

Lengoiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

Haskell-eko praktika

Automata Finituekin zerikusia duten algoritmo batzuen implementazioa.

*Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Bilboko Ingeniaritza Eskola (UPV/EHU)
Lengoaia eta Sistema Informatikoak Saila*

2. maila
2019-2020 ikasturtea

Azken eguneraketa: 2019/11/11

Aurkibidea

1	Laburdurak	2
2	Oinarrizko definizioak	2
2.1	Hitz hutsa (ε) eta trantsizio hutsak (ε trantsizioak)	2
2.2	AFDak	3
2.3	AFEDak	3
2.4	ε -AFEDak	3
2.5	β -AFEDak	4
2.6	Oharra	6
3	β-AFEDei buruzko azalpenak	6
3.1	β -AFEDak erabiltzearen interesa	6
3.2	β -AFEDak eraiki	7
3.2.1	Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin bi trantsizio baino gehiago daudenean	7
3.2.2	Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsizio bakarra dagoenean	8
3.2.3	Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsiziorik ez dagoenean	8
3.2.4	β -AFEDak kalkulatzeko algoritmoa	9
4	Praktikaren enuntziatua	10
5	Erabili beharreko programazio-lengoaia eta taldeak osatzeko arauak	11
6	Entregatu beharrekoak	11
7	Entrega bakoitza noizko egin behar den: datak	11
8	Kalifikazioa	11
9	Inplementazioarekin zerikusia duten alderdiak	12
9.1	Trantsizio-funtzioa $Q \times A \times Q$ multzoaren azpimultzo baten eta $Q \times Q$ multzoaren azpimultzo baten bidez	12
9.2	Definitu beharreko datu-motak	14
9.3	Inplementatu beharreko funtzio garrantzitsuenen motak	14

Irudien zerrenda

1	a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien AFD bat.	3
2	a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien AFED bat.	3
3	a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien ε -AFED bat.	4
4	1. irudiko AFDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.	4
5	2. irudiko AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.	5
6	3. irudiko ε -AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.	5
7	β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin bi trantsizio baino gehiago (ikusi 8. eta 9. irudiak).	6
8	β -AFED bat kalkulatzeko, 7. irudiko egitura bideratzeko aukera bat.	6
9	β -AFED bat kalkulatzeko, 7. irudiko egitura bideratzeko beste aukera bat.	7
10	β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsizio bakarria (ikusi 11. irudia).	8
11	β -AFED bat kalkulatzeko, 10. irudiko egitura bideratzeko aukera bat.	8
12	β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsiziorik ez (ikusi 13. irudia).	8
13	β -AFED bat kalkulatzeko, 12. irudiko kasua konpontzeko aukera bat.	9
14	β -AFEDra transformatzeko algoritmoa.	9
15	a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien ε -AFED bat.	10
16	15. irudiko ε -AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.	10

1 Laburdurak

Honako laburdura hauek erabiliko dira dokumentu honetan:

- AFD: Automata Finitu Determinista. ¹
- AFED: Automata Finitu Ez-Determinista.
- ε -AFED: ε trantsizioak edo trantsizio hutsak dituen Automata Finitu Ez-Determinista.
- AF: Automata Finitua. Horrela, AF ipinitakoan AF hori AFD bat, AFED bat edo ε -AFED bat izan daiteke.
- β -AFED: aukera bitarrez eratutako trantsizio-funtzioa duen Automata Finitu Ez-Determinista. β -AFED batek trantsizio hutsak (ε trantsizioak) eduki ditzake baina ez da nahitaezkoa.

2 Oinarrizko definizioak

2.1 Hitz hutsa (ε) eta trantsizio hutsak (ε trantsizioak)

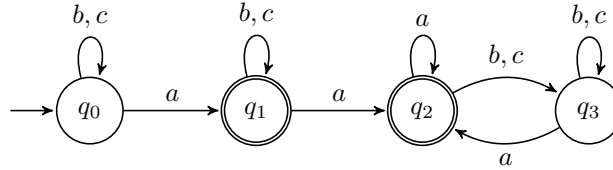
Trantsizio huts bat edo ε trantsizio bat, sinbolorik kontsumitu (edo irakurri) gabe egoeraz aldatzeko aukera ematen duen trantsizio bat da. Trantsizio-diagrametan trantsizio hutsak adierazteko ε sinbolo berezia erabiliko da. Hitz hutsa ere ε sinbolo bereziarekin adierazi ohi da. ε ez da inoiz alfabetoko sinboloa izango.

¹Laburdurak deklinatzeko kontuan hartuko den irizpidea honako hau izango da: dokumentu honetan erabiliko diren laburdurak izendapen arruntak dira eta, ondorioz, *etxe* hitza bezala deklinatuko dira (<https://eizie.eus/eu/argitalpenak/azterketak-txostenak/2tzul/siglak-irakurtzen-siglak-deklinatzen>, 9. atala). Beraz, *etxea*, *etxeak*, *etxeetan*, *hainbat etxetan*, *etxetik*, *etxeetatik*, *etxera*, *AFDa*, *AFDak*, *AFDetan*, *hainbat AFDtan*, *AFDtik*, *AFDetatik*, *AFDra* eta abar.

2.2 AFDak

AF bat AFD bat dela esango da, trantsizio-funtzioak honako propietate hauek betetzen baditu:

- ε trantsiziorik ez edukitzea.
- Egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, zehazki trantsizio bat edukitzea.



1. irudia: a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien AFD bat.

1. irudian, a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion AFD baten trantsizio-diagrama dugu. Lengoaia hori formalki honela defini daiteke:

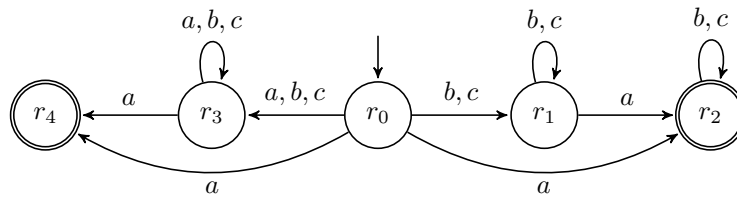
$$\{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a = 1 \vee \exists u(u \in A^* \wedge w = ua))\}$$

1. irudiko AFD horretan, alfabetoa a , b eta c sinboloez osatuta dago eta egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, trantsizio bakarria dugu.

2.3 AFEDak

AF bat AFED bat dela esango da, trantsizio-funtzioak honako propietate hauek betetzen baditu:

- ε trantsiziorik ez edukitzea.
- Gutxienez egoera batean eta gutxienez alfabetoko sinbolo batentzat trantsiziorik ez egotea edo trantsizio bat baino gehiago egotea.



