ESTATISTIKA METODOAK INGENIARITZAN

3. Zorizko aldagaia

Zorizko aldagai diskretua

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Zorizko aldagaia

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Zorizko aldagaia

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

- 3.4.3. Banaketa Uniforme diskretua
- 3.4.4. Banaketa Binomiala
- 3.4.5. Banaketa Hipergeometrikoa
- 3.4.6. Poisson-en banaketa

3.5. Banaketen arteko konbergentzia

- 3.5.1. Banaketa biomiala eta Poisson-en banaketa
- 3.5.2. Banaketa hipergeometrikoa eta banaketa binomiala

3.1 Sarrera

Probabilitatea definitzeko gertaera posible guztiak sortutako multzotik, hau da, lagin-espaziotik (Ω) abiatzen gara. Ω multzoko elementuak ez dira zenbakiak izan behar, baina bai probabilitatean, bai estatistikan zenbakiekin lan egitea errazagoa da. Hau da, zorizko aldagaiaren helburua, oinarrizko gertaerak zenbakizko balioekin lotzea da.

3.2 Zorizko aldagaia

Definizioa:

Izan bedi hurrengo funtzioa:

$$X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A_i \rightsquigarrow X(A_i) = x_i$$

X funtzioak Ω lagin-espazioko oinarrizko gertaera bakoitzari zenbaki bat egokitzen dio. Elementu bakoitzaren probabilitatea bere aurreirudiaren probabilitatea izanik.

$$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \Rightarrow X(A_1) = x_1,\ X(A_2) = x_2, \ldots, X(A_n) = x_n$$

$$x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.2 Zorizko aldagaia

Zorizko aldagai motak:

- Aldagaiak hartzen dituen balioak diskretuak direnean, hau da, aldagaiak hartzen dituen balioak zenbakigarriak direnean, aldagaia zorizko aldagai diskretua dela diogu.
- Aldagaiak tarte bateko edozein balio har badezake, aldiz, zorizko aldagai jarraitua dela diogu.

Adibideak:

1) Aukeratutako lau piezen artean, akastunak diren pieza kopurua.
2) Programa bat exekutatzeko behar den denbora.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3 Zorizko aldagai diskretua

Zorizko aldagai diskretua

Aldagaiak hartzen dituen balioak diskretuak direnean zorizko aldagai diskretua dela diogu.

Adibidea:

3) Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzean dugun zorizko esperimentua.

$$\Omega = \{AAA, AA+, A+A, +AA, +A+, ++A, A++, +++\}$$

$$\forall A_i \in \Omega: \quad P(A_i) = \frac{1}{8}$$

X: Aurpegi kopurua

x	P(X=x)
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$

3.3.1 Probabilitate funtzioa

Izan bedi X zorizko aldagaia diskretua, x_1 , x_2 ,..., x_n aldagaiak hartzen dituen balioak izanik.

Probabilitate funtzioa:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

Non $p(x_i) = P(X = x_i)\ \ i = 1,\dots,n$ probabilitate funtzioa da baldin eta ondoko propietateak betetzen badira:

i) $p(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i$

ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.2 Banaketa funtzioa

Izan bedi X zorizko aldagai diskretua, x_1 , x_2 ,..., x_n aldagaiak hartzen dituen balioak eta $p(x)$ probabilitate funtzioa.

Banaketa funtzioa:

$F(x)$ banaketa funtzioa, probabilitate funtzio metatua baino ez da:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Adibidea:

4) Lor ezazu aurreko adibideko banaketa funtzioa eta adieraz ezazu grafikoki.

3.3.2 Banaketa funtzioa

- $p(x)$ probabilitate funtzioa ezagutuz, $F(x)$ banaketa funtzioa zehatz daiteke.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $F(x)$ banaketa funtzioa ezaguna bada, $p(x)$ probabilitate funtzioa lortzeko:

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Oharrak:

1) $p(x_i) = P(X = x_i) = 0$ edo $p(x_i) = P(X = x_i) \neq 0$ izan daiteke.

