4. PRAKTIKA – PROGRAMAZIO LINEALEKO PROBLEMA BEREZIAK

Garraio-problema

Ekoizle batek produktu bat $A_i \ (1 \le i \le m)$ *m* biltegitan du, a_i i. biltegian dagoen produktu kantitatea izanik. $B_j \ (1 \le j \le n)$ helmuga-puntura b_j unitate eramaten dira. Bestalde A_i biltegitik B_j helmuga-puntura unitate bakoitza garraiatzean sortzen den kostua c_{ij} da. Problema honen helburua i. biltegitik j. helmuga-puntura garraiatu beharreko x_{ij} unitateen kopurua zehaztea da, garraio-kostua minimoa izan dadin.

Jatorrietan dauden artikuluen kopurua eta helmugetako eskaera bat datozela suposatzen da, hau da, *problema orekatua* dela suposatzen da.

Problemaren formulazioa honako hau da:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$non \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \,;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

Lehenengo *m* murrizketak $A_i \ (1 \le i \le m)$ biltegietan dauden artikulu kopuruekin erlazionatuta daude eta hurrengo *n* murrizketak berriz, $B_j \ (1 \le j \le n)$ helmuga-puntuetako eskaerekin erlazionatuta daude.

Problema orekatua ez bada, problema orekatu arte gezurretako jatorriak edo gezurretako helmugak sortu behar dira.

Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako garraio-problema orekatua

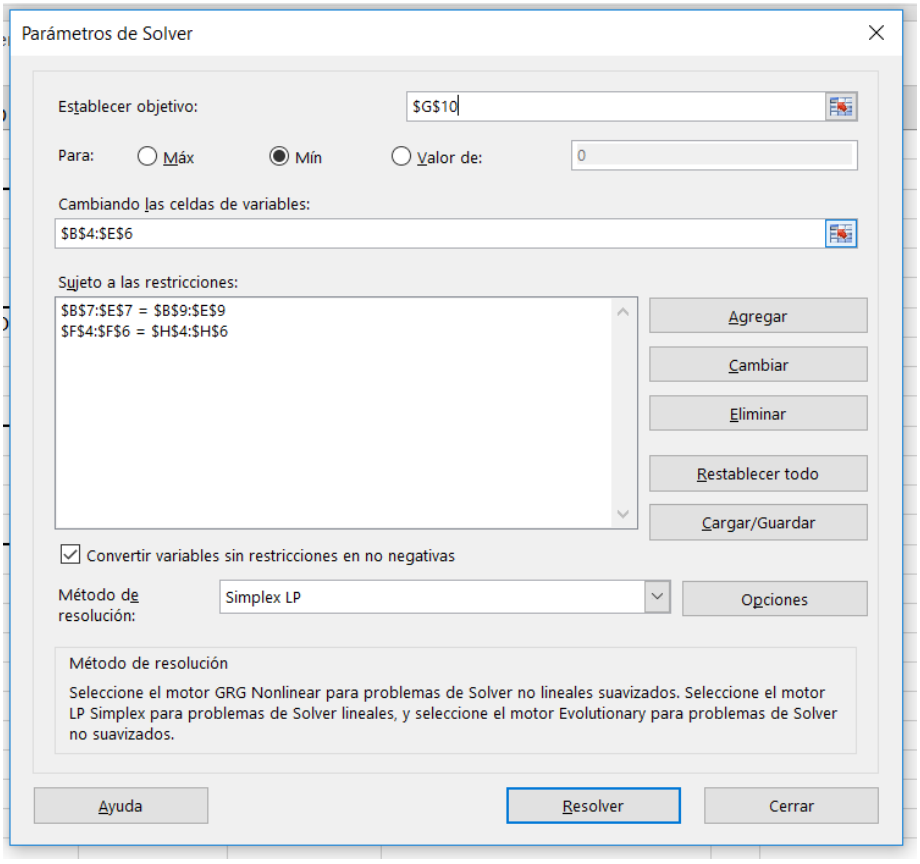
Demagun hiru hornitzaile A_1, A_2 eta A_3 eta lau zentro kontsumitzaile C_1, C_2, C_3 eta C_4. daudela Hornitzaileek 50, 20 eta 40 mila litro esne ekoizten dute egunean hurrenez hurren. Zentro kontsumitzaileen eguneko eskaera 35, 35, 22 eta 18 mila litro esneko da hurrenez hurren. 1000 litro garraiatzean garraio-kostuak eurotan ondorengo taulan agertzen dira:

	C₁	**C₂**	**C₃**	**C₄**
A₁	10	30	15	8
A₂	12	25	5	35
A₃	20	7	14	22

Nola antolatu beharko da garraioa, kostua minimoa izan dadin?

