Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Bilboko IITUE
Ebazpena

2015-11-18

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak orden egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\,]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Frogapen hau honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

  $$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \ldots, g(j), \ldots\,]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

  $$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots, f(j), \ldots\,]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:

  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:

  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.

- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,100 puntu) a sinboloa hiru aldiz edo gehiagotan agertzen denean (ez da beharrezkoa agerpen horiek jarraian egotea) c-rik ez duten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Kontuan izan, a sinboloa bi aldiz edo gutxiagotan agertzen bada, c sinboloa ager daitekela. Adibidez, $baabbbab$, $abababbaa$, $aaaa$, $baccb$, $cccc$, $cbbccc$, a, $bbbb$, ε, aab, aa eta acc hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina $aaac$, $aacaa$, $aabbcaba$, $acacacac$ eta $aaabbbccc$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \geq 3 \rightarrow |w|_c = 0)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid \quad w \in A^* \wedge \neg(|w|_a \geq 3 \wedge |w|_c \neq 0)\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{array}{lll} L_1 = & \{w \mid & w \in A^* \wedge \\ & & ((|w| \geq 3 \wedge \exists i, j, k(1 \leq i < j < k \leq |w| \wedge w(i) = a \wedge w(j) = a \wedge w(k) = a)) \\ & & \quad \rightarrow (\neg \exists \ell(1 \leq \ell \geq |w| \wedge w(\ell) = c) \\ & &) \\ & \} & \end{array}$$

2.2. (0,075 puntu) aaa edo bbb edo ccc (gutxienez azpihitz horietako bat) duten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $aaaaa$, $baaabc$, $baaaccc$, $bbbbccccaaaa$ eta $bacccccb$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, cba, aa, $aacba$, $aabbccabc$ eta $aaccbccb$ ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (v = aaa \vee v = bbb \vee v = ccc) \wedge w = uvx)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge \exists \alpha, k(\alpha \in A \wedge k \leq |w| - 2 \wedge w(k) = \alpha \wedge w(k+1) = \alpha \wedge w(k+2) = \alpha)\}$$

2.3. (0,075 puntu) Posizio bakoitietan a sinboloa duten hitz ez-hutsez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Kontuan hartu ezkerreko ertzeko sinboloa 1 posizioan dagoela eta, gainera, posizio bikoitietan edozein sinbolo ager daitekela (a, b edo c). Adibidez, aaa, $aaaaa$, a, aa, ac, $abaca$ eta $acab$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ε, c, cc, $cbbbc$, $babab$, abc eta $ababb$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \forall k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0 \rightarrow w(k) = a)\}$$

2.4. (0,075 puntu) Bi a jarraian ez dituzten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, $bbbb$, $ccbc$, a, ab, ba, $ccab$, $cababa$, $abab$ eta $bccab$ hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina aa, aaa, $aaaa$, $aaba$, $aaabac$, $aabbaaa$ eta $baaaba$ ez dira L_4 lengoaiakoak.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaav)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \rightarrow w(k+1) \neq a)\}$$

2.5. (0,050 puntu) Posizio bakoitietan a sinboloa eta posizio bikoitietan a ez den sinboloren bat (hau da, b edo c) duten hitz ez-hutsez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, a, ab, ac, $abac$, $abababa$ eta $acab$ hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina ε, aa, $abaac$, $ccccc$, $baba$ eta $aaaaaa$ ez dira L_5 lengoaiakoak.

$$L_5 = L_3 \cap L_4$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & |w| \geq 1 \wedge \\ & \forall k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0 \rightarrow w(k) = a) \wedge \\ & \forall k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \text{ mod } 2 = 0 \rightarrow w(k) \neq a)\} \end{aligned}$$

2.6. (0,075 puntu) a sinboloarekin hasi, a sinboloarekin bukatu eta tartean bc azpihitzaren errepikapenez (gutxienez bat) eratutako hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $abca$, $abcbca$ eta $abcbcbca$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, a, bbb, aa, $cabbcaa$, $abbba$, $abcbcabca$ eta $acbcba$ ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 1 \wedge w = a(bc)^k a)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{a\}\{bc\}^+\{a\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & |w| \geq 4 \wedge \\ & w(1) = a \wedge w(|w|) = a \wedge \\ & \forall k(2 \leq k \leq |w| - 1 \wedge k \text{ mod } 2 = 0 \rightarrow w(k) = b) \wedge \\ & \forall k(2 \leq k \leq |w| - 1 \wedge k \text{ mod } 2 \neq 0 \rightarrow w(k) = c)\} \end{aligned}$$

2.7. (0,075 puntu) abc azpihitzarekin hasten diren eta a, b eta c kopuru berean dituzten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, abc, $abccab$, $abcccaabb$, $abcaaabccbbc$ eta $abcabc$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, $abcb$, $abcabbccc$, bba, a, $aaabc$ eta $aaaaaa$ ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a = |u|_b = |u|_c \wedge w = abcu)\}$$

2.8. (0,050 puntu) cba azpihitzarekin bukatzen diren eta a, b eta c kopuru berean dituzten hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, cba, $bcacba$, $bbaacccba$, $cbbccbaaacba$ eta $abccba$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, $babc$, $aacba$, bba, a, $bcaaaa$ eta $aaaaaa$ hitzak ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = (L_7)^R$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a = |u|_b = |u|_c \wedge w = ucba)\}$$