Ikerketa Operatiboa

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritza

Bilboko Ingeniaritza Eskola

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

3.1 Sarrera

3.2 Problema primalaren eta dualaren arteko erlazioa

3.3 Osagarrizko lasaitasuna

3.4 Simplex dual metodoa

3.5 Sentikortasun analisia

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

- **3.1 Sarrera:**

- Programazio linealaren garapenean dualtasuna kontzepturik garrantzitsuenetarikoa da

- PLko edozein problemari hemendik aurrera problema primala deituko diogunari, beste problema bat, problema duala deritzona, egoki diezaiokegu.

- Erlazioa: Bi ereduetako bat Simplex metodoa erabiliz ebatziz gero, bi problemen soluzioa lortzen da, ebatzitako ereduaren taula optimoan beste ereduaren soluzio optimoa lortzeko informazioa egonik.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Dualtasuna kontuan hartzeko arrazoi batzuk honako hauek dira:

- Simplex algoritmoarekin iterazio kopurua eredu linealak duen aldagai kopuruaren mende baino murrizketen mende dago. Ondorioz, eredu lineal bat ebazterakoan dagokion eredu dualaren soluzio optimoa ere lortuko denez, ereduen artean ebatzia izango dena aukera daiteke.
- Eredu dualaren soluzioak eredu primalaren soluzioari buruzko informazioa ematen du
- Dualtasunaren propietateak kontuan hartuz, algoritmo bat sortu da, Simplex dual algoritmoa. Algoritmo hau zenbait eredu lineal ebazteko Simplex algoritmoa baino eraginkorragoa da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX \geq B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Forma kanonikoan idatzitako

problema primala

$$\begin{aligned} \max \quad & B^T U \\ \text{non} \quad & A^T U \leq C^T \\ & U \geq 0 \end{aligned}$$

Problema primalari elkartutako

problema duala

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Forma estandarrean idatzitako
problema primala

$$\begin{aligned} \max \quad & B^T U \\ \text{non} \quad & A^T U \leq C^T \\ & U \text{ ez-murriztua} \end{aligned}$$

Problema primalari elkartutako
problema duala

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

➨ **3.2 Problema primalaren eta dualaren arteko erlazioa:**

Bi ereduen arteko erlazioa ondorengoa da:

- Eredu primalaren koefiziente matrizea $A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ bada (hau da, ereduak m murrizketa eta n aldagai baditu) ⇒ eredu dualaren koefiziente matrizea $A^T \in \mathcal{M}_{nxm}(\mathbb{R})$ da (hau da, ereduak n murrizketa eta m aldagai ditu)
- b bektorea, eredua primalaren gai askea dena, problema dualaren helburu funtzioko koefizienteen bektorea da
- c bektorea, eredu primalaren helburu funtzioko koefizienteek sortzen duten bektorea, problema dualaren gai-askea da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Helburu funtzioaren, murrizketen eta aldagaien arteko erlazioa honako taula honetan laburbiltzen da:

Helburu funtzioa: max	$\Leftrightarrow$	**Helburu funtzioa: min**
i. murrizketa $\leq$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia ≥ 0
i. murrizketa $=$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia ez-murriztua
i. murrizketa $\geq$	$\Leftrightarrow$	i. aldagaia ≤ 0
i. aldagaia ≥ 0	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $\geq$
i. aldagaia ez-murriztua	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $=$
i. aldagaia ≤ 0	$\Leftrightarrow$	i. murrizketa $\leq$

<u>Teorema:</u>

Problema dualaren duala problema primala da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Idatzi ondorengo PLko problemen problema dualak

$$\begin{aligned}
\min \quad z = \quad & 3x_1 - 3x_2 - x_3 \\
& x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\
& -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq -12 \\
& x_1 - 2x_2 - 7x_3 \leq 16 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

$$\min\ z = 3x_1 + 5x_2 - 7x_3$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$$

$$2x_2 + 5x_3 = 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \ \text{ez-murriztua}$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Teorema:

- Problema primalak edo problema dualak soluzio optimo finitua badu, beste problemak ere soluzio optimo finitua du eta helburu funtzioaren balioak optimoan bat datoz.

