Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Bilboko Ingeniaritza Eskola (UPV/EHU)
Lengoaia eta Sistema Informatikoak Saila
2. maila — 2017-18 ikasturtea
2. gaia: Lengoaiak
0,9 puntu
Ebazpena

2017-11-22

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 5 hitzak ordena egokian eman. Zehaztutako ordena hori formalizatuko duen $h : I\!N \to A^*$ erako funtzio bijektiboa eman.

A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia:

$$[\,\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots]$$

Zehaztutako ordena hori honako funtzio bijektibo honen bidez formaliza daiteke:

$$h : I\!N \to A^*$$
$$h(k) = a^k$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu. Eskatutako frogapen hori honako atal hauen bidez labur daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \to 2^{A^*}$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(j), \dots]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \to A^*$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\,f(0), f(1), f(2), f(3), \dots, f(j), \dots]$$

- g eta f funtzioak erabiliz C izena emango diogun lengoaia definituko dugu honako irizpide hau kontuan hartuz:

  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:

  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  - $f(k)$ hitza $g(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(k)$ hitza C lengoaiakoa da.

- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, g funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = g(j)$.

- Kontraesana $f(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzean sortuko da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:
  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $f(j)$ hitza ez da $g(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  - $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = g(j)$ denez, honako hau daukagu: $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $f(j)$ hitza $g(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $f(j)$ hitza ezin baita aldi berean $g(j)$ lengoaian ez egon eta egon.
- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,075 puntu) a sinboloa agertzen bada, a-ren azken agerpena zehazki bi a-z osatutako aa katean duten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, ccc, $cbbb$, aa, $abaacc$, aac, baa, $acaaabaac$, $bbaabb$ eta $baabaab$ hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina a, aaa, $caaab$, $acbab$, $aabaaac$ eta $baaabbaabccac$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$\begin{array}{ll} L_1 = \{w \mid & w \in A^* \wedge \\ & (|w|_a = 0 \vee \\ & \exists v(v \in A^* \wedge |v|_a = 0 \wedge w = aav) \vee \\ & \exists \beta, u, v(\beta \in A \wedge u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge \beta \neq a \wedge |v|_a = 0 \wedge w = u\beta aav))\} \end{array}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{array}{lll} L_1 = \{w \mid & w \in A^* \wedge & \\ & (|w|_a \geq 1 \rightarrow & (\exists v(v \in A^* \wedge |v|_a = 0 \wedge w = aav) \vee \\ & & \exists \beta, u, v(\beta \in A \wedge u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge \beta \neq a \wedge \\ & & \quad |v|_a = 0 \wedge w = u\beta aav)))\} \end{array}$$

2.2. (0,075 puntu) a sinboloa gutxienez behin duten eta, gainera, a-ren azken agerpena zehazki bi a-z osatutako aa katean duten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, aa, $abaacc$, aac, baa, $acaaabaac$, $bbaabb$ eta $baabaab$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, ccc, $cbbb$, a, aaa, $caaab$, $acbab$, $aabaaac$ eta $baaabbaabccac$ ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$\begin{array}{ll} L_2 = \{w \mid & w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge \\ & (\exists v(v \in A^* \wedge |v|_a = 0 \wedge w = aav) \vee \\ & \exists \beta, u, v(\beta \in A \wedge u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge \beta \neq a \wedge |v|_a = 0 \wedge w = u\beta aav))\} \end{array}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = L_1 \cap \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1\}$$

2.3. (0,075 puntu) a sinboloaz osatutako bloke ez-huts bat, b sinboloaren agerpen bakarra, a sinboloaz osatutako bigarren bloke ez-huts bat, b sinboloaren bigarren agerpena, eta, a sinboloaz osatutako lehenengo bi blokeek adina a dituen, a sinboloaz osatutako hirugarren bloke bat dituzten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $ababaa$, $aababaaa$ eta $aaababaaaa$ hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ε, aaa, cc, $cbbbc$, $babab$, $abab aaa$, $aabbaa$ eta $ababcaacbb$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = \{w \mid \begin{array}{l} w \in A^* \wedge \\ \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge \\ \quad |u|_a = |u| \wedge |v|_a = |v| \wedge |x|_a = |x| \wedge |x| = |u| + |v| \wedge w = ubvbx)\} \end{array}$$

