IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2023

Tid: *mandag 12. juni 2023 kl. 15:00–19:00*

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Større oppgaver [80 poeng]

1 Mengdelære [10 poeng]

La $A = \{1, 2, \{1, 3\}\}$ og $B = \{1, 3, \{1, 2\}\}$.

(a) [4 poeng] Er følgende påstander sanne eller usanne?

1. $3 \in A$
2. $3 \in B$
3. $\{1, 3\} \subseteq A$
4. $\{1, 3\} \subseteq B$

(b) [4 poeng] Regn ut:

1. $A \setminus B$
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $\mathcal{P}(A)$

(c) [1 poeng] Regn ut $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$.
(d) [1 poeng] Hva er kardinaliteten til $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$. Begrunn svaret ditt.

2 Relasjoner [10 poeng]

La $M = \{a, b, c\}$. I hver av deloppgavene krever vi (1) at R er en refleksiv relasjon på M, (2) at S er en partiell ordning på M, og (3) at R er en ekte delmengde av S, det vil si at $R \subseteq S$ og $R \neq S$.

(a) [2 poeng] Gi et eksempel på R og S slik at kravene (1)–(3) oppfylles og R *er en ekvivalensrelasjon*.
(b) [3 poeng] Gi et eksempel på R og S slik at kravene (1)–(3) oppfylles *og* R *ikke er transitiv*.
(c) [2 poeng] Hva er den minste verdien $|S|$ (kardinaliteten til S, det vil si antall tupler i S) kan ha dersom kravene (1)–(3) skal oppfylles?
(d) [3 poeng] Kan S være en ekvivalensrelasjon? Hvis ja, gi et eksempel på R og S; hvis nei, forklar hvorfor.

3 Førsteordens formler [10 poeng]

Anta at R, K og S er relasjonssymboler slik at

Rx tolkes som «x *er et rugbrød*»,
Kx tolkes som «x *er et kakestykke*» og
Sxy tolkes som «x *er søtere enn* y».

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn.

(a) [2 poeng] Alle kakestykker er rugbrød.

(b) [2 poeng] Alle kakestykker er søtere enn alle rugbrød.

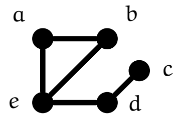
(c) [2 poeng] Alt som er søtere enn et kakestykke må være et rugbrød.

(d) [2 poeng] Det finnes et kakestykke som er søtere enn alle kakestykker.

(e) [2 poeng] Det finnes ikke et rugbrød som er søtere enn alle kaker og rugbrød.

4 Grafteori [10 poeng]

La G være følgende graf:



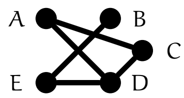
(a) [1 poeng] Hva er summen av gradene til alle nodene i G?

(b) [2 poeng] Forklar kort hva en eulerkrets er og hvorfor G ikke har en eulerkrets.

(c) [2 poeng] Mellom hvilke to noder kan man legge til en kant slik at grafen får en *eulerkrets*?

(d) [2 poeng] Mellom hvilke to noder kan man legge til en kant slik at grafen får en *hamiltonsykel*? Her er det to svar, og begge må oppgis.

La F være følgende graf:



(e) [3 poeng] Grafene G og F er *isomorfe*, det vil si at det finnes en bijeksjon fra nodene i G til nodene i F. I dette tilfellet finnes det to bijeksjoner. Oppgi disse.

5 Kombinatorikk [10 poeng]

La M være mengden $\{1, 2, 3\}$.

(a) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har M?

(b) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har potensmengden til M?

(c) [2,5 poeng] Hvor mange irrefleksive relasjoner finnes det på M?

(d) [2,5 poeng] Hvor mange bijeksjoner f på M, slik at $f(x) \neq x$ for alle x, finnes det?

