IN1150 – Logiske metoder

Eksamen høsten 2023 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 18. desember 2023

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.

Kommentar: Om sensur og karaktergivning: Det som er utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Den totale poengsummen brukes som veiledning for karakteren. En grov tommelfingerregel for karakteren er følgende.

Ca. 120 poeng (ca. 86 %): A
Ca. 100 poeng (ca. 71 %): B
Ca. 80 poeng (ca. 57 %): C
Ca. 60 poeng (ca. 43 %): D
Ca. 40 poeng (ca. 29 %): E

Merk at dette er *omtrentlige* grenser som vurderes og justeres i lys av oppgavesettets vanskelighetsgrad og form.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Kommentar: Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Disse er tilfeldig valgt fra en stor mengde av oppgaver. Poenggivningen er slik at det ikke er noen forskjell mellom ubesvart og feil svar. Hver oppgave teller ett poeng, og for å få den totale poengsummen for den første delen skalerer vi poengene med formelen $2 \cdot \max(n - 35, 0)$, hvor tallet n er antall spørsmål som er korrekt besvart, og setter maksimal poengsum til 60 poeng. Dette gjør det enklere å korrigere for gjetning. Hvis man gjetter helt tilfeldig på alle oppgavene får man i snitt null poeng. En gjetning er riktignok ofte ledet av en trent intuisjon, og det vil derfor som regel lønne seg å gjette. Poengsummen representerer på denne måten hvor mange spørsmål man faktisk vet det riktige svaret på.

Større oppgaver [80 poeng]

Kommentar: Den andre delen består av større oppgaver. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. En mer detaljert poenggivning er angitt for hver oppgave.

1 Mengdelære

La $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ og $C = \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$.

(a) [2 poeng] Er følgende påstander sanne eller usanne?

(1) $A \subseteq B$ (2) $B \subseteq C$ (3) $A \in B$ (4) $B \in C$

(1) Sann (2) Usann (3) Sann (4) Usann

(b) [4 poeng] Regn ut:

(1) $A \setminus B$ (2) $B \setminus A$ (3) $A \cup B$ (4) $B \cup C$

(1) $A \setminus B = \{a, b\} \setminus \{a, b, \{a, b\}\} = \emptyset$
(2) $B \setminus A = \{a, b, \{a, b\}\} \setminus \{a, b\} = \{\{a, b\}\}$
(3) $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\} = B$
(4) $B \cup C = \{a, b, \{a, b\}\} \cup \{a, b, c, \{a, b, c\}\} = \{a, b, c, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

(c) [2 poeng] Regn ut $\mathcal{P}(A) \cup B$.

$$\mathcal{P}(A) \cup B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \cup \{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

(d) [2 poeng] Skriv ned alle delmengdene til B.

$\emptyset$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{\{a, b\}\}$ $\{a, b\}$ $\{a, \{a, b\}\}$ $\{b, \{a, b\}\}$ $\{a, b, \{a, b\}\}$

Kommentar:

(a) Et halvt poeng per riktig svar.
(b) Ett poeng per riktig svar.
(c) To poeng for riktig svar. Dersom kun ett eller to elementer mangler så kan opptil ett poeng gis.
(d) To poeng for riktig svar. Dersom kun ett eller to elementer mangler så kan opptil ett poeng gis.

2 Utsagnslogikk

La $M = \{P \to Q, \neg P \land Q\}$.

(a) [2 poeng] Er M oppfyllbar? Hvis M er oppfyllbar, gi en valuasjon som oppfyller M; hvis ikke, forklar hvorfor M ikke er oppfyllbar.

> M er oppfyllbar, og oppfylles av valuasjonen som gjør P usann og Q sann.

(b) [2 poeng] Er M falsifiserbar? Hvis M er falsifiserbar, gi en valuasjon som falsifiserer M; hvis ikke, forklar hvorfor M ikke er falsifiserbar.

> M er falsifiserbar om det finnes en valuasjon som gjør begge formlene i M usanne. Valuasjonen som gjør P sann og Q usann falsifiserer både $P \to Q$ og $\neg P \land Q$, så M er falsifiserbar.

Vi introduserer et nytt konnektiv $\uparrow$ hvor følgende tabell viser hvordan det nye konnektivet skal tolkes:

F	G	$(F \uparrow G)$
1	**1**	**0**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Du kan skrive `!` i besvarelsen din som et alternativ til symbolet $\uparrow$.