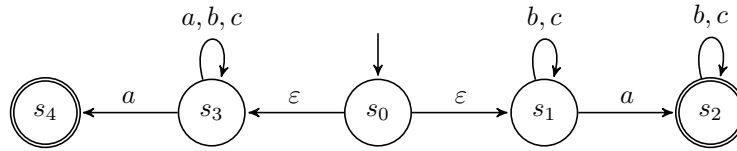
2. irudia: a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien AFED bat.

2. irudian, a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion AFED baten trantsizio-diagrama dugu. AFED horretan, alfabetoko sinboloak a , b eta c dira. Egoera batzuetan sinbolo batzuentzat ez dago trantsiziorik (adibidez, r_4 egoeran a -rentzat ez dago trantsiziorik) eta beste egoera batzuetan sinbolo batentzat trantsizio bat baino gehiago daude (esate baterako, r_0 egoeran a sinboloarentzat hiru trantsizio daude).

2.4 ε -AFEDak

AF bat ε -AFED bat dela esango da gutxienez ε trantsizio bat (trantsizio huts bat) baldin badu.

3. irudian, a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion ε -AFED baten trantsizio-diagrama dugu. Alfabetoak a , b eta c sinboloak ditu. ε -AFED horren trantsizio-diagraman bi trantsizio huts ikus ditzakegu: s_0 -tik s_1 -era doana eta s_0 -tik s_3 -ra doana. ε -AFED



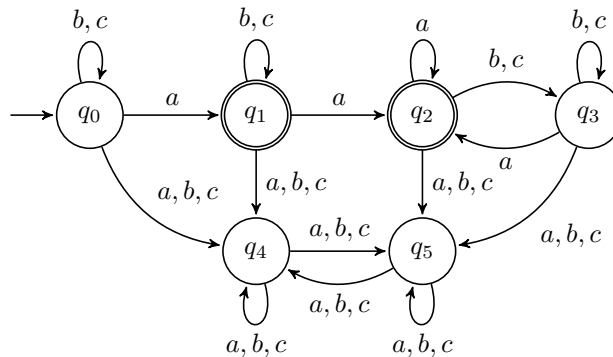
3. irudia: a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien ε -AFED bat.

batean gerta daiteke egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko trantsizio bakarra egotea (AFDetan bezala). Baina baita gerta daiteke egoeraren batean sinboloren batentzat trantsiziorik ez egotea ere edo trantsizio bat baino gehiago egotea (AFEDetan bezala). 3. irudiko ε -AFEDean, adibidez, s_0 egoeran c -rentzat ez dago trantsiziorik eta s_2 egoeran a -rentzat ez dago trantsiziorik. Bestalde, s_3 egoeran a -rentzat bi trantsizio daude.

2.5 β -AFEDak

AF bat β -AFED bat dela esango da, trantsizio-funtzioak honako propietate hauek betetzen baditu:

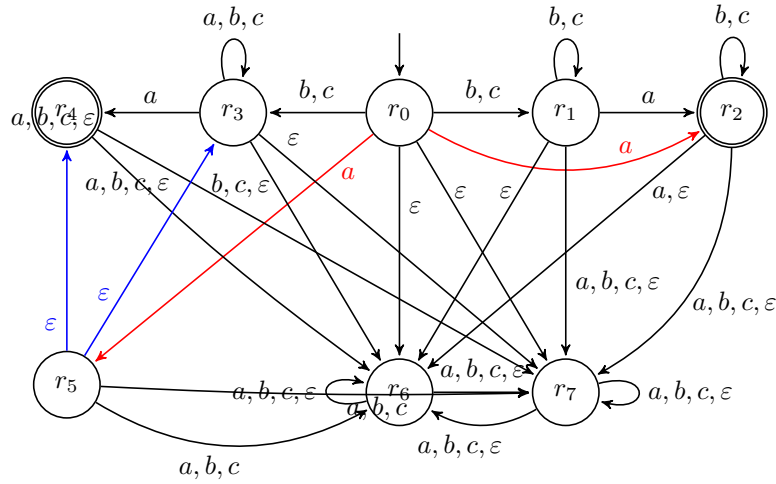
- ε trantsiziorik ez edukitzea edo egoera bakoitzeko, zehazki bi ε trantsizio edukitzea.
- Egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, zehazki bi trantsizio edukitzea.



4. irudia: 1. irudiko AFDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.

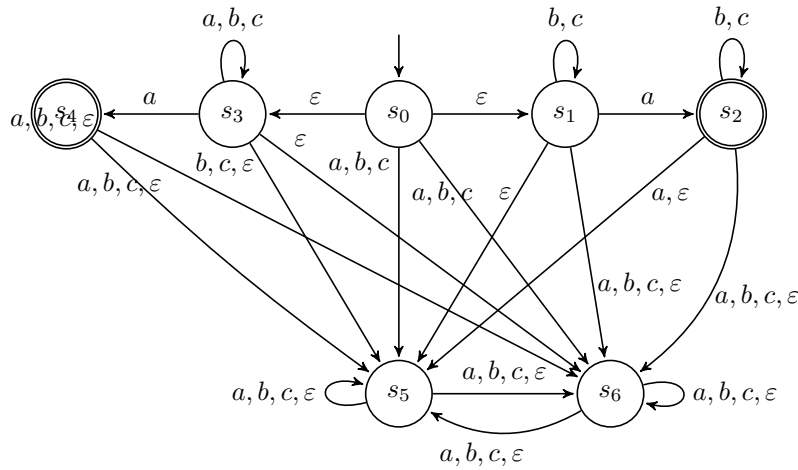
4. irudian, a bakarria duten edo a - z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion β -AFED baten trantsizio-diagrama ikus daiteke. β -AFED hori, 1. irudiko AFDtik abiatuta eraiki da. Alfabetoko sinboloak a , b eta c dira eta egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, zehazki bi trantsizio daude. Bestalde, ez dago trantsizio hutsik (edo ϵ trantsiziorik). 1. irudiko AFDtik abiatuta β -AFED bat eraikitzeke, q_4 eta q_5 egoera berriak sortu behar izan dira. 4. irudiko β -AFEDa eraikitzean, 3.2.2 atalean aurkeztutako ideia erabili da (10. irudia eta 11. irudia).