Beste era bat:

$$L_3 = \{w \mid \begin{array}{l} w \in A^* \wedge \\ \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge \\ \quad |u|_a = |u| \wedge |v|_a = |v| \wedge w = ubvbuv)\} \end{array}$$

Beste era bat:

$$L_3 = \{w \mid \begin{array}{l} w \in A^* \wedge \\ \exists j, k, \ell(j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \ell \in \mathbb{N} \wedge j \geq 1 \wedge k \geq 1 \wedge \\ \quad \ell = j + k \wedge w = a^j b a^k b a^\ell)\} \end{array}$$

2.4. (0,075 puntu) ccc katea baduten baina kate hori hasieran ez duten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $bccc$, $bcccbb$, $ccaacccb$, $acccbcccac$ eta $cbccc$ hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina ε, c, aaa, ccc, $abbba$, $ccbabcc$, $cccbabcc$ eta $cabccba$ ez.

$$L_4 = \{w \mid \begin{array}{l} w \in A^* \wedge \\ \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = ucccv) \wedge \\ \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = cccv)\} \end{array}$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{w \mid \begin{array}{l} w \in A^* \wedge |w| \geq 4 \wedge \neg(w(1) = c \wedge w(2) = c \wedge w(3) = c) \wedge \\ \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k \leq |w| - 2 \wedge w(k) = c \wedge w(k+1) = c \wedge w(k+2) = c)\} \end{array}$$

2.5. (0,075 puntu) Gutxienez sinbolo bat eta, gainera, posizio bakoiti guztietan lehenengo posizioko sinbolo bera duten hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Lehenengo sinboloa posizio bikoitietan ere ager daiteke. Adibidez, a, aaa, $bcbab$, $bcbabb$ eta $cccbcbcb$ hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina ε, aab, $abaac$, $cccbb$ eta $abbb$ ez.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \rightarrow w(k) = w(1))\}$$

2.6. (0,075 puntu) Gutxienez sinbolo bat duten eta, gainera, lehenengo sinboloa, agertzekotan, bakarrik posizio bakoitietan duten hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Lehenengo sinboloa ezin da agertu posizio bikoitietan eta ez da nahitaezkoa posizio bakoiti guztietan agertzea. Adibidez, a, $abab$, $abbb$, $abbba$, $abbbc$, $bcbab$ eta $bcbaa$ hitzak L_6 lengoaiakoak dira baina ε, aaa, aab, $abaac$, $cccbb$ eta $abba$ ez.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = w(1)) \rightarrow k \bmod 2 \neq 0)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \rightarrow w(k) \neq w(1))\}$$

2.7. (0,075 puntu) Gutxienez sinbolo bat eta lehenengo sinboloa zehazki posizio bakoitietan bakarrik duten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Lehenengo sinboloak posizio bakoiti guztietan agertu beharko du eta ezingo du agertu posizio bikoitietan. Adibidez, a, $abab$, $abaca$ eta $bcbabcb$ hitzak L_7 lengoaiakoak dira baina ε, aaa, aab, $abbb$, $abaac$, $cccbb$ eta $abbba$ ez.

$$\begin{aligned} L_7 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \\ & \forall k((k \in I\!N \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \rightarrow w(k) = w(1)) \wedge \\ & \forall k((k \in I\!N \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \rightarrow w(k) \neq w(1))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = L_5 \cap L_6$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = L_5 \setminus \overline{L_6}$$

2.8. (0,050 puntu) a-ren, b-ren eta c-ren agerpen-kopuru bera edukitzeaz gain, palindromoak diren, hau da, beraien alderantzizkoaren berdinak diren hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, $abccba$, $aaccbbbbccaa$ eta $bbaaccccaabb$ hitzak lengoaiakoak dira baina abc, $aabbccbbaa$, $aabbaa$, cca, $aaabbbccc$ eta $cbcbc$ hitzak ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a = |w|_b \wedge |w|_b = |w|_c \wedge w = w^R\}$$