SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 5.5

Sea la tabla de costes referida a un problema de transporte:

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A	5	9	-	4	28
Almacén B	6	10	3	-	32
Almacén C	4	2	5	7	60
Demanda	48	29	40	33	

El guion en las posiciones (1,3) y (2,4) indican que no se pueden transportar ninguna cantidad entre esos almacenes y esos destinos.
Determinar una solución inicial básica factible utilizando el método de Vogel y aplicar el algoritmo de transporte para encontrar la solución óptima.

Método de Vogel
Suma de todas las demandas: $\sum_j b_j = 48 + 29 + 40 + 33 = 150$
Suma de todas las ofertas: $\sum_i a_i = 28 + 32 + 60 = 120$
Como la demanda es mayor que la oferta se debe crear un almacén ficticio D, siendo su oferta 30.
Se crea la nueva tabla de costes asignando en las posiciones (1,3) y (2,4) costes de transporte M muy grandes.
Por lo tanto, la tabla de costes equilibrada:

Tabla de costes					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A	5	9	M	4	28
Almacén B	6	10	3	M	32
Almacén C	4	2	5	7	60
Almacén D	0	0	0	0	30
Demanda	48	29	40	33	

Iteración 1:

Paso 1:Calcular las diferencias DF_i y DC_j

Tabla de costes						
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta	DF_i
Almacén A	5	9	M	4	28	1
Almacén B	6	10	3	M	32	3
Almacén C	4	2	5	7	60	2
Almacén D	0	0	0	0	30	0
Demanda	48	29	40	33		
DC_j	4	2	3	4		

Elegir la diferencia mayor de las filas y columnas ⇒ mayor diferencia columnas 1 y 4.
Se elige cualquiera de ellas, por ejemplo, la columna 1.
Se elige en la columna 1 elige el menor coste ⇒(4,1)

Paso 2: $x_{41} = min\{48,30\} = 30$
Poner cero en la oferta del almacén D ⇒ Eliminar la fila 4
Actualizar la demanda de la tienda 1 ⇒ $b_1 = 48 - 30 = 18$

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A					28
Almacén B					32
Almacén C					60
Almacén D	30				
Demanda	18	29	40	33	

<u>Iteración 2:</u>

Paso 1: Calcular las diferencias DF_i y DC_j

Tabla de costes						
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta	DF_i
Almacén A	5	9	M	4	28	1
Almacén B	6	10	3	M	32	3
Almacén C	4	2	5	7	60	2
Almacén D	0	0	0	0	0	
Demanda	18	29	40	33		
DC_j	1	7	2	3		

Elegir la diferencia mayor de las filas y columnas ⇒ la columna 2
Se elige en la columna 2 elige el menor coste ⇒ (3,2)
Paso 2: $x_{41} = min\{29, 60\} = 29$
Poner cero en la demanda de la tienda 2 ⇒ Eliminar la columna 2
Actualizar la oferta del almacén C ⇒ $a_{13} = 60 - 29 = 31$

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A					28
Almacén B					32
Almacén C		29			31
Almacén D	30				
Demanda	18		40	33	

<u>Iteración 3:</u>

Paso 1: Calcular las diferencias DF_i y DC_j

Tabla de costes						
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta	DF_i
Almacén A	5	9	M	4	28	1
Almacén B	6	10	3	M	32	3
Almacén C	4	2	5	7	31	1
Almacén D	0	0	0	0	0	
Demanda	18		40	33		
DC_j	1		2	3		

Elegir la diferencia mayor de las filas y columnas ⇒ mayor diferencia empate entre la columna 4 y fila 2. Elegimos fila 2
Se elige en la fila 2 elige el menor coste ⇒ (2, 3)
Paso 2: $x_{23} = min\{40, 32\} = 32$
Poner cero en la oferta del almacén B ⇒ Eliminar la fila 2
Actualizar la demanda de la tienda 3 ⇒ $b_{23} = 40 - 32 = 8$

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A					28
Almacén B			32		
Almacén C		29			31
Almacén D	30				
Demanda	18		8	33	

Iteración 4:

Paso 1: Calcular las diferencias DF_i y DC_j

Tabla de costes						
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta	DF_i
Almacén A	5	9	M	4	28	1
Almacén B	6	10	3	M		3
Almacén C	4	2	5	7	31	1
Almacén D	0	0	0	0	0	
Demanda	18		8	33		
DC_j	1		M-5	3		

Elegir la diferencia mayor de las filas y columnas ⇒ mayor diferencia en la columna 3

Se elige en la columna 3 el menor coste ⇒ (3, 3)

