Sorbonne Université

UE 4IN910 - « Algorithmique numérique »
Master Informatique - M1 SFPN

Rapport de TME
TME n°3 - Méthode de Monte Carlo

Calle Viera Andersson

Enseignant
GRAILLAT Stef

Table des matières

Introduction

Dans ce T.M.E nous allons réaliser une introduction à la Méthode de Monte-Carlo.
Pour cela nous allons utiliser cette méthode pour approximer π puis pour calculer le volume de plusieurs boules dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Par la suite nous appliquerons cette méthode à un exemple concret en finance.

Le code est réalisé en MatLab et est fournit avec le rapport, ci-dessous se trouvent des exemples d'utilisation des fonctions pour $N = 100000$(premier argument).
Le fichier **PiMC.m** sert à calculer la valeur approchée de π décrite dans la Section 1.

```
my_pi = PiMC(100000, true)
```

Volume.m sert à calculer les volumes de boules dans $\mathbb{R}^d$ en Section 2 (d est précisé en argument).

```
my_V = Volume(100000, 3, true)
```

On calcul les valeurs C et P de la Section 3 grâce à **BlackScholes.m**

```
[C P] = BlackScholes(100000)
```

Si on veut afficher l'évolution des valeurs estimées selon le choix du nombre d'itérations maximum on peut lancer les scripts **ErrorPiMC.m** pour l'Exercice 6 ou **ErrorBlackScholes.m** pour l'Exercice 8.
Si on veut afficher des intervalles de confiance pour les volumes de l'Exercice 7 on utilise **InterConf.m**

1 Exercice 6 (Calcul approché de π) :

Soient le carré unitaire $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ et $(X_i)_{i\geq 1}$, $(Y_i)_{i\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires uniformes i.i.d à valeurs dans $[0,1]$.
On définit alors $(Z_i)_{i\geq 1}$ tel que : $\forall i \geq 1, Z_i = (X_i, Y_i) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D})$ qui a pour densité $f_{Z_i}(t) = \mathbb{1}_{\{t\in\mathcal{D}\}}$.

Question 1 :

Posons $\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathcal{D},\ x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathcal{D}$, alors on a que pour tout $i \geq 1$:

$$\mathbb{P}(Z_i \in \mathcal{I}) = \int_{\mathcal{I}} f_{Z_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{\{x\in[0,1],y\in[0,1]\}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Or $\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\,\mathrm{d}y = \Big[y\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On effectue le changement de variables $x = sin(\theta)$ donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\theta$ et les bornes deviennent $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin(\theta)^2} cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

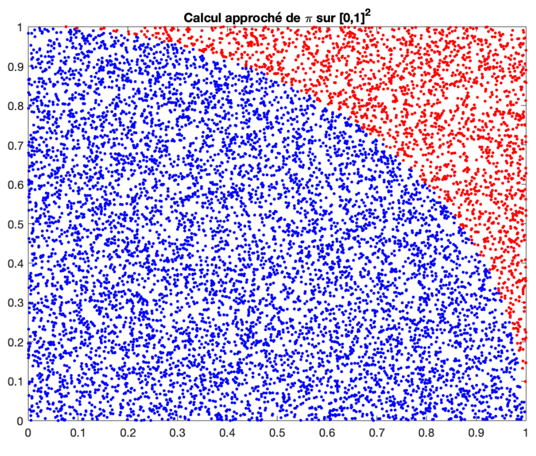
On peut remarquer que $cos(\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + cos(2\theta))$ donc,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2}(sin(2\theta))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin(\pi) - \frac{1}{2}sin(0)\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

