

# IKERKETA OPERATIBOA LAN TALDEA

**ZIGORTZE METODOA ETA PROBLEMA DUALA**

Jon Martin, Mikel Idoyaga, Igor Uriarte eta Ena Verhorst

# AURKIBIDEA

- Lehenengo atala(Zigortze metodoa)
  - Hasierako soluzio bideragarria
  - Iterazioak
  - Soluzioa
- Hirugarren atala (Dual metodoa)
  - Forma kanonikoa
  - Dualera
  - Aldagaien balioa lortu
  - Soluzioa

# Enuntziatua (6.ariketa, a atala)

**1. Zigortze metodoa erabiliz ebatzi.**

$$\text{Min } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# 1.pausua

Forma estandarrera pasatu:

$$\begin{aligned}\text{Min } z &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

Aldagai artifizialak sartu eta h.f. zigortu:

$$\begin{aligned}\text{Min } z &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 + Mq_1 + Mq_2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + q_1 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + q_2 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, q_1, q_2 &\geq 0\end{aligned}$$

# Hasierako soluzio bideragarria

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & q_1 & q_2 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Hasierako soluzio bideragarria:

$$X_B = (x_4, q_1, q_2) = (4, 3, 5)$$

$$X_N = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (0, 0, 0, 0)$$

# Lehenengo iterazioa

Ondoren lehenengo Simplex Taula egingo dugu:

			1	3	2	0	0	M	M
$C_{oin}$	$A_{oin}$	$B^{-1} * b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$q_1$	$q_2$
0	$x_4$	4	1	-1	-2	1	0	0	0
M	$q_1$	3	3	-2	4*	0	0	1	0
M	$q_2$	5	1	2	1	0	-1	0	1
$Z=8M$		$Z_j$	$4M$	0	$5M$	0	$-M$	M	M
		$W_j$	$4M-1$	-3	$5M-2$	0	$-M$	0	0

\*=pibotea

$\exists W_j > 0 \Rightarrow$  jarraitu

# BIGARREN TAULARAKO IRIZPIDEAK

$$\text{Sartze irizpidea} = \text{Max}\{W_j\} = \text{Max}\{4M-1, 5M-2\} = 5m-2 \Rightarrow x_3 \text{ sartu}$$

$$\text{Irtetze irizpidea} = \text{Min} \left\{ \frac{x_{bk}}{y_{jk}} \mid y_{jk} > 0 \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{1} \right\} = \frac{3}{4} \Rightarrow q_1 \text{ irten}$$

# Bigarren iterazioa

**Taula berria** lortzeko egin beharreko aldaketak:

$$\begin{cases} e2 \leftarrow e2/4 \\ e1 \leftarrow e1 + 2 * e2b \\ e3b \leftarrow e3 - e2b \end{cases}$$

			1	3	2	0	0	M	M
Coin	A <sub>oin</sub>	B <sup>-1</sup> * b	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>
0	x <sub>4</sub>	11/2	5/2	-2	0	1	0	-1/2	0
2	x <sub>3</sub>	3/4	3/4	-1/2	1	0	0	1/4	0
M	q <sub>2</sub>	17/4	1/4	5/2*	0	0	-1	-1/4	1
$Z = \frac{3}{2} + \frac{17M}{4}$									
		<u>Z<sub>i</sub></u>	$\frac{6}{4} + \frac{M}{4}$	$\frac{5M}{2} - 1$	2	0	-M	$\frac{1}{2} - \frac{M}{4}$	M
		<u>W<sub>i</sub></u>	$\frac{1}{2} + \frac{M}{4}$	$\frac{5M}{2} - 4$	0	0	-M	$\frac{1}{2} - \frac{5M}{4}$	0

\*=pibotea

$\exists \text{ W<sub>i</sub> } > 0 \Rightarrow \text{jarraitu}$

□



# Hirugarren taularako irizpideak

$$\text{Sartze irizpidea} = \text{Max}\{W_j\} = \text{Max}\{M/4 + 1/2, 5M/2 - 4\} = 5M/2 - 4 \Rightarrow x_2 \text{ sartu}$$

$$\text{Irtetze irizpidea} = \text{Min} \left\{ \frac{x_{bk}}{y_{jk}} \mid y_{jk} > 0 \right\} = \text{Min} \left\{ (17/4) / (5/2) \right\} = 17/10 \Rightarrow q_2 \text{ irten}$$

# Hirugarren iterazioa

**Taula berria** lortzeko egin beharreko aldaketak:

$$\begin{cases} e3b \leftarrow 3 \cdot e2/5 \\ e1b \leftarrow e1 + 2 \cdot e2b \\ e2b \leftarrow E2 + \frac{1}{2} \cdot e3b \end{cases}$$

			1	3	2	0	0	M	M
Coin	A <sub>oin</sub>	B <sup>-1</sup> * b	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>
0	x <sub>4</sub>	89/10	27/10	0	0	1	-4/5	-7/10	4/5
2	x <sub>3</sub>	8/5	4/5*	0	1	0	-1/5	1/5	1/5
3	x <sub>2</sub>	17/10	1/10	1	0	0	-2/5	-1/10	2/5
Z=83/10									
		Z <sub>j</sub>	19/10	3	2	0	-8/5	1/10	8/5
		W <sub>j</sub>	9/10	0	0	0	-8/5	1/10-M	8/5-M