Ondorengo irudietan garraio-problema orekatua ebazteko egin beharreko programazioa eta Solver tresna erabiliz lortutako soluzioa agertzen dira.

	A	B	C	D	E	F	G	
1		**Garraio-problema**						
2								
3		**C1**	**C2**	**C3**	**C4**			
4	**A1**	0	0	0	0	=SUMA(B4:E4)	=	50
5	**A2**	0	0	0	0	=SUMA(B5:E5)	=	20
6	**A3**	0	0	0	0	=SUMA(B6:E6)	=	40
7		=SUMA(B4:B6)	=SUMA(C4:C6)	=SUMA(D4:D6)	=SUMA(E4:E6)			
8		=	=	=	=			
9		35	35	22	18			
10						Kostu-osoa	=SUMAPRODUCTO(B4:E6;B12:E14)	
11	**Costes**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**			
12	**A1**	10	30	15	8			
13	**A2**	12	25	5	35			
14	**A3**	20	7	14	22			



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Garraio-problema**						
2								
3		**C1**	**C2**	**C3**	**C4**			
4	**A1**	32	0	0	18	50	=	50
5	**A2**	0	0	20	0	20	=	20
6	**A3**	3	35	2	0	40	=	40
7		35	35	22	18			
8		=	=	=	=			
9		35	35	22	18			
10						Kostu-osoa	897	
11	**Costes**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**			
12	**A1**	10	30	15	8			
13	**A2**	12	25	5	35			
14	**A3**	20	7	14	22			
15								

Azken irudian ikusten den bezalaxe, garraioaren kostua minimoa 897 eurokoa da, zentro kontsumitzaile bakoitzera garraiatu beharreko unitateen kopurua ondorengoa izanik:

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	32			18
A_2			20	
A_3	3	35	2	

Oharra: Garraio-problema PLko problema bezala formulatuta

$$\text{Min} \quad Z = 10x_{11} + 30x_{12} + 15x_{13} + 8x_{14} + 12x_{21} + 25x_{22} + 5x_{23} + 35x_{24} +$$
$$+ 20x_{31} + 7x_{32} + 14x_{33} + 22x_{34}$$
$$\text{s.a.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 35$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 22$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 18$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2,3,4\}$$

Esleipen-problema

Aldaera asko existitzen diren arren, ohiko problema, kostu osoa minimizatzeko edo baliagarritasun funtzioa maximizatzeko asmoz *n* eginkizun zehatz *n* pertsonari esleitzen datza. *i.* pertsonari *j.* eginkizuna esleitzean 1 balioa hartzen duen eta esleipen hori ematen ez bada berriz, zero balio hartzen duen aldagai bitarra x_{ij} adieraziz eta esleipen honi dagokion irabazia c_{ij} denotatuz, problemaren formulazioa ondorengoa da:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\textit{non} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,\ldots,n$$
$$x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \text{(aldagai bitarrak)}$$