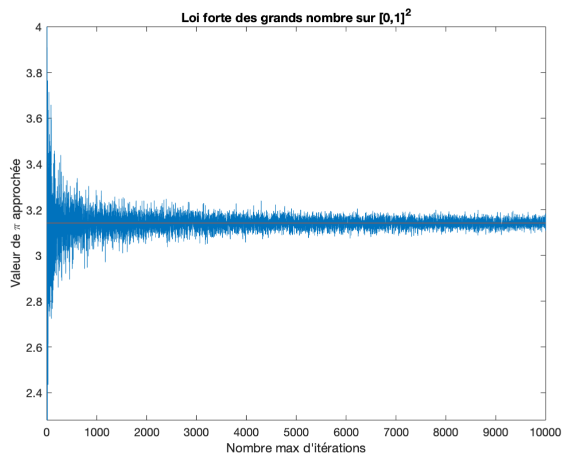
□

Question 2 :

On peut remarquer que cette méthode correspond à une méthode du rejet sur $\mathcal{I}$.



Méthode de Monte Carlo pour approximer $\frac{\pi}{4}$



Valeur de π approchée pour différentes valeurs de N

En faisant tourner notre programme pour $\mathbf{N} = 10000$ notre résultat est $\widetilde{\pi} = 3.1491$.

2 Exercice 7 (Volume de la boule) :

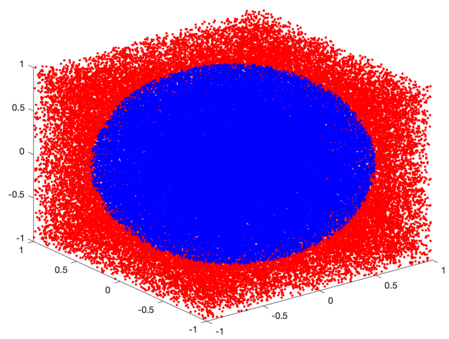
Un des principaux intérêts de la méthode de Monte Carlo est que son efficacitée ne dépend pas de la dimension de l'intégrale que l'on cherche à calculer, ni de la régularitée de la fonction intéegrée, contrairement aux méthodes déterministes usuelles de calcul approché d'intégrales (méthode des trapèzes, des rectangles, ...).
Par exemple, on peut utiliser la méthode de Monte Carlo pour estimer le volume de la boule unité $\mathbb{B}_d$ de dimension d incluse dans $\mathcal{D}_d = [-1,1]^d$, même pour d grand :

$$\mathbb{B}_d = \left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{D}_d, \sum_{k=1}^{d} x_k^2 \leq 1\right\} \subset \mathcal{D}_d \subset \mathbb{R}^d$$

Soit $X \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_d)$ i.i.d de densité $f_X(x) = \frac{1}{2^d}\mathbb{1}_{\mathcal{D}_d}$ on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} Vol(\mathbb{B}_d) &= \int_{\mathbb{B}_d} 1\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x|_2\leq 1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x|_2\leq 1}\mathbb{1}_{\mathcal{D}_d}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{D}_d} 2^d \mathbb{1}_{|x|_2\leq 1} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2^d \int_{\mathcal{D}_d} \mathbb{1}_{|x|_2\leq 1} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 2^d \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{|X|\leq 1}\big]. \end{aligned}$$

Cas où n = 3 :



Résultat de notre fonction pour $\mathbb{B}_3$

Sur $\mathbb{R}^3$ le volume de la sphère unité est donné par la formule : $V = \frac{4\pi}{3} = 4.1887902047$.

Le résultat donné par notre algorithme est de $\widetilde{V} = 4.188682731$, avec l'intervalle de confiance à 95% à partir de $N = 100000$ simulations : $\mathrm{I} = [4.1885, 4.1891]$.

Cas où n = 4 :
Sur $\mathbb{R}^4$ cela devient plus difficile à représenter visuellement, néanmoins on peut calculer la valeur théorique : $V = Vol(\mathbb{B}_4) = 4.9348022005$.

Le résultat donné par notre algorithme est de $\widetilde{V} = 4.9349179978$ et l'intervalle de confiance à 95% construit à partir de $N = 100000$ simulations : $\mathrm{I} = [4.9340, 4.9349]$.

