IN1150 – Logiske metoder

Eksamen høsten 2023

Tid: *Torsdag 23. november 2023 kl. 15:00–19:00*

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Større oppgaver [80 poeng]

1 Mengdelære

La $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ og $C = \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$.

(a) [2 poeng] Er følgende påstander sanne eller usanne?

(1) $A \subseteq B$ (2) $B \subseteq C$ (3) $A \in B$ (4) $B \in C$

(b) [4 poeng] Regn ut:

(1) $A \setminus B$ (2) $B \setminus A$ (3) $A \cup B$ (4) $B \cup C$

(c) [2 poeng] Regn ut $\mathcal{P}(A) \cup B$.

(d) [2 poeng] Skriv ned alle delmengdene til B.

2 Utsagnslogikk

La $M = \{P \to Q, \neg P \land Q\}$.

(a) [2 poeng] Er M oppfyllbar? Hvis M er oppfyllbar, gi en valuasjon som oppfyller M; hvis ikke, forklar hvorfor M ikke er oppfyllbar.

(b) [2 poeng] Er M falsifiserbar? Hvis M er falsifiserbar, gi en valuasjon som falsifiserer M; hvis ikke, forklar hvorfor M ikke er falsifiserbar.

Vi introduserer et nytt konnektiv $\uparrow$ hvor følgende tabell viser hvordan det nye konnektivet skal tolkes:

F	G	$(F \uparrow G)$
1	**1**	**0**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Du kan skrive **!** i besvarelsen din som et alternativ til symbolet $\uparrow$.

(c) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $F \uparrow G$ og som kun bruker konnektivene $\neg, \land, \lor$ og $\to$.

(d) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $\neg F$ og som kun bruker konnektivet $\uparrow$.

(e) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $F \land G$ og som kun bruker konnektivet $\uparrow$.

3 Ordspill

La $\mathcal{S}$ være mengden av ord over alfabetet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}, \texttt{f}\}$ med lengde fire. I denne oppgaven skal du spille et spill hvor målet er å gjette et hemmelig løsningsord $L \in \mathcal{S}$.

Du gjetter ved å velge et ord $G \in \mathcal{S}$. Deretter får du oppgitt resultatet $\textsc{res}(G)$ av gjetningen. Resultatet $\textsc{res}(G)$ er en bitstreng av lengde fire der det er `1` på posisjoner hvor G og L er like, og `0` på posisjoner hvor G og L er ulike. Her er to eksempler på bruk av funksjonen $\textsc{res}$, for to ulike løsningsord L:

$$\begin{array}{rcllll} G & = & \texttt{a} & \texttt{d} & \texttt{a} & \texttt{d} \\ L & = & \texttt{a} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{d} \\ \hline \textsc{res}(G) & = & \texttt{1} & \texttt{0} & \texttt{0} & \texttt{1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcllll} G & = & \texttt{b} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{a} \\ L & = & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{d} \\ \hline \textsc{res}(G) & = & \texttt{1} & \texttt{0} & \texttt{1} & \texttt{0} \end{array}$$

(a) [1 poeng] Hva er L dersom vi vet at $\textsc{res}(\texttt{abba}) = \texttt{1000}$ og $\textsc{res}(\texttt{ccdc}) = \texttt{0111}$?
(b) [2 poeng] Hvor mange ord er det i $\mathcal{S}$?
(c) [2 poeng] Hvor mange ord i $\mathcal{S}$ bruker ikke samme bokstav mer enn én gang?
(d) [2 poeng] Er $\textsc{res}$ injektiv? Begrunn svaret ditt kort.
(e) [2 poeng] Er $\textsc{res}$ surjektiv? Begrunn svaret ditt kort.
(f) [1 poeng] Er $\textsc{res}$ bijektiv? Begrunn svaret ditt kort.

4 Min og Max

La $\textsc{max}$ være funksjonen på naturlige tall som gir det største av de to tallene:

$$\textsc{max}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x > y \\ y, & \text{ellers} \end{cases}$$

Og la $\textsc{min}$ være funksjonen på naturlige tall som gir det minste av de to tallene:

$$\textsc{min}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x < y \\ y, & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) [1 poeng] Regn ut $\textsc{max}(\textsc{min}(10, 15), \textsc{min}(18, 11))$
(b) [2 poeng] Vis eller motbevis at følgende påstand holder for alle naturlige tall x og y:

$$x - \textsc{min}(x, y) = \textsc{max}(x, y) - y$$

(c) [2 poeng] La f være følgende funksjon på mengder av heltall:

$$f(M) = \{\textsc{max}(x, y) \mid x \in M, y \in M, x \neq y\}$$

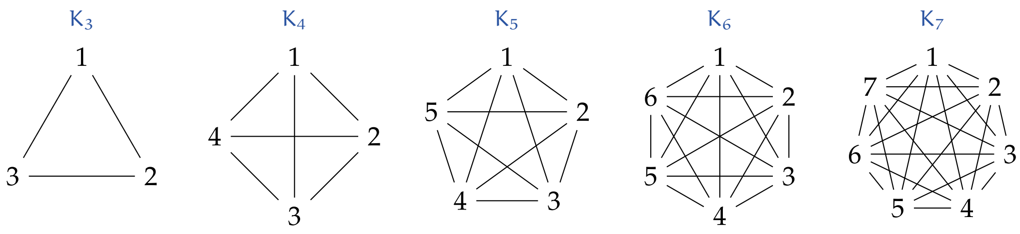
Regn ut hva $f(\{1, 2, 3\})$ blir.
(d) [2 poeng] La g være funksjonen som tar en mengde N med heltall og returnerer mengden med det minste elementet i N. For eksempel vil $g(\{1, 2, 3\}) = \{1\}$. Definer g kun ved hjelp av mengdeoperasjoner $(\cup, \cap, \setminus)$ og funksjonen f.
(e) [3 poeng] Gitt en mengde N med heltall, la L_N være $\leqslant$-relasjonen på N. Dersom $N = \{1, 2, 3\}$, vil