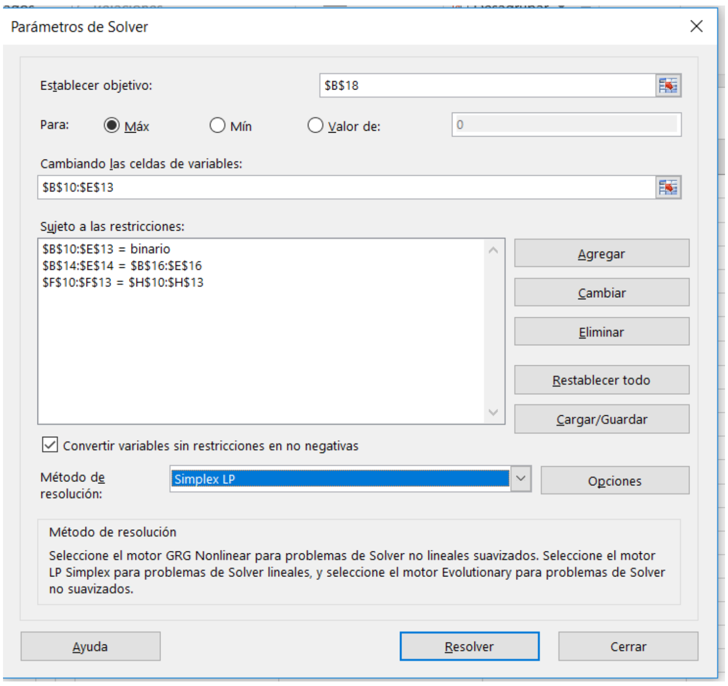
Murrizketen lehenengo azpimultzoak eginkizun bakoitza pertsona bakar bati esleitzen zaiola adierazten du, bigarren azpimultzoak ordea, pertsona bakoitzak eginkizun bakar bat egingo duela esan nahi du.

Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako esleipen-problema

EXCEL programa erabiliz salmenta-agenteak hirietara era optimoan esleitu. Taulan agertzen diren balioak, salmentetan espero diren gehikuntzak (%tan) dira.

Erabilgarritasuna	Bartzenola	Madril	Sevilla	Bilbao
1. salmenta-agentea	34	10	15	28
2. salmenta-agentea	16	15	22	12
3. salmenta-agentea	10	25	13	20
4. salmenta-agentea	30	19	27	31

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	**Erabilgarritasuna**	**Bartzenola**	**Madril**	**Sevilla**	**Bilbao**			
4	**1. salmenta-agentea**	34	10	15	28			
5	**2. salmenta-agentea**	16	15	22	12			
6	**3. salmenta-agentea**	10	25	13	20			
7	**4. salmenta-agentea**	30	19	27	31			
8								
9	**Esleipena**	**Bartzenola**	**Madril**	**Sevilla**	**Bilbao**			
10	**1. salmenta-agentea**	0	0	0	0	=SUMA(B10:E10)	=	1
11	**2. salmenta-agentea**	0	0	0	0	=SUMA(B11:E11)	=	1
12	**3. salmenta-agentea**	0	0	0	0	=SUMA(B12:E12)	=	1
13	**4. salmenta-agentea**	0	0	0	0	=SUMA(B13:E13)	=	1
14		=SUMA(B10:B13)	=SUMA(C10:C13)	=SUMA(D10:D13)	=SUMA(E10:E13)			
15		=	=	=	=			
16		1	1	1	1			
17								
18	Erabilgarritasun maximoa	=SUMAPRODUCTO(B4:E7;B10:E13)						
19								



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	**Erabilgarritasuna**	**Bartzenola**	**Madril**	**Sevilla**	**Bilbao**			
4	**1. salmenta-agentea**	34	10	15	28			
5	**2. salmenta-agentea**	16	15	22	12			
6	**3. salmenta-agentea**	10	25	13	20			
7	**4. salmenta-agentea**	30	19	27	31			
8								
9	**Esleipena**	**Bartzenola**	**Madril**	**Sevilla**	**Bilbao**			
10	**1. salmenta-agentea**	1	0	0	0	1	=	1
11	**2. salmenta-agentea**	0	0	1	0	1	=	1
12	**3. salmenta-agentea**	0	1	0	0	1	=	1
13	**4. salmenta-agentea**	0	0	0	1	1	=	1
14		1	1	1	1			
15		=	=	=	=			
16		1	1	1	1			
17								
18	Erabilgarritasun maximoa	112						

Ondorengo irudian, salmenta-agenteak hirietara era optimoan nola esleitu laburbiltzen da:

1 salmenta-agentea	2. salmenta-agentea	3. salmenta-agentea	4. salmenta-agentea
Bartzelona	Sevilla	Madrid	Bilbao