16. irudian, a bakarria duten edo a - z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion bigarren β -AFED baten trantsizio-diagrama erakusten da. β -AFED hori eraikitzeko, 2. irudiko AFEDa hartu da abiapuntutzat. Kasu honetan, alfabetoa osatzen duten a , b eta c hiru sinboloei dagozkien trantsizioak edukitzeaz gain, trantsizio hutsak (edo ε trantsizioak) ere ipini beharra dago. Behar hori, 2. irudiko AFEDan r_0 egoerak a sinboloarentzat bi trantsizio baino gehiago edukitzeagatik sortu da: r_0 -tik a -rekin bi trantsizio bakarrik edukitzeko, r_5 egoera sortu da eta, gero, r_5 egoeratik r_3 eta r_4 egoeretara ε trantsizioak ipini dira. Horrela, r_0 -tik a -rekin zehazki bi trantsizio edukitzea lortu da eta bi trantsizio baino gehiago edukitzearen arazoa desagertu da, baina bi ε trantsizio horiek ipini ondoren, β -AFED bat eraikitzeko, beste egoera guztietan ere bi ε trantsizio ipini behar dira. Kontuan hartu beharrekoa da honako hau: ε trantsizioen bat agertzen bada, orduan nahitaezkoa dela



5. irudia: 2. irudiko AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.

egoera guztietatik zehazki bi ϵ trantsizio ateratzea. Beraz, 16. irudiko β -AFEDan, egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, zehazki bi trantsizio daude eta, bestalde, egoera bakoitzeko, bi trantsizio huts daude. 2. irudiko AFEDa abiapuntutzat hartuta β -AFED bat eraikitzeko, r_5 egoeraz gain, r_6 eta r_7 egoera berriak ere sortu behar izan dira. 16. irudiko β -AFEDa eraikitzean, 3.2.1, 3.2.2 eta 3.2.3 ataletan aurkeztutako ideiak erabili dira (7, 8, 9, 10, 11, 12 eta 13 irudiak).



6. irudia: 3. irudiko ϵ -AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.

Hirugarren adibide gisa, 6. irudian, a bakarria duten edo a - z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion beste β -AFED baten trantsizio-diagrama aurkezten da. β -AFED hori eraikitzeko, 3. irudiko ϵ -AFEDa hartu eta aldaketa batzuk egin dira β -AFED bat lortu arte. Abiapuntua ϵ -AFED bat denez, β -AFEDan egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko, zehazki bi trantsizio egoteaz gain, egoera bakoitzeko, bi trantsizio huts ipini beharra dago. Izan ere, β -AFEDan ϵ trantsizioen bat agertzen bada, orduan nahitaezkoa da egoera guztietatik zehazki bi ϵ trantsizio ateratzea. β -AFED bat lortzeko, s_5 eta s_6 egoera berriak ere sortu behar izan dira. 6. irudiko β -AFEDa eraikitzean, 3.2.2 eta 3.2.3 ataletan aurkeztutako ideiak erabili dira (10, 11, 12 eta 13

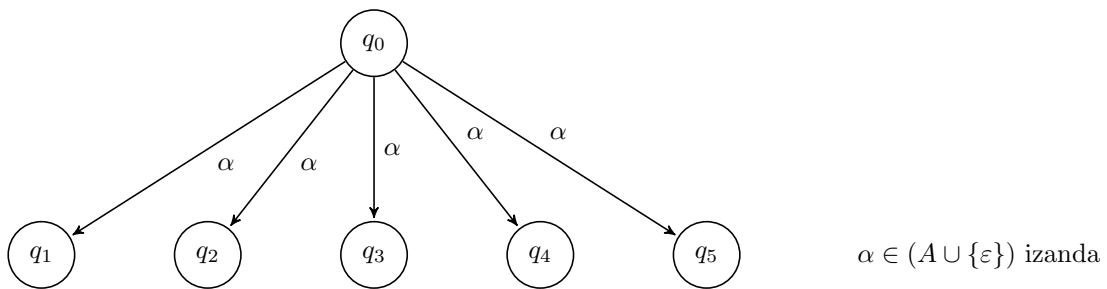
irudiak).

2.6 Oharra

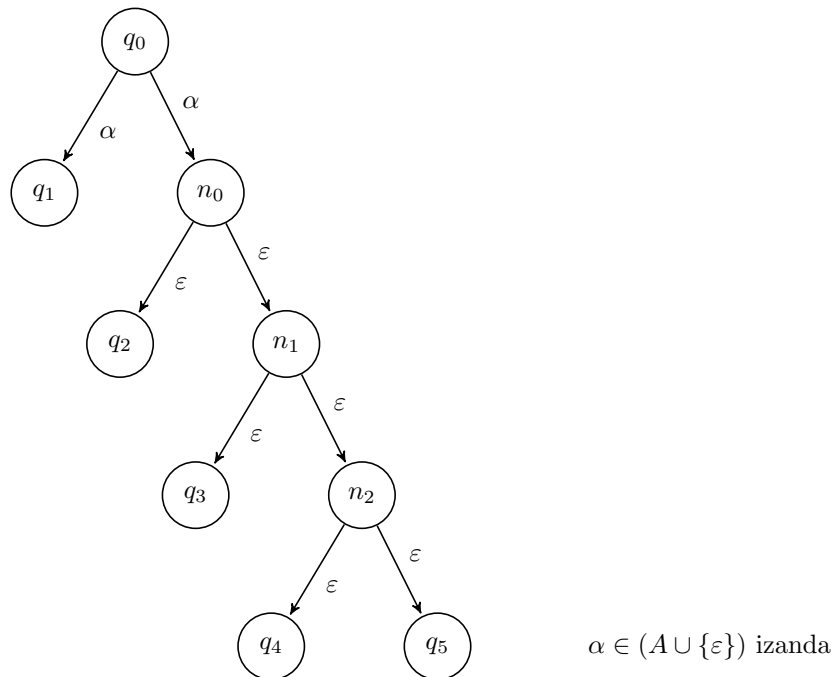
Definizio horiek kontuan hartuz, garbi eduki behar da dokumentu honetan AFD bat ez dela AFED bat, AFD bat ez dela ε -AFED bat eta AFED bat ez dela ε -AFED bat. Bestalde, β -AFED bat AFED bat edo ε -AFED bat izango da, baina inoiz ez da AFD bat izango.

3 β -AFEDei buruzko azalpenak

3.1 β -AFEDak erabiltzearen interesa



7. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin bi trantsizio baino gehiago (ikus 8. eta 9. irudiak).