$$L_N = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}.$$

Definer L_N ved å bruke en mengdebygger, funksjonene $\textsc{min}$ og $\textsc{max}$ og relasjonen $\in$.

5 Komplette grafer

La K_n være den komplette grafen med $n \geqslant 1$ noder hvor nodene er nummerert fra 1 til n. Grafene K_3 til K_7 er tegnet under.



(a) [1 poeng] Oppgi mengden av kanter i K_3.
(b) [1 poeng] Hva er graden til nodene i K_n?
(c) [1 poeng] Hvor mange kanter er det totalt i K_n?
(d) [1 poeng] For hvilke n er K_n et tre?
(e) [3 poeng] For hvilke n har K_n en eulervei?
(f) [3 poeng] Vis at det finnes nøyaktig 12 forskjellige hamiltonsykler i K_5.

6 Førsteordens logikk

Gitt følgende signatur $\langle o, n; ; B, L, I, H, = \rangle$, hvor

- Bx tolkes som «x *er en by*»,
- Lx tolkes som «x *er et land*»,
- Ixy tolkes som «x *er inneholdt i* y»,
- Hxy tolkes som «x *er hovedstad i* y» og
- $=$ tolkes som vanlig likhet.

(a) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at o er en by, n er et land og o er inneholdt i n.
(b) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at alt som er en hovedstad i noe er en by og alt som har en hovedstad er et land.
(c) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at o er eneste hovedstad i n.
(d) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at n inneholder minst to byer.
(e) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at ingen land er inneholdt i et annet land.

I både denne og den neste oppgaven kan du bruke følgende alternativer, som er enklere å skrive, til de vanlige logiske symbolene:

Logisk symbol	**Alternativ**
$\wedge$	`/\`
$\vee$	`\/`
$\exists$	`E`
$\forall$	`A`
$\neg$	`-`
$\rightarrow$	`->`
$\models$	`|=`
$\Rightarrow$	`=>`
$\Leftrightarrow$	`<=>`

7 Tolkning i modeller

Gitt signaturen $\langle e, u; ; P, PP, O \rangle$, hvor alle relasjonene har aritet to, og la A være følgende aksiomer:

(1) $\forall x \forall y\, ((Pxy \wedge \neg Pyx) \rightarrow PPxy)$
(2) $\forall x \forall y\, (PPxy \rightarrow (Pxy \wedge \neg Pyx))$
(3) $\forall x Pxu$
(4) $\forall x \neg PPxe$
(5) $\forall x \forall y\, (\exists z\, (Pzx \wedge Pzy) \rightarrow Oxy)$
(6) $\forall x \forall y\, (Oxy \rightarrow \exists z\, (Pzx \wedge Pzy))$

(a) [2 poeng] Lag en modell som oppfyller formlene i A.

(b) [4 poeng] Vis at alle modeller $\mathcal{M}$ som oppfyller alle formlene i A, også oppfyller Peu. Beviset skal være detaljert og tydelig og anvende definisjonen av semantikk for første ordens logikk. Angi tydelig hva som følger fra hva i hvert steg.

(c) [4 poeng] Vis at i alle modeller $\mathcal{M}$ som oppfyller alle formlene i A, så er $O^{\mathcal{M}}$ symmetrisk.

8 Reverserte strenger

La $\textsc{rev}$ være funksjonen som *reverserer* strenger over alfabetet $\{0, 1\}$. Den er rekursivt definert slik:

$$\textsc{rev}(\Lambda) = \Lambda$$
$$\textsc{rev}(sx) = x\textsc{rev}(s)$$

der $x \in \{0, 1\}$ og $s \in \{0, 1\}^*$.

(a) [1 poeng] Bruk definisjonen av $\textsc{rev}$ og vis alle steg i utregningen for følgende uttrykk:

$$\textsc{rev}(001) = 100$$

(b) [2 poeng] Forklar hvorfor det første symbolet i en ikke-tom streng s vil være det siste symbolet i $\textsc{rev}(s)$, altså at $\textsc{rev}(xs) = \textsc{rev}(s)x$ for alle $x \in \{0, 1\}$ og for alle $s \in \{0, 1\}^*$.

(c) [3 poeng] Vis ved strukturell induksjon at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$ for alle strenger $s \in \{0, 1\}^*$. *Hint:* Du kan bruke at $\textsc{rev}(xs) = \textsc{rev}(s)x$ for alle $x \in \{0, 1\}$ og alle $s \in \{0, 1\}^*$.

(d) [4 poeng] Vis at $\textsc{rev}$ er bijektiv. *Hint:* Du kan bruke at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$.