Paso 2: $x_{33} = min\{8, 31\} = 8$

Poner cero en la demanda de la tienda 3 ⇒ Eliminar la columna 3

Actualizar la oferta del almacén C ⇒ $a_{33} = 31 - 8 = 23$

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A					28
Almacén B			32		
Almacén C		29	8		23
Almacén D	30				
Demanda	18			33	

Iteración 5:

Paso 1: Calcular las diferencias DF_i y DC_j

Tabla de costes						
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta	DF_i
Almacén A	5	9	M	4	28	1
Almacén B	6	10	3	M		
Almacén C	4	2	5	7	23	3
Almacén D	0	0	0	0	0	
Demanda	18			33		
DC_j	1			3		

Elegir la diferencia mayor de las filas y columnas ⇒ Hay empate, elegimos la fila 3

Se elige en la fila 3 el menor coste ⇒ (3, 1)

Paso 2: $x_{31} = min\{18, 23\} = 18$

Poner cero en la demanda de la tienda 1 ⇒ Eliminar la columna 1

Actualizar la oferta del almacén C ⇒ $a_{33} = 23 - 18 = 5$

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A					28
Almacén B			32		
Almacén C	18	29	8		5
Almacén D	30				
Demanda				33	

Paso 3: Como queda la columna 4, asignamos todas las unidades que quedan por asignar y se obtiene la siguiente solución básica factible:

Tabla de flujos					
	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	18	29	8	5	60
Almacén D	30				30
Demanda	48	29	40	33	

Es una solución no degenerada.
Se aplica el algoritmo de transporte para determinar la solución óptima del problema.

Iteración 1:

Paso 1: Se analiza si se cumplen las condiciones de optimalidad del método Simplex.

Para ello se plantean las ecuaciones $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para cada variable básica:

$$x_{14} \rightarrow u_1 + v_4 - c_{14} = 0 \Rightarrow u_1 + v_4 - 4 = 0$$
$$x_{23} \rightarrow u_2 + v_3 - c_{23} = 0 \Rightarrow u_2 + v_3 - 3 = 0$$
$$x_{31} \rightarrow u_3 + v_1 - c_{31} = 0 \Rightarrow u_3 + v_1 - 4 = 0$$
$$x_{32} \rightarrow u_3 + v_2 - c_{32} = 0 \Rightarrow u_3 + v_2 - 2 = 0$$
$$x_{33} \rightarrow u_3 + v_3 - c_{33} = 0 \Rightarrow u_3 + v_3 - 5 = 0$$
$$x_{34} \rightarrow u_3 + v_4 - c_{34} = 0 \Rightarrow u_3 + v_3 - 7 = 0$$
$$x_{41} \rightarrow u_4 + v_1 - c_{41} = 0 \Rightarrow u_4 + v_1 - 0 = 0$$

Haciendo $v_1 = 0$ se resuelve el sistema. La solución obtenida es la siguiente:

$$v_1 = 0, v_2 = -2, v_3 = 1, v_4 = 3, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 0$$

$z_{ij} = u_i + v_j$	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$
$u_1 = 1$	1	-1	2	4
$u_2 = 2$	0	0	3	5
$u_3 = 4$	4	2	5	7
$u_4 = 0$	0	-2	1	3

Por lo tanto, los costes reducidos son:

$W_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$	**1**	**2**	**3**	**4**
A	-4	-10	2-M	0
B	-6	-10	0	5-M
C	0	0	0	0
D	0	-2	1	3

$\exists W_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ se elige entre los positivos el que tiene mayor valor W_{ij}, en este caso $W_{44} \Rightarrow x_{44}$ entra en la base.

Paso 2: Se elige la variable que sale de la base. Para ello se crea un ciclo entre las variables que están en la base y la variable que entra en la base.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	18+τ_1	29	8	5-τ_1	60
Almacén D	30-τ_1			τ_1	30
Demanda	48	29	40	33	

Todos los flujos deben ser positivos, además se debe asignar un flujo positivo a la variable (x_{44}) y habrá una variable entre las básicas que tenga flujo cero, ésa será la variable que salga de la base. Por lo tanto, $\tau_1 = 5$ y sale de la base x_{34}, obteniéndose la segunda solución básica factible.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	23	29	8		60
Almacén D	25			5	30
Demanda	48	29	40	33	