6 Ekvivalensrelasjoner [10 poeng]

La S være mengden av alle ikke-tomme strenger over alfabetet $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}$, det vil si den minste mengden S slik at $\texttt{a}, \texttt{b} \in S$ og hvis $s \in S$, så er $s\texttt{a} \in S$ og $s\texttt{b} \in S$. (Legg merke til at `a` og `b` legges til på høyre side av s.) Vi sier at en streng i S er **`a`-redusert** dersom den ikke inneholder noen forekomster av `aa`. En `a`-redusert streng vil altså ikke inneholde to `a`-er ved siden av hverandre. For eksempel er `bbb`, `baba` og `abba` alle `a`-reduserte strenger, men `aa`, `baab` og `abbaabba` er *ikke* `a`-reduserte strenger. La f være funksjonen på S som «`a`-reduserer en streng», altså som tar en streng og som returnerer den samme strengen, men hvor enhver sammenhengende sekvens av `a`-er har blitt erstattet med nøyaktig én `a`. For eksempel vil $f(\texttt{aa}) = \texttt{a}$ og $f(\texttt{aabaaabb}) = \texttt{ababb}$.

(a) [1 poeng] Hva blir $f(\texttt{abbbaaa})$?

Funksjonen f kan defineres rekursivt. I de neste to deloppgavene skal du definere f rekursivt ved å ta utgangspunkt i hvordan S er induktivt definert.

(b) [1 poeng] Oppgi basissteget i definisjonen av f.

(c) [4 poeng] Oppgi rekursjonssteget i definisjonen av f.

La relasjonen $\sim$ være slik at $s \sim t$ dersom $f(s) = f(t)$. Dette blir en ekvivalensrelasjon. Du trenger ikke å vise dette. Husk at *ekvivalensklassen* til strengen s betegnes med $[s]$.

(d) [2 poeng] Hvilke strenger i $[\texttt{abab}]$ har nøyaktig lengde fem, det vil si har nøyaktig fem symboler?

(e) [2 poeng] Hvilke strenger i $[\texttt{aba}]$ har *maksimalt* lengde fem, det vil si har mellom null og fem symboler.

7 Naturlig deduksjon [10 poeng]

(a) [2 poeng] Hva må stå i boksene $\boxed{1}$ og $\boxed{2}$ for at følgende utledning i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Q]^1}{\boxed{1}}\,{\vee}\text{I} \qquad \neg(Q \vee \neg Q)}{\boxed{2}}\,{\to}\text{E}}{Q}\,\text{RAA}_1$$

(b) [4 poeng] Hva stå i boksene $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ og $\boxed{6}$ for at følgende bevis i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^2}{(Q \vee R)}\,{\wedge}\text{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^2}{\boxed{4}}\,\boxed{3} \qquad [Q]^1}{\bot}\,{\to}\text{E}}{R}\,\bot \qquad [R]^1}{\boxed{5}}\,{\vee}\text{E}_1}{((Q \vee R) \wedge \neg Q) \to R}\,\boxed{6}_2$$

Anta at vi legger til følgende slutningsregel i naturlig deduksjon:

$$\dfrac{P \qquad P \vee Q}{P \wedge Q}\,{\wedge}\text{I}$$

(c) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *sunn*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

(d) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *komplett*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

8 Strukturell induksjon [10 poeng]

Dersom f og g er operasjoner på en mengde A, og L er en liste over A, har vi at $\textsc{map}$ er rekursivt definert ved

$$(1)\ \textsc{map}(f\,,()) = () \quad \text{og} \quad (2)\ \textsc{map}(f\,,x :: L) = (f(x) :: \textsc{map}(f\,,L))$$

og at funksjonssammensetning er definert ved $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(a) [2 poeng] Hvis s er definert ved $s(x) = x+1$, altså funksjonen som legger til én, og t er definert ved $t(x) = 2 \cdot x$, altså funksjonen som ganger med to, hva er verdien til følgende uttrykk?

$$\textsc{map}(s\,,(1,2,3)) \qquad \textsc{map}(t\,,(1,2,3)) \qquad \textsc{map}(t \circ s\,,(1,2,3)) \qquad \textsc{map}(s \circ t\,,(1,2,3))$$

Anta at f og g er operasjoner på en mengde A. Du skal nå bevise at $\textsc{map}(g\,,\textsc{map}(f\,,L)) = \textsc{map}(g \circ f\,,L)$ holder for alle lister L over A ved strukturell induksjon.

(b) [2 poeng] Vis *basissteget*, og ikke utelat noen steg.

(c) [1 poeng] Forklar hva induksjonshypotesen er.

(d) [2 poeng] Forklar i detalj hva som må gjøres i induksjonssteget. Angi spesifikt hva som skal følge fra hva.

(e) [3 poeng] Gjennomfør induksjonssteget.