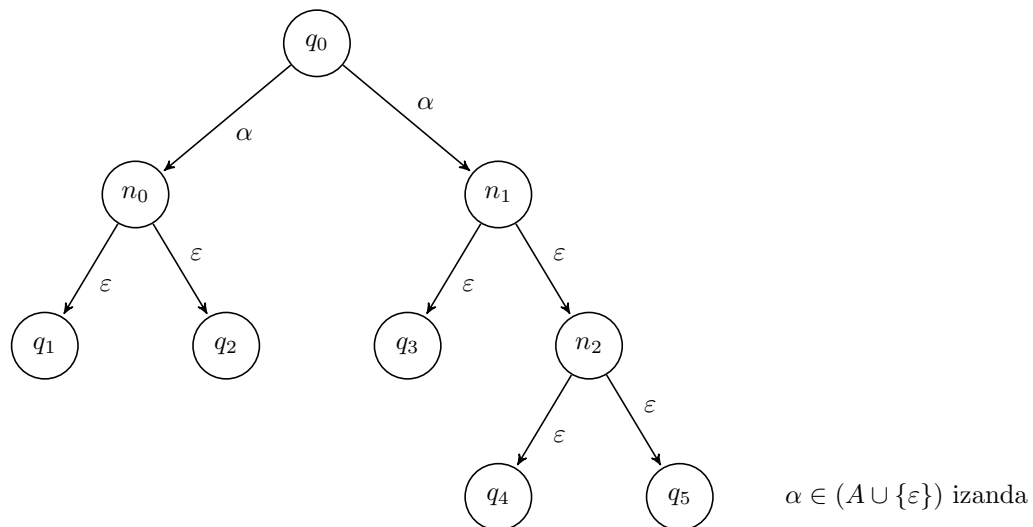
8. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko, 7. irudiko egitura bideratzeko aukera bat.

Lengoaia bat emanda, lengoiari dagokion AFED bat edo ε -AFED bat diseinatzea AFD bat diseinatzea baino askoz errazagoa izan ohi da. Alde horretatik, AFEDak eta ε -AFEDak AFDak baino

praktikoagoak dira. Hala ere, AFD baten trantsizio-funtzioak egoera bakoitzeko eta alfabetoko sinbolo bakoitzeko trantsizio bakarra izango du baina AFED baten edo ε -AFED baten trantsizio-funtzioak uniformetasun hori ez du izango (AFEDetan, gutxienez egoera batentzat eta alfabetoko sinbolo batentzat trantsizio bat baino gutxiago edo gehiago egongo dira eta, ε -AFEDetan, AFE-Dentzat esandakoa gerta daiteke baina, gainera, egoera batetik trantsizio hutsik ez ateratzea edo bat baino gehiago ateratzea ere gerta daiteke). Alde horretatik begiratuta, AFDak egokiagoak dira. AFED bat edo ε -AFED bat emanda, baliokidea den AFD bat era sistematikoan (algoritmo bat erabiliz) lor daiteke beti. Beraz, lengoaia bati dagokion AF bat nahi dugunean, hasteko AFED bat edo ε -AFED bat diseina dezakegu (zuzenean AFD bat diseinatzea baino errazagoa delako) eta gero AFD baliokide bat lor dezakegu era sistematikoan. Hori dena kontuan hartuz, pentsa dezakegu automata finituen alderdi teorikoak eta alderdi praktikoak lantzeko, aukera egokiena AFDekin aritzea dela, trantsizio-funtzioaren uniformetasunagatik eta AFED bat edo ε -AFED bat dugunean beti kalkula dezakegulako baliokidea den AFD bat. Baina, oro har, AFED bati edo ε -AFED bati dagokion AFDA kalkulatzeko prozesuak konputazio-kostu esponontziala du: AFEDak edo ε -AFEDak n egoera baldin baditu, AFD baliokideak 2^n -ren ordenakoa den egoera kopurua izango du. Ondorioz, AFED batetik edo ε -AFED batetik AFD baliokide bat kalkulatzeko ez da eraginkorra, ez da bideragarria. Arazo horren aurrean, β -AFEDenganako interesa pizten da. Izan ere, AFD baten edo AFED baten edo ε -AFED baten baliokidea den β -AFEDa kalkulatzeko prozesuaren konputazio-kostua ez da esponontziala. Egoera batean sinbolo batentzat k trantsizio baldin badaude, k trantsizio horiek aukera bitarren bidez simulatzeko $\log_2 k$ (goruntz borobilduta) egoera berri sortu beharko dira. Ondorioz, AF bat emanda, β -AFED baliokide bat eraikitzea oso eraginkorra da. Gainera, β -AFEDetan trantsizio-funtzioak egoera bakoitzeko eta sinbolo bakoitzeko zehazki bi aukera izango dituen, β -AFEDetan trantsizio-funtzioak uniformetasuna du. Hori guztia hontuan hartuz, β -AFEDak oso garrantzitsuak dira frogapen teoriko batzuetan eta baita uniformeak diren AFak era eraginkorrean diseinatu nahi direnean ere.

3.2 β -AFEDak eraikitze eskemak eta algoritmoa

3.2.1 Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin bi trantsizio baino gehiago daudenean



9. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko, 7. irudiko egitura bideratzeko beste aukera bat.

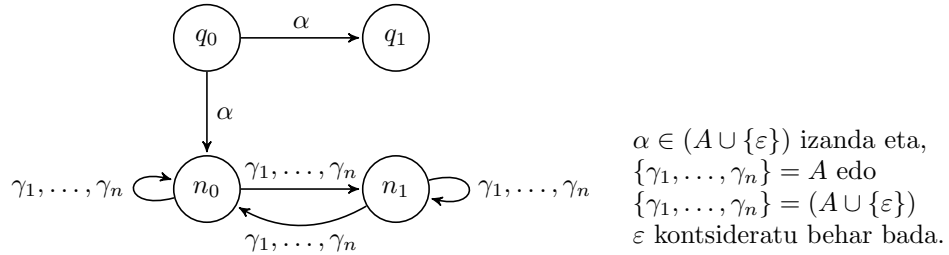
Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin bi trantsizio baino gehiago daudenean, bi trantsizio bakarrik izateko, egoera berriak sortu beharko dira eta ε trantsizioak ipini beharko dira. Esate baterako, 7. irudian erakusten den egitura baldin badugu, 8. irudian erakusten den egiturara edo 9. irudian erakusten den egiturara igaro gaitzeko. Gainera, alfabetoko beste sinboloak ere kontuan

hartu beharko dira eta ε trantsizioak ere ipini beharko dira behar den lekuetan. Horretarako, beharrezkoa denean 3.2.2 eta 3.2.3 ataletan aurkezten diren eskemak aplikatuko dira. Egitura berri bietan, n_0 , n_1 eta n_2 egoera berriak sortu dira. Bestalde, q_0 -tik α -rekin ($\alpha \in (A \cup \{\varepsilon\})$ izanda) bi trantsizio ipini dira eta bi egitura berrietako (8. eta 9. irudiak) beste trantsizio guztiak hutsak dira. 3.1 atalean esan den bezala, 7. irudian erakusten den erako egitura bat dugunean, k trantsizio baldin badaude, egoera berrien kopurua $\log_2 k$ -ren ordenakoa izango da. Gure adibidera itzuliz, 5 trantsizio daudenez, 3 egoera berri behar izan dira, hau da, $\log_2 5$ goruntz borobilduta.

