# ESTATISTIKA METODOAK INGENIARITZAN

4. Zorizko aldagai jarraitua





# 4. Zorizko aldagai jarraitua

### 4.1. Zorizko aldagai jarraitua sarrera

- 4.1.1. Dentsitate funtzioa eta banaketa funtzioa
- 4.1.2. Batezbestekoa edo itxaropena
- 4.1.3. Bariantza eta desbiderazio tipikoa
- 4.1.4. Tchebyshev-en teorema
- 4.1.5. Aldagai tipifikatuak

### 4.2. Banaketa garrantzitsu batzuk

- 4.2.1. Banaketa Uniformea
- 4.2.2. Banaketa Esponentziala
- 4.2.3. Banaketa Normala

### 4.3. Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Banaketa Binomialaren eta Banaketa Normalaren arteko erlazioa



4.3.2. Poisson Banaketaren eta Banaketa Normalaren arteko erlazioa

# 4.1 Zorizko aldagai jarraitua

Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketen arteko konbergentzia

### Zorizko aldagai jarraitua

X aldagaiak tarte bateko edo hainbat tarteko edozein balio har badezake, X zorizko aldagai jarraitua da.

### Banaketa funtzioa:

Hurrengo aplikazioa banaketa funtzioa da:

$$F: \longrightarrow [0,1]$$

$$X \longrightarrow F(X) = P(X \le X)$$





Banaketa funtzioak hurrengo propietateak betetzen ditu:

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Zorizko aldagai

iarraitua

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu **b**atzuk

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \le F(x) \le 1$
- 2) F(x) eskuinetik jarraitua da.

3) 
$$x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

- $4) \quad F\left(-\infty\right) = \lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0$
- $5) \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$





### Dentsitate funtzioa:

F(x) banaketa funtzioa deribagarria bada, X zorizko aldagai jarraituaren dentsitate funtzioa f(x)hurrengoa da:

$$f(x) = F'(x)$$

f(x) funtzioa dentsitate funtzioa da baldin hurrengo propietateak betetzen baditu:

### **Propietateak:**

1) 
$$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

### Bestalde:



$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ x_1 < x_2$$

Banaketen arteko

Zorizko aldagai

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa

Bariantza eta desbiderazio

Tchebyshev-en

tipikoa

teorema

Aldagai

tipifikatuak

garrantzitsu batzuk

Banaketa

iarraitua

edo itxaropena

### Banaketa funtzioa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. F(x) banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### **Oharra:**

X zorizko aldagai jarraitua bada: P(X = x) = 0

$$P(X = x) = P(x \le X \le x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

Hau da, X zorizko aldagai jarraituak balio finko bat hartzeko probabilitatea nulua da.

### Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketen arteko konbergentzia

### **Propietateak:**

1) 
$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2)$$
  
 $P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2)$   
 $P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2)$ 

2) 
$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) =$$
  
=  $P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$ 

3) 
$$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$
  
 $P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \le x) = P(X > x)$ 





### Adibidea:

1) Izan bitez k>0 konstantea eta

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 \le x \le 1\\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

- a) Kalkula ezazu k konstantearen balioa f(x) funtzioa dentsitate funtzioa izan dadin.
- b) k konstantea aurreko atalean lortutako baliora finkatu ondoren. Izan bedi X, f(x) dentsitate funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua. Kalkula itzazuF(x),  $P(X \ge 3)$ , P(X > 0.3)

### Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

### Batezbestekoa edo itxaropen matematikoa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa,  $\mu$  hurrengoa da:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

### **Adibidea:**

Aurreko adibidean,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \int_{0}^{1} x \cdot 6x (1 - x) \, dx = \frac{1}{2}$$

Esperimentua egin aurretik espero dugun emaitza.

### Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

Oharra: (Kasu diskretuan gertatzen den bezala)

 $\mu$  batezbesteko edo itxaropen matematikoa **teorikoa** da,  $\overline{x}$  aldiz, batezbesteko **enpirikoa** (datuak erabiliz lortzen dena) da.