(c) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $F \uparrow G$ og som kun bruker konnektivene $\neg, \land, \lor$ og $\to$.

> $F \uparrow G \Leftrightarrow \neg(F \land G)$.

(d) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $\neg F$ og som kun bruker konnektivet $\uparrow$.

> $\neg F \Leftrightarrow F \uparrow F$.

(e) [2 poeng] Finn en formel som er ekvivalent med formelen $F \land G$ og som kun bruker konnektivet $\uparrow$.

> $F \land G \Leftrightarrow \neg(F \uparrow G) \Leftrightarrow (F \uparrow G) \uparrow (F \uparrow G)$.

> **Kommentar:**
>
> (a) og (b): Ett poeng for riktig svar og ett poeng for gyldig begrunnelse.
> (c), (d), og (e): To poeng for riktig svar, null ellers. Det er ikke nødvendig å vise at formelen er korrekt.

3 Ordspill

La $\mathcal{S}$ være mengden av ord over alfabetet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ med lengde fire. I denne oppgaven skal du spille et spill hvor målet er å gjette et hemmelig løsningsord $L \in \mathcal{S}$.

Du gjetter ved å velge et ord $G \in \mathcal{S}$. Deretter får du oppgitt resultatet $\textsc{res}(G)$ av gjetningen. Resultatet $\textsc{res}(G)$ er en bitstreng av lengde fire der det er $\mathtt{1}$ på posisjoner hvor G og L er like, og $\mathtt{0}$ på posisjoner hvor G og L er ulike. Her er to eksempler på bruk av funksjonen $\textsc{res}$, for to ulike løsningsord L:

$$\begin{array}{rcllll} G & = & \mathtt{a} & \mathtt{d} & \mathtt{a} & \mathtt{d} \\ L & = & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{d} \\ \hline \textsc{res}(G) & = & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{0} & \mathtt{1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcllll} G & = & \mathtt{b} & \mathtt{c} & \mathtt{b} & \mathtt{a} \\ L & = & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{d} \\ \hline \textsc{res}(G) & = & \mathtt{1} & \mathtt{0} & \mathtt{1} & \mathtt{0} \end{array}$$

(a) [1 poeng] Hva er L dersom vi vet at $\textsc{res}(\mathtt{abba}) = \mathtt{1000}$ og $\textsc{res}(\mathtt{ccdc}) = \mathtt{0111}$?

> $L = \mathtt{acdc}$

(b) [2 poeng] Hvor mange ord er det i $\mathcal{S}$?

> $6^4 = 1296$

(c) [2 poeng] Hvor mange ord i $\mathcal{S}$ bruker ikke samme bokstav mer enn én gang?

> ${}^6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

(d) [2 poeng] Er $\textsc{res}$ injektiv? Begrunn svaret ditt kort.

> Nei, $\textsc{res}$ er ikke injektiv. For å vise dette trenger vi bare å finne to forskjellige ord g_1 og g_2 som oppfyller $\textsc{res}(g_1) = \textsc{res}(g_2)$. Gitt et vilkårlig løsningsord l, så kan vi generere g_1 og g_2 ved å bytte ut første bokstav i l med to av de andre bokstavene i alfabetet. Da får vi $\textsc{res}(g_1) = 0111 = \textsc{res}(g_2)$.

(e) [2 poeng] Er $\textsc{res}$ surjektiv? Begrunn svaret ditt kort.

> Ja. Funksjonen er surjektiv dersom alle elementer i verdimengden også er i bildemengden. Hvis vi antar at løsningsordet er $L = \mathtt{aaaa}$, så kan en vilkårlig bitstreng b av lengde 4 produseres ved å la G inneholde $\mathtt{a}$ på de posisjonene hvor b er $\mathtt{1}$ og $\mathtt{b}$ der b er $\mathtt{0}$.

(f) [1 poeng] Er $\textsc{res}$ bijektiv? Begrunn svaret ditt kort.

> Nei, fordi den ikke er injektiv.

Kommentar:

(a) Ett poeng for riktig svar, null ellers.
(b) To poeng for riktig svar, null ellers. 6^4 er tilstrekkelig svar.
(c) To poeng for riktig svar, null ellers. ${}^6P_4$ og $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ er begge tilstrekkelige svar.
(d) Ett poeng for riktig svar, og ett poeng for gyldig begrunnelse.
(e) Ett poeng for riktig svar, og ett poeng for gyldig begrunnelse.
(f) Et halvt poeng for riktig svar, og et halvt poeng for gyldig begrunnelse. Det gis ikke trekk for følgefeil fra de to forrige deloppgavene.