3.2.2 Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsizio bakarra dagoenean



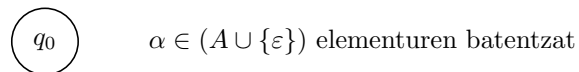
10. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsizio bakarra (ikusi 11. irudia).



11. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko, 10. irudiko egitura bideratzeko aukera bat.

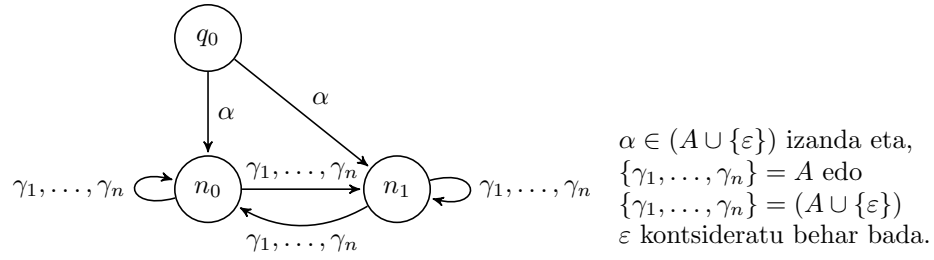
Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsizio bakarra dagoenean, sinbolo horrekin edo ε -ekin bi trantsizio izateko, bi egoera berri sor ditzakegu. Esate baterako, 10. irudian erakusten den kasuaren aurrean, 11. irudian erakusten den egitura era dezakegu. Hor, n_0 eta n_1 egoera berriak ipini dira. Egoera berri horiek erabiliko dira 11. irudiko eskemaren aplikazio guztietan, eta baita 13. irudiko eskemaren aplikazio guztietan ere. Egitura hori alfabetoko beste sinboloekin eta, beharrezkoa baldin bada, trantsizio hutsekin osatu beharko da, 11. eta 13. irudietako eskemak aplikatuz.

3.2.3 Egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsiziorik ez dagoenean



12. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko abiapuntuan egoera batetik sinbolo batekin edo ε -ekin trantsiziorik ez (ikusi 13. irudia).

Egoera batetik alfabetoko sinbolo batekin edo ε -ekin trantsiziorik ez dagoenean, sinbolo horrekin edo ε -ekin bi trantsizio izateko, bi egoera berri gehi daitezke. Adibidez, 12. irudian erakusten den kasuan baldin bagaude, hau da, $A \cup \{\varepsilon\}$ multzoko α elementuren batentzat trantsiziorik ez badago, 13. irudian erakusten den egitura sor genezake. Hor, n_0 eta n_1 egoera berriak ipini dira. Aurretik adierazi dugun bezalaxe, egoera berri horiek erabiliko dira 11. eta 13. irudietako eskemen aplikazio guztietan. Horrez gain, eskema horiek ere erabiliko dira egitura hori osatzeko, alfabetoko beste sinboloak kontuan hartuz eta ε trantsizioak kontuan hartuz, azken hauek beharrezkoak baldin badira.



13. irudia: β -AFED bat kalkulatzeko, 12. irudiko kasua konpontzeko aukera bat.

3.2.4 β -AFEDak kalkulatzeko algoritmoa

Edozein AF emanda, β -AFED baliokide bat kalkula daiteke aurreko ataletan aurkeztutako eskemak erabiliz.

ALGORITMOA

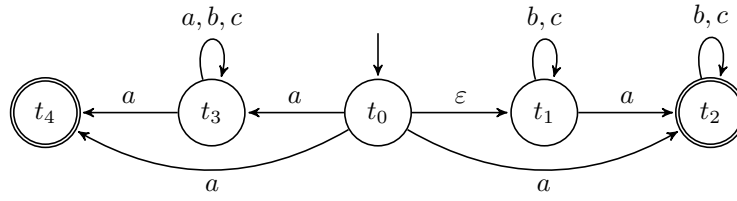
1. **urratsa:** $q \in Q$ bakoitzeko eta $\alpha \in (A \cup \varepsilon)$ bakoitzeko, q -tik α -rekin 2 trantsizio baino gehiago baldin badaude, 3.2.1. atalean emandako eskemetako bat aplikatu. Gelditzen den automataren egoera-multzoari Q' deituko diogu.
2. **urratsa:** $q \in Q'$ bakoitzeko eta $\alpha \in A$ bakoitzeko q -tik α -rekin zehazki bi trantsizio baldin badaude, eta gainera $q \in Q'$ bakoitzeko ε -ekin transiziorik ez badago edo zehazki bi trantsizio baldin badaude, orduan **BUKATU**. Bestela, 3. urratsera joan.
3. **urratsa:** n_0 eta n_1 egoera berriak sortu eta $\alpha \in A$ bakoitzeko α -rekin n_0 -tik n_0 -ra eta n_1 -era trantsizio berri bat sortu, eta n_1 -etik n_0 -ra eta n_1 -era trantsizio berri bat sortu. Gainera, automatan ε -ekin trantsizioen bat baldin badago, ε -ekin n_0 -tik n_0 -ra eta n_1 -era eta n_1 -etik n_0 -ra eta n_1 -era trantsizioak sortu.
4. **urratsa:** $q \in Q'$ bakoitzeko eta $\alpha \in A$ bakoitzeko, q -tik α -rekin trantsizio bakarra baldin badago, α -rekin q -tik n_0 -ra trantsizio bat sortu. Gainera, automatan ε -ekin trantsizioen bat baldin badago, $q \in Q'$ bakoitzeko, q -tik ε -ekin trantsizio bakarra baldin badago, ε -ekin q -tik n_0 -ra trantsizio bat sortu.
5. **urratsa:** $q \in Q'$ bakoitzeko eta $\alpha \in A$ bakoitzeko, q -tik α -rekin trantsiziorik ez badago, α -rekin q -tik n_0 -ra eta n_1 -era trantsizioak sortu. Gainera, automatan ε -ekin trantsizioen bat baldin badago, orduan $q \in Q'$ bakoitzeko, q -tik ε -ekin trantsiziorik ez badago, ε -ekin q -tik n_0 -ra eta n_1 -era trantsizioak sortu.

