ESTATISTIKA METODOAK INGENIARITZAN

4. Zorizko aldagai jarraitua

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

4. Zorizko aldagai jarraitua

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1 Zorizko aldagai jarraitua

Zorizko aldagai jarraitua

X aldagaiak tarte bateko edo hainbat tarteko edozein balio har badezake, X zorizko aldagai jarraitua da.

Banaketa funtzioa:

Hurrengo aplikazioa banaketa funtzioa da:

$$F: \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

4.1.1 Dentsitate eta banaketa funtzioak

Banaketa funtzioak hurrengo propietateak betetzen ditu:

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F(x)$ eskuinetik jarraitua da.

3) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

4) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

5) $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

4.1.1 Dentsitate eta banaketa funtzioak

Dentsitate funtzioa:

$F(x)$ banaketa funtzioa deribagarria bada, X zorizko aldagai jarraituaren dentsitate funtzioa $f(x)$ hurrengoa da:

$$f(x) = F'(x)$$

$f(x)$ funtzioa dentsitate funtzioa da baldin hurrengo propietateak betetzen baditu:

Propietateak:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Bestalde:

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\; x_1 < x_2$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.1 Dentsitate eta banaketa funtzioak

Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

Banaketa funtzioa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. $F(x)$ banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Oharra:

X zorizko aldagai jarraitua bada: $P(X = x) = 0$

$$P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

Hau da, X zorizko aldagai jarraituak balio finko bat hartzeko probabilitatea nulua da.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.1 Dentsitate eta banaketa funtzioak

Propietateak:

1) $P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2)$

$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2)$

$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

2) $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) =$

$= P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

3) $P(X > x) = 1 - P(X \le x)$

$P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \le x) = P(X > x)$

4.1.1 Dentsitate eta banaketa funtzioak

Adibidea:

1) Izan bitez k>0 konstantea eta

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

a) Kalkula ezazu k konstantearen balioa $f(x)$ funtzioa dentsitate funtzioa izan dadin.

b) k konstantea aurreko atalean lortutako baliora finkatu ondoren. Izan bedi X, $f(x)$ dentsitate funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua. Kalkula itzazu $F(x)$, $P(X \ge 3)$, $P(X > 0.3)$

4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

Batezbestekoa edo itxaropen matematikoa:
Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa, μ hurrengoa da:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Adibidea:

Aurreko adibidean,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{0}^{1} x \cdot 6x\left(1-x\right) dx = \frac{1}{2}$$

Esperimentua egin aurretik espero dugun emaitza.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

Oharra: (Kasu diskretuan gertatzen den bezala)

μ batezbesteko edo itxaropen matematikoa **teorikoa** da, $\overline{x}$ aldiz, batezbesteko **enpirikoa** (datuak erabiliz lortzen dena) da.

Propietateak:
Zorizko aldagai diskretuetarako dituen propietateak mantentzen dira:

1) $E(k) = k,\ k$ konstantea izanik

2) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraituak

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.2 Batezbestekoa edo itxaropena

3) Izan bitez k konstantea, eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$$

4) Izan bitez $X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagai jarraituak eta k_i konstanteak $\forall i = 1, \dots, n$

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \dots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(X_1) + k_2 \cdot E(X_2) + \dots + k_n \cdot E(X_n)$$

5) Izan bitez $X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagai jarraitu independenteak

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Bariantza:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren bariantza, σ_x^2 edo $Var(X)$ denotatzen dena:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

Kalkuluak errazteko:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu_x^2$$

Desbiderazio tipikoa:

Bariantzaren erro karratu positiboa desbiderazio tipikoa da:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Propietateak:

Bariantzak zorizko aldagai diskretuetarako betetzen dituen propietateak mantentzen dira.

1) $Var(X) \geq 0$, X edozein zorizko aldagai jarraitua izanik

2) $Var(k) = 0$, k edozein konstante izanik

3) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraitu independenteak:

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.3 Bariantza eta desbiderazio tipikoa

4) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$$

5) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$Var(X + k) = Var(X)$$

Adibidea: Aurreko adibidean

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu_x^2 = 0.05$$

Ondorioz, desbiderazio tipikoa:

$$\sigma = 0.2236$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.4 Tchebyshev-en teorema

Tchebyshev-en teorema:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua, zeinek μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipiko finitua dituen. Orduan, ondokoa beteko da:

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2} \qquad \forall k>0$$

Teorema honen bidez, zorizko aldagai diskretuan gertatzen zen bezalaxe, X zorizko aldagaiaren balioak $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ tartean izateko probabilitatearen behe-bornea kalkula daiteke.

