

### 3. PRAKTIKA - PROGRAMAZIO LINEAL OSOA

Probleman parte hartzen duten aldagaiak multzo jarraitu baten barnean egon beharrean, multzo finitu edo infinitu zenbakigarri baten barne daudenean **Programazio Lineal Osoa (PLO)** sortzen da. Nahiz eta mota honetako problemek ebazteko errazagoak diruditen, egia esan, ebazteko askoz zailagoak izaten dira. Aldagaiek zero edo bat balioak soilik har ditzaketenean baliabideen esleipena bezala ezagutzen den PLOko kasu partikular oso arrunta sortzen da.

Problema ebazteko erarik naturalena murrizketak erlaxatzean sortzen den problema jarraituan Simplex algoritmoa aplikatzea dela dirudi, ondoren lortutako soluzioa biribilduz soluzio oso eta bideragarri bat lortzeko. Hala ere, lehenengo kasu praktikoa ikusiko den bezala bide hori desegokia da.

Problema mota hauek ebazteko erabiltzen diren algoritmo ezberdinen artean, Excel kalkulu-orriaren bidezko ebazpenean arreta jarriko dugu.

#### PROGRAMAZIO LINEAL OSOKO PROBLEMA BATEN EBAZPEN GRAFIKOA

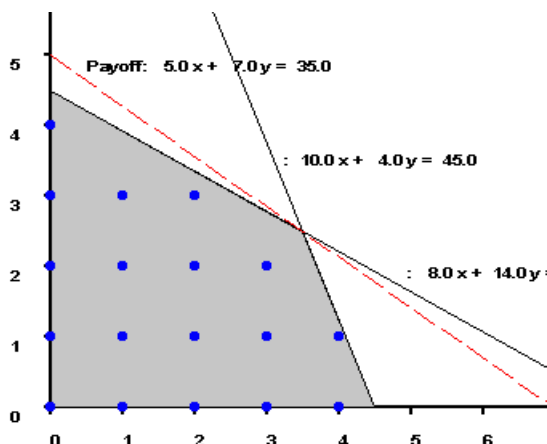
Fabrika batek bi aulki mota desberdin, A eta B motako aulkiak ekoizten ditu. Bestalde, fabrikak zurgintza eta tapizgintza sailak ditu. A motako aulkia egiteko zurgintza saileko 8 ordu eta tapizgintza saileko 10 ordu behar dira. B motako aulkia egiteko berriz, zurgintza saileko 14 ordu eta tapizgintza saileko 4 ordu behar dira. Zurgintza sailak duen langile kopurua kontuan izanik, sail honetako lan-orduak gehienez 63 ordu izan daitezke, tapizgintza saileko langile kopurua kontuan izanda ordea, lan-orduak askoz jota 45 ordu izan daitezke.

A motako aulkien irabazia 5 € unitatekoa bada eta B motako aulkiena 7 € unitatekoa bada, zehaztu irabaziak maximizatzeko A eta B motako zenbat aulki saldu behar diren.

Ebatzi beharreko eredu matematikoa honako hau da:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s.a. } 8x_1 + 14x_2 &\leq 63 \\ 10x_1 + 4x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

Problema grafikoki ebazten da:



Problema jarraituaren soluzio optimoa (3.5, 2.5) puntua da, helburu funtzioaren balio optimoa  $Z = 35$  izanik. Aldagai bien balioak biribiltzen baditugu, biribildutako puntua onarpen eremuaren barnean jarraitzeko aukera bakarra (3, 2) puntua dela ikus genezake, helburu funtzioaren balioa puntu honetan  $Z = 29$  izanik. Hala ere, helburu funtzioa koordenatu osoak dituzten onarpen eremuko puntu guztietan ebaluatzen badugu, soluzio optimoa (2, 3) puntua dela ikus dezakegu, helburu funtzioaren balioa kasu honetan  $Z = 31$  izanik.

## PROGRAMAZIO LINEAL OSOKO PROBLEMA BATEN EXCEL KALKULU ORRIAREN BIDEZ (ALDAGAI OSOAK)

Excel kalkulu-orria erabiliz PLOko problema bat PLko problema baten era berdintsuan ebazten da. Desberdintasun bakarra zera da: Solver tresnan murrizketak sartzeko orduan aldagaiak osoak (int) edo bitarrak (bin) diren zehaztu behar dela.

Mac Pepe's janari lasterreko kateak, aurreko urteetako esperientziagatik, kateko jatetxe zehatz batean uda honetan behar izango dituen zerbitzari kopurua honako taula honetan agertzen direnak izango direla estimatzen du:

Asteko eguna	Zerbitzari kopuru minimoa
Astelehena	10
Astearte	13
Asteazkena	11
Osteguna	15
Ostirala	20
Larunbata	18
Igandea	16

Hitzarmen kolektiboak zerbitzariak astean bi atsedeen-egun jarraian izan behar dituztela zehazten du. Bestalde, katearen enplegu-politikaren ondorioz, zerbitzariak ez dituzte ordu estrarik egiten eta zerbitzari guztiak lanaldi osoko kontratuekin lanean daude. Eskakizuna betetzeko beharrezkoak izango diren zerbitzari finko kopuru minimoa zehaztu.

Probleman parte hartzen duten aldagaiak honako hauek dira:

- $X_1$  astelehen, astearte, asteazken, ostegun eta ostiraletan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_2$  astearte, asteazken, ostegun, ostiral eta larunbatetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_3$  asteazken, ostegun, ostiral, larunbat eta igandeetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_4$  ostegun, ostiral, larunbat, igande eta astelehenetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_5$  ostiral, larunbat, igande, astelehen eta astearteetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_6$  larunbat, igande, astelehen, astearte eta asteazkenetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.
- $X_7$  igande, astelehen, astearte, asteazken eta ostegunetan lan egiten duten zerbitzari kopurua.

Problema honi dagokion formulazioa:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{s.a. } x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 10 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 20 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 18 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 16 \\ x_i &\geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

Jarraian agertzen diren irudietan EXCEL programan jarraitu beharreko pausuak agertzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3	<b>Erabaki-aldagaiak</b>	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7					
4	Kostuak	1	1	1	1	1	1	1			<b>Helburu funtzioa</b>		
5	Aldagaien balioak	0	0	0	0	0	0	0			0		
6													
7													
8	<b>Murrizketak</b>									<b>Guztira</b>		<b>Gai-askea</b>	
9		1	0	0	1	1	1	1		0 >=		10	
10		1	1	0	0	1	1	1		0 >=		13	
11		1	1	1	0	0	1	1		0 >=		11	
12		1	1	1	1	0	0	1		0 >=		15	
13		1	1	1	1	1	0	0		0 >=		20	
14		0	1	1	1	1	1	0		0 >=		18	
15		0	0	1	1	1	1	1		0 >=		16	
16													

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3	<b>Erabaki-aldagaiak</b>	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7					
4	Kostuak	1	1	1	1	1	1	1			<b>Helburu funtzioa</b>		
5	Aldagaien balioak	0	0	0	0	0	0	0			=SUMAPRODUCTO(B4:H4;B5:H5)		
6													
7													
8	<b>Murrizketak</b>									<b>Guztira</b>		<b>Gai-askea</b>	
9		1	0	0	1	1	1	1		=SUMAPRODUCTO(B9:H9;\$B\$5:\$H\$5)	>=	10	
10		1	1	0	0	1	1	1		=SUMAPRODUCTO(B10:H10;\$B\$5:\$H\$5)	>=	13	
11		1	1	1	0	0	1	1		=SUMAPRODUCTO(B11:H11;\$B\$5:\$H\$5)	>=	11	
12		1	1	1	1	0	0	1		=SUMAPRODUCTO(B12:H12;\$B\$5:\$H\$5)	>=	15	
13		1	1	1	1	1	0	0		=SUMAPRODUCTO(B13:H13;\$B\$5:\$H\$5)	>=	20	
14		0	1	1	1	1	1	0		=SUMAPRODUCTO(B14:H14;\$B\$5:\$H\$5)	>=	18	
15		0	0	1	1	1	1	1		=SUMAPRODUCTO(B15:H15;\$B\$5:\$H\$5)	>=	16	
16													

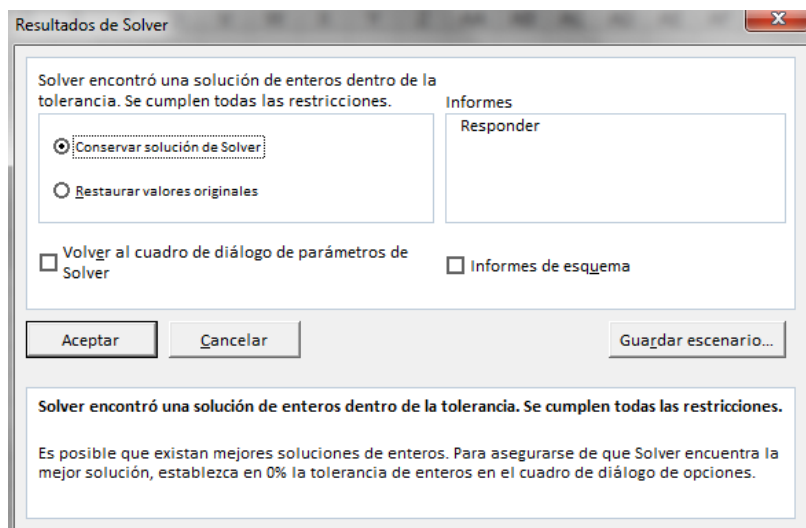
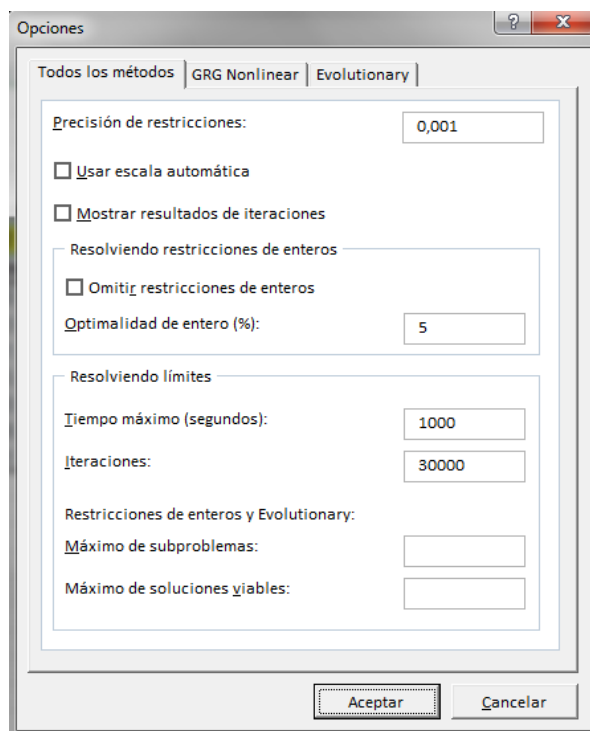
Problemako murrizketak sartu eta aldagaiak osoak izan behar direla adierazi behar dugu:

Soluzio bai honako hau da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3	<b>Erabaki-aldagaiak</b>	x1	x2		x3	x4	x5	x6	x7			
4	Kostuak	1		1	1	1	1	1	1		<b>Helburu funtzioa</b>	
5	Aldagaien balioak	1		4	4	5	6	0	2		22	
6												
7												
8	<b>Murrizketak</b>		<b>Matrizea</b>							<b>Guztira</b>		<b>Gai-askea</b>
9		1		0	0	1	1	1	1	14 >=		10
10		1		1	0	0	1	1	1	13 >=		13
11		1		1	1	0	0	1	1	11 >=		11
12		1		1	1	1	0	0	1	16 >=		15
13		1		1	1	1	1	0	0	20 >=		20
14		0		1	1	1	1	1	0	19 >=		18
15		0		0	1	1	1	1	1	17 >=		16
16												
17												

Izan ere problema honen soluzioa ez da bakarra.

PLOko problemetan, sarrietan, iterazio kopuru maximoa eta exekuzio-denbora handitzea eta tolerantzia eta zehaztasuna txikitzea beharrezkoa izaten da. Edozein kasutan, lortutako soluzioa optimoa dela ziurtatu behar da, erraza baita iterazioa kopurua maximora heltzeagatik edota beste arrazoi batzuegatik Solver-a optimoa lortu gabe geratzea.



PLOko problema bat Solver tresna erabiliz ebazten denean ezin daiteke sentikortasun-analisisa gauzatu. Sentikortasun analisisa egiteko era bakararra, eskuz parametroen balioak aldatu ondoren behin eta berriro programa exekutatzeko eta soluzioak eskuz taula-forman jartzea da.

## ONDORIOA

- Zerbitzari batek  $X_1$  txandan lan egingo du
- 4 zerbitzari  $X_2$  txandan lan egingo dute
- 4 zerbitzari  $X_3$  txandan lan egingo dute
- 5 zerbitzari  $X_4$  txandan lan egingo dute
- 6 zerbitzari  $X_5$  txandan lan egingo dute
- 2 zerbitzari  $X_7$  txandan lan egingo dute

Ondorioz, kateak egunean behar dituen zerbitzari kopuru honako taula honetan laburbilduta daude:

Asteko eguna	Zerbitzari kopurua
Astelehena	14
Asteartea	13
Asteazkena	11
Osteguna	16
Ostirala	20
Larunbata	19
Igandea	17

### PROGRAMAZIO LINEAL OSOKO PROBLEMA BATEN EXCEL KALKULU ORRIAREN BIDEZ (ALDAGAI BITARRAK)

Enpresa batek 3 urtetan zehar garatuko diren 4 proiekturen artean batzuk aukeratu beharko ditu. Proiektu bakoitzetik itxaroten diren irabaziak, proiektu bakoitzak behar dituen inbertsioak eta urtero inbertitzeko dagoen dirua milatan ondoko taulan agertzen dira.

Proiektua	1. urteko inbertsioa	2. urteko inbertsioa	3. urteko inbertsioa	Itxarotako mozkina
1	13	15	17	90
2	2	5	8	60
3	15	10	5	180
4	10	5	5	100
Kapital maximo erabilgarria	30	30	30	

Zein proiektu aukeratu beharko du enpresak, itxarotako mozkina maximoa izan dadin?

Problemaren formazio matematikoa:

$$\text{Max } Z = 90x_1 + 60x_2 + 180x_3 + 100x_4$$

$$\text{s.a. } 13x_1 + 2x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 30$$

$$15x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 30$$

$$17x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ eta bitarrak}$$

Oharra: Honako aldagai bitarrak erabili dira:

$$x_i = \begin{cases} 1 & i.\text{proiektua egiten da} \\ 0 & \text{ez da } i.\text{proiektua egiten} \end{cases}$$

EXCEI kalkulu orriko planteamendua:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	<b>Erabaki-aldagaiak</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>x3</b>	<b>x4</b>						
3	Irabaziak	90	60	180	100		<b>Helburu-funtzioa</b>				
4	Aldagaien balioak	0	0	0	0		0				
5											
6						<b>Guztira</b>		<b>Gai-askea</b>		<b>Lasaiera-aldagaiak</b>	
7	<b>Murrizketak</b>	13	2	15	10	0 <=		30		30	
8		15	5	10	5	0 <=		30		30	
9		17	8	5	5	0 <=		30		30	
10											
11											

Aldagaiak bitarrak direla adierazi behar dugu:

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

\$G\$4

Para:

☒ Máx
☐ Mín
☐ Valor de:

0

Cambiando las celdas de variables:

\$B\$4:\$E\$4

Sujeto a las restricciones:

\$B\$4:\$E\$4 = binario

\$F\$7:\$F\$9 <= \$H\$7:\$H\$9

Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

GRG Nonlinear

Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda

Resolver

Cerrar

Erantzuna ondorengo da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	<b>Erabaki-aldagaiak</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>x3</b>	<b>x4</b>					
3	Irabaziak	90	60	180	100		<b>Helburu-funtzioa</b>			
4	Aldagaien balioak	0	1	1	1		340			
5										
6						<b>Guztira</b>		<b>Gai-askea</b>		<b>Lasaiera-aldagaiak</b>
7	<b>Murrizketak</b>	13	2	15	10	27 <=		30		3
8		15	5	10	5	20 <=		30		10
9		17	8	5	5	18 <=		30		12
10										

## **ONDORIOA**

Enpresak 2., 3. eta 4. proiektuak aukeratu behar ditu 340 euroko mozkina lortzeko. Urte bakoitzean diru osoa erabiltzen ez dela azpimarratu beharko da.