

---

# ESTADÍSTIKA METODOAK INGENIARITZAN

## 7. Hipotesi kontrastea



emeri ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7. Hipotesi kontrastea

---

## 7.1 Sarrera

## 7.2 Oinarrizko kontzeptuak

## 7.3 Hipotesi-kontraste motak

## 7.4 Hipotesi-kontrasteen urratsak

## 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

7.5.2 Bi banaketa independenteren arteko batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea



# 7. Hipotesi kontrastea

---

- 7.5.4 Banaketa normaleko bi populazio independenteren bariantzen arteko zatidurarako hipotesi-kontrastea
- 7.5.5 Banaketa binomialaren proportziorako hipotesi-kontrastea ( $n > 100$ )
- 7.5.6 Bi banaketa binomial independenteren proportzioen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea ( $n, m > 100$ )
- 7.5.7 Bi banaketa normal ez independenteren batezbestekoen diferentziarako hipotesi-kontrastea

## 7.6 Errore motak

## 7.7 p-balioa



emen la zabal zazu



# 7.1 Sarrera

## Inferentzia estatistikoa edo Estatistika Induktiboa

Zorizko lagin bakun batetik ateratako informaziotik populaziorako orokortasunak, ondorioak eta aurreanak lortzea ahalbidetzen duen alorra.

## Estimazioa (konfiantza-tarteak)

Lagineko informazioa erabiliz populazioaren parametroko tarte bat zehaztean datza.

**Konfiantza-maila:  $1-\alpha$**

## Hipotesi-kontrastea

Populazioko parametro bati buruzko erabaki bat hartzean datza.

Sarrera

Oinarrizko  
kontzeptuak

Hipotesi-  
kontraste motak

Hipotesi-  
kontrasteen  
urratsak

Zenbait hipotesi-  
kontraste

Errore motak

p-balioa



# 7.1 Sarrera

## Hipotesi estatistikoa

Populazioaren ezaugarri bati buruz egiten den baieztapen bat da.

## Hipotesi-kontrastea (Hipotesi kontraste parametrikoak)

Populazioaren ezaugarri bati buruz egindako hipotesia onargarria ala errefusagarria den erabakitzeko erabiltzen den tresna da.

Sarrera

Oinarrizko  
kontzeptuak

Hipotesi-  
kontraste motak

Hipotesi-  
kontrasteen  
urratsak

Zenbait hipotesi-  
kontraste

Errore motak

p-balioa



# 7.1 Sarrera

- Hipotesi estatistikoa egia den jakiteko populazio osoa aztertu beharko zen.
- Populazio osoa aztertzea ezinezkoa edo oso zaila denez, populazioaren adierazgarria den lagin bat erabiltzen da non hipotesia onargarria den aztertzen da.
- Laginetik lortutako informazioa hipotesiarekin bat badator hipotesia onartu egiten da, eta bat ez badator, berriz, hipotesia errefusatu egiten da.

*Ez da faltsua edo egia den esaten:  
hipotesia **errefusatu** edo **onartu** egiten da.*



emari la zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco      Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.2 Oinarrizko kontzeptuak

## Hipotesi nulua $H_0$

Kontrastatu nahi den hipotesia da

$H_0$  errefusatzea sententzia sendo bat da, izan ere hipotesia lortutako datuekin bat ez datorrela esan nahi du.

$H_0$  ez errefusatzea sententzia ahula da, izan ere hipotesia lortutako datuekin bat datorrela esan nahi du.

## Hipotesi alternatiboa $H_a$

Hipotesi nuluaren hipotesi osagarria da. ("kontrakoa")

Sarrera

Oinarrizko  
kontzeptuak

Hipotesi-  
kontraste motak

Hipotesi-  
kontrasteen  
urratsak

Zenbait hipotesi-  
kontraste

Errore motak

p-balioa



# 7.2 Oinarritzko kontzeptuak

Hipotesi nulua  $H_0$  eta Hipotesi alternatiboa  $H_a$

$H_0$  hipotesi  
nulua onartu



$H_a$  hipotesi  
alternatiboa errefusatu

$H_0$  hipotesi  
nulua errefusatu



$H_a$  hipotesi  
alternatiboa onartu



emari zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco Euskal Herriko  
Unibertsitatea



# 7.2 Oinarrizko kontzeptuak

## Kontrasterako estatistikoa

Hipotesi kontrastea egiteko zorizko lagin bakunean oinarriturik laginaren menpeko estatistiko bat lortuko dugu:

**Kontrasterako estatistikoa:**  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Sarrera

Oinarrizko  
kontzeptuak

Hipotesi-  
kontraste motak

Hipotesi-  
kontrasteen  
urratsak

Zenbait hipotesi-  
kontraste

Errore motak

p-balioa



# 7.2 Oinarritzko kontzeptuak

## $S_0$ onarpen eremua eta $S_1$ eremu kritikoa

Kontrasterako estatistikoa lortu ondoren  $S_0$  onarpen eremua edo  $S_1$  eremu kritikoa lortu behar ditugu

Kontrasterako estatistikoaren balioa  $S_0$  eremuan badago



$H_0$  hipotesi nulua onar daiteke

Kontrasterako estatistikoaren balioa  $S_1$  eremuan badago



$H_0$  hipotesi nulua errefusatu da



erren ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.3 Hipotesi-kontraste motak

## Hipotesi motak

Eremu kritikoaren arabera bi motatako hipotesi-kontrasteak daude:

### 1. Bi aldeko hipotesi kontrasteak

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta \neq \theta_0$$

### 2. Alde bakarreko hipotesi kontrasteak

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta > \theta_0$$

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta < \theta_0$$



emeri ta zabal zazu:

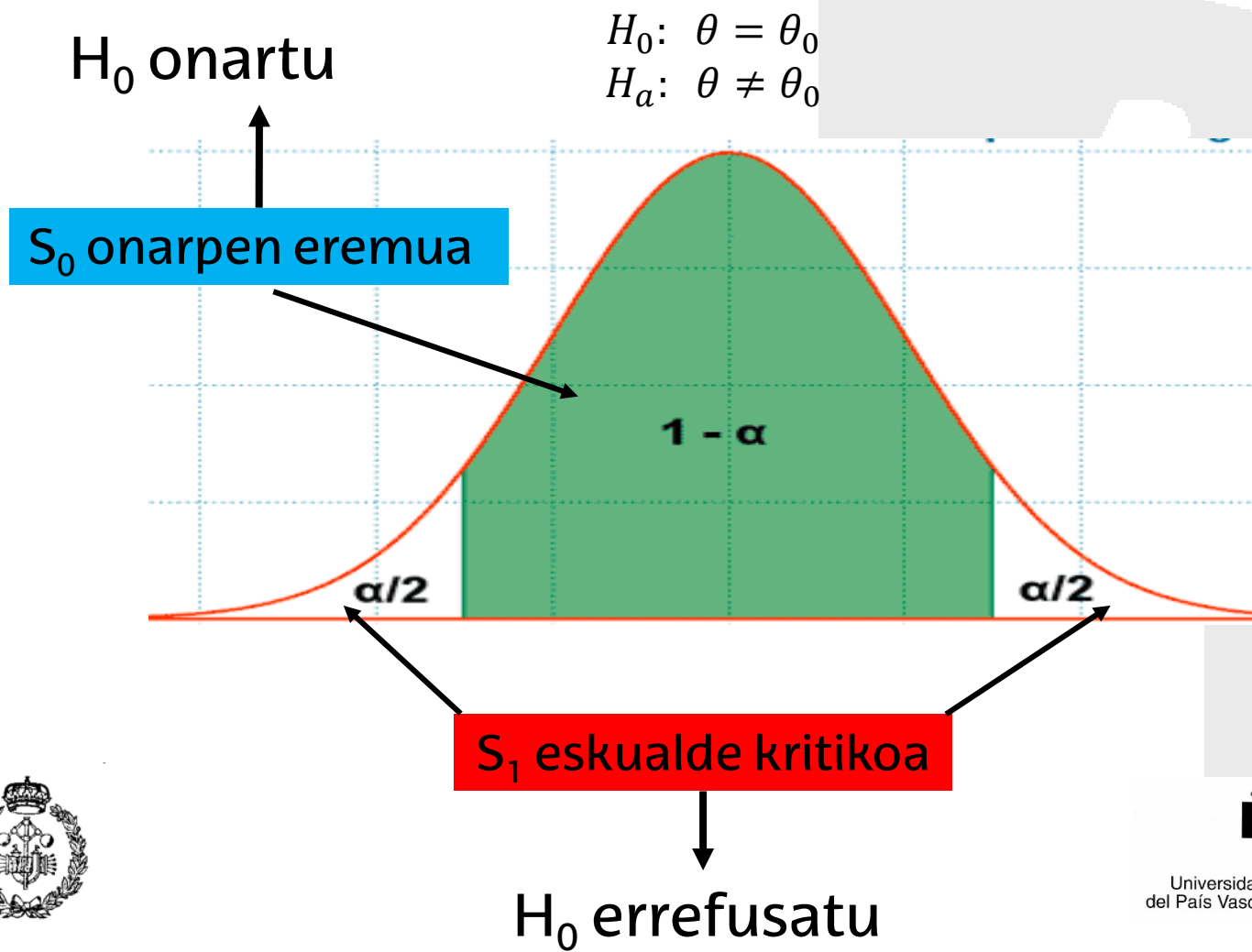


Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.3 Hipotesi-kontraste motak

## 1. Bi aldeko hipotesi kontrasteak



enren ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.3 Hipotesi-kontraste motak

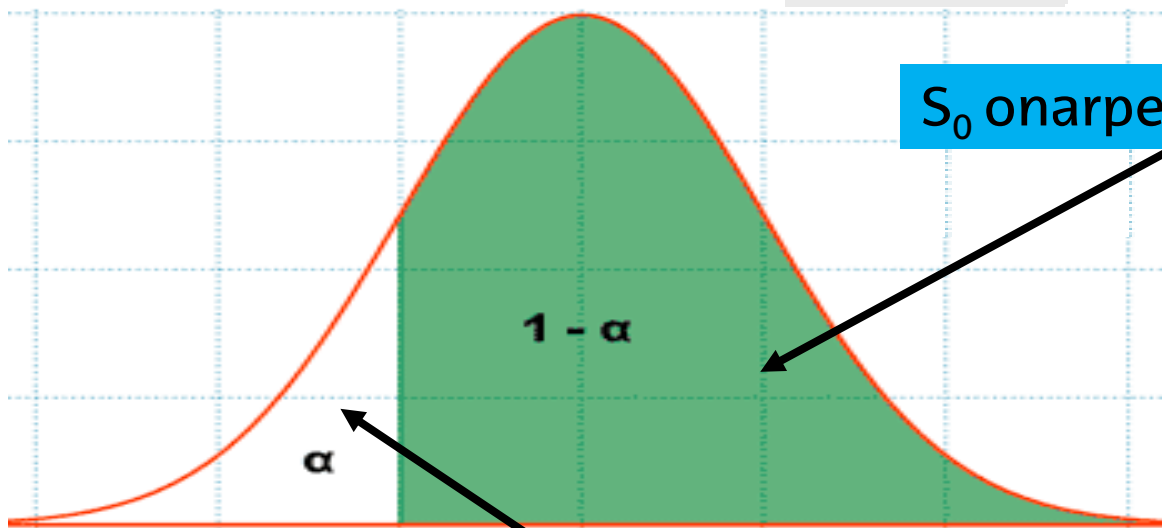
## 2. Alde bakarreko hipotesi kontrasteak