3.3.2 Banaketa funtzioa

2) $$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) \ne F(b) - F(a)$$

Ondorioz,

$$P(a \le X \le b) \ne P(a < X \le b)$$

Propietateak:

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x)$ eskuinetik jarraitua da

3) $a \le b \Rightarrow F(a) \le F(b)$ (funtzio ez-beherakorra da)

4) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

3.3.3 Batezbestekoa edo itxaropena

Batezbestekoa edo itxaropena:

Izan bedi X zorizko aldagai diskretua eta x_1 , x_2 ,…, x_n aldagaiak hartzen dituen balioak.

X aldagai diskretuaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa, μ, hurrengoa da:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i)$$

Adibidea:

5) 3. adibidean:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i) = 1,5$$

Esperimentua egin aurretik espero dugun emaitza.

3.3.3 Batezbestekoa edo itxaropena

Oharra:

μ batezbesteko edo itxaropen matematikoa **teorikoa** da, $\overline{x}$ aldiz, batezbesteko **enpirikoa** (datuak erabiliz lortzen dena) da.

Propietateak:

Zorizko aldagai diskretuaren batezbestekoaren edo itxaropen matematikoaren propietateak:

1) $E(k) = k, \quad k$ konstantea izanik

2) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai diskretuak

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.3 Batezbestekoa edo itxaropena

3) Izan bedi k konstantea, X zorizko aldagai diskretua:

$$E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$$

4) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai diskretuak eta k_i konstanteak $\forall i = 1, \ldots, n$

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \ldots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(X_1) + k_2 \cdot E(X_2) + \ldots + k_n \cdot E(X_n)$$

5) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai diskretu independenteak

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.4 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Bariantza:

Izan bedi X zorizko aldagai diskretua eta x_1 , x_2 ,..., x_n aldagaiak hartzen dituen balioak.

X aldagai diskretuaren bariantza,

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu^2)] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p(x_i)$$

Kalkuluak egiteko errazagoa:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . p(x_i) - \mu^2$$

Desbiderazio tipikoa:

Bariantzaren erro karratu positiboa desbiderazio tipikoa da:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.4 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Propietateak:

X aldagai diskretuaren bariantzaren propietateak:

1) $Var(X) \geq 0$ X edozein zorizko aldagai diskretu izanik

2) $Var(k) = 0$ k edozein konstante izanik

3) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n zorizko aldagai diskretu independente, orduan:

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

4) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai diskretua:

$$Var(k.X) = k^2 \cdot Var(X)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.4 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

5) Izan bedi k konstantea, X zorizko aldagai diskretua:

$$Var(X+k)=Var(X)$$

Adibideak:

6) 3. adibidean:

$$\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.p(x_i)-\mu^2=0{,}75\Rightarrow\sigma=0{,}866$$

7) Izan bitez X eta Y bi zorizko aldagai diskretu independente. X zorizko aldagai diskretuaren itxaropen matematikoa -5 eta bariantza 3 dira. Y zorizko aldagai diskretuaren itxaropen matematikoa 1 eta bariantza 4 dira. Kalkula itzazu:

$$E(3X+5Y+2) \text{ eta } Var(3X+5Y+2)$$

Zorizko aldagai diskretuko adibideak

Adibideak:

8) Izan bedi X zorizko aldagai diskretua, $x = 0,1,2$ balioak hartzen dituena. Hurrengo funtzioak, probabilitate funtzioak al dira?

$$\text{a) } p(0) = 0.36,\ p(1) = 0.36,\ p(2) = 0.36$$

$$\text{b) } p(0) = 0.1,\ p(1) = 0.6,\ p(2) = 0.3$$

$$\text{c) } p(0) = 0.3,\ p(1) = 0.8,\ p(2) = -0.1$$

9) X zorizko aldagai diskretuaren probabilitate-funtzioa:

$$p(x) = \begin{cases} k & x = 1,3 \\ 2k & x = 2 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Zorizko aldagai diskretuko adibideak

a) Kalkulatu k konstantearen balioa
b) Kalkulatu $P(X \leq 2), P(1 < X \leq 3), P(1 \leq X \leq 3)$
c) Lortu banaketa funtzioa, batezbestekoa eta bariantza.
d) Kalkula itzazu b) ataleko probabilitateak banaketa funtzioa erabiliz.