- Problema batek soluzio optimo bornatugabea badu, beste problema ez du soluzio bideragarririk.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Ondorengo taulan aurreko kasuak laburbiltzen dira:

Problema primala		Problema duala
Soluzio optimo finitua	$\Leftrightarrow$ Helburu funtzioak bat datoz	Soluzio optimo finitua
Soluzio bornatugabea	$\Rightarrow$	Soluzio bideragarririk gabe
Soluzio bideragarririk gabe	$\Leftarrow$	Soluzio bornatugabea
Soluzio bideragarririk gabe	$\Rightarrow$	Soluzio bideragarririk gabe edo soluzio bornatugabea
Soluzio bideragarririk gabe edo soluzio bornatugabea	$\Leftarrow$	Soluzio bideragarririk gabe

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Korolarioa:

Forma estandarrean idatzitako PLko problema baten oinarrizko soluzio optimo bateko lasaiera-aldagaien kostu murriztuak, balio absolutuan kontsideratuz, forma kanonikoan idatzitako problema dualaren soluzioa dira

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Izan bedi honako programazio linealeko problema

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

- **3.3 Osagarrizko lasaitasuna**

Korolarioa:

Izan bitez (X, X^h) eta (U, U^h) problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarriak, X^h eta U^h problema primalaren eta dualaren lasaiera-aldagaiak izanik, hurrenez hurren. Orduan, soluzio hauek optimoak izateko baldintza beharrezkoak eta nahikoak honako hauek dira:

$$X_i \cdot U_i^h = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$U_j \cdot X_j^h = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Emaitza hau oso garrantzitsua da, izan ere, honi esker problema baten soluzio optimoa ezagutuz, beste problemaren soluzio optimoa lor daiteke.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Izan bedi $x_1{}^* = x_3{}^* = 0,\ x_2{}^* = 10.4,\ x_4{}^* = 0.4$ honako problemaren soluzio optimoa. Lortu problema dualaren soluzio optimoa.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\
& x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

- **3.4 Simplex dual metodoa**

Metodo honen bidez aldagai artifizialak erabili gabe problemaren soluzio optimoa lor daiteke. Izan bedi honako minimizazio (maximizazio) problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{non} \quad & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex dual metodoaren pausuak ondorengoak dira:

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Algoritmoa

1. Pausua: Hasierako taula $W_j = z_j \text{-} c_j \leq 0$ $\left(W_j = z_j - c_j \geq 0\right)$ beteko duena eraiki. Izan bedi, X_D oinarrizko soluzioa $W_j = z_j \text{-} c_j \leq 0 \; \forall \mathrm{j}$ $\left(W_j = z_j - c_j \geq 0 \; \forall \mathrm{j}\right)$ betetzen duena (hau da, X_D optimaltasun baldintzak betetzen ditu)

Bi kasu daude:

1.1 $X_D \geq 0 \Rightarrow$ Soluzio bideragarria da $\Rightarrow$ Gelditu $\Rightarrow$ Optimoa lortu dugu.

1.2 $\exists k$: $X_{DK} < 0 \Rightarrow i = \max_k\{|X_{Dk}| \;/\; X_{Dk} < 0\}$ aukeratu $\Rightarrow$ x_i oinarritik irteten da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

2. Pausua:

2.1 i aurreko pausuan finkatutakoa izanik $a_{ij} > 0 \; \forall j \Rightarrow$ dualaren soluzioa bornatugabea da (problema primala bideraezina da)

2.2 $\exists k$: $a_{ik} < 0 \;\; \Rightarrow j = \min_{k, a_{ik}<0} \left\{ \frac{|z_k - c_k|}{|a_{ik}|} \right\} \Rightarrow x_j$ aldagaia oinarrian sartzen da.

3. Pausua: a_{ij} pibotea erabiliz oinarri aldaketa gauzatzen da.

4. Pausua: 1. pausura joan

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Ondoko problema Simplex dual metodoa aplikatuz ebatzi:

$$\begin{aligned}
\min \quad z = \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
& 2x_1 + x_4 \geq 250 \\
& 3x_2 \geq 1000 \\
& 3x_2 + 10x_3 + 6x_4 \geq 750 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

- **3.5 Sentikortasun analisia**

Sentikortasun analisia eredu linealaren soluzio optimoa kalkulatu ondoren egiten da, eredu linealaren parametroetan gertatutako aldaketek soluzio optimoaren gain izango duten eragina ezagutzeko asmoz. Aldaketek A koefiziente matrizean, b gai-askean eta c helburu funtzioko koefizienteetan gerta daitezke.

Bi kasu desberdin daude:

(a) Bideragarritasunean aldaketak egotea

(b) Optimaltasunean aldaketak egotea

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

3.5.1 Bideragarritasunean aldaketak egotea

Ondorengo aldaketek soluzio optimoaren bideragarritasunean eragina izaten dute:

- Gai-askeko aldaketek
- Murrizketa berrien gehiketak

Gogoratu soluzio optimoa bideragarria izateko $x_B = B^{-1} \cdot b \geq 0$ bete behar dela. Aurreko bi kasuetan soluzio optimoa ez-bideragarria izango da oinarrizkoa den aldagaien baten balioa negatiboa bilakatzen bada.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Aldaketak b bektorean:

Izan bitez eredu lineal bat eta bere soluzioa. Demagun b gai-askean aldaketa bat gertatzen dela eta aldaketaren ondorioz $\hat{b}$ gai-aske berria sortzen dela.