<u>Iteración 2:</u>

<u>Paso 1:</u> Se analiza si se cumplen las condiciones de optimalidad del método Simplex.
Para ello se plantean las ecuaciones $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para cada variable básica:

$$x_{14} \to u_1 + v_4 - c_{14} = 0 \Rightarrow u_1 + v_4 - 4 = 0$$
$$x_{23} \to u_2 + v_3 - c_{23} = 0 \Rightarrow u_2 + v_3 - 3 = 0$$
$$x_{31} \to u_3 + v_1 - c_{31} = 0 \Rightarrow u_3 + v_1 - 4 = 0$$
$$x_{32} \to u_3 + v_2 - c_{32} = 0 \Rightarrow u_3 + v_2 - 2 = 0$$
$$x_{33} \to u_3 + v_3 - c_{33} = 0 \Rightarrow u_3 + v_3 - 5 = 0$$
$$x_{41} \to u_4 + v_1 - c_{41} = 0 \Rightarrow u_4 + v_1 - 0 = 0$$
$$x_{44} \to u_4 + v_4 - c_4 = 0 \Rightarrow u_4 + v_4 - 0 = 0$$

Haciendo $v_1 = 0$ se resuelve el sistema. La solución obtenida es la siguiente:

$$v_1 = 0, v_2 = -2, v_3 = 1, v_4 = 0, u_1 = 4, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 0$$

$z_{ij} = u_i + v_j$	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$
$u_1 = 4$	4	2	5	4
$u_2 = 2$	2	0	3	2
$u_3 = 4$	4	2	5	4
$u_4 = 0$	0	-2	1	0

Por lo tanto, los costes reducidos son:

$W_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$	**1**	**2**	**3**	**4**
A	-1	-7	5-M	0
B	-4	-10	0	2-M
C	0	0	0	-3
D	0	-2	1	0

$\exists W_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ se elige entre los positivos el que tiene mayor valor W_{ij}, en este caso $W_{43} \Rightarrow x_{43}$ entra en la base.
<u>Paso 2:</u> Se elige la variable que sale de la base. Para ello se crea un ciclo entre las variables que están en la base y la variable que entra en la base.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	23+τ_2	29	8-τ_2		60
Almacén D	25-τ_2		τ_2	5	30
Demanda	48	29	40	33	

Todos los flujos deben ser positivos, además se debe asignar un flujo positivo a la variable (x_{43}) y habrá una variable entre las básicas que tenga flujo cero, ésa será la variable que salga de la base. Por lo tanto, $\tau_2 = 8$ y sale de la base x_{33}, obteniéndose la tercera solución básica factible.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	31	29			60
Almacén D	17		8	5	30
Demanda	48	29	40	33	

<u>Iteración 3:</u>

<u>Paso 1:</u> Se analiza si se cumplen las condiciones de optimalidad del método Simplex.
Para ello se plantean las ecuaciones $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para cada variable básica:

$$x_{14} \rightarrow u_1 + v_4 - c_{14} = 0 \Rightarrow u_1 + v_4 - 4 = 0$$
$$x_{23} \rightarrow u_2 + v_3 - c_{23} = 0 \Rightarrow u_2 + v_3 - 3 = 0$$
$$x_{31} \rightarrow u_3 + v_1 - c_{31} = 0 \Rightarrow u_3 + v_1 - 4 = 0$$
$$x_{32} \rightarrow u_3 + v_2 - c_{32} = 0 \Rightarrow u_3 + v_2 - 2 = 0$$
$$x_{41} \rightarrow u_4 + v_1 - c_{41} = 0 \Rightarrow u_4 + v_1 - 0 = 0$$
$$x_{43} \rightarrow u_4 + v_3 - c_{43} = 0 \Rightarrow u_4 + v_3 - 0 = 0$$
$$x_{44} \rightarrow u_4 + v_4 - c_4 = 0 \Rightarrow u_4 + v_4 - 0 = 0$$

Haciendo $v_1 = 0$ se resuelve el sistema. La solución obtenida es la siguiente:

$$v_1 = 0, v_2 = -2, v_3 = 0, v_4 = 0, u_1 = 4, u_2 = 3, u_3 = 4, u_4 = 0$$

$z_{ij} = u_i + v_j$	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 0$
$u_1 = 4$	4	2	0	4
$u_2 = 3$	3	1	3	3
$u_3 = 4$	4	2	4	4
$u_4 = 0$	0	-2	0	0

Por lo tanto, los costes reducidos son:

$W_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$	**1**	**2**	**3**	**4**
A	-1	-7	-M	0
B	-3	-9	0	3-M
C	0	0	-1	-3
D	0	-2	0	0

$W_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j \Rightarrow$ La solución obtenida en la tercera iteración es la solución factible óptima.
El coste mínimo de transporte es:

$$31 \cdot 4 + 17 \cdot 0 + 29 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + 8 \cdot 0 + 28 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 390$$

Observación

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Oferta
Almacén A				28	28
Almacén B			32		32
Almacén C	31	29			60
Almacén D	17		8	5	30
Demanda	48	29	40	33	

Como el almacén D es ficticio, la tienda 1, la tienda 3 y la tienda 4 no reciben sus demandas, por lo tanto la oferta existente no es suficiente.