Oharra: Esleipen-problema PLko problema bezala formulatuta

$$\text{Min} \quad Z = 34x_{11} + 10x_{12} + 15x_{13} + 28x_{14} + 16x_{21} + 15x_{22} + 22x_{23} + 12x_{24} +$$

$$+10x_{31} + 25x_{32} + 13x_{33} + 20x_{34} + 30x_{41} + 19x_{42} + 27x_{43} + 31x_{44}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \forall i, j \in \{1,2,3,4\}
\end{aligned}$$

Bi puntuen arteko distantzia minimoa

Programazio Linealeko problema batzuk **nodoak** eta **arkuak** dituen **sare** baten moduan adieraz daitezke. Kasu hauetan **o** hasierako nodoaren eta **f** azken nodoaren arteko distantzia minimoa kalkula daiteke, i. eta j. nodoen arteko distantzia zehazten duten kostu-matrizeko elementuak c_{ij} izanik. Sareak baliorik ez balu, arku guztientzat $c_{ij} = 1$ da.

Problema hau PLO motako problema bat da. Hala ere, problema hau Simplexen bidez osotasun baldintzak ezarri gabe ebatz daiteke, sareko problemei dagozkien murrizketa matrizeak guztiz modulu bakarrekoak baitira (matrize bat modulu bakarrekoa da, baldin bere azpimatrize erregular eta karratu guztien determinantearen balioa +1 edo –1 bada). Orduan, erlaxatutako problemaren (osotasun baldintzarik gabeko problemaren) soluzioa ere osoa da

Erabaki-aldagaiak ondorengoak dira:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{i. eta j. nodoak elkartzen dituen arkua erabili bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

Problemaren formulazioa berriz honako hau da:

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} &\sum_i x_{ij} = \sum_k x_{jk} \quad \forall \text{j} \neq \text{hasierako nodoa, azken nodoa} \\ &\sum_i x_{if} = 1 \qquad \text{azken nodoa} \\ &\sum_k x_{ok} = 1 \qquad \text{hasierako nodoa} \end{aligned}$$

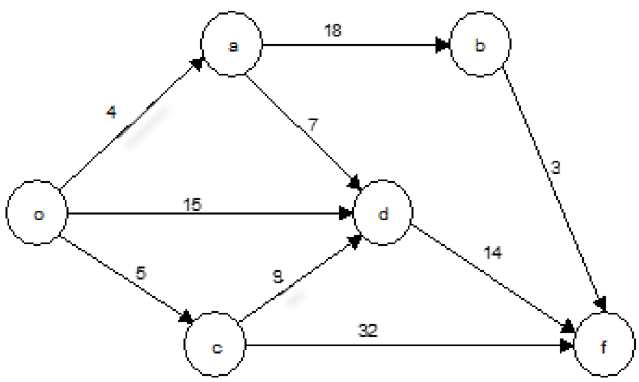
Murrizketek bitarteko nodo bakoitzean gehien gehienez arku bat edo bat ere helduko ez dela eta gehien gehienez arku bat edo bat ere aterako ez dela adierazten dute. Hala ere, amaierako nodora arku bat baino ez da heldu behar eta hasierako nodotik beste bat atera.

Aurreko murrizketak ondoren eran idatz daitezke:

$$\begin{aligned} \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} &= 0 \quad \forall \text{j} \neq \text{hasierako nodoa, azken nodoa} \\ \sum_i x_{if} &= 1 \qquad \text{azken nodoa} \\ -\sum_k x_{ok} &= -1 \quad \text{hasierako nodoa} \end{aligned}$$

Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako bi puntuen arteko distantzia minimoa

Ondorengo irudian agertzen den sareko o hasierako nodoaren eta f azken nodoaren arteko distantzia minimoa lortu:

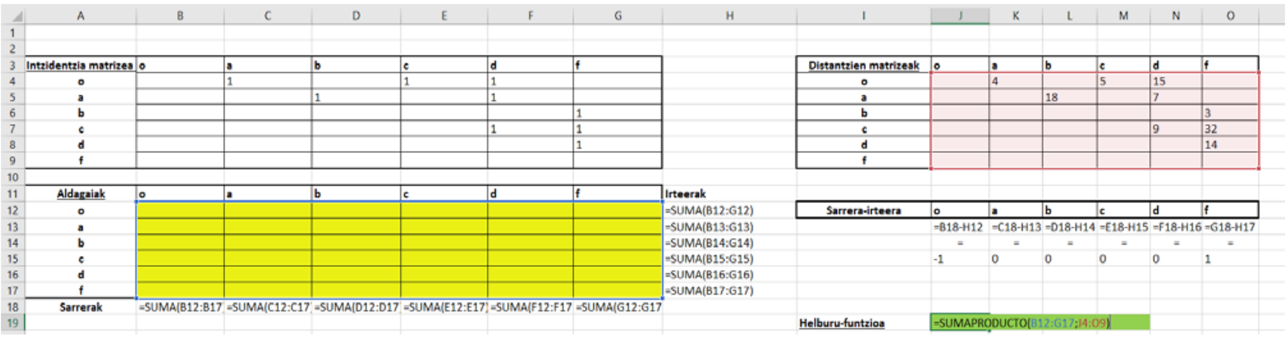


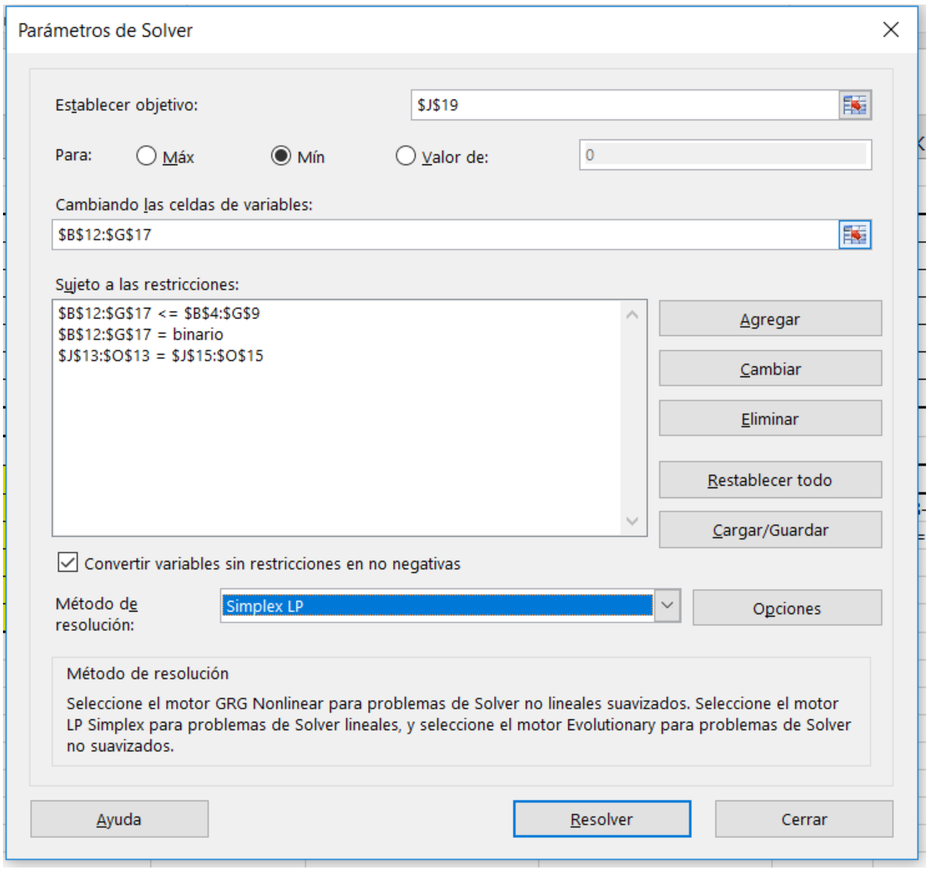
Sarearen nodo-nodo intzidentzia-matrizea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{i. eta j. nodoak elkartzen dituen arkua erabili bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

	o	a	b	c	d	f
o		1		1	1	
a			1		1	
b						1
c					1	1
d						1
f						

Ondorengo irudietan bi punturen arteko distantzia minimoko problema ebazteko egin beharreko programazioa eta Solver tresna erabiliz lortutako soluzioa agertzen dira.





lentzia mat	o	a	b	c	d	f
o	0	1	0	1	1	0
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	0	0	0	1
c	0	0	0	0	1	1
d	0	0	0	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0

