4. GAIA: ZORIZKO ALDAGAI JARRAITUA

1. Biz f(x) funtzioa:

$$f(x)=\begin{cases} kx^3, & 2\le x\le 4 \\ 0, & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

   a) Zein da k konstantearen balioa f(x) funtzioa X zorizko aldagai jarraituaren dentsitate-funtzioa izateko?
   b) Lor bedi X zorizko aldagai jarratuari dagokion banaketa-funtzioa.
   c) Kalkula bitez $P(0<X<2.5)$, $P(X>3)$ eta $P(X\le 3.5)$ probabilitateen balioak.

2. X zorizko aldagai jarraituaren banaketa-funtzioa honakoa da:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3x & 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 1 & x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

   a) Lor bedi X zorizko aldagaiari dagokion dentsitate-funtzioa.
   b) Kalkula bitez $P(0.2\le X\le 0.7)$, $P(X<0.32)$ eta $P(X\ge 0.27)$ probabilitateen balioak.

3. Izan bitez X zorizko aldagai jarraitua eta

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

   a) Froga ezazu f(x) dentsitate funtzioa dela.
   b) Kalkula ezazu F(x) banaketa funtzioa.
   c) Kalkula itzazu:

$$P(X\le \tfrac{1}{3});\;\; P(X>\tfrac{1}{3});\;\; P(\tfrac{1}{2}<X\le 1)$$
$$P(X<\tfrac{1}{3});\;\; P(X\ge \tfrac{1}{3});\;\; P(X=\tfrac{1}{2})$$

4. Izan bedi

$$f(x)=\begin{cases} kx & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

   a) Kalkula ezazu k konstantearen balioa f(x) funtzioa dentsitate funtzioa izan dadin. Irudika ezazu dentsitate funtzioa.
   b) Izan bedi X, k konstantea aurreko atalean lortutako baliora finkatuz lortzen den dentsitate funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua. Kalkula itzazu batezbestekoa, bariantza eta desbiderazio tipikoa.
   c) Kalkulatu $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)$ probabilitatea. Zein da bere esanahia geometrikoa?

d) Estima ezazu $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ Tchebyshev-en teorema erabiliz.

5. Pertsona zehatz batek etxetik lanera joateko behar duen denbora, uniformeki, 20 eta 30 minutu bitarteko da. 9:00etan lanean egon behar bada, eta berandu ez heltzeko probabilitatea 0.9 bada, zein ordutan irten behar da etxetik?

6. Autobus-geltoki zehatz batean, autobus bat gelditu ondoren hurrengo autobusak geltoki horretara heltzeko behar duen denborak (minututan neurtua) bost batezbestekodun banaketa esponentziala du. Kalkula ezazu gutxienez 4 minutu eta gehienez 6 minutu itxaroteko probabilitatea.

7. Osagai batzuen bizi-itxaropenak 8 hilabeteko batezbestekoa duen banaketa esponentziala duela frogatu da. Kalkula itzazu:

a) Osagai baten bizi-itxaropena 3-12 hilabete bitartekoa izateko probabilitatea.

b) Banaketaren 95. Pertzentila.

c) 10 hilabete baino gehiago bizi izan den osagai batek 25 hilabete baino gehiago bizitzeko probabilitatea.

8. Telefono-zentral batean batezbeste minuturo bi dei jasotzen dira. Zein da 15 minututan gehienez 20 dei jasotzeko probabilitatea?

9. Kalkula ezazu dado bat 120 aldiz jaurtitzean lau zenbakia gehienez 18 aldiz irteteko probabilitatea.

10. Lan bat egiteko 0.250 ± 0.005 barne-diametroa duten zirrindolak behar dira. Demagun zirrindolen barne-diametroak 0.251 batezbestekoa eta 0.003 desbiderazio tipikoa dituen banaketa normala duela. Zein da baldintzak betetzen dituen zirrindolen ehunekoa?

11. Enpresa bateko ordainketek banaketa normala dutela onartzen da. Ordainketen %1a 58.000 euro baino altuagoa eta %10a 12.000 euro baino baxuagoa direla jakinda, zein da 30.000 euro baino altuagoak diren ordainketen ehunekoa?

12. Osagai elektriko baten bizi-itxaropenak (ordutan neurtuta) 2.000 parametrodun banaketa esponentziala du. Demagun 2.000 ordu baino gutxiago irauten duten osagaiak ordezkatzen direla. Enpresa batek 5 osagai erosten baditu, kalkula ezazu:

a) Gutxienez osagai bat ordezkatzeko probabilitatea.

b) Bi osagai ordezkatzeko probabilitatea.

13. Kalkula ezazu banaketa esponentziala duen zorizko aldagaiak bere batezbestekoa gainditzeko probabilitatea.

14. Fabrikatzaile batek bi produkzio-kateen artean bat aukeratu behar du. Produkzio-kate bakoitzean ekoiztutako piezen luzerei elkartutako dentsitate-funtzioak hurrengoak dira:

$$f_1(x)=\begin{cases} 3/x^4 & x\geq 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} 4/x^5 & x\geq 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

a) Onargarriak diren elementuen luzera 1 eta 2 zentrimetroen artekoa izan behar bada, zein produkzio-kate aukeratuko du?
b) Zoriz pieza bat aukeratzen badugu, zein da onargarria izateko probabilitatea?
c) Zein da kate-produkzio bakoitzaren batezbesteko luzera?