10) Izan bedi X aldagai diskretuaren hurrengo banaketa-funtzioa.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Kalkulatu probabilitate funtzioa.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.3.5 Tchebyshev-en teorema

Tchebyshev-en teorema:

Izan bedi X zorizko aldagaia, itxaropen eta bariantza finitukoak. Orduan:

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

Teorema honen bidez, X zorizko aldagaiaren balioak $(\mu-k\sigma, \mu+k\sigma)$ tartean izateko probabilitatearen behe-bornea kalkula daiteke.

Adibidea:

11) Izan bedi 5 itxaropena eta 0.01 bariantza dituen X zorizko aldagai diskretua. Kalkula ezazu (4.6,5.4) tartearen probabilitatearen behe-muga.

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.1. Banaketa Uniforme diskretua $X \sim UD(n)$

n parametrodun Banaketa Uniforme diskretua duen zorizko aldagaiaren ezaugarriak:

1. X aldagaiak n balio har ditzake
2. Balio guztiek (n balio desberdinek) probabilitate bera dute.

Probabilitate funtzioa:

$$p(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x_i) = \begin{cases} 0 & x < x_i \\ \frac{k}{n} & x_k \le x < x_{k+1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.1. Banaketa Uniforme diskretua $X \sim UD(n)$

Batezbestekoa edo itxaropena:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Adibidea:

12) Kutxa batean 1-etik n-ra zenbakituta dauden gutun-azalak daude. Gutun azal bat zoriz ateratzen da eta X="gutun-azalean idatzita dagoen zenbakia" zorizko aldagaia definitzen da.

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.2. Bernoulliren banaketa $X \sim b(p)$

Bernoulliren banaketa duen zorizko aldagaiaren ezaugarriak:

1. Esperimentu batean proba bat dago, proba honek bi emaitza posible ditu:
   S="Arrakasta" ($X=1$)
   F="Porrota" ($X=0$)
2. Arrakastaren probabilitatea p da eta porrotaren probabilitatea q=1-p da.

Probabilitate funtzioa:

$$\left.\begin{aligned} p(0) &= P(X=0) = q = 1-p \\ p(1) &= P(X=1) = p \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

eman ta zabal zazu

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.2. Bernoulliren banaketa

$$X \sim b(p)$$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Batezbestekoa edo itxaropena:

$$\mu = E(X) = p$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = p \cdot q$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.3. Banaketa Binomiala $X \sim Bin(n, p)$

Banaketa binomiala duen zorizko aldagaiaren zenbait ezaugarri:

1. Esperimentu baten n proba daude eta proba bakoitzak bi emaitza posible ditu:

$$A = \text{“Arrakasta”}$$
$$\bar{A} = \text{“Porrota”}$$

2. Arrakastaren probabilitatearen balioa proba guztietan berdina da $P(A) = p$ eta $P(\bar{A}) = 1 - p = q$

3. n probak elkarrekiko independenteak dira

$X =$“n probatan lortutako arrakasta kopurua” aldagai diskretuak n eta p parametrodun banaketa binomiala du

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.3. Banaketa Binomiala $X \sim Bin(n, p)$

Probabilitate funtzioa:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \dots, n$$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Batezbestekoa edo itxaropena:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

Bernoulliren Banaketa eta Banaketa Binomiala:

Adibideak:

13) Txanpon bat jaurti eta aurpegia lortzea.

14) Gaixotasun baten kontrako tratamendua eman ondoren gaixoa sendatzea.

15) Txanpon bat 10 aldiz jaurti ondoren aurpegi- kopurua.

16) Kalkula ezazu dado bat 5 aldiz jaurtitzean 3-a bi aldiz lortzeko probabilitatea.

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

Bernoulliren Banaketa eta Banaketa Binomiala:

Adibideak:

17) Kutxa batean bola gorriak eta bola beltzak daude, lehenengo bola gorria ateratzeko probabilitatea 0.70 izanik. Erauzketa bakoitzaren ondoren ateratako bola berriro kutxan sartzen da eta guztira sei bola ateratzen dira. Kalkula ezazu:

a) Ateratako sei bolak gorriak izateko probabilitatea.

b) Gutxienez bi eta gehienez lau bola gorri ateratzeko probabilitatea.

c) Zenbat bola gorri ateratzea espero daiteke?