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta < \theta_0$$

$H_0$  onartu

$S_0$  onarpen eremua



$S_1$  eskualde kritikoa

$H_0$  errefusatu



# 7.3 Hipotesi-kontraste motak

## 2. Alde bakarreko hipotesi kontrasteak

Sarrera

Oinarrizko kontzeptuak

Hipotesi-kontraste motak

Hipotesi-kontrasteen urratsak

Zenbait hipotesi-kontraste

Errore motak

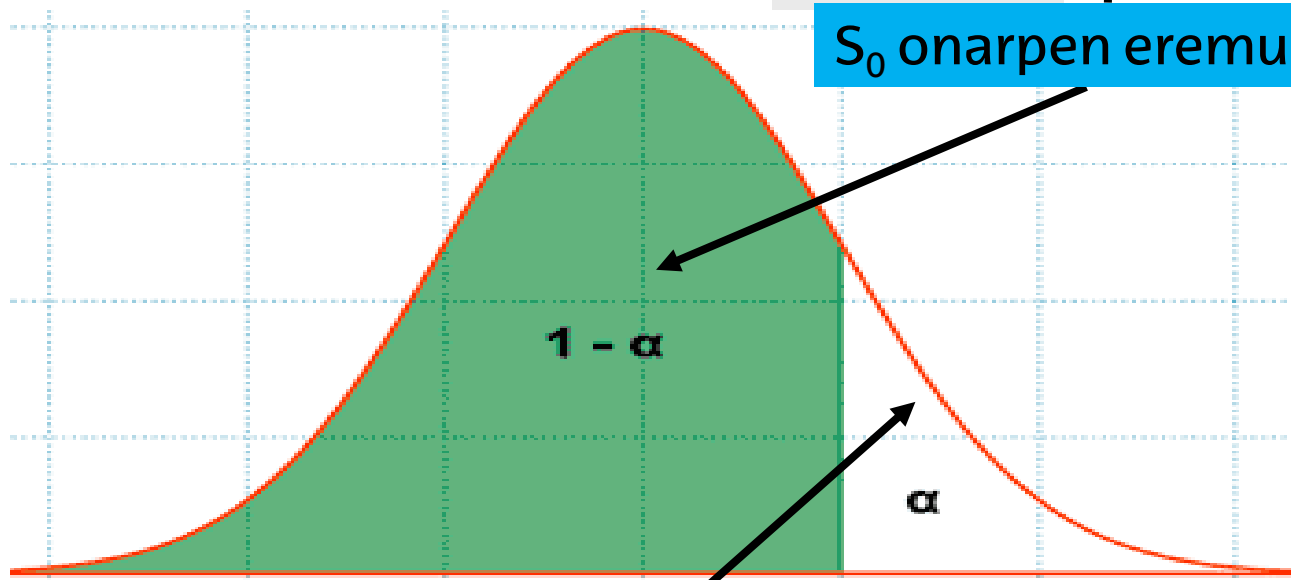
p-balioa

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta > \theta_0$$

$H_0$  onartu

$S_0$  onarpen eremua



$S_1$  eskualde kritikoa

$H_0$  errefusatu



# 7.4 Hipotesi-kontrasteen urratsak

## 1. Hipotesi nulua eta hipotesi alternatiboa zehaztu $H_0$ $H_a$

Aztertu nahi den populazioaren parametroari buruzko baieztapena finkatu.

## 2. Adierazgarritasun maila finkatu $\alpha$

Adierazgarritasun-maila aurretik finkatuko da. Adierazgarritasun-maila erabilienak:

0.005, 0.01, 0.05

## 3. Probarako estatistiko egokia aukeratu

Populazioko parametroaren estimatzailearen menpekoea den probako estatistikoak laginean hartzen duen balioa kalkulatu.



# 7.4 Hipotesi-kontrasteen urratsak

## 4. Eremu kritikoa edo/eta onarpen-eremua zehaztu

Hipotesi nulua egia denean estatistikoaren banaketa ezaguna bada, orduan eskualde kritikoa edo/eta onarpen eremua finka daitezke.