4 Min og Max

La $\textsc{max}$ være funksjonen på naturlige tall som gir det største av de to tallene:

$$\textsc{max}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x > y \\ y, & \text{ellers} \end{cases}$$

Og la $\textsc{min}$ være funksjonen på naturlige tall som gir det minste av de to tallene:

$$\textsc{min}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x < y \\ y, & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) [1 poeng] Regn ut $\textsc{max}(\textsc{min}(10,15), \textsc{min}(18,11))$

11

(b) [2 poeng] Vis eller motbevis at følgende påstand holder for alle naturlige tall x og y:

$$x - \textsc{min}(x,y) = \textsc{max}(x,y) - y$$

Påstanden holder. Om $x \leqslant y$ så blir ligningen $x - x = y - y$ som er sann. Om derimot $x > y$, så blir ligningen $x - y = x - y$ som også er sann.

(c) [2 poeng] La f være følgende funksjon på mengder av heltall:

$$f(M) = \{\textsc{max}(x,y) \mid x \in M, y \in M, x \neq y\}$$

Regn ut hva $f(\{1,2,3\})$ blir.

Mengden blir

$$\begin{aligned} f(M) &= \{\textsc{max}\langle 1,2\rangle, \textsc{max}\langle 1,3\rangle, \textsc{max}\langle 2,3\rangle, \textsc{max}\langle 2,1\rangle, \textsc{max}\langle 2,3\rangle, \textsc{max}\langle 3,1\rangle, \textsc{max}\langle 3,2\rangle\} \\ &= \{2,3\} \end{aligned}$$

(d) [2 poeng] La g være funksjonen som tar en mengde N med heltall og returnerer mengden med det minste elementet i N. For eksempel vil $g(\{1,2,3\}) = \{1\}$. Definer g kun ved hjelp av mengdeoperasjoner $(\cup, \cap, \setminus)$ og funksjonen f.

$g(N) = N \setminus f(N)$

(e) [3 poeng] Gitt en mengde N med heltall, la L_N være $\leqslant$-relasjonen på N. Dersom $N = \{1,2,3\}$, vil

$$L_N = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}.$$

Definer L_N ved å bruke en mengdebygger, funksjonene $\textsc{min}$ og $\textsc{max}$ og relasjonen $\in$.

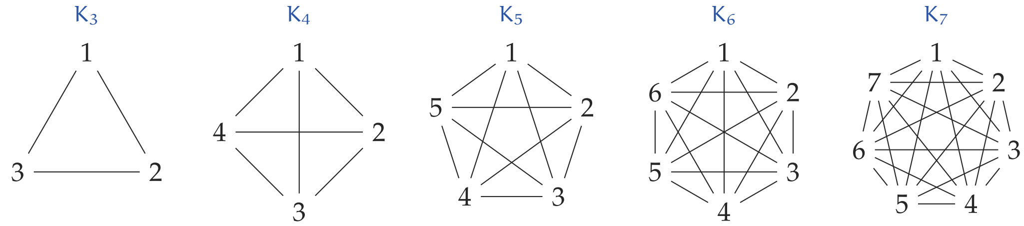
Under vises tre korrekte måter å definere L_N på:
$L_N = \{\langle \textsc{min}(x,y), \textsc{max}(x,y)\rangle \mid x \in N, y \in N\}$
$L_N = \{\langle x, \textsc{max}(x,y)\rangle \mid x \in N, y \in N\}$
$L_N = \{\langle \textsc{min}(x,y), y\rangle \mid x \in N, y \in N\}$

Kommentar:

(a) Ett poeng for riktig svar, null ellers.
(b) Her kreves et bevis for å få poeng. Et komplett bevis gir to poeng. Å kun si at påstanden holder gir null poeng. Det trekkes et halvt poeng for å glemme tilfellet hvor $x = y$.
(c) To poeng for riktig svar, null ellers. Utregningen er ikke nødvendig, så lenge svaret er riktig.
(d) To poeng for en riktig definisjon av g. Ett poeng kan gis for gode forsøk. Svar som $g(N) = \{N \setminus f(N)\}$ trekkes med 0.5 poeng.
(e) Tre poeng for riktig svar. Trekk gis om det antas at $N = \{1, 2, 3\}$, eller om $\in$ ikke er brukt, eller ved andre mindre mangler.