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.4. Banaketa Hipergeometrikoa: $X \sim H(N, n, p)$

Banaketa binomialaren modukoa da, baina itzulerarik gabe. Kasu honetan, N elementuetatik n elementu aldi berean edo elkarren segidan itzulerarik gabe aukeratzen dira. N elementuen artean r arrrakasta daudelarik.

$$A = \text{“Arrakasta”}$$
$$\bar{A} = \text{“Porrota”}$$

$$X = \text{“Arrakasta kopurua, n elementuen artean”}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.4. Banaketa Hipergeometrikoa: $X \sim H(N, n, p)$

Probabilitate funtzioa:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad 0 \le x \le \min(r, n)$$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Batezbestekoa edo itxaropen matematikoa:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

Adibideak:

18) 40 karta dituen karta-sorta batetik hiru karta itzulerarik gabe ateratzen dira. Kalkula ezazu gutxienez bi bateko lortzeko probabilitatea.

19) Ikerketa estatistiko baten ondorioek erakusten dutenaren arabera, gaur egun enpresen %45ek Internet bidezko salmentak egiten ditu. Zoriz 12 enpresa aukeratzen badira, zein da horietatik gutxienez 5 enpresek Internet bidezko salmentak egiteko probabilitatea?

20) Herri bateko 10 enpresatik 3 enpresak Internet bidezko salmentak egiten dituzte. Hamar enpresa horietatik zoriz 5 enpresa hartzen badira, zein da gutxienez enpresa batek Internet bidezko salmentak egiteko probabilitatea?

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.5. Poisson-en banaketa: $X \sim Poisson(\lambda)$

Poisson-en banaketak denbora-tarte, azalera edo beste neurri-tarte batean behatutako gertaera independenteen kopurua aztertzen du.
Gertaera bat neurri-unitate jakin batean jasotzeko probabilitatea konstante mantendu behar da unitate guztiekiko.
Banaketa hau gertaera arraroak zenbatzeko egokia da

Aplikazio batzuk: Bost minuturo denda batean sartzen den bezero kopurua, minuturo telefono zentral batean dauden dei kopurua, kable batek metroko dituen akats kopurua, orri bateko akats kopurua…

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.5. Poisson-en banaketa: $X \sim Poisson(\lambda)$

λ parametroa: Gertaera finkatutako neurri-unitatean batezbeste zenbat aldiz gertatzen den.

Probabilitate funtzioa:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{k!} \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Itxaropen matematikoa:

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.4. Banaketa garrantzitsu batzuk

3.4.5. Poisson-en banaketa: $X \sim Poisson(\lambda)$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$$

Adibidea:

21) Administrazio-enpresa batek egunero, batez beste, bi kexa jasotzen ditu.

a) Kalkula bedi administrazio-enpresaren kexarik gabeko egunen ehunekoa.

b) Zein da egun batean gutxienez kexa bat eta gehienez lau kexa jasotzeko probabilitatea?

c) Zein da bi egunetan gehienez bost kexa jasotzeko probabilitatea?

d) Zenbatekoa da hiru egunetan sei kexa baino gehiago jasotzeko probabilitatea?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.5. Banaketen arteko konbergentzia

3.5.1. Banaketa binomiala eta Poisson-en banaketa:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Bin(n,p) \\ n \;\; \text{"handia"} \;\; n \to \infty \\ p \;\; \text{"txikia"} \;\; p \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Bin(n,p) \cong Poisson(np)$$

Praktikan: $p \leq 0.1$ eta $n \cdot p < 5$

Adibidea:

22) Torloju-sorta batean akastuna den torloju bat egoteko probabilitatea 0.01 da. Kalkula ezazu 100 elementuko laginean akastunak diren bi torloju egoteko probabilitatea (itzulerarekin).

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3.5. Banaketen arteko konbergentzia

3.5.2. Banaketa hipergeometrikoa eta banaketa binomiala

$$\left.\begin{array}{l} X \sim H(N,n,p) \\ N >> n \\ N \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow H(N,n,p) \cong Bin(n,p)$$

Praktikan: $\dfrac{n}{N} < 0.1$

Adibidea:

23) Kutxa batean 950 bola zuri eta 50 bola beltz daude. Hiru bola (itzulerarik gabe) ateratzen dira. Kalkula ezazu bola beltzik atera ez izanaren probabilitatea.