

3. GAIA: ZORIZKO ALDAGAI DISKRETUA

1. Dado bat jaurtitzen da. Demagun zenbaki bikoiti bat ateratzen bada 100 euro irabazten ditugula eta zenbaki bakoiti bat ateratzen bada, berriz, 100 euro galtzen ditugula.

a) Definitu X ="Irabazia" zorizko aldagaia.

b) Lortu eta irudikatu banaketa funtzioa.

c) Jolas justua al da?

2. Izan bitez X zorizko aldagai diskretua eta $p(x)$ bere probabilitate funtzioa:

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	2/8	1/8	2/8	2/8	1/8

a) Banaketa funtzioa kalkulatu eta irudikatu.

b) Kalkulatu $P(1 < X \leq 2.7)$

c) Kalkulatu $P(1 \leq X < 3.5)$

d) Kalkulatu batezbestekoa eta desbiderazio tipikoa.

3. Demagun aseguru-etxe batek, r urteko prima duen seguru batekin, p istripu probabilitatea izanik, M kantitatea aseguratzeko duela. Kalkula ezazu aseguru-etxeak espero duen irabazia.

4. Izan bitez X zorizko aldagai diskretua eta $p(x)$ aldagai honen probabilitate funtzioa:

x_i	2	3	4
$p(x_i)$	0.08	0.84	0.08

a) Kalkulatu μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipikoa.

b) Kalkulatu $P(2 < X < 4)$

c) Tchebyshev-en teorema aplikatuz, kalkula ezazu $(\mu - 2.5\sigma, \mu + 2.5\sigma)$ tartearen probabilitatearen behe-muga.

d) b eta c atalak konparatu eta ikus ezazu Tchebyshev-en behe-muga ezin daitekeela hobetu.

5. Demagun sistema batek bederatzi osagai dituela eta sistemak era egokian funtzionatzeko sei osagaiek era egokian funtzionatu behar dutela. Osagai batek era egokian funtzionatzeko probabilitatea 0.95 bada, kalkula ezazu sistemak era egokian funtzionatzeko probabilitatea.

6. Demagun idazle batek orrialdeko batez beste 4 akats egiten dituela.

- a) Kalkula ezazu orrialde batean gutxienez akats bat eta gehienez hiru akats egoteko probabilitatea.
 - b) Kalkula ezazu orrialde-erdi batean gutxienez bi errore egoteko probabilitatea.
7. Kutxa batean bola gorri bat eta zazpi bola zuri daude. Bola bat kutxatik atera, bere kolorea idatzi eta kutxara itzultzen da.
- a) Banaketa binomiala erabiliz kalkula ezazu horrelako 60 erauzketetan bola gorria hiru aldiz ateratzeko probabilitatea.
 - b) Poisson-en banaketa erabiliz kalkula ezazu horrelako 60 erauzketetan bola gorria hiru aldiz ateratzeko probabilitatea.
8. Telefono-zentral batean 14:00etatik 16:00etara, minuturo batez beste 2.6 dei jasotzen dira.
- a) Telefono-zentralaren kapazitatea minuturo hiru deikoa bada, zein da telefono-zentrala komunikatzen egoteko probabilitatea?
 - b) Aurreko probabilitate gehienez 0.1 izateko, zein izan beharko litzateke telefono-zentralaren kapazitate minimoa?
9. Hainbat estatistikak, marka zehatz bateko bonbillen %80a kalitate onekoak direla ondorioztatu dute. Marka horretako 300 bonbilla zoriz aukeratu dira. Tchebyshev-en teorema erabiliz, aukeratutako 300 bonbillen artean gutxienez 226 eta gehienez 254 kalitate onekoak izateko probabilitatea baxua edo altua den ondorioztatu.
10. Demagun bi dado jaurtitzen ditugula eta hurrengo zorizko aldagaia definitzen dugula: $X =$ "dado bien batura". Kalkula itzazu aldagai diskretu honen itzaropena eta bariantza.
11. Pertsona batek serum zehatz bati alergia izateko probabilitatea 0.01 da. Demagun 10 pertsonari serum hori injektatu zaiela:
- a) Kalkulatu bi pertsonak baino gutxiagok alergia izateko probabilitatea.
 - b) Kalkulatu zortzi pertsonak baino gehiagok alergia izateko probabilitatea.
12. Zozketa batean bi sari daude, sari bat 500 eurokoa da eta bestea 200 eurokoa, saria bakoitza irabazteko probabilitatea, 0.001 eta 0.003 izanik, hurrenez hurren. Zein izango litzateke tiketaren prezio justua?