5 Komplette grafer

La K_n være den komplette grafen med $n \geqslant 1$ noder hvor nodene er nummerert fra 1 til n. Grafene K_3 til K_7 er tegnet under.



(a) [1 poeng] Oppgi mengden av kanter i K_3.

$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

(b) [1 poeng] Hva er graden til nodene i K_n?

Alle noder er nabo med alle andre noder, så alle nodene i K_n har grad $n - 1$.

(c) [1 poeng] Hvor mange kanter er det totalt i K_n?

Det er en kant mellom alle par av noder, så antal kanter totalt i K_n er $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(d) [1 poeng] For hvilke n er K_n et tre?

K_n er et tre for $n = 1$ og $n = 2$. For $n \geqslant 3$ vil det alltid finnes minst en sykel.

(e) [3 poeng] For hvilke n har K_n en eulervei?

En graf inneholder en eulervei om to eller ingen noder har odde grad. I K_n har alle nodene grad $n - 1$, så K_n har en eulervei med mindre n er et partall større enn 3.
Med andre ord: K_n inneholder en eulervei om n er odde eller $n = 2$.

(f) [3 poeng] Vis at det finnes nøyaktig 12 forskjellige hamiltonsykler i K_5.

Merk at siden det er kanter mellom alle par av noder i K_5, så kan hver permutasjon $p = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ av nodene i K_5 oversettes til hamiltonsykelen som går fra n_1 via n_2, n_3, n_4, og n_5 og tilbake til n_1. Det finnes $5! = 120$ permutasjoner av nodene i K_5, men det finnes ikke så mange hamiltonsykler fordi mange av permutasjonene oversettes til den samme hamiltonsykelen. For eksempel så representerer $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5, 1)$ og $(5, 4, 3, 2, 1)$ den samme hamiltonsykelen. Gitt en vilkårlig hamiltonsykel i K_5, så finnes det nøyaktig ti måter å representere den som en permutasjon fordi det er fem måter å velge den første noden i permutasjonen, og to måter å velge retningen vi traverserer sykelen på. Antall hamiltonsykler i K_5 blir dermed $120/10 = 12$.

Det er også mulig å vise at K_n har $(n-1)!/2$ hamiltonsykler for $n \geqslant 3$, for eksempel ved bruk av induksjon. Fra dette får vi at K_5 har 12 hamiltonsykler.

Kommentar:

(a) I utgangspunktet gis det ett poeng for riktig svar og null ellers. Å kun oppgi at det er tre kanter i K_3 gir ingen poeng. Det trekkes ikke for alternative, forståelige måter å representere kanter på.

(b) Ett poeng for riktig svar. Å oppgi $n(n-1)$, som er summen av gradene, gir 0.5 poeng.

(c) Ett poeng for riktig svar, null ellers. Å kun svare $\binom{n}{2}$ gir ett poeng. Å kun finne sammenhengen at $f(n+1) = f(n) + n$ gir 0 poeng.

(d) Et halvt poeng for $n = 1$ og et halvt poeng for $n = 2$.

(e) Det gis to poeng for å svare at n må være et oddetall og ett poeng for å inkludere $n = 2$. Det trekkes ett poeng for å blande oddetall og partall. Det gis 0.5 poeng for å finne en n slik at K_n har en eulervei.

(f) Alle gyldige bevis gir 3 poeng.
For et bevis basert på løsningsforslaget deles poengene ut på følgende måte:

- Ett poeng for å bruke eller oppgi at alle permutasjoner av nodene blir en gyldig sykel fordi grafen er komplett.
- 0.5 poeng for å bruke eller oppgi at en sykel har fem sykliske rotasjoner. (Dette er det samme som å anta start i en vilkårlig node.)
- 0.5 poeng for å bruke eller oppgi at en sykel har to retninger.
- Ett poeng for å formulere et gyldig bevis basert på punktene over.

For eksempel vil et bevis som ikke tar hensyn til retning og rotasjon komme frem til 120 sykler. Dette gir to poeng.
I ukomplette besvarelser som likevel viser forståelse kan det gis noen ekstra poeng: Et halvt poeng for å oppgi definisjonen av en hamiltonsykel. Et halvt poeng for å oppgi eksempler på hamiltonsykler.