14. irudia: AF batetik abiatuta, β -AFED baliokide bat lortzeko algoritmoa.

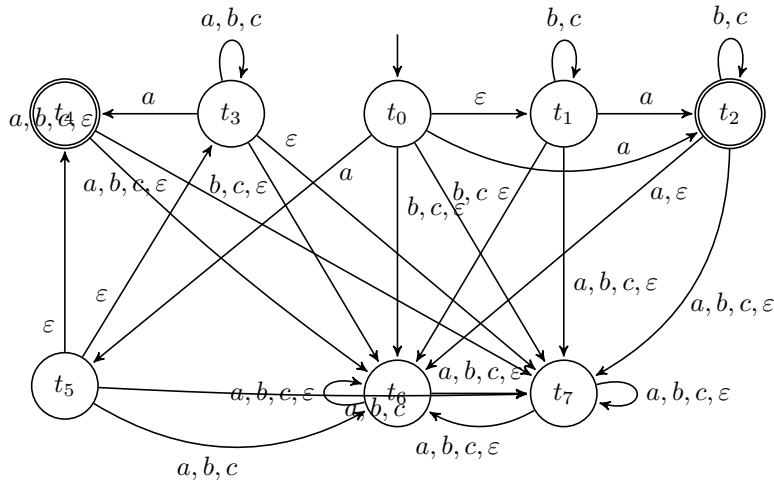
14. irudian AF batetik abiatuta, baliokidea den β -AFED bat kalkulatzeko balio duen algoritmo bat dugu.

AF bati dagokion β -AFED baliokidea lortzeko proposatutako algoritmoaren erabilera deskribatzeko, 15. irudian, a bakarra duten edo a -z bukatzen diren hitzez osatutako lengoaiari dagokion beste ε -AFED baten trantsizio-diagrama aurkezten da. Automata horretan, bi trantsizio baino gehiago daude egoera beretik eta sinbolo berarekin: zehazki, t_0 -tik hiru trantsizio daude a -rekin t_2 -ra, t_3 -ra eta t_4 -ra. Horrez gain, egoera batzuetatik trantsizio bakarra dago sinbolo batzuekin edo ε -ekin. Adibidez, t_1 -etik trantsizio bakarra dago a , b eta c sinboloekin, eta t_0 -tik trantsizio bakarra dago ε -ekin. Azkenik, egoera batzuetatik trantsiziorik ez dago sinbolo batzuekin edo ε -ekin. Adibidez, t_4 egoeratik ez dago trantsiziorik.

14. irudian emandako algoritmoa aplikatuz, 15. irudiko automatatik baliokidea den ?? irudiko



15. irudia: a bakarria duten edo a -z bukatzen diren hitzei dagokien ε -AFED bat.



16. irudia: 15. irudiko ε -AFEDtik eraikitako β -AFED baliokide bat.

β -AFEDa lortu da.

4 Praktikaren enuntziatua

Automata Finituekin (AFekin) zerikusia duten sei eragiketa inplementatu behar dira.

Inplementatu beharreko sei eragiketak honako hauek dira:

1. AF baten osagaiak izan beharko luketenak emanda, benetan AF bat osatzen al duten erabakitzea. Beraz, trantsizio bakoitzean egoerak AFari dagokion egoera multzokoak al diren, trantsizio ez-huts bakoitzean sinboloa AFari dagokion alfabetokoa al den, hasierako egoera AFari dagokion egoera multzokoa al den eta trantsizio-diagraman bi zirkuluren bidez nabarmentzen diren egoerez osatutako multzoko egoera guztiak AFari dagokion egoera multzokoak al diren aztertu beharko da eta erantzun gisa *True* edo *False* itzuli beharko da.
2. AF bat eta hitz bat emanda, hitza AFari dagokion lengoaiakoa al den erabakitzea. Sarrerako datuak egokiak al diren aztertu beharko da.
3. AF bat emanda, AF hori AFD bat, AFED bat ala ε -AFED bat al den erabakitzea. Sarrerako datuak egokiak al diren aztertu beharko da.
4. AF bat emanda, AFED baliokide bat kalkulatzeko. Sarrerako datuak egokiak al diren aztertu beharko da.
5. AF bat emanda, β -AFED bat al den erabakitzea. Sarrerako datuak egokiak al diren aztertu beharko da.

6. AF bat emanda, β -AFED baliokide bat kalkulatzeko. Sarrerako datuak egokiak al diren aztertu beharko da.

5 Erabili beharreko programazio-lengoaia eta taldeak osatzeko arauak

Programa Haskell lengoaia erabiliz inplementatu beharko da.

Praktika binaka egin behar da. Hau da, ezin da banaka edo hirunaka/launaka/... egin. Beharrezkoa balitz eta ondo justifikatzen bada, baimena eskatu behar da 3 pertsonetako talde bat osatzeko I. entrega egiteko epemuga baino lehen.

6 Entregatu beharrekoak

Praktika honetan eraiki beharreko programa zatika egingo da. Programaren garapena hiru zatitan antolatuta da. Ondorioz, hiru entrega egin beharko dira eta entrega horietako bakoitzean honako hauek eman beharko dira:

- Garatutako programa zatia osatzen duten Haskell-eko funtzioak.
- Proba-kasuen diseinua eta lortutako emaitzak.

Hiru entrega horietako bakoitzari dagokion zatia honako hau da:

- I. entrega:** AF baten osagaiak izan beharko luketenak emanda, benetan AF bat osatzen al duten erabakiko duen eragiketaren inplementazioa eta hitz bat AF bati dagokion lengoaiakoa al den erabakiko duen eragiketaren inplementazioa.
- II. entrega:** AF bat AFD bat, AFED bat ala ε -AFED bat al den erabakiko duen eragiketaren inplementazioa eta AF bati dagokion AFED baliokide bat lortuko duen eragiketaren inplementazioa.
- III. entrega:** AF bat β -AFED bat al den erabakiko duen eragiketaren inplementazioa eta AF bati dagokion β -AFED baliokide bat lortuko duen eragiketaren inplementazioa.

Entregak eGelan ipiniko diren esteken edo loturen bidez egin beharko dira.

7 Entrega bakoitza noizko egin behar den: datak

- I. entrega:** 2019/11/24.
- II. entrega:** 2019/12/15.
- III. entrega:** 2020/01/12.