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.1.5 Tipifikazioa

Izan bedi X, μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipikoa dituen zorizko aldagai jarraitua.

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

Z zorizko aldagai jarraituak 0 batezbestekoa eta 1 desbiderazio tipikoa ditu.

Z aldagaiari X aldagaiaren tipifikazioa deritzo.

Oharra:

Edozein zorizko aldagai tipifika daiteke, bai zorizko aldagai diskretuak, bai zorizko aldagai jarraituak ere.

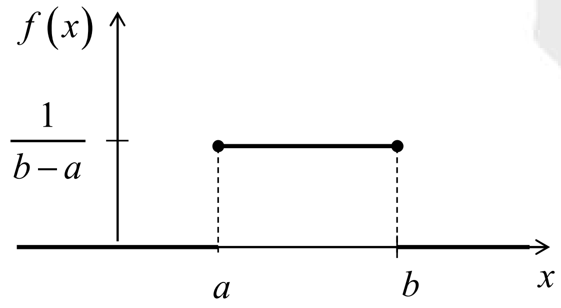
Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa Uniformea $X \sim U[a,b]$

X zorizko aldagai jarraituak $[a,b]$ tartean Banaketa Uniformea du, baldin eta ondoko dentsitate-funtzioa badu:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$



Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

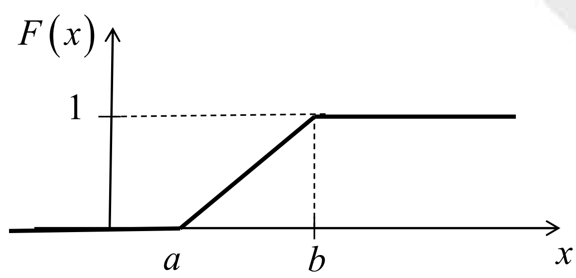
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa Uniformea $X \sim U[a,b]$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa Uniformea $X \sim U[a,b]$

Batezbestekoa:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa Uniformea

Adibidea:

2) Konpainia batean asteko telefono-gastuak, uniformeki 100 euro eta 150 euro bitartekoak dira.

a) Kalkulatu konpainiaren asteko batezbesteko telefono gastua eta desbiderazio tipikoa.

b) Zein da aste batean 120 euro baino gutxiagoko telefono gastua izateko probabilitatea?

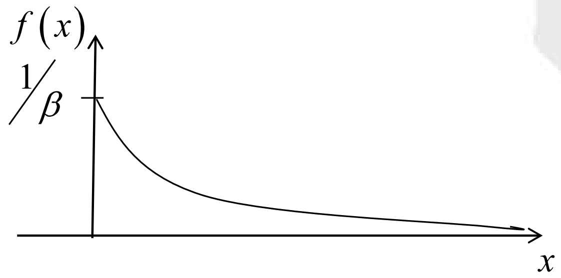
Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

X zorizko aldagai jarraituak β parametrodun banaketa esponentziala du baldin eta bere dentsitate-funtzioa hurrengoa bada:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \beta > 0 \; izanik$$



Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

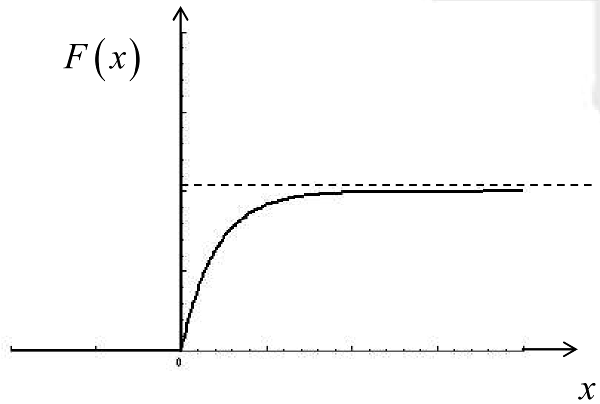
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \end{cases}$$



4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Batezbestekoa:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \beta$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu_x^2 = \beta^2$$

Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Adibidea:

3) Substantzia erradiaktibo baten bizitza-aldiak 5 minutuko batezbesteko banaketa esponentziala du.

a) Zein da substantzia horrek 4 minutu eta 6 minutu arteko bizitza-aldia izateko probabilitatea?

b) Jakinda substantziaren bizitza-aldia gutxienez 4 minutukoa dela, zein da 5 minutu baino gutxiagoko bizitza-aldia izateko probabilitatea?