## 5. Erabaki estatistikoa hartu

- Probarako estatistikoaren balioa,  $S_1$  eskualde kritikoan badago



**$H_0$  hipotesi nulua errefusatuko da,  $\alpha$  adierazgarritasun mailaz**

- Probarako estatistikoaren balioa  $S_1$  eskualde kritikoan EZ badago



**$H_0$  hipotesi nulua onartuko da,  $\alpha$  adierazgarritasun mailaz**





# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

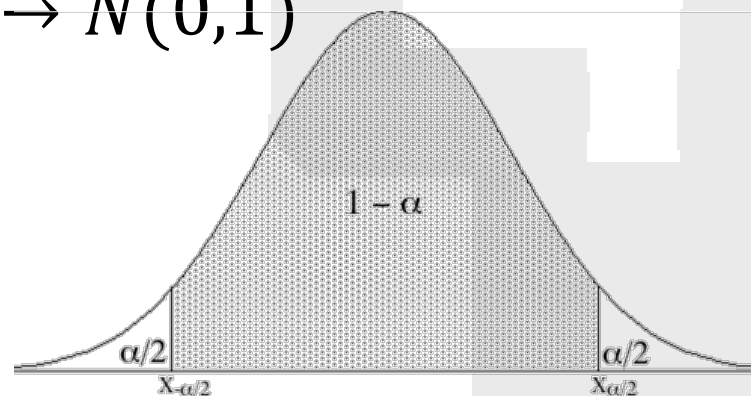
1.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu \neq \mu_0$

**A)  $\sigma$  ezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ |\bar{x} - \mu_0| > z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \right\}$$



eman ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

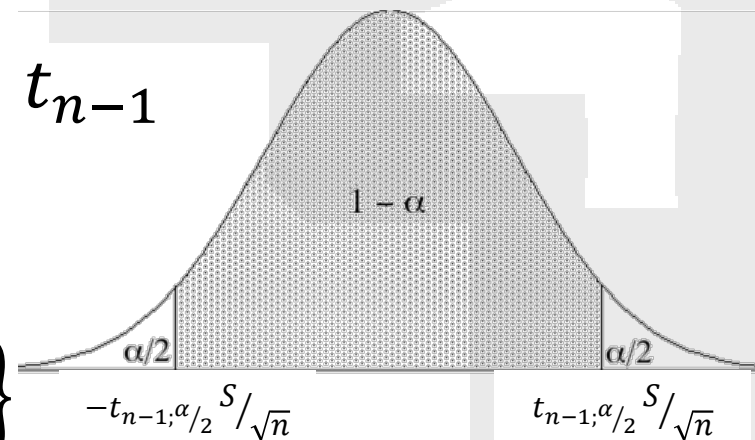
1.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu \neq \mu_0$

**B)  $\sigma$  ezezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ |\bar{x} - \mu_0| > t_{n-1; \alpha/2} \cdot S/\sqrt{n} \right\}$$



erren ta zabal zazu:



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

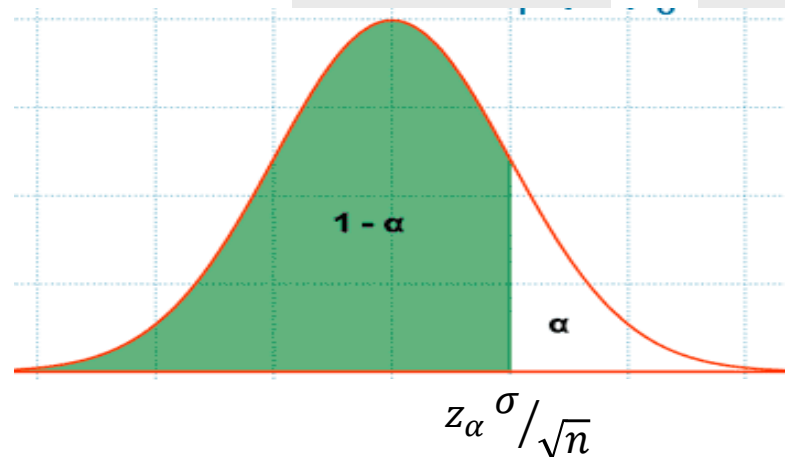
2.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu > \mu_0$

**A)  $\sigma$  ezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n} \right\}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

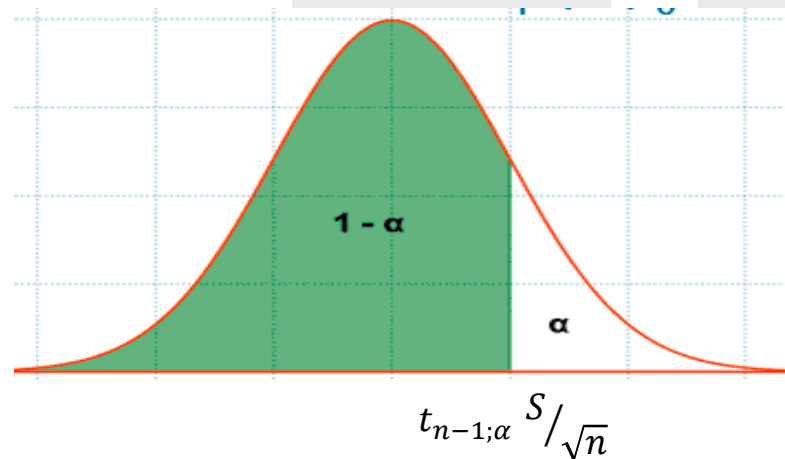
2.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu > \mu_0$

**B)  $\sigma$  ezezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ \bar{x} - \mu_0 > t_{n-1;\alpha} \cdot s/\sqrt{n} \right\}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