8 Kalifikazioa

Gehienez 2,5 puntu lortu ahal izango dira praktika honen bidez. Hala ere, puntu horiek kontuan hartzeko, azterketen bidez lortu ahal izango diren 7,5 puntuetatik gutxienez 5 lortu beharko dira.

Entrega bakoitzari dagokion puntuazioa honako hau da:

- I. entrega:** 0,75 puntu.
- II. entrega:** 0,75 puntu.

III. entrega: puntu 1.

Praktika egitea ez da derrigorrezkoa irakasgaia gainditzeko. Entrega bakoitza era independentean ebaluatuko da. Entrega denak ez egin arren, egindako entreei dagokien puntuazioa lortu ahal izango da. Beraz, posible da bakarrik I. entrega egitea, edo bakarrik I. eta II. entregak egitea eta abar.

9 Implementazioarekin zerikusia duten alderdiak

Atal honetan, Haskell erabiliz egin beharreko praktika egitean kontuan hartu beharreko xehetasun batzuk azalduko dira. Hala nola, AFak zein formatutan adierazi behar diren, nahitaez definitu beharreko datu-motak zein diren eta implementatu beharreko funtzio garrantzitsuenak zein motatakoak izan behar duten zehaztuko da.

9.1 Trantsizio-funtzioa $Q \times A \times Q$ multzoaren azpimultzo baten eta $Q \times Q$ multzoaren azpimultzo baten bidez

Irakasgaiko apunteetan AFDak (Q, A, δ, q_0, Y) erako boskote gisa definitu dira eta δ (delta) trantsizio-funtzioaren mota $Q \times A \rightarrow Q$ dela esan da. Bestalde, AFEDak (Q, A, ν, q_0, Y) erako boskote gisa definitu dira eta ν (nu) trantsizio-funtzioaren mota $Q \times A \rightarrow 2^Q$ dela esan da. Hor, 2^Q espresioak Q -ren azpimultzo guztiez osatutako multzoa adierazten du. Azkenik, ε -AFEDak (Q, A, λ, q_0, Y) erako boskote gisa definitu dira eta λ (lambda) trantsizio-funtzioaren mota $Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ dela esan da. Praktika hau garatzeko, hiru formatu horiek bateratzea komeni da. Horretarako, AF bat, determinista izan edo ez-determinista izan edo ε trantsizioak dituen AF ez-determinista izan, $(Q, A, \tau_A, \tau_\varepsilon, \sigma, Y)$ erako seikote bat dela kontsideratuko da. Seikote horretan, τ_A (tau azpi A) osagaiari *alfabetoari dagokion trantsizio-erlazioa* deituko zaio eta τ_ε (tau azpi epsilon) osagaiari *trantsizio hutsei dagokien trantsizio-erlazioa* deituko zaio. τ_A osagaia $Q \times A \times Q$ multzoaren azpimultzo bat izango da eta τ_ε osagaia $Q \times Q$ multzoaren azpimultzo bat izango da. Beraz, τ_A trantsizio-erlazioko elementu bakoitza hirukote bat izango da eta hirukote horietako bakoitza *trantsizio* bat dela esango dugu. Era berean, τ_ε trantsizio-erlazioko elementu bakoitza bikote bat izango da eta bikote horietako bakoitza *trantsizio huts* bat dela esango dugu. AFak definitzeko formatu berri horretan, seikoteko σ (sigma) osagaiak hasierako egoera adierazten du. Q multzoko edozein egoera izan daiteke hasierako egoera.

AFDen, AFEDen eta ε -AFEDen formatua bateratu ondoren, AF bat emanda, τ_ε trantsizio-erlazioa hutsa baldin bada eta $q_i \in Q$ egoera bakoitzeko eta $\alpha \in A$ sinbolo bakoitzeko τ_A trantsizio-erlazioan lehenengo osagaitzat q_i egoera eta bigarren osagaitzat α sinboloa dituen trantsizio bakarra (hirukote bakarra) baldin badago, orduan AFa AFD bat izango da. Trantsizio hirugarren osagaia Q multzoko edozein elementu izan daiteke. Bestalde, τ_ε trantsizio-erlazioa hutsa baldin bada eta $q_i \in Q$ egoeraren batentzat eta $\alpha \in A$ sinboloren batentzat τ_A trantsizio-erlazioan lehenengo osagaitzat q_i egoera eta bigarren osagaitzat α sinboloa dituen trantsiziorik ez badago edo lehenengo osagaitzat q_i egoera eta bigarren osagaitzat α sinboloa dituen trantsizio bat baino gehiago baldin badaude, orduan AFa AFED bat izango da. Azkenik, τ_ε trantsizio-erlazioa ez-hutsa baldin bada, orduan AFa ε -AFED bat izango da.

1. irudian, a bakarra duten edo a sinboloaz bukatzen diren hitzen lengoaia definitzen duen AFD baten trantsizio-diagrama erakusten da. AFD horri dagokion $(Q, A, \tau_A, \tau_\varepsilon, \sigma, Y)$ seikotea osatzen duten elementuak honako hauek dira:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $A = \{a, b, c\}$
- τ_A osagaia $Q \times A \times Q$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (q_0, a, q_1), (q_0, b, q_0), (q_0, c, q_0), (q_1, a, q_2), (q_1, b, q_1), (q_1, c, q_1), \\ (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_3), (q_2, c, q_3), (q_3, a, q_2), (q_3, b, q_3), (q_3, c, q_3) \}$$

- τ_ε osagaia $Q \times Q$ multzoaren azpimultzoa da. Kasu honetan, multzo hutsa da: \emptyset
- $\sigma = q_0$
- $Y = \{q_1, q_2\}$.

2. irudian, a bakarria duten edo a sinboloaz bukatzen diren hitzen lengoaia definitzen duen AFED baten trantsizio-diagrama erakusten da. AFED horri dagokion $(R, A, \tau_A, \tau_\varepsilon, \sigma, Y)$ seikotea osatzen duten elementuak honako hauek dira:

- $R = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4\}$
- $A = \{a, b, c\}$
- τ_A osagaia $R \times A \times R$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (r_0, a, r_2), (r_0, a, r_3), (r_0, a, r_4), (r_0, b, r_1), (r_0, b, r_3), (r_0, c, r_1), (r_0, c, r_3), (r_1, a, r_2), \\ (r_1, b, r_1), (r_1, c, r_1), (r_2, b, r_2), (r_2, c, r_2), (r_3, a, r_3), (r_3, a, r_4), (r_3, b, r_3), (r_3, c, r_3) \}$$

- τ_ε osagaia multzo hutsa (\emptyset) da, $R \times R$ multzoaren azpimultzoa.
- $\sigma = r_0$
- $Y = \{r_2, r_4\}$.

