Oppgaver til kapittel 11

11.1 (a) Basissteget er aa vise at paastanden holder for $n = 0$

$f(0) = 0$ fra funksjonsdefinisjonen
$= 9 \cdot 0$

Paastanden holder for $n = 0$

(b) Anta at paastanden holder for et naturlig tall n, dvs. at

$f(n) = 9n$

Dette er induksjonshypotesen. Vi vil herfra vise at paastanden holder for $n + 1$

$f(n+1) = f(n) + 9$ fra funksjonsdefinisjonen
$= 9n + 9$ fra induksjonshypotesen
$= 9(n + 1)$ ved regning

Vi faar at $f(n+1) = 9(n+1)$. Ved induksjon foelger at paastanden holder for alle naturlige tall.

11.2 (a) Paastanden er at summen av alle partall opp til og med $2n$, hvor n er et naturlig tall, er lik $n(n + 1)$.

(b) Basissteget er aa vise at paastanden holder for $n = 0$

$2 \cdot 0 = 0$ ved regning
$= 0 \cdot (0 + 1)$

Paastanden holder for $n = 0$

11.3 (a) Induksjonshypotesen er aa anta at paastanden holder for et tall n, dvs. at

$0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

(b) Vi antar induksjonshypotesen. Herfra vil vi vise at paastanden holder for $k = n + 1$.

$0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2k$
$= 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n + 1)$ ved aa sette inn for k
$= n(n + 1) + 2(n + 1)$ ved induksjonshypotesen
$= n^2 + n + 2n + 2$ ved regning
$= n^2 + 3n + 2$ ved regning
$= (n + 1)(n + 2)$ ved andregradslikningen
$= (n + 1)((n + 1) + 1)$ ved regning
$= k(k + 1)$ ved definisjonen av k

Paastanden holder for $k = n+1$. Ved strukturell induksjon foelger at paastanden er sann for alle naturlige tall n.

11.4 Det presiseres aldri hva 'mye mindre' og 'bitte litt stoerre' betyr. Foelgelig vises det aldri at basissteget holder, det bare paastas. Det antas i induksjonshypotesen at paastanden holder for n, men det presiseres ikke at dette er *ett* vilkaarlig, naturlig tall. n kunne like saa godt vaert 999999, men da holder ikke paastanden.

Oppgaver til kapittel 12

12.1 (a) Vi begynner med aa definere en funksjon fra spraaket S til heltall, $\mathsf{LIK}(s)$, som gir en verdi basert paa antall $\mathtt{d}$-er og $\mathtt{b}$-er i strengen s.

(1) $\mathsf{LIK}(\Lambda) = 0$
(2) $\mathsf{LIK}(st) = \mathsf{LIK}(s) + 1$, hvis $t = \mathtt{d}$
(3) $\mathsf{LIK}(st) = \mathsf{LIK}(s) - 1$, hvis $t = \mathtt{b}$

Paastanden er at $\mathsf{LIK}(s) = 0$, for alle elementer s i spraaket S.

(b) Basissteget er aa vise at paastanden holder for den tomme strengen.

$\mathsf{LIK}(\Lambda) = 0$ fra punkt (1) i definisjonen til LIK

Paastanden holder for den tomme strengen.

12.2 (a) Induksjonshypotesen er antagelsen om at paastanden holder for x, en vilkaarlig streng i S, dvs at

$\mathsf{LIK}(x) = 0$

(b) Vi antar induksjonshypotesen. Herfra vil vi vise at paastanden holder for $\mathtt{b}x\mathtt{d}$, hvor x er den vilkaarlige strengen fra hypotesen.

$\mathsf{LIK}(\mathtt{b}x\mathtt{d}) = \mathsf{LIK}(\mathtt{b}x) + 1$ fra punkt (2) i definisjonen til LIK
$= (\mathsf{LIK}(\mathtt{b}) + 0) + 1$ fra induksjonshypotesen
$= ((\mathsf{LIK}(\Lambda) - 1) + 0) + 1$ fra punkt (3) i definisjonen til LIK
$= ((0 - 1) + 0) + 1$ fra punkt (1) i definisjonen til LIK
$= -1 + 1$
$= 0$

Vi ser at paastanden holder for $\mathtt{d}x\mathtt{b}$. Ved strukturell induksjon foelger at paastanden er sann for alle $x \in S$.

12.3 (a) Paastanden er at $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \Leftrightarrow F$, for alle F i den induktivt definerte mengden av alle utsagnslogiske formler.

(b) Basissteget er aa vise at paastanden holder for alle utsagnsvariabler. La P vaere en vilkaarlig utsagnsvariabel.

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(P))$
$= \mathsf{FLIP}(P)$ fra definisjonen til FLIP
$= P$
$= \mathsf{FLIP}(P)$

$= \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(P))$

Siden $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(P)) = P$, er $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(P))$ ekvivalent med P, saa paastanden holder for alle utsagnsvariabler.

12.4 (a) Induksjonshypotesen er aa anta at paastanden holder for de to vilkaarlige utsagnslogiske formlene A og B, dvs at

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(A)) \Leftrightarrow A$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(B)) \Leftrightarrow B$

(b) Induksjonssteget gaar ut paa aa vise at hvis induksjonshypotesen er sann, noe vi naa antar, saa holder paastanden ogsaa for de sammensatte formlene. Definisjonen av mengden av de utsagnslogiske formlene sier at hvis A er i denne mengden, saa er ogsa $\neg A$ det, og hvis A og B er i denne mengden, saa er ogsa $(A \circ B)$ det, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Ved tilfellet $F = \neg A$:

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F))$
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\neg A))$
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}(\neg \mathsf{FLIP}(A))$ ved definisjonen av FLIP
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}(\neg A)$ ved induksjonshypotesen
$\Leftrightarrow \neg \mathsf{FLIP}(A)$
$\Leftrightarrow \neg A$
$\Leftrightarrow F$

Tilsvarende gjoeres med $F = B$

Ved tilfellet $F = (A \circ B)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F))$
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}((A \circ B)))$ ved aa sette inn A og B
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}((\mathsf{FLIP}(B) \circ \mathsf{FLIP}(A)))$ ved definisjonen til FLIP
$\Leftrightarrow \mathsf{FLIP}((B \circ A))$ ved induksjonshypotesen
$\Leftrightarrow (\mathsf{FLIP}(A) \circ \mathsf{FLIP}(B))$ ved definisjonen til FLIP
$\Leftrightarrow (A \circ B)$
$\Leftrightarrow F$

Paastanden holder, og vi kan ved strukturell induksjon konkludere med at $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F))$ er ekvivalent med F, for alle utsagnslogiske formler F.