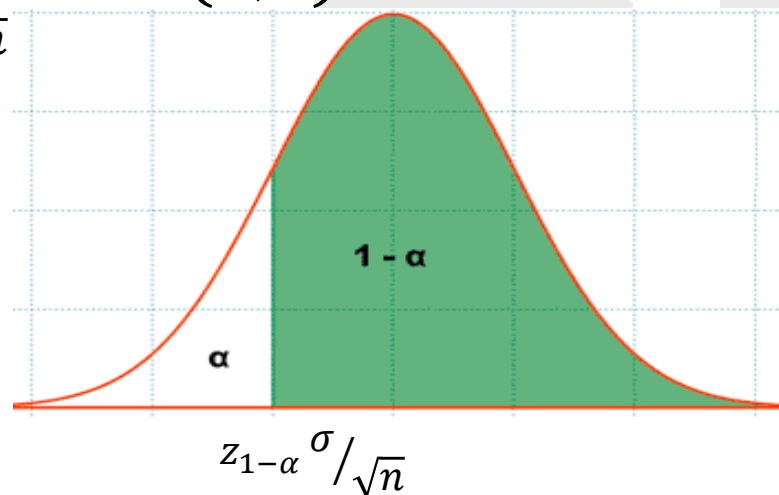
3.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu < \mu_0$

**A)  $\sigma$  ezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ \bar{x} - \mu_0 < z_{1-\alpha} \sigma / \sqrt{n} \right\}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### a) Banaketa normalaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

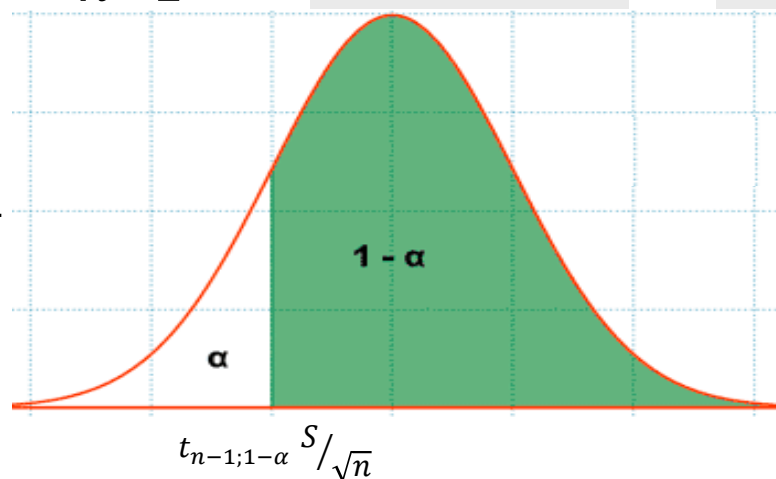
3.  $H_0: \mu = \mu_0$  eta  $H_a: \mu < \mu_0$

**B)  $\sigma$  ezezaguna**

$H_0$  hipotesiaren menpe:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$

**Eskualde kritikoa**

$$\left\{ \bar{x} - \mu_0 < t_{n-1;1-\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### b) Edozein banaketaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

$$n \geq 30$$

Lagin tamaina handietarako  $n \geq 30$ , **Limite zentralaren teorema** hurrengoa dio:  $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ . Beraz, eremu kritikoak  $\sigma$  ezaguna duenean aurreko atalean lortutako berberak dira. Student-en  $t$  banaketa agertzen denean,  $\sigma$  ezezaguna denean, berriz, honako aldaketak egin behar dira:

$$t_{n-1; \alpha/2} \rightarrow Z_{\alpha/2}$$

$$t_{n-1; \alpha} \rightarrow Z_{\alpha}$$

$$t_{n-1; 1-\alpha} \rightarrow Z_{1-\alpha}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

Sarrera

Oinarrizko kontzeptuak

Hipotesi-kontraste motak

Hipotesi-kontrasteen urratsak

Zenbait hipotesi-kontraste

Errore motak

p-balioa

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Normala $\sigma$ ezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu \neq \mu_0$	$\{ \bar{x} - \mu_0  > z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}\}$
Normala $\sigma$ ezezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu \neq \mu_0$	$\{ \bar{x} - \mu_0  > t_{n-1; \alpha/2} \cdot S / \sqrt{n}\}$
Normala $\sigma$ ezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$	$\{\bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n}\}$
Normala $\sigma$ ezezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$	$\{\bar{x} - \mu_0 > t_{n-1; \alpha} \cdot S / \sqrt{n}\}$
Normala $\sigma$ ezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$	$\{\bar{x} - \mu_0 < z_{1-\alpha} \sigma / \sqrt{n}\}$
Normala $\sigma$ ezezaguna	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$	$\{\bar{x} - \mu_0 < t_{n-1; 1-\alpha} S / \sqrt{n}\}$
Edozein ( $n > 30$ )	Aurreko formulak onargarriak dira hurrengoa aldatuz	$t_{n-1; \alpha/2} \rightarrow z_{\alpha/2} \quad t_{n-1; \alpha} \rightarrow z_{\alpha}$ $t_{n-1; 1-\alpha} \rightarrow z_{1-\alpha}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.1 Populazioaren batezbestekorako hipotesi-kontrastea

### Adibidea

- 1) Lantegi batean ekoiztutako kableek jasan dezaketen tentsioek banaketa normala dute. Kableek 1800 batezbesteko eta 100 desbiderazio tipikoa dutela dakigu. Makinarian egindako mantentze lanen ostean ekoiztutako kableek jasan dezaketen batezbesteko tentsioa altuagoa den susmoa dago. Susmo hau egiaztatzeko 50 klabe hartu dira. Hauek jasan dezaketen batezbesteko tentsioa 1850 izanik.

0.01 adierazgarritasun maila erabiliz, esan al daiteke orain kableen kalitatea hobetzen dela (tentsioari dagokionez)?