13. Makina batek egindako torlojuen %5a akastunak dira. Torlojuak 10 unitateko poltsetan paketatzen dira eta poltsa hauek 100 poltsetako kutxatan sartzen dira. Kalkula ezazu kutxa bateko poltsa guztietan akastunak diren torloju kopurua bi baino gutxiago izateko probabilitatea.
14. Kalitate-kontrola egiteko 12 irrati dituen irrati-sorta batetik bi aukeratzen dira. Irrati-sortak kalitate kontrola gainditzeko aukeratutako bi irratiak akats gabeak izan behar dira.
- a) Kalkula ezazu irrati-sortako irrati bat akastuna izanik kalitate kontrola gainditzeko probabilitatea.
 - b) Kalkula ezazu irrati-sortako bi irrati akastuna izanik kalitate kontrola gainditzeko probabilitatea.
 - c) Kalkula ezazu irrati-sortako hiru irrati akastuna izanik kalitate kontrola gainditzeko probabilitatea
 - d) Kalkula ezazu irrati-sortako hiru irrati akastuna izanik kalitate kontrola **ez** gainditzeko probabilitatea.
15. X zorizko aldagaiak (denbora tarte finko batean bidegurutze batera heltzen den auto kopuruak) sarritan Poisson-en banaketa (hurbildua) du. Bidegurutze horretara minutu batean batezbeste heltzen den auto kopurua ezaguna bada, hau da λ parametroa ezaguna bada, Poisson-en banaketa errepide-zirkulazioa kontrolatzeko sistema sortzen ari den ingeniariarentzat lagungarria litzateke. Demagun ingeniariak minutu bakoitzean batezbeste bidegurtzera auto bat heltzen dela estimatzen duela.
- a) Zein da minutu baten bidegurtzera hiru auto edo gehiago heltzeko probabilitatea?
 - b) Ziurta al daiteke minutu batean heltzen den auto kopurua ez dela inoiz hiru baino handiagoa izango?
16. Arratoi labirinto batean korridore zuzen bat dago, honen bukaeran bidegurutze bat egonik. Bidegurutze honetan arratoia eskuinera edo ezkerrera joan daiteke. Demagun banan-banan labirintoan 10 arratoi jartzen ditugula. Arratoi bakoitzak zoriz zein aldetara joango den aukeratzen badu, zein da eskuinera joango diren arratoi kopuruak duen banaketa? Eta ezkerra joango diren arratoi kopuruarena? Zein da gutxienez bederatzi arratoi alde berdinera joateko probabilitatea?
17. Urte batean industria istripu bat egoteko probabilitatea 0.001 da. Aseguru-etxe batek enpresa bati 10.000 euroko urteko kostua duen istripu-aseguru bat

eskaintzen dio, istripua balego 5 milioi euroko kalte-ordainketa egiteko konpromiso hartuz. Kalkula ezazu aseguru-etxeak espero duen irabazia.