1. Eredua

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & c^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

2. Eredua

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & c^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq \hat{b} \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Aldaketak sortutako eragina aztertzeko, 1. ereduari dagokion taula optimoan oinarrituko gara eta $\hat{b}$ gai-aske berriak taula horretan duen eragina aztertuko dugu

Programazio Lineala. Simplex metodoa

1. ereduko taula optimoa

		c_i	c_1	c_2	…	c_n
$C_{oinarrizko}$	$A_{oinarrizkoa}$	$B^{-1} \cdot b$	x_1	x_2	…	x_n
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	$Y = B^{-1} \cdot A$			
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}				
…	…	…				
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}				
$Z = \sum_{k=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i}$		z_j	z_1	z_2	…	z_n
		z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	…	z_n-c_n

2. ereduko hasierako taula

		c_i	c_1	c_2	…	c_n
$C_{oinarrizko}$	$A_{oinarrizkoa}$	$B^{-1} \cdot \hat{b}$	x_1	x_2	…	x_n
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	$Y = B^{-1} \cdot A$			
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}				
…	…	…				
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}				
$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i}$		z_j	z_1	z_2	…	z_n
		z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	…	z_n-c_n

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Taula honetan $\hat{x}_B = B^{-1} \cdot \hat{b}$ zutabea eta ondorioz $\hat{z}$ helburu funtzioaren balioa aldatzen dira.

2. ereduko taula optimoan bi kasu gerta daitezke:

1. kasua: $\hat{x}_B = B^{-1} \cdot \hat{b} \geq 0$ bada, soluzio optimoaren bideragarritasuna mantentzen da $\Rightarrow$ Soluzio optimoa $\hat{x}_B$ eta helburu funzioaren balioa $\hat{z}$ dira.

2. kasua: $\hat{x}_B = B^{-1} \cdot \hat{b} \ngeq 0$ bada, soluzio optimoaren bideragarritasuna galdu egiten da. Kasu honetan 2. ereduko hasierako taulan Simplex dual metodoa aplikatu.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Ondorengo probleman Simplex metodoa aplikatu ondoren lortzen den taula optimoan oinarrituz:

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\
& 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Gai-askea $b^T = (40,30)$ izatera aldatzen bada gertatzen dena aztertu

(b) Gai-askea $b^T = (50,20)$ izatera aldatzen bada gertatzen dena aztertu

(c)Zehaztu soluzio bideragarria izaten jarraitzeko gai-askearen lehenengo koordenatuak zein balioen artean egon behar den.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Murrizketa berrien gehiketa:

m ekuazio eta n ezezagun dituen eredu batean ekuazio bat gehituz gero honako hau dugu:

1. Eredua

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \ & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

2. Eredua

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \ & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n \leq b_{m+1} \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Aldaketak duen eragina aztertzeko, 1. ereduari dagokion taula optimoan murrizketa berria erantsi behar da.

Programazio Lineala. Simplex metodoa

1. ereduko taula optimoa

		c_i	c_1	c_2	...	c_n
$C_{oinarrizko}$	$A_{oinarrizkoa}$	$B^{-1}\cdot b$	x_1	x_2	...	x_n
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	...	1 ... 0	...	
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}	...	0 ... 0	...	
...	...	...	...	0 ... 1	...	
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}				
$Z=\sum_{k=1}^{m} c_{B_l}x_{B_l}$		z_j	z_1	z_2	...	z_n
		z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	...	z_n-c_n

Oinarrizko aldagaiekin erlazionatutako identitate matrizea

2. ereduko hasierako taula

		c_i	c_1	c_2	...	c_n	c_{n+1}
$C_{oinarrizk}$	$A_{oinarrizk}$	$B^{-1}\cdot b$	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	...	1	...	0 ...	0
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}	...	0	...	0 ...	0
...	...	...	...	0	...	1 ...	0
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}					
$c_{B_{m+1}}$	OA_{m+1}	$x_{B_{m+1}}$	...	0	...	... ...	1
$Z=\sum_{k=1}^{m} c_{B_l}x_{B_l}$		z_j	z_1	z_2	...	z_n	z_{n+1}
		z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	...	z_n-c_n	z_{n+1}-c_{n+1}

Murrizketa berriaren lasaiera aldagaia

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Taula berrian oinarrizko aldagaiei dagozkien zutabeetan identate matrizea eduki ahal izateko, errenkaden arteko eragiketak egin behar dira

Aldaketa hauen ondorioz bi kasu gerta daitezke:

1. kasua: $\hat{x}_B \geq 0$ bada, soluzio optimoaren bideragarritasuna mantentzen da $\Rightarrow$ Soluzio optimoa $\hat{x}_B$ eta helburu funtzioaren balioa $\hat{z}$ dira.

