Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Bilboko Ingeniaritza Eskola (UPV/EHU)

2016-11-09

Ebazpena

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak ordena egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\,]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Eskatutako frogapen hori honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $\mathbb{N} \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(j), \dots\,]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $\mathbb{N} \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(j), \dots\,]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:

  $\mathbb{N}$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  – $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  – $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:

  – $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  – $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.

- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,075 puntu) Zehazki a sinboloaren bi agerpen edukitzeaz gain, bi agerpen horiek hasieran eta bukaeran dituzten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Hitz horietan, b eta c sinboloak nahi adina aldiz ager daitezke. Adibidez, aa, $abccca$, $acca$, $accba$, $abcbbca$ eta $abbba$ hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina ε, a, c, $bbbb$, $ccbbb$, aab, aaa, $abbacaba$, $aaac$ eta $bbaacc$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a = 0 \wedge w = aua)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 2 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = a \wedge |w|_a = 2\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 2 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = a \wedge \forall k(2 \leq k \leq (|w| - 1) \to w(k) \neq a)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{a\}\{b, c\}^*\{a\}$$

2.2. (0,075 puntu) Gutxienez b bat eta gutxienez c bat edukitzeaz gain, b denak elkarren jarraian eta c denak elkarren jarraian dituzten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. L_2 lengoaiako hitzetan, a sinboloa nahi adina aldiz ager daiteke eta c sinboloaz eratutako azpihitza b sinboloaz eratutakoa baino lehenago ager daiteke. Adibidez, bc, cb, $ccccaabb$, $bbbcccc$ eta $aacccaaaba$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, ca, aa, $caaccba$, $cbcbcb$, $bcccb$ eta $cccabbbabbb$ ez.

$$\begin{aligned} L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x, y, z \quad & (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge y \in A^* \wedge z \in A^* \wedge \\ & |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |u|_b = |u| \wedge |v|_c = |v| \wedge \\ & |w|_b = |u| \wedge |w|_c = |v| \wedge (w = xuyvz \vee w = xvyuz))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists g, h, i, j, k \quad & (g \in I\!N \wedge h \in I\!N \wedge i \in I\!N \wedge j \in I\!N \wedge k \in I\!N \wedge \\ & g \geq 1 \wedge h \geq 1 \wedge (w = a^i b^g a^j c^h a^k \vee w = a^i c^h a^j b^g a^k))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = (\{a\}^*\{b\}\{b\}^*\{a\}^*\{c\}\{c\}^*\{a\}^*) \cup (\{a\}^*\{c\}\{c\}^*\{a\}^*\{b\}\{b\}^*\{a\}^*)$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = (\{a\}^*\{b\}^+\{a\}^*\{c\}^+\{a\}^*) \cup (\{a\}^*\{c\}^+\{a\}^*\{b\}^+\{a\}^*)$$

2.3. (0,075 puntu) Zehazki a sinboloaren bi agerpen edukitzeaz gain eta bi agerpen horiek hasieran eta bukaeran egoteaz gain, gutxienez b bat eta gutxienez c bat duten eta gainera b denak elkarren jarraian eta c denak elkarren jarraian dituzten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $accba$, $abbbcca$ eta $acba$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ε, a, c, cc, $cbbbc$, $babab$, abc, aa, $abbbacca$, aaa, $ccbbb$, $ccaabbb$ eta $ababb$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = L_1 \cap L_2$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = (\{a\}\{b\}^+\{c\}^+\{a\}) \cup (\{a\}\{c\}^+\{b\}^+\{a\})$$

2.4. (0,075 puntu) Hasierako eta bukaerako sinboloak a baldin badira, beste a-rik ez duten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, bbb, $ccbc$, a, aa, $abcbbca$, $ccaab$, $acabaab$, $abab$ eta $bccaabaaa$ hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina aaa, $acaa$, $abababa$ eta $aabcca$ ez.

$$\begin{aligned} L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & ((|w| = 0) \vee \\ & (|w| \geq 1 \wedge ((w(1) = a \wedge w(|w|) = a) \rightarrow \\ & \qquad \forall k(2 \leq k \leq (|w| - 1) \rightarrow w(k) \neq a))))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & ((|w| \leq 1) \vee \\ & (|w| \geq 2 \wedge ((w(1) = a \wedge w(|w|) = a) \rightarrow \\ & \qquad \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a = 0 \wedge w = aua))))\} \end{aligned}$$

2.5. (0,075 puntu) b sinboloaren agerpen denak elkarren jarraian eta kopuru bakoitian dituzten hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ab, bbb, $abbb$, $acbbbcc$, $bbbcc$ eta $cbbbcacaac$ hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina ε, aa, bb, $abbaac$, $ccbccbbc$ eta $babab$ ez dira L_5 lengoaiakoak.

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x \quad & (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge \\ & |u|_b = 0 \wedge |v|_b = |v| \wedge |x|_b = 0 \wedge \\ & |v| \bmod 2 \neq 0 \wedge \ w = uvx)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, k, x \quad & (u \in A^* \wedge k \in \mathbb{N} \wedge x \in A^* \wedge \\ & |w|_b = k \wedge k \bmod 2 \neq 0 \wedge \ w = ub^k x)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_5 = \{a, c\}^* \{b\} \{bb\}^* \{a, c\}^*$$

2.6. (0,075 puntu) Palindromoak diren (alderantzizko hitzaren berdinak diren) hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, a, aaa, $bbcbb$ eta $cbaabc$ hitzak lengoaiakoak dira baina ab, $ccbc$ eta $acbcba$ ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge w = w^R\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge ((|w| = 1) \vee ((|w| \neq 1) \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = uu^R)))\}$$

2.7. (0,075 puntu) a sinboloarekin hasi eta bukatzeaz gain, bakarrik bi a dituzten eta palindromoak ez diren hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $abca$, $abccbca$ eta $accbccca$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, aa, aaa, $abba$, $acbca$, $bcccb$ eta ccc ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = L_1 \cap \overline{L_6}$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \land \exists u(u \in A^* \land u \neq u^R \land w = aua)\}$$

2.8. (0,050 puntu) abc hitza kopuru bakoitian elkartuz lortzen diren hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, abc eta $abcabcabc$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, a, $abcabc$, $abbcabc$ eta $abcbbbabcabc$ hitzak ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = \{w|w \in A^* \land \exists k(k \in \mathbb{N} \land k \bmod 2 \neq 0 \land w = (abc)^k)\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_8 = \{w|w \in A^* \land \quad & |w| \geq 3 \land |w| \bmod 3 = 0 \land \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \land k \bmod 3 = 1) \rightarrow w(k) = a) \land \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \land k \bmod 3 = 2) \rightarrow w(k) = b) \land \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \land k \bmod 3 = 0) \rightarrow w(k) = c)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{abc\}\{abcabc\}^*$$