Oppgaver til kapittel 7

7.1 (a) Dette er ikke en funksjon, fordi $< 3, x >$ mangler, hvor $x \in T$.

(b) Dette er en funksjon som hverken er injektiv eller surjektiv, fordi alle elementene i S kun trefferett element i T, og verdimengden T bestaar av flere elementer enn dette ene elementet.

(c) Dette er en injektiv funksjon, fordi hvert element i S svarer til et unikt element i T. Den kan ikke vaere surjektiv, for det er flere elementer i T, enn i S.

(d) Dette er ikke en funksjon, fordi $< 3, c >$ og $< 3, b >$ inngaar i relasjonen, men $c \neq b$.

7.2 (a) $h = \{< 1, c >, < 2, a >, < 3, a >\}$

(b) $h[A] = \{c, a\}$

7.3 (a) f er en operasjon, fordi $f(a) \in D_f$, hvor $D_f = A$, for alle $a \in D_f$. f tar oss ikke ut"av definisjonsomraadet D_f. Mer presist: f er en unaer (*unary*) operasjon.

(b) f er en symmetrisk relasjon, fordi det for alle x, y er slik at $< x, y > \in f[A]$ og $< y, x > \in f[A]$. Det spiller ingen rolle at $x = y$.

(c) f er en partiell ordning, fordi den er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv, paa A. Den er refleksiv, fordi det for alle x i A er slik at $< x, x > \in f[A]$; dette foelger av definisjonen paa identitetsfunksjonen. Den er transitiv, for hvis $< x, y > \in f[A]$ og $< y, z > \in f[A]$, saa $< x, z > \in f[A]$. Mao.: alt skjer i ett steg". Den er anti-symmetrisk, for hvis $< x, y > \in f[A]$ og $< y, x > \in f[A]$, saa $x = y$. Dette foelger fra b).

7.4 (a) $Z((\neg P \wedge \neg Q), \neg\neg R) = ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg R)$
$Z((R \vee \neg P), (P \wedge (P \wedge R))) = ((R \vee \neg P) \wedge (P \wedge (P \wedge R))$

(b) Ja, Z er injektiv, fordi vi kun ser paa formlene rent syntaktisk. Dermed vil to ekstensjonalt like, men intensjonalt ulike, utsagnslogiske formler, tolkes ulikt. F.eks. vil R og $\neg\neg R$ tolkes ulikt denne sammenhengen.

(c) Bildemengden til Z er mengden av alle utsagnslogiske formler paa formen $(F \wedge G)$, hvor F og G er plassholdere for utsagnslogiske formler.

(d) Nei, Z er ikke en surjektiv funksjon, fordi $V_Z = U$ og bildemengden til Z, $Z[U \times U]$ er mengden av alle utsagnslogiske formler paa formen $(F \wedge G)$. $Z[U \times U] \neq U$. Mao.: alle uttrykk som ikke er paa den gitte formen, blir ikke truffet"av funksjonen.

Oppgaver til kapittel 8

8.1 (a) $P(\{2, a\}) = \{\{2\}, \{a\}, \{2, a\}, \emptyset\}$

(b) $P(\{1\}) = \{\{1\}, \emptyset\}, \{\emptyset, 2\} \cup \{\{1\}, \emptyset\} = \{\{1\}, 2, \emptyset\}$

(c) $P(\{\emptyset, 4\}) = \{\{\emptyset\}, \{4\}, \{\emptyset, 4\}, \emptyset\}$

(d) $P(P(\{57\})) = \{\{\{57\}\}, \{\emptyset\}, \{\{57\}, \emptyset\}, \emptyset\}$

8.2 (a) At $x \in \overline{A \cup B}$ gir oss det foelgende: $x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dermed kan vi med sikkerhet konkludere med at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) At $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ betyr per definisjon at $x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$. Ettersom x hverken er element i A eller B, har vi at $x \notin \overline{A \cup B}$. Dermed kan vi med sikkerhet fastslaa at $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

(c) Siden x er et vilkaarlig element som hverken er i A eller B, og $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ og $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, maa $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

8.3 La $f : \mathbb{N} \to H$, hvor f er definert slik:

$f(x) = \frac{1}{2}x$

f er injektiv, for hvis $f(n) = f(m)$, saa $n = m$. Anta at $f(n) = f(m)$. Da maa $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}m$, som altsaa gir oss at $n = m$.

f er surjektiv. Anta at k er et vilkaarlig valgt positivt "halv-tall". Per definisjon maa k vaere paa formen $\frac{1}{2}x$, hvor $x \in \mathbb{N}$, og dermed vil $f(x) = \frac{1}{2}x = k$.

Ettersom det er en en-til-en korrespondanse mellom de naturlige tallene og H, er H tellbar, og dermed har H samme kardinalitet som de naturlige tallene. Mao.: alle elementene i H kan telles opp", akkurat som med de naturlige tallene.

8.4 (a) $F([0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 5]) = \{< 0, 1 >, < 1, 1 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >, < 5, 2 >\}$

(b) Anta for motsigelse at $|F(M)| > |M|$. Det betyr at $F(M)$ har flere elementer enn multimengden M. I M kan et unikt element dukke opp flere ganger. Dette er ikke tilfellet for $F(M)$. I $F(M)$ dukker hvert unike element fra M opp en gang, i et tuppel. Vi stoeter her paa en motsigelse. Tenk deg at $M = [0, 0, 0]$. Da vil $|M| = 3$, og $|F(M)| = 1$. $F(M)$ kan ikke ha strengt flere elementer enn M, fordi hvert element i $F(M)$ fra M kun telles en gang.
Paa den annen side kan vi ha at $|F(M)| = |M|$, dersom hvert unike element i M forekommer kun en gang.
Saa svaret paa spoersmaalet er: Det kommer an paa om hvert element i multimengden kun dukker opp en gang. Hvis dette ikke er tilfellet, vil $|F(M)| < |M|$. Ellers vil kardinalitetene vaere like. $|F(M)|$ kan aldri vaere stoerre enn $|M|$, for da vil det vaere som om et element som ikke er i mengden, telles, noe som egentlig ikke gir noe mening, for hvor skal tellingen da stoppe? Naa beveger jeg meg litt ut i skyene, men kunne man ikke da sagt at $F|(M)|$ er uendelig, i den forstand, ja, hmm, $6, 7, 8, 9$ forekommer jo alle 0 ganger? Osv.

(c) Ja, $F(M)$ er en funksjon i denne sammenhengen, fordi hver x i tuppelet $< x, y >$ kun forekommer en gang. Dessuten kan vi si at $D_{F(M)}$ er definert ved mengden av alle elementene i M, og $V_{F(M)} = \mathbb{N}$. Foelgelig kan $F(M)$ illustreres slik: $F(M) : mengde(M) \to \mathbb{N}$, hvor $F(M)$ teller opp hvor mange ganger et element x forekommer i M, og tilordner det en verdi y deretter, hvor $y \in \mathbb{N}$.