2. kasua: $\hat{x}_B \ngeq 0$ bada, soluzio optimoaren bideragarritasuna galdu egiten da. Kasu honetan 2. ereduko hasierako taulan Simplex dual metodoa aplikatu.

Praktikan, lehenengo eta behi gehitzen den murrizketa erredundantea den edo ez aztertzen da. Murrizketa erredundantea bada, soluzio optimoa mantendu egiten da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Ondorengo probleman Simplex metodoa aplikatu ondoren lortzen den taula optimoan oinarrituz:

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) $x_2 + 3x_3 \leq 10$ murrizketa gehitzean gertatzen dena aztertu

(b) $x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10$ murrizketa gehitzean gertatzen dena aztertu

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

3.5.2 Optimaltasunean aldaketak egotea

Optimaltasunean eragina duten aldaketak eredu funtzioko koefizienteetan dauden aldaketak dira, izan ere optimaltasun baldintza z_j-c_j kostu murriztuekin erlazionatuta dago.

Izan bedi eredu lineal bat, zeinaren soluzio optimoa ezaguna den. Demagun c helburu funtzioko koefizientea aldatu egin dela, bektore berria $\hat{c}$ izanik.

1. Eredua

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & c^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

2. Eredua

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & \hat{c}^T X \\ \text{non} \quad & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Aldaketak duen eragina aztertzeko, 1. ereduko taula optimoan oinarriztu eta $\hat{c}$ helburu funtzioko koefiziente berriak duen eragina aztertuko dugu:

1. ereduko taula optimoa

		c_i	c_1	c_2	$\dots$	c_n
$C_{oinarrizkoa}$	$A_{oinarrizkoa}$	$B^{-1}\cdot b$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	$Y = B^{-1}\cdot A$			
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}				
$\dots$	$\dots$	$\dots$				
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}				
$Z = \sum_{k=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i}$		z_j	z_1	z_2	$\dots$	z_n
		z_j-c_j	z_1-c_1	z_2-c_2	$\dots$	z_n-c_n

2. ereduko hasierako taula

		$\hat{c}_i$	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\dots$	$\hat{c}_n$
$C_{oinarrizkoa}$	$A_{oinarrizkoa}$	$B^{-1}\cdot b$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
c_{B_1}	OA_1	x_{B_1}	$Y = B^{-1}\cdot A$			
c_{B_2}	OA_2	x_{B_2}				
$\dots$	$\dots$	$\dots$				
c_{B_m}	OA_m	x_{B_m}				
$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{m} \hat{c}_{B_i} x_{B_i}$		$\hat{z}_j$	$\hat{z}_1$	$\hat{z}_2$	$\dots$	$\hat{z}_n$
		$\hat{z}_j$-$\hat{c}_j$	$\hat{z}_1$-$\hat{c}_1$	$\hat{z}_2$-$\hat{c}_2$	$\dots$	$\hat{z}_n$-$\hat{c}_n$

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Behin $\hat{z}_j$ -$\hat{c}_j$ eta $\hat{z}$ balioak kalkulatuak izan direnean, 2. ereduaren hasierako taulan jasotzen dira.

Aldaketa hauen ondorioz bi kasu gerta daitezke:

1. kasua: $\hat{z}_j$-$\hat{c}_j \geq 0 \ \ \forall j$ maximizazio kasuan ($\hat{z}_j$-$\hat{c}_j \leq \ 0$ ∀j minimizazioan) $\Rightarrow x_B$ soluzio bideragarria optimoa da $\Rightarrow$ Soluzio optimoa x_B da eta $\hat{z} = \hat{c}_B^T \cdot x_B$ helburu funzioaren balio optimoa da

2. $\exists j \ \ \hat{z}_j$-$\hat{c}_j < 0$ maximizazio kasuan ($\exists j \ \ \hat{z}_j$-$\hat{c}_j > 0$ minimizazioan) $\Rightarrow x_B$ ez da soluzio optimoa eta Simplex algoritmoa erabili behar da.

Dualtasuna eta Sentikortasun analisia

Ondorengo probleman Simplex metodoa aplikatu ondoren lortzen den taula optimoan oinarrituz:

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\
& 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Helburu-funtzioa $4x_1 + 2x_2 + 5x_3$ izatera aldatzen bada gertatzen dena aztertu

(b) Helburu-funtzioa $x_1 + x_2 + 2x_3$ izatera aldatzen bada gertatzen dena aztertu