Distantzien matrizeak	o	a	b	c	d	f
o		4		5	15	
a			18		7	
b						3
c					9	32
d						14
f						

Aldagaiak	o	a	b	c	d	f	Irteerak
o	0	1	0	0	0	0	1
a	0	0	1	0	0	0	1
b	0	0	0	0	0	1	1
c	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
Sarrerak	0	1	1	0	0	1	

Sarrera-irteera	o	a	b	c	d	f
	-1	0	0	0	0	1
	=	=	=	=	=	=
	-1	0	0	0	0	1

Helburu-funtzioa	25

Azken irudiak erakusten duen bezalaxe, distantzia minimoa 25 da, distantzia hori lortzeko egindako ibilbidea o-a-b-f izanik.

Oharra Bi puntuen arteko distantzia minimoko problema PLko problema bezala formulatuta

x_{ij} aldagai-bitarrak i. eta j. herrien arteko desplazamendua adierazten du (0-k desplazamendurik ez dagoela adierazten du, eta 1-k desplazamendua dagoela)

Problemako murrizketak herri bakoitzetik irteten diren eta herri horretara heltzen diren bideen balantzeek zehaztuko dituzte. Murrizketa hauek honako mota hauetakoak dira:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0 \quad \forall \text{j} \neq \text{hasierako nodoa, azken nodoa}$$
$$-\sum_i x_{if} = -1 \quad \text{azken nodoa}$$
$$\sum_k x_{ok} = 1 \quad \text{hasierako nodoa}$$

o biltegiko bideen balantzea: $x_{oa} + x_{od} + x_{oc} = 1$

a herriko bideen balantzea: $x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} = 0$

b herriko bideen balantzea: $x_{bf} - x_{ab} = 0$

c herriko bideen balantzea: $x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} = 0$

d herriko bideen balantzea: $x_{df} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} = 0$

f herriko bideen balantzea: $-x_{bf} - x_{df} - x_{cf} = -1$

Helburu-funtzioa:

$$\text{Min} \quad Z = 4x_{oa} + 15x_{od} + 5x_{oc} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 9x_{cd} + 32x_{cf} + 14x_{df} + 3x_{bf}$$

Ondorioz, problema ondorengoa da:

$$\text{Min} \quad Z = 4x_{oa} + 15x_{od} + 5x_{oc} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 9x_{cd} + 32x_{cf} + 14x_{df} + 3x_{bf}$$

$$\begin{aligned}
\textit{non} \qquad & x_{oa} + x_{od} + x_{oc} = 1 \\
& x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} = 0 \\
& x_{bf} - x_{ab} = 0 \\
& x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} = 0 \\
& x_{df} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} = 0 \\
& -x_{bf} - x_{df} - x_{cf} = -1 \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \forall i \in \{o,a,b,c,d\}, \forall j \in \{a,b,d,c,f\}
\end{aligned}$$

Fluxu maximoko problema

Distantzia minimoko probleman egiten den moduan, fluxu maximoko problema sare bat bezala planteatzen da, hortaz murrizketen matrizea guztiz modulu bakarrekoa da eta ondorioz soluzio optimoa osoa da.
Problema sare batean, **1.** hasierako nodotik **n.** azken nodora arte higitzen den fluxu maximoa lortzen datza, c_{ij} i. eta j. nodoak elkartzen dituen arkuak jasan dezakeen fluxu maximoa izanik.

Problemaren formulazio hurrengoa da:

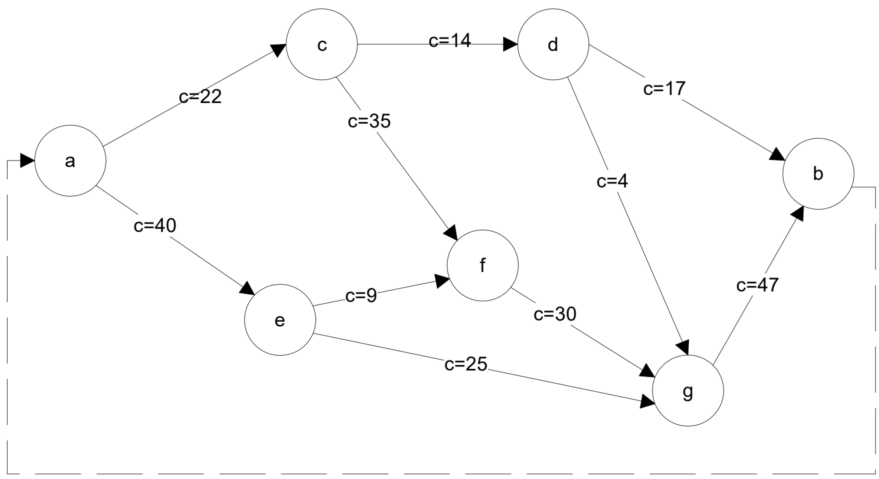
$$\text{Max } Z = \sum_i x_{in}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad i = 2,3,\ldots,n-1$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \textit{eta} \quad x_{ij} = 0 \quad (i,j) \text{ arkua ez badago}$$

Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako fluxu maximoko problema

Ondorengo sarean zehar higi daitekeen fluxu maximoa lortu nahi da. Irudian arku bakoitzaren gainean arkuak jasan dezakeen fluxu maximoa agertzen da:

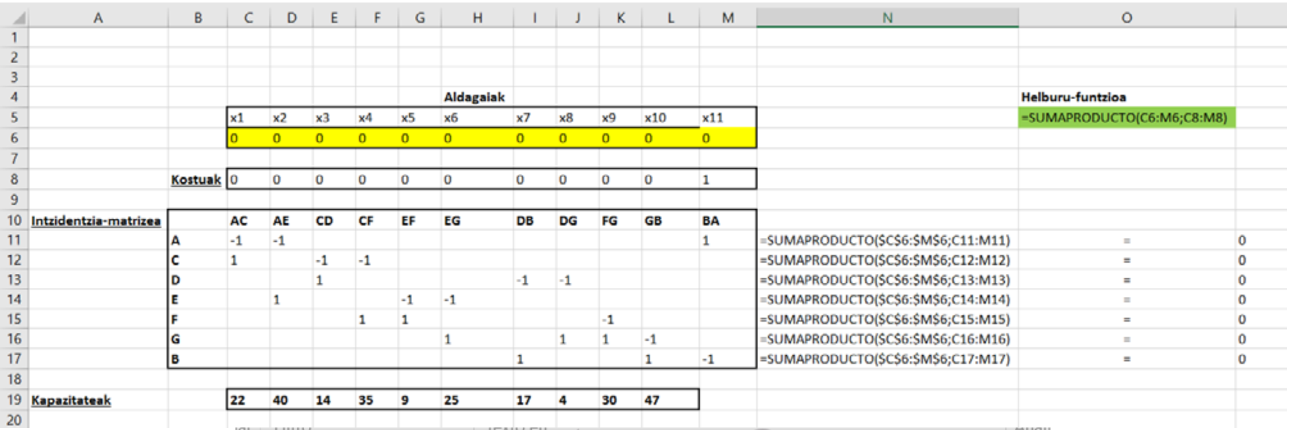


Nodo-arku intzidentzia-matrizea hau da:

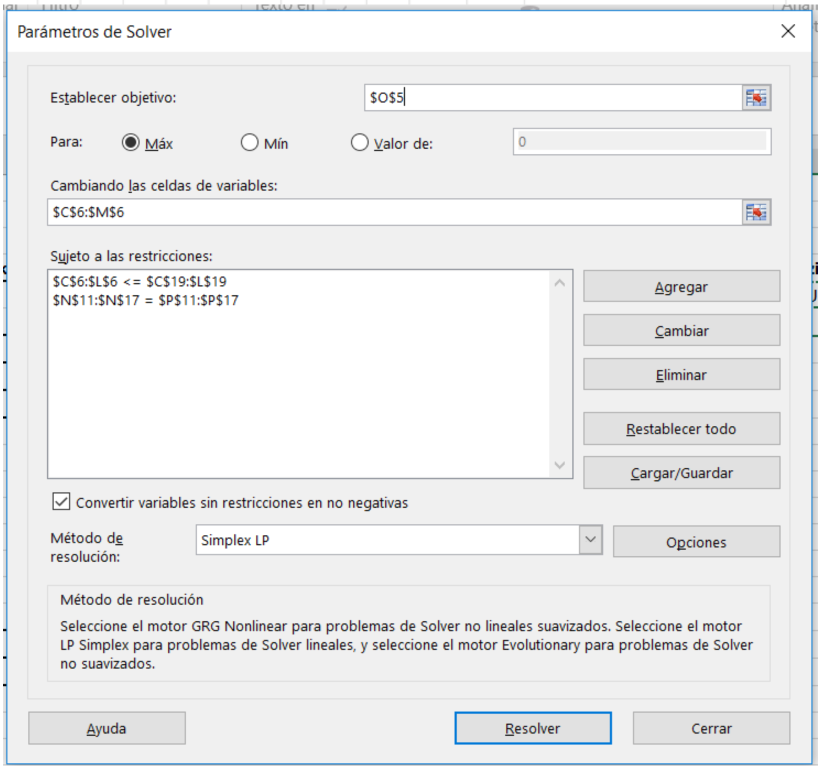
$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{j. arkua i. nodotik abiatzen bada} \\ 1 & \text{j. arkua i. nodora joaten bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

	AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA
A	-1	-1									1
C	1		-1	-1							
D			1				-1	-1			
E		1			-1	-1					
F				1	1				-1		
G						1		1	1	-1	
B							1			1	-1

Ondorengo irudietan Solver tresnaren bidez lortutako soluzioa erakusten da. Aldagaiak, arku bakoitzetik higitzen diren fluxuak, kalkulu orrian x_1, x_2, eta abar bezala berrizendatu dira, eta bakoitzaren azpian zein arkuekin erlazionatuta dauden agertzen da.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1																
2																
3																
4								Aldagaiak							Helburu-funtzioa	
5			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		=SUMAPRODUCTO(C6:M6;C8:M8)	
6			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
7																
8		Kostuak	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
9																
10	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
11		A	-1	-1									1	=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C11:M11)	=	0
12		C	1		-1	-1								=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C12:M12)	=	0
13		D			1				-1	-1				=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C13:M13)	=	0
14		E		1			-1	-1						=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C14:M14)	=	0
15		F				1	1				-1			=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C15:M15)	=	0
16		G						1		1	1	-1		=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C16:M16)	=	0
17		B							1			1	-1	=SUMAPRODUCTO($C$6:$M$6;C17:M17)	=	0
18																
19	Kapazitateak		22	40	14	35	9	25	17	4	30	47				
20																



Ondorengo irudietan posiblea den soluzio bat agertzen dira:

							Aldagaiak							Helburu-funtzioa	
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		56	
		22	34	14	8	9	25	10	4	17	46	56			
Kost		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
Intzidentzia-ma		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
	A	-1	-1									1	0	=	0
	C	1		-1	-1								0	=	0
	D			1				-1	-1				0	=	0
	E		1			-1	-1						0	=	0
	F				1	1				-1			0	=	0
	G						1		1	1	-1		0	=	0
	B							1			1	-1	0	=	0
Kapazitateak		22	40	14	35	9	25	17	4	30	47				

Saretik higi daitekeen fluxu maximoa 56 izanik.

Oharra Fluxu maximoko problema PLko problema bezala formulatuta

Helburu funtzioa bi era desberdinetara ja daiteke:

$$\text{Max} \quad Z = x_{ac} + x_{ae} \qquad \vee \qquad \text{Max} \quad Z = x_{db} + x_{gb}$$

Murrizketa-multzoko lehenengo berdintzak nodo-arku matrizea erabiliz lor daitezke:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ac} \\ x_{ae} \\ x_{cd} \\ x_{cf} \\ x_{ef} \\ x_{eg} \\ x_{db} \\ x_{dg} \\ x_{fg} \\ x_{gb} \\ x_{ba} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eta azken murrizketak kapazitateak zehazten dituzte:

$$\begin{array}{lll lll} x_{ac} & \le & 22 & x_{eg} & \le & 25 \\ x_{ae} & \le & 40 & x_{db} & \le & 17 \\ x_{cd} & \le & 14 & x_{dg} & \le & 4 \\ x_{cf} & \le & 35 & x_{fg} & \le & 30 \\ x_{ef} & \le & 9 & x_{gb} & \le & 47 \end{array}$$