Oppgaver til kapittel 17

17.1 (a) Ikke en partisjon, fordi unionen av alle elementene ikke er lik M.
(b) Dette er en partisjon av M.
(c) Ikke en partisjon – $\emptyset$ er en tom mengde
(d) Ikke en partisjon, fordi $\{4, 3\} \cap \{0, 3\} \neq \emptyset$.
(e) Kun en av disse er en partisjon. Man kan si at partisjonen i b) er en forfining av $\{\{0, 1, 2, 3, 4\}\}$.

17.2 (a) $\sim$ er refleksiv: ethvert tall er seg selv likt, og har dermed samme fortegn som seg selv.

$\sim$ er symmetrisk: hvis $a \sim b$, saa maa $b \sim a$, fordi relasjonen kun tar fortegnet i betrakning – rekkefoelgen spiller ingen rolle, naar begge har likt fortegn.

$\sim$ er transitiv: Dersom $a \sim b$ og $b \sim c$, saa har a, b, c samme fortegn. Hvis a er relatert til b fordi begge er negative, og b er relatert til c av samme grunn, foelger det noedvendigvis at a er relatert til c, ettersom de deler samme fortegn.

$\sim$ er en ekvivalensrelasjon, fordi den er transitiv, refleksiv og symmetrisk.
(b) Kvotientmengden av $\mathbf{Z}$ under $\sim$ er $\{[0], [-1]\}$. Dvs. at to ekvivalensklasser inngaar – en for de positive tallene og 0, en for de negative tallene.

17.3 (a) Det finnes seks slike partisjoner: $\binom{4}{2} = 6$
(b) $\gtrless$ -relasjonen er bare en overglorifisert $=$-relasjon – den spoer bare om to partisjoner av en mengde har lik kardinalitet. $=$ er transitiv, refleksiv og symmetrisk, dette er trivielt aa bevise. Det foelger at $\gtrless$ er en ekvivalensrelasjon.

17.4 (a) Ekvivalensklassen er mengden av alle partisjoner P av M som er slik at $|P| = 3$.
(b) Kvotientmengden av M under $\gtrless$ har kardinalitet 4. Det finnes fire ekvivalensklasser. En ekvivalensklasse er en annen ulik basert paa en klasses vilkaarlig valgte elements kardinalitet; den 'fineste' klassens elementer har alle kardinalitet 4. Den 'groveste' klassens elementer (det er kun ett element i denne) har kardinalitet 1.

Oppgaver til kapittel 18

18.1 (a) Dersom hver blomst er ulik, har han 8! forskjellige maater aa gjoere dette paa.
(b) $\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 560$

Han kan gjoere dette paa 560 forskjellige maater.
(c) $\binom{12}{2} \times \binom{10}{1} \times \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} = 3326400$

18.2 (a) $2^{10} = 1024$
(b) $2^{20} = 1048576$
(c) $\binom{10}{3} = 120$
(d) $2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 968$

18.3 (a) $3^{10} = 59049$

(b) $3^{20} = 3486784401$

(c) $\binom{10}{3} \times 2^7 = 15360$

(d) Dette er egentlig ikke saa komplisert, og minner om rhododendron-spoersmaalet. Strengen har lengde 10.

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{5} = 2520$$

18.4 (a) Det finnes tre slike partisjoner.

(b) Det finnes seks slike partisjoner.

(c) Dette er et interessant spoersmaal, som kan besvares paa ulike maater. Jeg tenkte slik: Hva er det egentlig vi spoer om. Jo, vi spoer om en partisjon med en lengde som er en mindre en den underliggende mengden. Hvordan oppnaar vi dette? Vi oppnaar dette ved aa gi en mengde i partisjonen kardinalitet lik 2. Hvorfor det? Jo, fordi da vil resten av mengdene i partisjonen ha kardinalitet lik 1. Saa hva er det vi spoer om? Jo, vi spoer om det foelgende: hvor mange maater kan vi velge to fra m? Og svaret er jo selvfoelgelig: $\binom{m}{2}$.