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Banaketa normalak

1.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak

Eskualde kritikoa  $\left\{ |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak

Eskualde kritikoa  $\left\{ |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > t_{n+m-2; \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$

non  $S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$



eman ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Banaketa normalak

2.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 > \mu_2$

A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > t_{n+m-2; \alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$

non  $S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$



emeri ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Banaketa normalak

3.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 < \mu_2$

A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < t_{n+m-2; 1-\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$

non  $S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$



enmen ta zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{  \bar{x}_1 - \bar{x}_2  > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{  \bar{x}_1 - \bar{x}_2  > t_{n+m-2; \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 > \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 > \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > t_{n+m-2; \alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 < \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Normalak $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 < \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < t_{n+m-2; 1-\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$

$$* S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Edozein banaketa

1.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

**A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak ( $n, m > 15$ )**

Eskualde kritikoa  $\left\{ |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

**B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )**

Eskualde kritikoa  $\left\{ |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Edozein banaketa

2.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 > \mu_2$

A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak ( $n, m > 15$ )

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_\alpha \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

### Edozein banaketa

3.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  eta  $H_a: \mu_1 < \mu_2$

A)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezagunak ( $n, m > 15$ )

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$

B)  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )

Eskualde kritikoa  $\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$





# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.2 Bi banaketa independenteren batezbestekoen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea

Sarrera

Oinarrizko kontzeptuak

Hipotesi-kontraste motak

Hipotesi-kontrasteen urratsak

Zenbait hipotesi-kontraste

Errore motak

p-balioa

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak ( $n, m > 15$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{  \bar{x}_1 - \bar{x}_2  > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{  \bar{x}_1 - \bar{x}_2  > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak ( $n, m > 15$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 > \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 > \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > z_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezagunak ( $n, m > 15$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 < \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right\}$
Edozein $\sigma_1$ eta $\sigma_2$ ezezagunak baina berdinak ( $n, m > 30$ )	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_a: \mu_1 < \mu_2$	$\left\{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right\}$

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea

1.  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  eta  $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

**A)  $\mu$  ezezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2 \right\} \cup \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1; \alpha/2}^2 \right\}$

**B)  $\mu$  ezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n; 1-\alpha/2}^2 \right\} \cup \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n; \alpha/2}^2 \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea

2.  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  eta  $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

**A)  $\mu$  ezezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1;\alpha}^2 \right\}$

**B)  $\mu$  ezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n;\alpha}^2 \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea

3.  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  eta  $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$

**A)  $\mu$  ezezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1;1-\alpha}^2 \right\}$

**B)  $\mu$  ezaguna**

**Eskualde kritikoa**  $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n;1-\alpha}^2 \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Normala $\mu$ ezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n;1-\alpha/2}^2 \right\} \cup \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n;\alpha/2}^2 \right\}$
Normala $\mu$ ezezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 \right\} \cup \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1;\alpha/2}^2 \right\}$
Normala $\mu$ ezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n;\alpha}^2 \right\}$
Normala $\mu$ ezezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1;\alpha}^2 \right\}$
Normala $\mu$ ezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n;1-\alpha}^2 \right\}$
Normala $\mu$ ezezaguna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1;1-\alpha}^2 \right\}$

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.3 Populazio normalaren bariantzarako hipotesi-kontrastea

### Adibidea

- 2) Fabrikatzaile batek hornitzen duen materialaren erresistentziak banaketa normala du. Bere batezbestekoa 220 eta desbiderazio tipikoa 7.75 direla uste da. Bederatzi elementuko lagin bat hartu da:

203	229	215	220	223
233	208	228	209	

- a) Kontrasta ezazu populazioaren batezbestekoa 220 dela (desbiderazio tipikoa edozein izanik) 0.05 adierazgarritasun maila erabili
- b) Kontrasta ezazu populazioaren desbiderazio tipikoa gehienez 7.75 dela (batezbestekoa edozein izanik), 0.05 adierazgarritasun maila erabili.



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.4 Banaketa normaleko bi populazio independenteren arteko zatidurarako hipotesi-kontrastea

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1^2)^2 \cdot m}{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_2^2)^2 \cdot n} \notin [F_{n,m;1-\alpha/2}, F_{n,m;\alpha/2}] \right\}$
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} \notin [F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2}] \right\}$
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1^2)^2 \cdot m}{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_2^2)^2 \cdot n} > F_{n,m;\alpha} \right\}$
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n-1,m-1;\alpha} \right\}$
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1^2)^2 \cdot m}{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_2^2)^2 \cdot n} < F_{n,m;1-\alpha} \right\}$
Normalak $\mu_1$ eta $\mu_2$ ezezagunak	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n-1,m-1;1-\alpha} \right\}$

# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.4 Banaketa normaleko bi populazio independenteren arteko zatidurarako hipotesi-kontrastea

### Adibidea

3) Demagun bonbilen bizi iraupenak banaketa normala duela. 10 bonbila aukeratu dira euren bizi iraupena 1250 ordukoa eta kuasidesbiderazio tipikoa 115 izanik.

Bonbilak sortzeko erabiltzen den material berri bat probatu ondoren 13 bonbila hartu dira, hauen batezbesteko bizi iraupena 1340 ordu eta kuasidesbiderazio tipikoa 106 ordu izanik.

- a) Onar al daiteke 0.05 adierazgarritasun mailaz bariantzak filamentuak aldatu baino lehen eta aldatu ondoren berdinak direla?
- b) 0.05 adierazgarritasun mailaz material berria erabiliz bonbilen batezbesteko bizi itxaropena luzatu egin dela esan al dezakegu?





# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.5 Banaketa binomialaren proportziorako hipotesi-kontrastea (n>100)

Populazioa	Kontraste mota	Eremu kritikoa
Binomiala lagina handia izanez (n>100)	$H_0: p = p_0$ $H_a: p \neq p_0$	$\left\{  \hat{p} - p_0  > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$
	$H_0: p = p_0$ $H_a: p > p_0$	$\left\{  \hat{p} - p_0  > z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$
	$H_0: p = p_0$ $H_a: p < p_0$	$\left\{  \hat{p} - p_0  < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.6 Bi banaketa binomial independenteren proportzioen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea ( $n, m > 100$ )

Populazioa	Kontraste mota	Eskualde kritikoa
Binomialak laginak handiak izanez ( $n, m > 100$ )	$H_0: p_1 = p_2$ $H_a: p_1 \neq p_2$	$\left\{  \hat{p}_1 - \hat{p}_2  > z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)} \right\}^*$
	$H_0: p_1 = p_2$ $H_a: p_1 > p_2$	$\left\{ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > z_{\alpha} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)} \right\}^*$
	$H_0: p_1 = p_2$ $H_a: p_1 < p_2$	$\left\{ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 < z_{1-\alpha} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)} \right\}^*$

$$^* \hat{p} = \frac{x+y}{m+n}$$



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.6 Bi banaketa binomial independenteren proportzioen arteko diferentziarako hipotesi-kontrastea ( $n, m > 100$ )

### Adibidea

- 4) Hiri bateko errepide-zirkulazioa oso txarra zenez, udaletxeak bi bidaiari edo gehiagoko ibilgailuak sustatzeko kanpaina bat egin du. Kanpaina baino lehen 2000 ibilgailutik 655 ibilgailuk bi edo bidaiari gehiago zituen eta kanpaina ondoren berriz, 1500 ibilgailu aukeratu ziren, hauetako 576-k bi edo bidaiari gehiago izanez.

Kanpainak bere helburua lortu du? 0.05 adierazgarritasun maila erabili



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## 7.5.7 Bi banaketa normal ez independenteren batezbestekoen diferentziarako hipotesi-kontrastea

$$D = X - Y \quad \bar{d} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)}{n}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}$$

### Oharra:

Parekatutako datuak direnean (lagin ez independenteak direnean) bikoteen diferentziak kalkulatu eta lagin bakarra dela kontsideratu.



# 7.5 Zenbait hipotesi-kontraste

## Adibidea

- 5) Esperimentu kimiko bat egiteko nahasketan, esperimentuaren hasieran eta bukaeran azido azetiko kantitatea (mol) aztergai da. Zoriz sei nahasketa hartu dira eta dagozkien azido azetiko kantitateak neurtu dira.

Azido azetikoa, hasieran	7.0	9.1	7.8	8.1	7.2	9.0
Azido azetikoa, bukaeran	7.5	8.7	7.6	8.4	7.5	9.1

Normaltasunaren hipotesia suposatuz eta %2 adierazgarritasun-mailaz, onartuko al zenuke esperimentu kimikoaren hasieran eta bukaeran azido azetiko kantitate berdina delako hipotesia?



# 7.6 Errore motak

## I. Motako errorea: $E_I$

$H_0$  hipotesi nulua egia izanik, errefusatu egiten da.

- $\alpha$  adierazgarritasun maila: I. motako errorea egiteko probabilitatea.  
( $H_0$  errefusatu,  $H_0$  egia izanik)
- $1-\alpha$  konfiantza-maila:  $H_0$  hipotesi nulua egia izanik,  $H_0$  onartzeko probabilitatea.

## Adierazgarritasun maila ( $E_I$ errorearen probabilitatea)

$$\alpha = P(E_I) = P(H_0 \text{ errefusatu} \mid H_0 \text{ egia})$$

## Konfiantza-maila (erabaki egokia)

$$1 - \alpha = 1 - P(E_I) = P(H_0 \text{ onartu} \mid H_0 \text{ egia})$$



# 7.6 Errore motak

## II. Motako errorea: $E_{II}$

$H_0$  hipotesi nulua gezurra izanik, onartu egiten da.

- $\beta$ : II. motako errorea egiteko probabilitatea.  
( $H_0$  onartu,  $H_0$  gezurra izanik)
- 1- $\beta$  kontrastearen-potentzia edo ahalmena:  $H_0$  hipotesi nulua gezurra izanik,  $H_0$  errefusatzeko probabilitatea.

## $\beta$ ( $E_{II}$ errorearen probabilitatea)

$$\beta = P(E_{II}) = P(H_0 \text{ onartu} \mid H_0 \text{ gezurra})$$

## 1- $\beta$ kontrastearen-potentzia edo ahalmena

$$1 - \beta = 1 - P(E_{II}) = P(H_0 \text{ errefusatu} \mid H_0 \text{ gezurra})$$



emari la zabal zazu:



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# 7.6 Errore motak

## Erroreen laburpena

	<b><math>H_0</math> egia</b>	<b><math>H_0</math> gezurra</b>
<b><math>H_0</math> errefusatu</b>	( $\alpha$ ) I motako errorea	Erabaki egokia
<b><math>H_0</math> onartu</b>	Erabaki egokia	( $\beta$ ) II motako errorea

- $\alpha$  adierazgarritasun-maila aldez aurretik finkatzea komeni da.
- $1-\beta$  potentzia maximoa (edo bigarren motako errore minimoa)





# 7.6 Errore motak

## Adibidea

- 6) Irakasle batek egia edo gezurra motako 10 galderaz osatutako test bat planteatu du. Ikasleak zoriz erantzuten duten aztertze hurrengo erabaki-araua kontsideratu da:

*“Erantzun egokien kopurua gutxienez 7 bada,  
ikasleak ez du zoriz erantzun”*

Kalkula ezazu I. motako errorea egiteko probabilitatea.