18. 200 alarma dituen igorpen batean 6 alarma akastunak dira. Hiru alarma zoriz aukeratu eta erosle bati bidaltzen zaizkio. Kalkula ezazu bidalitako alarma bat akastuna izateko probabilitatea:
 - a) Banaketa Hipergeometrikoa erabiliz.
 - b) Banaketa Binomiala erabiliz.
19. Bikote batek lehenengo alaba jaio arte umeak izatea erabaki du. Kalkula ezazu gutxienez lau ume izateko probabilitatea.
20. Astero ordenagailu baten matxura kopurua $\lambda=0.4$ parametrodun Poisson-en banaketa duen zorizko aldagaia da. Zein da ordenagailuak ondoz ondoko bi astetan matxurarik ez izateko probabilitatea?
21. Zoriz 3 gramoko pisua duten bost bola lau kutxatan banatu dira. Lehenengo kutxaren pisua adierazten duen zorizko aldagaiaren probabilitate funtzioa eta batezbestekoa kalkulatu.
22. Demagun dado bat lehenengo jaurtiketan ateratako emaitza lortu arte behin eta berriro jaurtitzen dugula. Izan bedi X dadoaren jaurtiketa kopurua adierazten duen zorizko aldagaia.
 - a) Kalkula itzazu X aldagaiak hartzen dituen balioak.
 - b) X aldagaiaren probabilitate funtzioa.
 - c) Froga ezazu b ataleko funtzioa probabilitate funtzioa dela.
23. Kutxa batean hiru bola zuri eta hiru bola beltz daude. Bola zuri bat atera arte, banan-banan bolak ateratzen dira.
 - a) Lor ezazu lagin espazioa.
 - b) Izan bedi N ="ateratako bola kopurua" zorizko aldagaia. Kalkula ezazu zorizko aldagaiaren probabilitate funtzioa.
 - c) Kalkula ezazu bariantza.
24. Demagun txanpon bat jaurtitzean aurpegia lortzeko probabilitatea p dela, eta txanpona ondoz ondoko bi emaitza desberdin lortu arte edota lau jaurtiketa egin arte jaurtitzen dela.
 - a) Jaurtiketa kopurua adierazten duen zorizko aldagaiaren probabilitate funtzioa lortu.

- b) Froga ezazu aurreko atalean lortutako funtzioa probabilitate funtzioa dela.
- c) $p=1/3$ dela kontsideratuz, kalkula ezazu batezbestekoa.
25. Izan bedi X zorizko aldagai diskretua, $x=10, 20, 30$ balioak hartzen dituen. Zehatz bedi hurrengo funtzioetatik zeintzuk diren probabilitate-funtzioak:
- a) $p(10)=0.3, p(20)=0.6, p(30)=0.1$
- b) $p(10)=1/3, p(20)=1/2, p(30)=1/3$
- c) $p(10)=0.4, p(20)=0.8, p(30)=-0.2$
26. Trokelatzeko makena batek 50 pieza egin ditu, zeintzuetatik 45 pieza onargarriak diren. Zoriz 50 piezatik 20 pieza hartu dira.
- a) Zein da pieza horietatik guztiak onargarriak izateko probabilitatea?
- b) Zein da pieza horietatik hamabost edo hamasei pieza onargarriak izateko probabilitatea?
- c) Zenbat pieza onargarri itxaron daitezke?
27. Gripearen aurkako txertoak pertsona bati erreakzioa egiteko probabilitatea 0.01ekoa da. Zoriz 300 pertsona hartu dira.
- a) Zein da gehienez 3 pertsonari txertoak erreakzioa egiteko probabilitatea?
- b) Zein da gutxienez 4 eta gehienez 7 pertsonari gripearen aurkako txertoak erreakzioa egiteko probabilitatea?
28. Lanpara fluoreszente baten iraupena gutxienez 5.000 ordukoa izateko probabilitatea 0.85ekoa da. Zoriz mota horretako 20 lanpara hartu dira.
- a) Zein da 20 lanparatik 18 lanparak gutxienez 5.000 orduko iraupena izateko probabilitatea.
- b) Kalkula bedi 20 lanparatik gutxienez 15 lanparak gutxienez 5.000 orduko iraupena izateko probabilitatea.
- c) Hogei lanparatik 17 lanpara gutxienez 5.000 orduko iraupenekoak dira. Hogei lanparatik zoriz lau lanpara hartu dira. Zein da bi edo hiru lanpara gutxienez 5.000 orduko iraupenekoak izateko probabilitatea?
29. Tornu automatiko batean egunero, batez beste 2 aldaketa egin dira. Tornu automatikoa ez dabil ongi egunean lau aldaketa baino gehiago egin behar direnean. Demagun tornuan egun batean izandako aldaketa-kopuruak ez duela

eragiten hurrengo egunean tornuan izango diren aldaketa-kopuruan. Zein da bi egun jarraian tornua ongi aritzeko probabilitatea?