15. Pieza batzuen ezaugarri nagusiak $N(150, 0.4)$ banaketa du, tolerantzia-tartea (149.2, 150.4) izanik.

a) Zein da itxaron daitekeen pieza akastunen proportzioa?

b) 50 pieza aukeratu badira, kalkula ezazu hauetako 44 pieza onargarriak izateko probabilitatea.

c) Kalkula ezazu 50 piezetatik gutxienez 44 onargarriak izateko probabilitatea.

16. Izan bedi X zorizko aldagai jarraituaren dentsitate funtzioa:

$$f(x)=\begin{cases} x/2-1 & x\in(2,4) \\ 0 & \text{beste kasuetan}\end{cases}$$

a) Froga ezazu dentsitate funtzioa dela.

b) Banaketa funtzioa lortu.

c) Kalkula itzazu batezbestekoa, bariantza eta desbiderazio tipikoa.

d) Kalkula itzazu hurrengo probabilitateak:

$$P\left(X\leq 5/2\right) \quad P\left(X> 5/2\right) \quad P\left(X\geq 5/2\right)$$
$$P\left(X< 5/2\right) \quad P\left(5/2< X\leq 4\right) \quad P\left(X= 5/2\right)$$

17. Kalkula ezazu 40 galdera dituen test bat egiten duen ikasle batek 24 galdera baino gehiagoren erantzuna asmatzeko probabilitatea.

18. Izan bedi f(x) funtzioa:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k\cdot x^2}{36} & 0\le x\le 6 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

a) Zehatz ezazu k konstantearen balioa, f(x) dentsitate funtzioa izan dadin.

b) Batezbestekoa, bariantza eta desbideratze tipikoa lortu.

c) Kalkula ezazu F(x) banaketa funtzioa.

d) Kalkula ezazu $P\left(|X|\le 2\right)$

e) Kalkula ezazu $P(\mu-2\sigma< X<\mu+2\sigma)$

19. X zorizko aldagaiak banaketa esponentziala duela eta $P(X>8)=0.2$ dela jakinik, kalkula ezazu X aldagaiaren batezbestekoa eta bariantza.

20. Gailu elektroniko biren bizi-itxaropenak (urteetan neurtuta) $\beta=10$ (urte) parametrodun banaketa esponentziala du. Gutxienez t urteetan ondo ibili den gailu elektroniko bat erosten bada, kalkula ezazu gutxienez 12 urte gehiago ondo funtzionatzeko probabilitatea.

21. Lantegi kimiko batek probeta ugari erosten ditu. Probeta-sorta bat onartzeko edo errefusatzeko erabakia 100 probetetako lagina erabiliz hartzen da. Horrela, 100 probetaz osatutako laginean akastunak diren 3 edo probeta gehiago aurkitzen badira, probeta sorta errefusatzen bada, zein da probeten %1a akastunak dituen sorta bat errefusatzeko probabilitatea?

22. Laborategiko tresna baten mozte-errorea hurrengo dentsitate-funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua da:

$$f(x)=\begin{cases} m(x^2+x+1) & x\in(0,1) \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

a) m parametroa kalkulatu.

b) Batezbestekoa kalkulatu.

c) Edozein neurketa egitean 0.01 baino txikiagoa den errore bat egiteko probabilitatea.

23. Kable elektriko baten diametroak 0.8 batezbestekoa eta 0.0004 bariantza dituen banaketa normala du.

a) Kalkula ezazu diametroa 0.81 baino handiagoa izateko probabilitatea.

b) Demagun kablearen diametroa bere batezbestekotik 0.025 unitatetan baino unitate gehiagotan desberdintzen bada kablea akastuna dela kontsideratzen dela. Zein da kable akastuna izateko probabilitatea?

24. Hegazkin-konpainia batek, batezbeste erreserbatuta dauden plazen %12a hutsik geratzen direla behatu du. Arrazoi honengatik, 450 plaza dituzten hegazkinetan libre dauden eserlekuez gain, plazen %10 gehiago saltzea erabaki du. Kalkula ezazu bidaiariren bat plaza gabe geratu den hegaldi proportzioa.

25. Izan bedi $Z : N(0,1)$. Kalkula ezazu $z_0 \in \mathbb{R}$ non $P(-z_0 < Z < z_0) = 0.966$ den.

26. Pieza batzuen bizi-itxaropenak hurrengo dentsitate funtzioa duen banaketa esponentziala du:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ c \cdot e^{-cx} & x > 0 \end{cases}$$

Espero den batezbestekoa 1.000 ordu dela jakinik, kalkula itzazu c konstantearen balioa eta banaketaren bariantza.