# 7.6 Errore motak

## Adibidea

- 7) Txanpon bat egokia den (aurpegia lortzeko probabilitatea 0.5 den) edo ez aztertzeko, hurrengo erabaki-araua kontsideratu da:

*“Txanpona 100 aldiz jaurti ondoren lortutako aurpegi kopurua 40 eta 60 artekoa bada (biak barne), txanpona egokia dela onartzen da.”*

- a) Kalkula ezazu  $H_0$  hipotesi nulua egia izanik errefusatzeko probabilitatea
- b) Aurreko ataleko erabaki-araua irudikatu
- c) Kalkulatu II. Motako errorearen probabilitatea  $p=0.7$  izanik
- d) Kalkula ezazu  $p=0.5$  izanik, txanpona 100 aldiz jaurtitzean, gutxienez 55 aurpegi lortzeko probabilitatea.



# 7.7 p-balioa

## p-balioa edo $\alpha_c$ adierazgarritasun-maila kritikoa

Estatistikoaren balioa onarpen-eremuan dagoeneko adierazgarritasun-maila maximoa da. Hau da, hipotesi nulua ez errefusatzeko (onartzeko) adierazgarritasun maila maximoa da.

$$\alpha_c = \max\{\alpha / T(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_0\}$$

p-balioak hipotesi nulua errefusatzeko edo onartzeko balio du.



# 7.7 p-balioa

Adibidez, p-balioan oinarrituta  $\alpha=0.05$  duen hipotesi kontrastearen onarpen araua hurrengoa litzateke:

- $p < 0.05$ ,  $H_0$  errefusatu egiten da, konfiantza-maila %95 izanik.
- $p \geq 0.05$ ,  $H_0$  onar daiteke, konfiantza-maila %95 izanik.

## Orokorrean:

- $p < \alpha$ ,  $H_0$  errefusatu egiten da, konfiantza-maila  $\%(1-\alpha)$  izanik.
- $p \geq \alpha$ ,  $H_0$  onar daiteke, konfiantza-maila  $\%(1-\alpha)$  izanik.



# 7.7 p-balioa

p-balioa zenbat eta txikiagoa izan, hipotesi nulua errefusatzeko ebidentzia gehiago daude:

- $p < 0.01$ ,  $H_0$  errefusatzeko ebidentzia asko daude
- $0.01 \leq p < 0.05$ ,  $H_0$  errefusatzeko ebidentzia sendoak daude
- $0.05 \leq p < 0.1$ ,  $H_0$  errefusatzeko ebidentzia gutxi daude
- $p \geq 0.1$ , ez dago  $H_0$  errefusatzeko ebidentziarik



# 7.7 p-balioa

## p-balioaren kalkulua

Demagun kontrasterako estatistikoa S dela eta estatistiko honek laginean hartzen duen balioa berriz, s dela. Orduan:

- $H_a: \theta < \theta_0: p = P(S \leq s | \theta = \theta_0)$

- $H_a: \theta > \theta_0: p = P(S \geq s | \theta = \theta_0)$

- $H_a: \theta \neq \theta_0: p = 2 \times \min\{P(S \leq s | \theta = \theta_0), P(S \geq s | \theta = \theta_0)\}$



# 7.7 p-balioa

## Adibidea

- 8) Demagun bonbilen bizi iraupenak banaketa normala duela. 10 bonbila aukeratu dira euren batezbesteko bizi iraupena 1250 ordukoa eta kuasidesbiderazio tipikoa 115 izanik.

Bonbilak sortzeko erabiltzen den material berri bat probatu ondoren 13 bonbila hartu dira, hauen batezbesteko bizi iraupena 1340 ordu eta kuasidesbiderazio tipikoa 106 ordu izanik. Demagun bariantzak filamentuak aldatu baino lehen eta aldatu ondoren berdinak direla.

0.05 adierazgarritasun mailaz, material berria erabiliz bonbilen batezbesteko bizi itxaropena luzatu egin dela esan al dezakegu? Kalkula ezazu kontrastearen p-balioa.



# 7.7 p-balioa

## Adibidea

9) Lantegi batek ekoiztutako kableek jasan dezaketen tentsioek banaketa normala dute. Kableek 1800 batezbestekoa eta 100 desbiderazio tipikoa dutela dakigu. Makinarian egindako mantentze lanen ostean ekoiztutako kableek jasan dezaketen batezbesteko tentsioa altuagoa den susmoa dago. Susmo hau egiaztatzeko, 50 kable hartu dira, hauek jasan dezaketen batezbesteko tentsioa 1850 izanik.

a) 0.01 adierazgarritasun maila erabiliz, esan al daiteke orain kableen kalitatea hobetzen dela (tentsioari dagokionez)?

b) Kalkula ezazu p-balioa  $\bar{x} = 1850$  izanik.





# 7.7 p-balioa

## Adibidea

10) Fruitu mota baten pisua neurtzeko 10 fruituz osatutako lagin bat hartu da, euren kuasibariantza 402 izanik. Demagun fruituen pisuak banaketa normala duela.

a) 0.05 adierazgarritasun maila erabiliz, populazioaren bariantza 1000 dela errefusa al daiteke?

b) Kalkula ezazu p-balioa edo adierazgarritasun maila kritikoa.