3. irudian, a bakarria duten edo a sinboloaz bukatzen diren hitzen lengoaia definitzen duen ε -AFED baten trantsizio-diagrama erakusten da. ε -AFED horri dagokion $(S, A, \tau_A, \tau_\varepsilon, \sigma, Y)$ seikotea osatzen duten elementuak honako hauek dira:

- $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $A = \{a, b, c\}$
- τ_A osagaia $S \times A \times S$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (s_1, a, s_2), (s_1, b, s_1), (s_1, c, s_1), (s_2, b, s_2), (s_2, c, s_2), \\ (s_3, a, s_3), (s_3, a, s_4), (s_3, b, s_3), (s_3, c, s_3) \}$$

- τ_ε osagaia $S \times S$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (s_0, s_1), (s_0, s_3) \}$$

- $\sigma = s_0$
- $Y = \{s_2, s_4\}$.

15. irudian, a bakarria duten edo a sinboloaz bukatzen diren hitzen lengoaia definitzen duen ε -AFED baten trantsizio-diagrama erakusten da. ε -AFED horri dagokion $(T, A, \tau_A, \tau_\varepsilon, \sigma, Y)$ seikotea osatzen duten elementuak honako hauek dira:

- $T = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $A = \{a, b, c\}$

- τ_A osagaia $T \times A \times T$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (t_0, a, t_2), (t_0, a, t_3), (t_0, a, t_4), (t_1, a, t_2), (t_1, b, t_1), (t_1, c, t_1), \\ (t_2, b, t_2), (t_2, c, t_2), (t_3, a, t_3), (t_3, a, t_4), (t_3, b, t_3), (t_3, c, t_3) \}$$

- τ_ε osagaia $T \times T$ multzoaren honako azpimultzo honen bidez definitutako trantsizio-erlazioa da:

$$\{ (t_0, t_1) \}$$

- $\sigma = t_0$
- $Y = \{t_2, t_4\}$.

9.2 Definitu beharreko datu-motak

Atal honetan, nahitaez definitu beharreko datu-motak zein diren zehaztuko da. Dena den, kalkulu batzuk egiteko beste datu-mota batzuk behar izatea ere gerta daiteke. Hemen aipatutako datu-motez gain, nahi diren datu-mota denak defini daitezke:

1. type Sinboloa = Char
2. type Alfabetoa = [Sinboloa]
3. type Hitza = [Sinboloa]
4. type Egoera = Int
5. type Egoerak = [Egoera]
6. type A_trantsizioa = (Egoera, Sinboloa, Egoera)
7. type E_trantsizioa = (Egoera, Egoera)
8. type A_trantsizioak = [A_trantsizioa]
9. type E_trantsizioak = [E_trantsizioa]
10. type Af = (Egoerak, Alfabetoa, A_trantsizioak, E_trantsizioak, Egoera, Egoerak)
11. data Af_motak = Afd | Afed | E_afed
deriving(Eq, Ord, Show, Read, Enum, Bounded)

Nahitaez definitu beharreko datu-mota horietako lehenengo hamarrek *type* erabiliz definitu dira, azken batean Haskell-en lehendik existitzen diren moten sinonimoak baitira. Hau da, *type*-ren bidez, Haskell-en lehendik existitzen den mota bati izen berria eman diezaiokegu. Bestalde, hamaikagarren mota definitzeko *data* erabili da. *Af_motak* guztiz berria da eta horregatik *data*-ren bidez definitu behar da eta, gainera, Eq, Ord, Show, Read, Enum eta Bounded atributoak ere ezarri behar zaizkio konparaketak egiteko, pantailan aurkeztu ahal izateko, pantailatik irakurri ahal izateko, zenbagarria dela adierazi ahal izateko eta beheko (*Afd*) eta goiko (*E_afed*) muga finkatuta gelditzeko. Mota horren bidez, AFentzat hiru aukera definitu dira: AFD bat izatea (*Afd*), AFED bat izatea (*Afed*) edo ε -AFED bat izatea (*E_afed*).

9.3 Implementatu beharreko funtzio garrantzitsuenen motak

Atal honetan, praktika hau egitean inplementatu beharreko funtzio garrantzitsuenen motak zehaztuko dira. Funtzio horiek honako hauek dira:

- *af_da*

AF bat izan beharko lukeen seikote bat emanda, funtzio honek *True* itzuliko du seikotea benetan AF bat baldin bada eta, bestela, *False* itzuliko du.

$$af_da :: Af \rightarrow Bool$$

- *lengoiakoa_da*

AF bat eta hitz bat emanda, funtzio honek *True* itzuliko du hitza AFari dagokion lengoiakoa baldin bada, eta, bestela, *False* itzuliko du. Emandako datuak ez badira egokiak (AFtzat emandako seikotea ez delako benetan AF bat edota hitza ez delako AFaren alfabetoaren gaineko hitz bat), errore-mezu bat aurkeztu beharko da.

$$lengoiakoa_da :: Af \rightarrow Hitz \rightarrow Bool$$

- *sailkatu*

AF bat emanda, funtzio honek *Afd* balioa itzuliko du AFa AFD bat baldin bada, *Afed* balioa itzuliko du AFa AFED bat baldin bada, eta *E_afed* balioa itzuliko du AFa ε -AFED bat baldin bada. Emandako seikoteak ez badu AF bat definitzen, errore-mezu bat aurkeztu beharko da.

$$sailkatu :: Af \rightarrow Af_motak$$

- *afed_bat_lortu*

AF bat emanda, AF horri dagokion AFED baliokide bat itzuliko duen funtzioa. Emandako datuek AF bat ez badute osatzen, errore-mezu bat aurkeztu beharko da.

$$afed_bat_lortu :: Af \rightarrow Af$$

- *bitarra_da*

AF bat emanda, funtzio honek *True* itzuliko du AFa β -AFED bat baldin bada, eta, bestela, *False* itzuliko du. AFtzat emandako seikotea ez bada AF bat, errore-mezu bat aurkeztu beharko da.

$$bitarra_da :: Af \rightarrow Bool$$

- *beta_afed_bat_lortu*

AF bat emanda, AF horri dagokion β -AFED baliokide bat itzuliko duen funtzioa. Emandako seikotea AF bat ez bada, errore-mezu bat aurkeztu beharko da.

$$beta_afed_bat_lortu :: Af \rightarrow Af$$