\*=pibotea

$\exists W_j > 0 \Rightarrow \text{jarraitu}$

# AZKENENGO TAULARAKO IRIZPIDEAK

$$\underline{\text{Sartze irizpidea}} = \text{Max}\{W_j\} = 9/10 \Rightarrow x_1 \text{ sartu}$$

$$\underline{\text{Irtetze irizpidea}} = \text{Min} \left\{ \frac{x_{bk}}{y_{jk}} \mid y_{jk} > 0 \right\} = \text{Min} \{89/27, 8/4, 17/1\} = 2 \Rightarrow x_3 \text{ irten}$$

# Azken iterazioa

**Taula berria** lortzeko egin beharreko aldaketak:

$$\begin{cases} e2b \leftarrow e2 * 5/4 \\ e1b \leftarrow e1 - e2 * 27/10 \\ e3b \leftarrow e3 - e2b * 1/10 \end{cases}$$

			1	3	2	0	0	M	M
C <sub>oin</sub>	A <sub>oin</sub>	B <sup>-1</sup> * b	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>
0	x <sub>4</sub>	7/2	0	0	-27/8	1	-1/8	-11/8	1/8
1	x <sub>1</sub>	2	1	0	5/4	0	-1/4	1/4	1/4
3	x <sub>2</sub>	3/2	0	1	-1/8	0	-3/8	-1/8	3/8
Z=13/2									
		Z <sub>j</sub>	1	3	7/8	0	-5/8	-1/8	-7/8
		W <sub>j</sub>	0	0	-4/8	0	-5/8	-1/8-M	-7/8-M

$\forall W_j \leq 0 \Rightarrow$  gelditu

# Soluzioa

Soluzio optimoa bakarra da, oinarrizko aldagaiak ez diren kostu murriztuak ezberdin 0 direlako.

Gainera aldagai artifizialak ez daude oinarrian, beraz bideragarria da.

$$X_1^*=2; X_2^*=3/2; X_3^*=0; X_4^*=7/2; X_5^*=0; q_1^*=0; q_2^*=0 \quad Z^*=13/2$$

# Enuntziatua (6.ariketa, c atala)

**2.Problema duala idatzi eta osagarritzko lasaitasuna erabiliz ebatzi.**

$$\text{Min } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Forma kanonikora pasatu

$$\text{Min } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\rightarrow$   $\cdot(-1)$

$$\text{Min } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -4$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# MATRIZEA IRAULI ( $A^T$ )

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{-2} & \boxed{4} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$



# Dualera pasatu taula erabiliz

Helburu funtzioa: max	$\Leftrightarrow$	Helburu funtzioa: min
i. murrizketa $\leq$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia $\geq 0$
i. murrizketa $=$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia ez-murriztua
i. murrizketa $\geq$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia $\leq 0$
i. aldagaia $\geq 0$	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $\geq$
i. aldagaia ez-murriztua	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $=$
i. aldagaia $\leq 0$	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $\leq$

$$\text{Min } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -4$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dualera  
pasatu

Max

$$z' = -4u_1 + 3u_2 + 5u_3$$

$$-u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 1$$

$$u_1 - 2u_2 + 2u_3 \leq 3$$

$$2u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 2$$

$$u_1, u_3 \geq 0$$

$u_2$  ez-murriztua

# Lasaiera aldagaiak sartu

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & z' = -4u_1 + 3u_2 + 5u_3 \\ & -u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4 = 1 \\ & u_1 - 2u_2 + 2u_3 + u_5 = 3 \\ & 2u_1 + 4u_2 + u_3 + u_6 = 2 \\ & u_1, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0 \\ & u_2 \text{ ez-murriztua}\end{array}$$

# Biderketa eskalarra

$$\begin{array}{ccc} X^T = (x_1, x_2, x_3) & & u^T = (u_1, u_2, u_3) \\ (X^h)^T = (x_4, x_5) & & (u^h)^T = (u_4, u_5, u_6) \end{array}$$

$$x_1 \cdot u_4 = 0 \rightarrow (x_1 \neq 0) u_4 = 0$$

$$x_2 \cdot u_5 = 0 \rightarrow (x_2 \neq 0) u_5 = 0$$

$$x_3 \cdot u_6 = 0$$

$$x_4 \cdot u_1 = 0 \rightarrow (x_4 \neq 0) u_1 = 0$$

$$x_5 \cdot u_2 = 0$$

$$0 \cdot u_3 = 0$$

# Aldagaien balioa lortu

$$3u_2 + u_3 = 1 \} \rightarrow u_3 = 1 - 3u_2 \rightarrow \mathbf{u_3 = 11/8}$$

$$-2u_2 + 2u_3 = 3 \} \rightarrow -2u_2 + 2(1 - 3u_2) = 3 \rightarrow -2u_2 + 2 - 6u_2 = 3 \rightarrow -8u_2 = 1 \rightarrow \mathbf{u_2 = -1/8}$$

$$4u_2 + u_3 + u_6 = 2 \} \rightarrow 4(-1/8) + (11/8) + u_6 = 2 \rightarrow (-4/8) + (11/8) + u_6 = 2 \rightarrow (7/8) + u_6 = 2 \rightarrow \mathbf{u_6 = 9/8}$$

# Soluzioa

Azkenengo soluzioa:

$$u_1^*=0; u_2^* = -1/8; u_3^* = 11/8; u_4^* = 0; u_5^* = 0; u_6^* = 9/8; \quad Z^*=13/2$$

**ESKERRIK ASKO**