3 Exercice 8 (Calcul du prix d'options) :

Dans toute la suite nous noterons la variable aléatoire $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité $f_G(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g^2}{2}}$ et de fonction de répartition $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_G(g)\mathrm{d}g$.

Question 1 :

Notons $C = e^{\frac{1}{2}}\Phi(1) - \frac{1}{2} = 0.8871429788$ et $P = \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}}\Phi(-1) = 0.2384217081$ les valeurs théoriques. Grâce à notre méthode pour **N**$= 100000$ on trouve $\widetilde{C} = 0.8874484282$ et $\widetilde{P} = 0.2384217329$.

Question 2 :

Calculons les valeurs exactes de C et P.

$C = \mathbb{E}\big[(e^G - 1)_+\big] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (e^g - 1)\mathbb{1}_{\{e^g - 1 \geq 0\}} f_G(g)\,\mathrm{d}g$

Or $e^g - 1 \geq 0 \iff e^g \geq 1 \iff ln(e^g) \geq ln(1) \iff g \geq 0$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^g - 1)e^{-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{g-\frac{g^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{g-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g$$

On peut remarquer que $g - \frac{g^2}{2} = -\frac{1}{2}(g^2 - 2g) = -\frac{1}{2}(g^2 - 2g + 1 - 1) = -\frac{1}{2}(g-1)^2 + \frac{1}{2}$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(g-1)^2 + \frac{1}{2}}\mathrm{d}g - \int_0^{+\infty} f_G(g)\mathrm{d}g = e^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(g-1)^2}\mathrm{d}g - \int_0^{+\infty} f_G(g)\mathrm{d}g$$

Comme f_G est paire : $\int_0^{+\infty} f_G(g)\mathrm{d}g = \int_{-\infty}^{0} f_G(g)\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f_G(g)\mathrm{d}g = \frac{1}{2}$

Remarquons que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(g-1)^2} = f_G(g-1)$, si on pose $u = g - 1$ avec $\mathrm{d}u = \mathrm{d}g$ on a donc que : $\int_0^{+\infty} f_G(g-1)\mathrm{d}g = \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u = \Phi(1)$

$$= e^{\frac{1}{2}}\Phi(1) - \frac{1}{2}$$

Par un même raisonnement on peut trouver la valeur de P.

$P = \mathbb{E}\big[(1 - e^G)_+\big] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1 - e^g)\mathbb{1}_{\{1-e \geq 0\}} f_G(g)\,\mathrm{d}g$

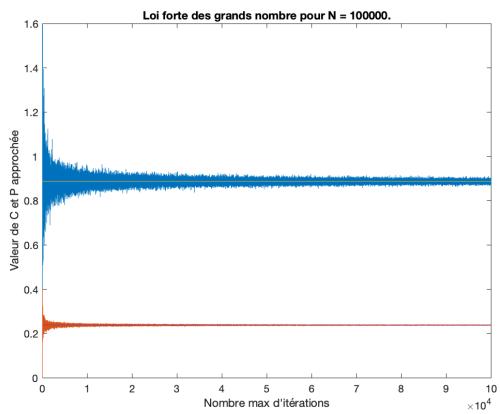
Or $1 - e^g \geq 0 \iff 1 \geq e^g \iff ln(1) \geq ln(e^g) \iff 0 \geq g$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^g)e^{-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{g-\frac{g^2}{2}}\mathrm{d}g = \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{-1} f_G(u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}}\Phi(-1)$$

□

En traçant l'évolution de nos valeurs estimées pour $N \in [\![0, 100000]\!]$ on remarque que la valeur de $\widetilde{P}$ (en orange) semble converger beaucoup plus rapidement et "mieux" vers la valeur théorique. Pour $\widetilde{C}$ (en bleu) en revanche on garde toujours un écart important par rapport à la vraie valeur.
Si on calculait un intervalle de confiance cela se traduirait par un intervalle plus large pour $\widetilde{C}$ dû à la différence d'écart-type pour ces deux valeurs.



Valeurs de $\widetilde{C}$ et $\widetilde{P}$ pour différents N