Oppgaver til kapittel 9

9.1 (a) $R \cup \{\langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

(b) $R \cup \{\langle b, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, a\rangle\}$

9.2 Den irrefleksive tillukning av R er den minste relasjon M_R som inneholder R, og som samtidig har den egenskap, at den er irrefleksiv. Siden R allerede har et element som er relatert til seg selv, kan det aldri finnes en irrefleksiv tillukning av R, for da maatte vi ha fjernet $\langle 1, 1\rangle$ fra M_R, men da hadde ikke M_R inneholdt R.

9.3 (a) $0 \in M$, og hvis $x \in M$, saa $x - 1 \in M$.
Dette er de foerste ti elementene i M: $\{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, ...\}$

(b) $3 \in M$, og hvis $x \in M$, saa $3x \in M$ og $3x + 1 \in M$.
Dette er de foerste ti elementene i M: $\{3, 9, 10, 27, 28, 30, 31, 81, 82, 84, ...\}$

9.4 (a) Mengden $\{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$ kan defineres som den minste mengden M slik at $3 \in M$, og hvis $x \in M$, saa $x + 3 \in M$.

(b) Mengden $\{a, b, ab, bb, abb, bbb, ...\}$ kan defineres som den minste mengden S slik at $a \in S$ og $b \in S$ og hvis $t \in S$, saa $t \cdot b \in S$. Merk at $\cdot$ her representerer konkatinering, og at t er en plassholder, mens b representerer den faktiske strengen b.

Oppgaver til kapittel 10

10.1 (a) f kan defineres rekursivt ved at $f(0) = 1$, og $f(n + 1) = f(n) + 3$. Her er de foerste aatte verdiene for f:
$f(0) = 1, f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 10, f(4) = 13, f(5) = 16, f(6) = 19, f(7) = 21.$
For hvert steg n etter basissteget, tar du den forrige verdien $f(n-1)$ og adderer den med 3.

(b) f kan defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = (n+1)^2 = n^2+2n+1 = f(n)+2n+1$. Her er de foerste aatte verdiene for f:
$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16, f(5) = 25, f(6) = 36, f(7) = 49$
For hvert steg n etter basissteget $n = 0$, tar du den forrige verdien $f(n - 1)$ og adderer den med $2(n - 1)$ og 1.

10.2 (a) $T(t) = T(\Lambda t) = T(\Lambda) + 1 = 0 + 1 = 1$
$T(tatt) = T(tat)+1 = (T(ta)+1)+1 = (T(t)+1)+1 = ((T(\Lambda)+1)+1)+1 = 0+1+1+1 = 3$
$T(tao) = T(ta) - 1 = T(t) - 1 = (T(\Lambda) + 1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$
$T(ottato) = T(ottat) - 1 = (T(otta) + 1) - 1 = (T(ott) + 1) - 1 = ((T(ot) + 1) + 1) - 1 = (((T(o) + 1) + 1) + 1) - 1 = ((((T(\Lambda) - 1) + 1) + 1) + 1) - 1 = 0 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 1$

(b) T tilegner en streng over alfabetet A en verdi. For hver t faar strengen $+1$ i verdi, for hver o faar strengen -1 i verdi. a gjoer ingenting, saa vi kan si at denne bokstaven gir 0 i verdi. Det gjoer forresten Λ ogsaa. Rekursivt sett er dette en slags algoritme som gaar gjennom alle bokstavene i en streng, og fjerner bokstaven etter at den har gitt strengen bokstavens respektive verdi. Deretter fortsetter den paa de resterende bokstavene i strengen. Algoritmen stopper etter at det ikke er noen bokstaver igjen, og vi staar igjen med Λ, som altsaa gir 0 i verdi.

10.3 La b vaere rekursivt definert slik at:

1) $b(0) = 1$ og $b(1) = 0$

2) $b(sx) = b(s) \cdot b(x)$, hvor $x = 1 \vee x = 0$

Jeg gjoer oppmerksom paa at $\cdot$ her representerer konkatinering, og at s er en plassholder for resten av strengen. Dessuten oensker jeg aa opplyse om at jeg egentlig hadde foretrukket aa definere b slik at:

1) $b(\Lambda) = \Lambda$

2) $b(sx) = b(s) \cdot 1$, hvis $x = 0$, og $b(sx) = b(s) \cdot 0$, hvis $x = 1$.

Men i laereboken bruker vi ikke Λ for bitstrenger. Forresten kunne man ogsaa skrevet $b(xs)$, og gaatt den andre veien, men i laereboken brukes begge metodene. Jeg tror ikke det har noe aa si i denne sammenhengen.

10.4 La W vaere definert rekursivt slik at:

1) $W(P) = 0$, for alle utsagnsvariabler P

2) $W(F \wedge G) = W(F) + W(G) + 1$

Jeg gjoer oppmerksom paa at F og G her kan representere utsagnslogiske formler, som f.eks. $F = (Q \wedge P)$.