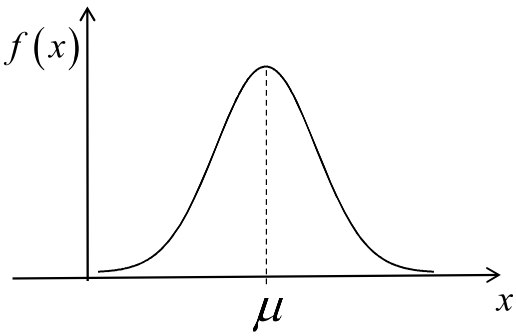
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu,\sigma)$

X zorizko aldagai jarraituak μ eta σ parametrodun banaketa normala du, baldin eta ondoko dentsitate-funtzioa badagokio:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$



Gaussen kanpaia

Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu,\sigma)$

Propietateak:

1) Dentsitate funtzioa $x = \mu$ balioarekiko simetrikoa da, $x = \mu$-n maximoa hartzen duelarik.
2) Banaketa mesokurtikoa da (g_2=0)
3) Moda,mediana eta batezbestekoa berdinak dira.

Batezbestekoa: $E(X) = \mu_x = \mu$

Bariantza: $\sigma_x^2 = Var(X) = \sigma^2$

Ondorioz, banaketaren parametroak μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipikoa dira.

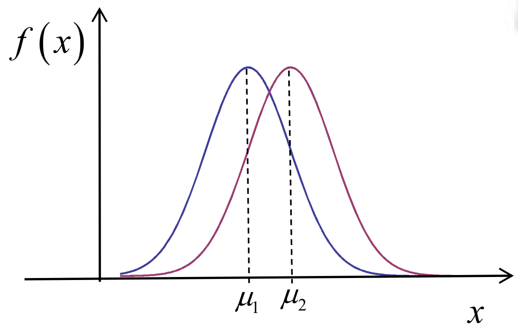
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

Interpretazio geometrikoa:

- μ batezbestekoa translazio faktorea bezala uler daiteke:

Honela, desbiderazio tipiko berdina izanik batezbesteko desberdina duten banaketa normalen dentsitate-funtzioen kurbak berdinak dira, baina balio desberdinetan zentratuak daude.



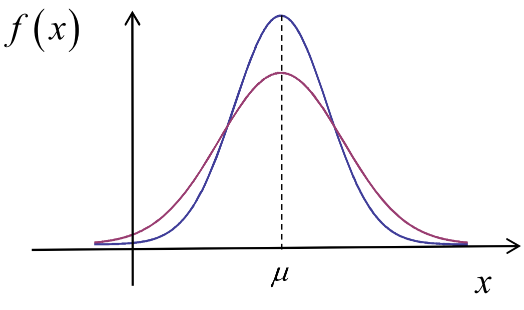
Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

- σ desbiderazio tipikoa eskala faktorea bezala uler daiteke:

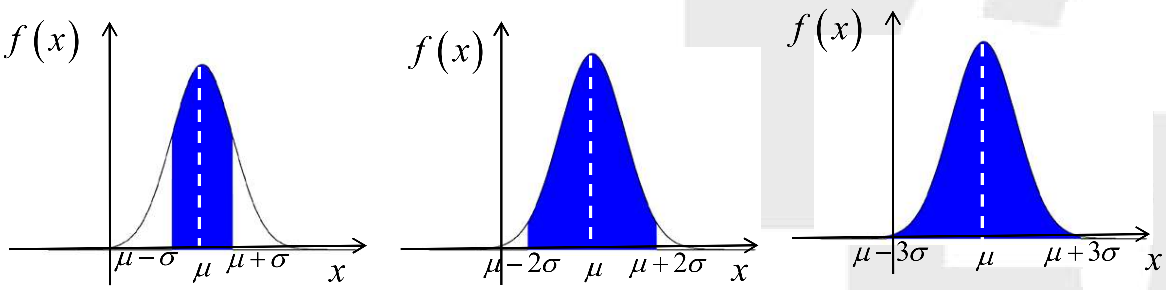
Gogoratu desbiderazio tipikoak, μ batezbestekoarekiko dagoen sakabanaketa neurtzen duela. Ondorioz, desbiderazio tipikoa altua bada, sakabanaketa handia da eta desbiderazio tipikoa txikia bada berriz sakabanaketa txikia da. Honela, batezbesteko berdina baina desbiderazio tipiko desberdina duten banaketa normalak balio berdinean zentratuak daude baina anplitude desberdina dute.