30. Ingeniaritza-enpresa batek goizero, batezbeste, 1.5 eskari jasotzen ditu.

- Kalkula bedi goiz batean ingeniaritza-enpresak eskaririk ez jasotzeko probabilitatea.
- Zein da goiz batean ingeniaritza-enpresak hiru eskari baino gutxiago jasotzeko probabilitatea?
- Lor bedi aste bateko bost goizetan ingeniaritza-enpresak bost eskari baino gutxiago jasotzeko probabilitatea.

Emaitzak:

1) a) $X(1)=-100$; $X(2)=100$; $X(3)=-100$; $X(4)=100$; $X(5)=-100$; $X(6)=100$;

b)

$X=x$	$P(X=x)$
-100	1/2
100	1/2

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -100 \\ 1/2 & -100 \leq x < 100 \\ 1 & x \geq 100 \end{cases}$$

c) Bai.

$$2) a) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2/8 & 1 \leq x < 2 \\ 3/8 & 2 \leq x < 3 \\ 5/8 & 3 \leq x < 4 \\ 7/8 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}; b) 1/8; c) 5/8; d) E(X) = 2.875; \sigma_x = 1.363589$$

3) $E(X) = r - Mp$

4) a) $E(X) = 3$; $\sigma_x = 0.4$; b) 0.84; c) 0.84

5) 0.9993

6) a) 0.4152; b) 0.594

7) a) 0.03307; b) 0.038889

8) a) 0.264; b) $k=6$

9) 0.755102 (probabilitatea nahiko altua da)

10) $E(X) = 7$; $\sigma_x^2 = 5.8\hat{3}$

11) a) 0.9958; b) ; 0

12) 1.1 euro

13) 0.00012165

14) a) $0.833\hat{3}$; b) 0.6818; c) 0.5454; d) 0.4545

15) a) 0.0803; b) Ez daiteke ziurtatu baino probabilitatea oso baxua da: 0.019

16) $\text{Bin}(10, 1/2)$; $\text{Bin}(10, 1/2)$; 0.0214

17) $E(X) = 5.000$ euro

18) a) 0.085523; b) 0.084681

19) 0.125

20) 0.449329

21)

$X=x$	$P(X=x)$
0	$3^5 / 4^5$
3	$5 \cdot 3^4 / 4^5$
6	$10 \cdot 3^3 / 4^5$
9	$10 \cdot 3^2 / 4^5$
12	$5 \cdot 3 / 4^5$
15	$1 / 4^5$

$E(X) = 3.75$

22) a) X aldagaiak hurrengo balioak har ditzake: 2,3,4,...; b) $P(X = n) = \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}$

23) a) $\Omega = \{z, bz, bbz, bbbz\}$;

b)

$N=n$	$P(N=n)$
1	1/2

2	3/10
3	3/20
4	1/20

c) $\sigma_x^2 = 0.7875$

24) a)

X=x	P(X=x)
2	$2p(1-p)$
3	$(1-p)p$
4	$p^3(1-p)+p^4+(1-p)^3p+(1-p)^4=p^3+(1-p)^3$

c) $E(X) = \frac{26}{9}$

25) a) Bai; b) Ez; c) Ez

26) a) 0.06726; b) 0.075917; c) 18

27) a) 0.6472; b) 0.3408

28) a) 0.02293; b) 0.9326; c) 0.5053

29) 0.8974

30) a) 0.2231; b) 0.8088; c) 0.1321