### **Propietateak:**

Zorizko aldagai diskretuetarako dituen propietateak mantentzen dira:

- 1) E(k) = k, k konstantea izanik
- 2) Izan bitez  $X_1, X_2, ..., X_n$  zorizko aldagai jarraituak

### Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk



$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$



# 4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

3) Izan bitez k konstantea, eta  $\chi$  zorizko aldagai jarraitua:

$$E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$$

4) Izan bitez  $X_1, X_2, ..., X_n$  zorizko aldagai jarraituak eta  $k_i$  konstanteak  $\forall i=1,...,n$ 

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \dots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(X_1) + k_2 \cdot E(X_2) + \dots + k_n \cdot E(X_n)$$

5) Izan bitez  $X_1, X_2, ..., X_n$  zorizko aldagai jarraitu independenteak

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

### Bariantza:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren bariantza,  $\sigma_x^2$  edo Var(X) denotatzen dena:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

Kalkuluak errazteko:

$$\sigma^{2} = Var(X) = E(X^{2}) - \mu^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2} \cdot f(x) dx - \mu_{x}^{2}$$

### Desbiderazio tipikoa:

Bariantzaren erro karratu positiboa desbiderazio tipikoa da:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

### **Propietateak:**

Bariantzak zorizko aldagai diskretuetarako betetzen dituen propietateak mantentzen dira.

- 1)  $Var(X) \ge 0$ , X edozein zorizko aldagai jarraitua izanik
- 2) Var(k) = 0, k edozein konstante izanik
- 3) Izan bitez  $X_1, X_2, ..., X_n$  zorizko aldagai jarraitu independenteak:

$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

4) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$$

5) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$Var(X + k) = Var(X)$$

Adibidea: Aurreko adibidean

$$\sigma^{2} = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2} \cdot f(x) dx - \mu_{x}^{2} = 0.05$$

Ondorioz, desbiderazio tipikoa:

### Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.1.4 Tchebyshev-en teorema

Zorizko aldagai iarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketen arteko konbergentzia

### Tchebyshev-en teorema:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua, zeinek  $\mu$  batezbestekoa eta  $\sigma$  desbiderazio tipiko finitua dituen. Orduan, ondokoa beteko da:

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

Teorema honen bidez, zorizko aldagai diskretuan gertatzen zen bezalaxe, X zorizko aldagaiaren balioak  $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$  tartean izateko probabilitatearen behebornea kalkula daiteke.





# 4.1.5 Tipifikazioa

Izan bediX,  $\mu$  batezbestekoa eta  $\sigma$ desbiderazio tipikoa dituen zorizko aldagai jarraitua.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Zzorizko aldagai jarraituak 0 batezbestekoa eta 1 desbiderazio tipikoa ditu.

Zaldagaiari X aldagaiaren tipifikazioa deritzo.

### **Oharra:**

Edozein zorizko aldagai tipifika daiteke, bai zorizko aldagai diskretuak, bai zorizko aldagai jarraituak ere.

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

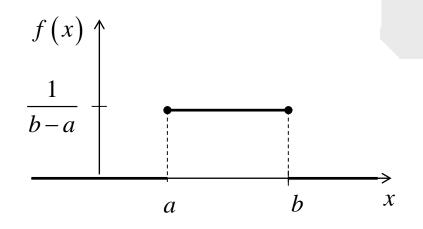




### **4.2.1. Banaketa Uniformea** $X \sim U[a,b]$

X zorizko aldagai jarraituak [a,b] tartean Banaketa Uniformea du, baldin eta ondoko <u>dentsitate-funtzioa</u> badu:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$



Universidad del País Vasco

Unibertsitatea

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk

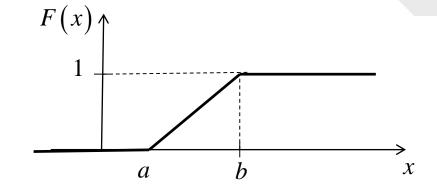


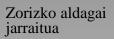
### **4.2.1.** Banaketa Uniformea $X \sim U[a,b]$

### Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$





Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk





### **4.2.1.** Banaketa Uniformea $X \sim U[a,b]$

### Batezbestekoa:

$$\mu_{x} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \frac{a+b}{2}$$

### **Bariantza:**

$$\sigma^{2} = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2} \cdot f(x) dx - \mu_{x}^{2} = \frac{(b-a)^{2}}{12}$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk





### 4.2.1. Banaketa Uniformea

### Adibidea:

- 2) Konpainia batean asteko telefono-gastuak, uniformeki 100 euro eta 150 euro bitartekoak dira.
  - a) Kalkulatu konpainiaren asteko batezbesteko telefono gastua eta desbiderazio tipikoa.
  - b) Zein da aste batean 120 euro baino gutxiagoko telefono gastua izateko probabilitatea?

### Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

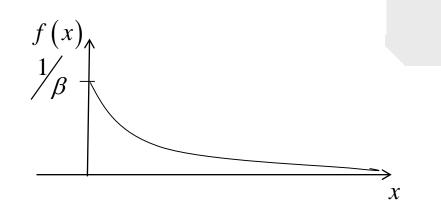




## 4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

X zorizko aldagai jarraituak  $\beta$  parametrodun banaketa esponentziala du baldin eta bere <u>dentsitate-funtzioa</u> hurrengoa bada:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \beta > 0 izanik$$



Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk



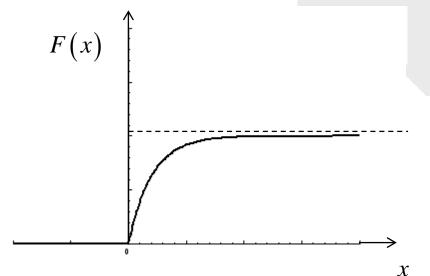


### 4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

### Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0\\ 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \end{cases}$$



Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk



### 4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

### Batezbestekoa:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \beta$$

### **Bariantza:**

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \, dx - \mu_x^2 = \beta^2$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk





### 4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

### Adibidea:

- 3) Substantzia erradiaktibo baten bizitza-aldiak 5 minutuko batezbesteko banaketa esponentziala du.
  - a) Zein da substantzia horrek 4 minutu eta 6 minutu arteko bizitza-aldia izateko probabilitatea?
  - b) Jakinda substantziaren bizitza-aldia gutxienez 4 minutukoa dela, zein da 5 minutu baino gutxiagoko bizitza-aldia izateko probabilitatea?

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

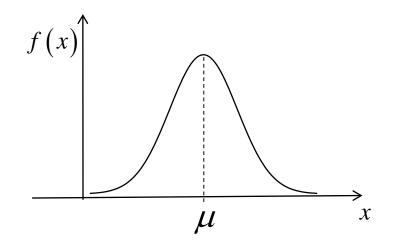




### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

X zorizko aldagai jarraituak  $\mu$  eta  $\sigma$  parametrodun banaketa normala du, baldin eta ondoko <u>dentsitate-funtzioa</u> badagokio:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$



Gaussen kanpaia

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk





### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

### **Propietateak:**

- 1) Dentsitate funtzioa  $x = \mu$  balioarekiko simetrikoa da,  $x = \mu$ -n maximoa hartzen duelarik.
- 2) Banaketa mesokurtikoa da  $(g_2=0)$
- 3) Moda, mediana eta batezbestekoa berdinak dira.

Batezbestekoa: 
$$E(X) = \mu_x = \mu$$

Bariantza: 
$$\sigma_x^2 = Var(X) = \sigma^2$$

Ondorioz, banaketaren parametroak  $\mu$  batezbestekoa eta  $\sigma$ desbiderazio tipikoa dira.

del País Vasco

Unibertsitatea

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk

### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

### Interpretazio geometrikoa:

•  $\mu$  batezbestekoa translazio faktorea bezala uler daiteke:

Honela, desbiderazio tipiko berdina izanik batezbesteko desberdina duten banaketa normalen dentsitate-funtzioen kurbak berdinak dira, baina balio desberdinetan zentratuak daude.

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk

Banaketen arteko konbergentzia





 $\chi$ 

### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

•  $\sigma$  desbiderazio tipikoa eskala faktorea bezala uler daiteke:

Gogoratu desbiderazio tipikoak,  $\mu$  batezbestekoarekiko dagoen sakabanaketa neurtzen duela. Ondorioz, desbiderazio tipikoa altua bada, sakabanaketa handia da eta desbiderazio tipikoa txikia bada berriz sakabanaketa txikia da. Honela, batezbesteko berdina baina desbiderazio tipiko desberdina duten banaketa normalak balio berdinean zentratuak daude baina anplitude desberdina dute.

μ

 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 



Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

### Interpretazio probabilistikoa:

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Zorizko aldagai

jarraitua

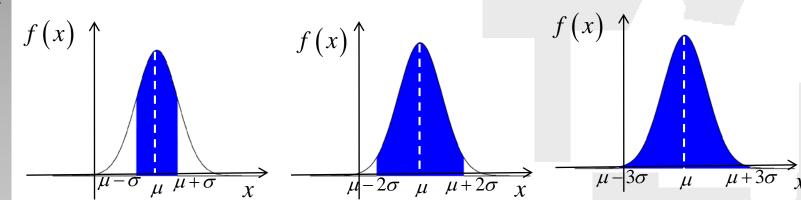
Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk



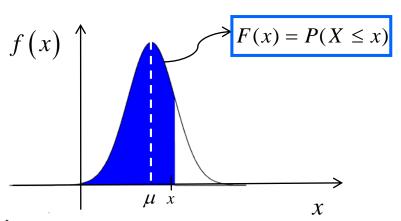
- $(\mu-\sigma,\,\mu+\sigma)$  balioen artean probabilitatea %68-a
- $(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$  balioen artean probabilitatea %95-a
- $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$  balioen artean probabilitatea %99-a



### **4.2.3.** Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

### Banaketa funtzioa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dt$$



Integral hau zenbakizko metodoen bidez kalkulatu beharra dago. Eragozpen hau gainditzeko Z aldagai tipifikatua erabiliko dugu.