4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu,\sigma)$

Interpretazio probabilistikoa:



- $\left(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma\right)$ balioen artean probabilitatea %68-a
- $\left(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma\right)$ balioen artean probabilitatea %95-a
- $\left(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma\right)$ balioen artean probabilitatea %99-a

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

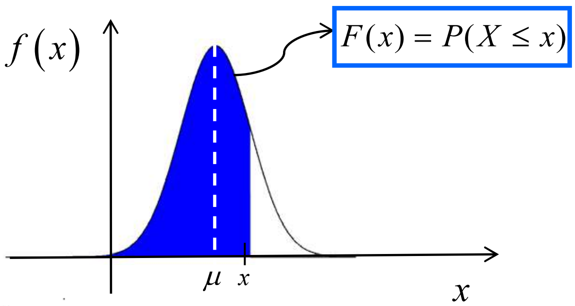
Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa Normala $X \sim N(\mu,\sigma)$

Banaketa funtzioa:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}dt$$



Integral hau zenbakizko metodoen bidez kalkulatu beharra dago. Eragozpen hau gainditzeko *Z* aldagai tipifikatua erabiliko dugu.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3.1. Banaketa Normal tipikoa edo estandarra

Izan bedi $X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Z zorizko aldagai jarraituak $\mu_Z = 0$ eta $\sigma_Z = 1$ parametroko banaketa normal tipikoa edo estandarra da, bere dentsitate funtzioa hurrengoa izanik:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Ondorioz:

Taula erabiliz kalkulatuko dugu

$$P(X \le x) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{z}\right) = P(Z \le z)$$

Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

Adibideak:

4) Populazio jakin batean 18 urte dituzten gazteen pisuak N(66,8) banaketa du. Kalkula itzazu:

a) 80 kg baino gehiago pisatzeko probabilitatea.

b) 70 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.

c) 50 kg baino gehiago eta 80 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.

5) Zorizko aldagai batek $\mu = 65.6$ batezbestekodun banaketa normala du.

a) Aldagaiak 60 baino txikiagoak diren balioak hartzeko probabilitatea 0.352 dela jakinda, kalkula bedi aldagai horren desbiderazio tipikoa.

b) Zein x baliok uzten du banaketaren %87.9 eskuinean?

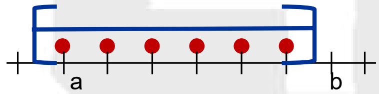
4.3 Banaketen arteko konbergentzia

Oharra:

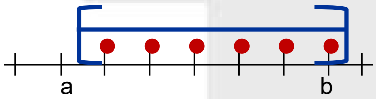
Kasu hauetan banaketa diskretuak banaketa jarraituen bidez hurbiltzen ditugunez, 0.5-eko faktorearen bidezko **jarraitutasun-zuzenketa** aplikatuko da, hau da:

$X = k$ gertaeraren probabilitatea $k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5$ gertaeraren probabilitatea erabiliz kalkulatuko dugu.

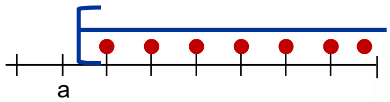
$$P[a \leq X < b] = P[a - 0.5 \leq X < b - 0.5]$$



$$P[a < X \leq b] = P[a + 0.5 \leq X < b + 0.5]$$



$$P[a < X] = P[a + 0.5 < X]$$



Zorizko aldagai jarraitua
Dentsitate eta Banaketa funtzioa
Batezbestekoa edo itxaropena
Bariantza eta desbiderazio tipikoa
Tchebyshev-en teorema
Aldagai tipifikatuak
Banaketa garrantzitsu batzuk
Banaketen arteko konbergentzia

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Banaketa binomialaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Bin(n, p) \\ \text{n "handia"} \quad n \to \infty \\ \text{p "txikia"} \quad p \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Bin(n, p) \cong N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

Praktikan: $n > 30$

edo baliokideki

$np > 5$ eta $nq > 5$

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.2. Poisson banaketaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim P(\lambda) \\ \lambda \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow P(\lambda) \cong N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

Beste era batera esanda: $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \to N(0,1)$

Praktikan: $\lambda > 18$

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

Adibideak:

6) Kalkula ezazu dado orekatu bat 200 aldiz jaurtitzean bata gutxienez 25 aldiz eta gehienez 35 aldiz ateratzeko probabilitatea.

7) Hozte-sistemak konpontzen dituen enpresa batek hilero, batazbeste, 20 hozte-sistema konpontzen ditu. Kalkula bedi hilabete batean enpresak duen:

   a) Zortzi hozte-sistema konpontzeko probabilitatea

   b) Gutxienez bost hozte-sistema konpontzeko probabilitatea.

   c) Gehienez sei hozte-sistema konpontzeko probabilitatea