Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu
Bilboko Ingeniaritza Eskola (UPV/EHU)
Ebazpena

2016-01-11

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak orden egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\,]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Frogapen hau honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

  $$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(j), \dots\,]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

  $$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(j), \dots\,]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:

  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:

  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.

- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,100 puntu) c-rik ez duten eta bi b jarraian ez dituzten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, aaa, $aaab$, $aaaba$, $baab$, $aaabaababa$, a, b eta $abab$ hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina ccc, $bbbb$, abb, $cbcca$, $aaac$, $bbbab$, $aabbaba$, $baabb$ eta $aaabbbccc$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_c = 0 \wedge \forall k(k \in I\!N \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = b \rightarrow w(k+1) \neq b)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_c = 0 \wedge \neg\exists k(k \in I\!N \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = b \wedge w(k+1) = b)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_c = 0 \wedge \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = ubbv)\}$$

2.2. (0,050 puntu) Ezkerretik hasita, laugarren posizioan a sinboloa duten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. a sinboloa behin baino gehiagotan ager daiteke. Adibidez, $aaaaa$, $baaabc$, $baaaccac$, $abbaccccabbaa$ eta $bbcaccbbb$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, cba, aa, $aacba$, $aabbcacbc$ eta $aaccbccb$ ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$L_2 = \{w \mid \quad w \in A^* \wedge |w| \geq 4 \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = 3 \wedge w = uav)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{w \mid \quad w \in A^* \wedge |w| \geq 4 \wedge w(4) = a\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{a, b, c\}^3\{a\}\{a, b, c\}^*$$

2.3. (0,075 puntu) a sinboloa ezkerretik hasita laugarren posizioan bakarrik duten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Beraz, a sinboloa behin bakarrik ager daiteke. Adibidez, $cccab$, $bbbabb$ eta $bccaccbc$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ε, cba, aa, $aacba$, $bbbbbb$, c, $aaaaaa$, $bbbacaab$ eta $bbccaccb$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 4 \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = 3 \wedge |u|_a = 0 \wedge |v|_a = 0 \wedge w = uav)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 4 \wedge |w|_a = 1 \wedge w(4) = a\}$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = \{b, c\}^3\{a\}\{b, c\}^*$$

2.4. (0,075 puntu) Gutxienez zortzi osagai eta a sinboloa ezkerretik hasita laugarren posizioan eta eskuinetik hasita laugarren posizioan bakarrik duten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Beraz, bi a izango dituzte hitz horiek. Adibidez, $cccababbb$, $bbbabbccaccb$ eta $bccaacbc$ hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina ε, $cccabbb$, cba, aa, $aacba$, $bbbbbb$, c, $aaaaaa$, $bbbacaabcc$ eta $bbccaccb$ ez dira L_4 lengoaiakoak.

$$L_4 = L_3(L_3)^R$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 8 \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = 3 \wedge |x| = 3 \wedge |u|_a = 0 \wedge |v|_a = 0 \wedge |x|_a = 0 \wedge w = uavax)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 8 \wedge |w|_a = 2 \wedge w(4) = a \wedge w(|w| - 3) = a\}$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{b, c\}^3\{a\}\{b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^3$$

2.5. (0,100 puntu) a sinboloa baldin badute, behin bakarrik eta gainera ezkerretik hasita laugarren posizioan duten hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, *b*, *ccc*, *bbcbbccc*, *cccab*, *bbbabb* eta *bccaccbc* hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina *a*, *aaaaa*, *cba*, *bbbaba*, *aacba*, *bbabbbb* eta *bbccaccb* ez dira L_5 lengoaiakoak.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad (|w|_a \neq 0 \rightarrow (|w| \geq 4 \wedge |w|_a = 1 \wedge w(4) = a))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_5 = L_3 \cup \{b, c\}^*$$

Beste aukera bat:

$$L_5 = L_3 \cup \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a = 0\}$$

2.6. (0,075 puntu) a sinboloa baldin badute, behin bakarrik eta gainera eskuinetik hasita laugarren posizioan duten hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, *b*, *ccc*, *bbcbbccc*, *caccb*, *bbabbb* eta *bcccacbc* hitzak lengoaiakoak dira baina *a*, *aaaaa*, *cba*, *bbbaba*, *aacba*, *bbabbbb* eta *bbcacccb* ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = (L_5)^R$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad (|w|_a \neq 0 \rightarrow (|w| \geq 4 \wedge |w|_a = 1 \wedge w(|w| - 3) = a))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = (L_3)^R \cup \{b, c\}^*$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = (L_3)^R \cup \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a = 0\}$$

2.7. (0,050 puntu) Bai b sinboloa eta bai c sinboloa kopuru bikoitian dituzten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, *a*, *abb*, *babbab*, *cc*, *bcccbc* eta *accaabcbc* hitzak lengoaiakoak dira baina *aab*, *abaac*, *ccccc*, *babac* eta *b* ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_b \bmod 2 = 0 \wedge |w|_c \bmod 2 = 0\}$$

2.8. (0,050 puntu) b sinboloa edo c sinboloa (gutxienez bietako bat) kopuru bakoitian dituzten hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, b, bbb, $aabc$, $caaabb$ eta $abcbcbca$ hitzak lengoaiakoak dira baina ε, a, $bbcc$, $acac$, $cabbcaa$ eta $acbcba$ hitzak ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = \overline{L_7}$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_b \bmod 2 \neq 0 \vee |w|_c \bmod 2 \neq 0)\}$$