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsi batzuk





### 4.2.3.1. Banaketa Normal tipikoa edo estandarra

Izan bedi 
$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Zzorizko aldagai jarraituak  $\mu_Z = 0$ eta  $\sigma_Z = 1$  parametroko banaketa normal tipikoa edo estandarra da, bere dentsitate funtzioa hurrengoa izanik:

 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$ 

**Ondorioz:** 

Taula erabiliz kalkulatuko dugu

del País Vasco

Unibertsitatea

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X - \mu}{\underbrace{\sigma}} \le \frac{x - \mu}{\underbrace{\sigma}}\right) = P(Z \le z)$$

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

### Adibideak:

- 4) Populazio jakin batean 18 urte dituzten gazteen pisuak N(66,8) banaketa du. Kalkula itzazu:
  - a) 80 kg baino gehiago pisatzeko probabilitatea.
  - b) 70 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.
  - c) 50 kg baino gehiago eta 80 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.
- 5) Zorizko aldagai batek  $\mu = 65.6$  batezbestekodun banaketa normala du.
  - a) Aldagaiak 60 baino txikiagoak diren balioak hartzeko probabilitatea 0.352 dela jakinda, kalkula bedi aldagai horren desbiderazio tipikoa.
  - b) Zein x baliok uzten du banaketaren %87.9 eskuinean?

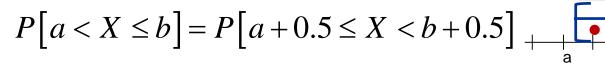
- Zorizko aldagai jarraitua
- Dentsitate eta Banaketa funtzioa
- Batezbestekoa edo itxaropena
- Bariantza eta desbiderazio tipikoa
- Tchebyshev-en teorema
- Aldagai tipifikatuak
- Banaketa garrantzitsu batzuk
- Banaketen arteko konbergentzia

### **Oharra:**

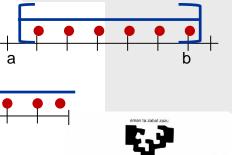
Kasu hauetan banaketa diskretuak banaketa jarraituen bidez hurbiltzen ditugunez, 0.5-eko faktorearen bidezko <u>jarraitutasun-zuzenketa</u> aplikatuko da, hau da:

X = k gertaeraren probabilitatea  $k - 0.5 \le X \le k + 0.5$  gertaeraren probabilitatea erabiliz kalkulatuko dugu.

$$P[a \le X < b] = P[a - 0.5 \le X < b - 0.5]$$



$$P[a < X] = P[a + 0.5 < X]$$



Universidad

del País Vasco

Euskal Herriko

Unibertsitatea

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

# 4.3.1. Banaketa binomialaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$$X \sim Bin(n, p)$$
n "handia"  $n \to \infty$ 

$$p "txikia" p \to 0$$

$$\Rightarrow Bin(n, p) \cong N(np, \sqrt{npq})$$

Praktikan: n > 30

edo baliokideki

$$np > 5$$
 eta  $nq > 5$ 

### Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





# 4.3.2. Poisson banaketaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\lambda \to \infty$$

$$\Rightarrow P(\lambda) \cong N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

Beste era batera esanda:  $\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow N(0,1)$ 

Praktikan:  $\lambda > 18$ 

### Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk





### Adibideak:

- 6) Kalkula ezazu dado orekatu bat 200 aldiz jaurtitzean bata gutxienez 25 aldiz eta gehienez 35 aldiz ateratzeko probabilitatea.
- 7) Hozte-sistemak konpontzen dituen enpresa batek hilero, batazbeste, 20 hozte-sistema konpontzen ditu. Kalkula bedi hilabete batean enpresak duen:
  - a) Zortzi hozte-sistema konpontzeko probabilitatea
  - b) Gutxienez bost hozte-sistema konpontzeko probabilitatea.
  - c) Gehienez sei hozte-sistema konpontzeko probabilitatea

Universidad del País Vasco

Unibertsitatea

Zorizko aldagai jarraitua

Dentsitate eta Banaketa funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk