Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Bilboko IITUE
Ebazpena

2015-11-19

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak orden egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\,]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Frogapen hau honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(j), \dots\,]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(j), \dots\,]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:

  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:

  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.

- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,100 puntu) aa azpihitza bai baina aaa azpihitza ez duten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Kontuan izan, aa behin baino gehiagotan ager daitekela. Adibidez, aa, $baababbaa$, $acaa$, $baabc$, $abaababa$ eta $baabaabaa$ hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina aaa, $aaaaa$, $caaaabcaba$, ccb, a, bbb eta ε ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaav) \wedge \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & \exists k(1 \geq k \geq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = a) \wedge \\ & \forall k((1 \geq k \geq |w| - 2 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = a) \rightarrow w(k+2) \neq a)\} \end{aligned}$$

2.2. (0,075 puntu) a gutxienez bi aldiz eta, gainera, a-ren agerpen denak jarraian ez dituzten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $aaabaa$, $babbabcaacccaaaa$, $baaabca$, $abaccc$ eta $baccccaacb$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, aaa, aa, a, $baaaacc$, ccc eta cab ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$\begin{aligned} L_2 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge \\ & |w|_a \geq 2 \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |v| \geq 1 \wedge |v|_a = 0 \wedge w = uavax)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_2 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge \\ & |w|_a \geq 2 \wedge \exists i, j, k(1 \leq i < j < k \leq |w| \wedge w(i) = a \wedge w(j) \neq a \wedge w(k) = a)\} \end{aligned}$$

2.3. (0,075 puntu) a bakoitzaren jarraian gutxienez b bat duten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $ababbbab$, $abbb$, $cabcbccbb$, $cccc$, $cbbcccc$, ε eta $bbab$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina a, aa, acb, aba, aab, $aaab$, $acbacb$ eta $cbcac$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$\begin{aligned} L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & (|w| = 0 \vee \\ & |w| \geq 1 \wedge w(|w|) \neq a \wedge \forall k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \rightarrow w(k+1) = b))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & (|w| = 0 \vee \\ & |w| \geq 1 \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \rightarrow (k < |w| \wedge w(k+1) = b)))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_3 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge \\ & \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| \geq 1 \wedge \quad u(|u|) = a \wedge \\ & \qquad (|v| = 0 \vee (|v| \geq 1 \wedge v(1) \neq b)) \wedge w = uv)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg\exists u(u \in A^* \wedge w = ua) \wedge \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uaav \vee w = uacv)\}$$

2.4. (0,075 puntu) Gutxienez bi elementu edukitzeaz gain, hasieran eta bukaeran sinbolo bera eta tartean sinbolo horren agerpenik ez duten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, aa, $bcaccb$, $caaaac$ eta $accba$ hitzak L_4-koak dira baina ε, a, ab, aaa, $aaaa$, $aaba$, $acaabac$, $acccb$, $acbbaaa$ eta $baabccb$ ez.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, u(\alpha \in A \wedge u \in A^* \wedge |u|_\alpha = 0 \wedge w = \alpha u \alpha)\}$$

2.5. (0,075 puntu) Hitzaren luzera bakoitia baldin bada, erdiko posizioan a eta hitz osoan beste a-rik ez, eta hitzaren luzera bikoitia baldin bada gutxienez bi elementu eta erdiko posizio bietan a eta hitz osoan beste a-rik ez duten hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, a, aa, bac, $bbacb$, $bbaacb$ eta $cbbcacccb$ hitzak L_5-ekoak dira baina ε, aac, $abaac$, $cacccac$, $caaccc$, bbb, b eta $aaaaaa$ ez.

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & (|w| \text{ mod } 2 \neq 0 \rightarrow |w|_a = 1 \wedge w((|w| \text{ div } 2) + 1) = a)) \wedge \\ & (|w| \text{ mod } 2 = 0 \rightarrow |w|_a = 2 \wedge w(|w| \text{ div } 2) = a \wedge w((|w| \text{ div } 2) + 1) = a)\} \end{aligned}$$

2.6. (0,050 puntu) Gutxienez hiru osagai dituzten eta lehenengo hiru posizioetan a sinboloaren agerpenik ez duten hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ccc, ccb, $bbccaac$, $cccaaaa$ eta $cbbbbab$ hitzak L_6-koak dira baina ε, a, bb, aa, $cabbcaa$, $abbba$, $abcbcabca$ eta $acbcba$ ez.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) \neq a \wedge w(2) \neq a \wedge w(3) \neq a\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = 3 \wedge |u|_a = 0 \wedge w = uv)\}$$

2.7. (0,075 puntu) Gutxienez sei osagai dituzten eta lehenengo hiru posizioetan eta azkeneko hiru posizioetan a sinboloaren agerpenik ez duten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $cccccc$, $ccbcbb$, $bccabaabbb$, eta $cbbbbccbcc$ hitzak L_7-koak dira baina ε, a, bb, aa, $cabbcaa$, $abbba$, $abcbcabca$ eta $bacbaacba$ ez.

$$L_7 = L_6(L_6)^R$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = 3 \wedge |u|_a = 0 \wedge |x| = 3 \wedge |x|_a = 0 \wedge w = uvx)\}$$

2.8. (0,050 puntu) ac azpihitza gutxienez bi aldiz duten hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $acac$, $cbacbbaca$, $accacabbbcac$, $bbbacbac$ eta $aacaacc$ hitzak L_8-koak dira baina ε, bbc, $cacb$, $accabca$, $ccacab$, ac eta $aaaccaaa$ ez.

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge w = uacvacx)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{a, b, c\}^* ac \{a, b, c\}^* ac \{a, b, c\}^*$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists j, k(1 \leq j < k - 1 \leq |w| - 1 \wedge w(j) = a \wedge w(j+1) = c \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = c)\}$$