa eta gertaerak

Probabilitatea

Baldintzazko probabilitatea

Erregela Biderkatzaileak

Probabilitate osoaren teorema

Bayes-en teorema

2.7 Bayes-en teorema

Adibideak:

15) Gela bateko ikasleen %70-a emakumeak dira, hauetatik %10-k erre egiten du. Bestalde, gela horretako gizonen %20-a erretzailea da.

a) Zein da erretzaileen portzentaia? (Eginda)

b) Zoriz aukeratutako gelako ikasle bat erretzailea bada. Zein da gizona izateko probabilitatea?

2.7 Bayes-en teorema

16) Lantegi batean hiru makina daude. Lehenengoak produkzioaren %30-a sortzen du, bigarrenak %45-a eta hirugarrenak %25-a. Ezaguna da lehenengo makinak egindako produktuen %2-ak, bigarren makinak egindako %3-ak eta hirugarrenak egindako %2-ak akatsak dituztela.

a) Demagun zoriz produktu bat aukeratu dugula. Zein da akastuna izateko probabilitatea?

b) Zein da zoriz aukeratu dugun akastun produktua bigarren makinak egindakoa izateko probabilitatea?