27. Kalkula bedi β desbiderazio tipikodun banaketa esponentzialeko aldagai batek, gutxienez bere batezbestekoa eta gehienez batezbestekoaren bikoitza izateko probabilitatea.

28. Aireportu batera 20 minuturik behin iristen den hegazkin-kopuruak $\lambda = 100$ parametroko Poisson-en banaketa du. Kalkula bedi zoriz aukeratutako 20 minutuko denbora tartean, 80 eta 120 hegazkin bitartean iristeko probabilitatea.

29. Biz X="enpresa batek urtero kontratatzen duen langile-kopurua" zorizko aldagaiaren dentsitate-funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} x e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

a) k^2 konstantearen balioa zehaztuz, kalkula bedi enpresak hurrengo urtean gehienez 12 langile kontratatzeko probabilitatea.
b) Zenbat langile itxaron daiteke enpresak kontratatzea datorren urtean?

30. Orduz orduko ozono-mailak jasotzen dituen neurgailu batean, datuetako %9 baliogabea da. Zoriz neurgailuak jasotako 120 datu hartu dira.

a) Zein da datu horien %85 baino gehiago baliokoak izateko probabilitatea?

b) Eta 120 datu hartu ordez 20 datu hartzen badira, zein da datu horien %85 baino gehiago baliokoak izateko probabilitatea?

31. Biltegi batean, sei motorretatik bat injekziogabea da. Zoriz biltegiko 200 motor hartu dira.

a) Zein da motor injekziogabeen kopurua 25 eta 35 bitartekoa izateko probabilitatea?
b) Zenbat motor injekziogabe itxaron daiteke egotea?

32. Zorizko aldagai batek $\mu = 60$ batezbestekoa banaketa normala du. Aldagaiak 40,8 baino txikiagoak diren balioak hartzeko probabilitatea 0.209 dela jakinda, kalkula bedi aldagaiaren desbideratze tipikoa.

Erantzunak:

1) a) k=1/60; b) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{x^4-16}{240} & 2\le x\le 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$;

c) $P(0<X<2.5)=0.096$, $P(X>3)=0.729$, $P(X\le 3.5)=0.559$

2) a) $f(x)=\begin{cases} 3 & 0\le x\le 1/3 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$; b)

$P(0.2\le X\le 0.7)=0.4$, $P(X<0.32)=0.96$, $P(X\ge 0.27)=0.19$

3) b) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ c) $P(X\le \frac{1}{3})=\frac{1}{9}$; $P(X>\frac{1}{3})=\frac{8}{9}$; $P(\frac{1}{2}<X\le 1)=\frac{3}{4}$; $P(X<\frac{1}{3})=\frac{1}{9}$; $P(X\ge \frac{1}{3})=\frac{8}{9}$; $P(X=\frac{1}{2})=0$

4) a) k=2; b) $\mu=\frac{2}{3}$; $\sigma^2=\frac{1}{18}$; $\sigma=0.2357$; c)0.9639; d) $\frac{3}{4}$

5) 8:31tan edo lehenago

6) 0.148

7) a) 0.4641; b) 23.97; c) 0.15335

8) 0.0418

9) 0.3557

10) 0.8854

11) 0.4483

12) a) 0.993260; b) 0.198957;

13) 0.367879

14) a) 2. Produkzio-katea (emaitza lortzeko konpara itzazu onargarriak diren elementuen proportzioa); b) 0.90625: c) $E[X_1]=\frac{3}{2}$; $E[X_2]=\frac{4}{3}$

15) a) 0.1815; b) 0.0785; c) 0.1736

16) b) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 2 \\ \dfrac{x^2}{4}-x+1 & 2<x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$; c) $\mu=\frac{10}{3}$; $\sigma^2=\frac{2}{9}$; $\sigma=\frac{\sqrt{2}}{3}$;

d) $P\left(X\le \frac{5}{2}\right)=\frac{1}{16}$ $\quad P\left(X>\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{16}$ $\quad P\left(X\ge \frac{5}{2}\right)=\frac{15}{16}$

$P\left(X<\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{16}$ $\quad P\left(\frac{5}{2}<X\le 4\right)=\frac{15}{16}$ $\quad P\left(X=\frac{5}{2}\right)=0$

17) 0.0778

18) a) $k = \frac{1}{2}$; b) $\mu = \frac{9}{2}$, $\sigma^2 = 1.35$; $\sigma = 1.16$; c) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{216} & 0 \le x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$ d) $\frac{1}{27}$

e)0.95

19) $\mu = 4.97$; $\sigma^2 = 24.7009$

20) 0.3012

21) 0.0803

22) a) $m = \frac{6}{11}$; $\mu = \frac{13}{22}$; c) 0.005482

23) a) 0.3085; b) 0.2112

24) 0.0197

25) z=2.12

26) $c = \frac{1}{1.000}$; $\sigma^2 = (1.000)^2$

27) 0.233

28) 0.9596

29) a) $k^2 = 16$; $P(X \le 12) = 0.8$; b) 8

30) a) 0.9838; b) 0.7334

31)a) 0.6126; b) 33

32) $\sigma = 23.7$