6 Førsteordens logikk

Gitt følgende signatur $\langle o, n; ; B, L, I, H, = \rangle$, hvor

- Bx tolkes som «x *er en by*»,
- Lx tolkes som «x *er et land*»,
- Ixy tolkes som «x *er inneholdt i* y»,
- Hxy tolkes som «x *er hovedstad i* y» og
- $=$ tolkes som vanlig likhet.

(a) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at o er en by, n er et land og o er inneholdt i n.

$Bo \wedge Ln \wedge Ion$

(b) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at alt som er en hovedstad i noe er en by og alt som har en hovedstad er et land.

$\forall x \forall y\, (Hxy \to Bx \wedge Ly)$
$\forall x(\exists y Hxy \to Bx) \wedge \forall y(\exists x Hxy \to Ly)$
$\forall x \forall y(Hxy \to Bx) \wedge \forall y \forall x(Hxy \to Ly)$

(c) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at o er eneste hovedstad i n.

$Hon \wedge \forall x\, (Hxn \to x = o)$

(d) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at n inneholder minst to byer.

$\exists x \exists y\, (Bx \wedge By \wedge Ixn \wedge Iyn \wedge \neg(x = y))$

(e) [2 poeng] Skriv en førsteordens formel som uttrykker at ingen land er inneholdt i et annet land.

$\forall x \forall y((Lx \wedge Ly \wedge \neg(x = y)) \to \neg Ixy)$

I både denne og den neste oppgaven kan du bruke følgende alternativer, som er enklere å skrive, til de vanlige logiske symbolene:

Logisk symbol	Alternativ
$\wedge$	`/\`
$\vee$	`\/`
$\exists$	`E`
$\forall$	`A`
$\neg$	`-`
$\to$	`->`
$\models$	`|=`
$\Rightarrow$	`=>`
$\Leftrightarrow$	`<=>`

Kommentar: I hver deloppgave gis det to poeng for riktig formel. Det skal trekkes for alle mangler, men ved små mangler bør det fortsatt gis litt poeng.

7 Tolkning i modeller

Gitt signaturen $\langle e, u; ; P, PP, O\rangle$, hvor alle relasjonene har aritet to, og la A være følgende aksiomer:

(1) $\forall x \forall y\, ((Pxy \wedge \neg Pyx) \to PPxy)$
(2) $\forall x \forall y\, (PPxy \to (Pxy \wedge \neg Pyx))$
(3) $\forall x Pxu$
(4) $\forall x \neg PPxe$
(5) $\forall x \forall y\, (\exists z\, (Pzx \wedge Pzy) \to Oxy)$
(6) $\forall x \forall y\, (Oxy \to \exists z\, (Pzx \wedge Pzy))$

(a) [2 poeng] Lag en modell som oppfyller formlene i A.

Det finnes mange modeller som oppfyller alle formlene i A. Her er to av dem:

(1) La $|\mathcal{M}| = \{0,1\}$, $e^{\mathcal{M}} = 0$, $u^{\mathcal{M}} = 1$, $P^{\mathcal{M}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$, $PP^{\mathcal{M}} = \{\langle 0,1\rangle\}$, og $O^{\mathcal{M}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$.

(2) La $|\mathcal{M}| = \{0\}$, $e^{\mathcal{M}} = 0$, $u^{\mathcal{M}} = 0$, $P^{\mathcal{M}} = \{\langle 0,0\rangle\}$, $PP^{\mathcal{M}} = \emptyset$, og $O^{\mathcal{M}} = \{\langle 0,0\rangle\}$.

(b) [4 poeng] Vis at alle modeller $\mathcal{M}$ som oppfyller alle formlene i A, også oppfyller Peu. Beviset skal være detaljert og tydelig og anvende definisjonen av semantikk for første ordens logikk. Angi tydelig hva som følger fra hva i hvert steg.

Anta at $\mathcal{M}$ er en vilkårlig modell som oppfyller formlene i A. Da vil $\mathcal{M} \models \forall x Pxu$. Altså vil $\langle x, u^{\mathcal{M}}\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ for alle $x \in |\mathcal{M}|$. Naturligvis vil $e^{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$, så $\langle e^{\mathcal{M}}, u^{\mathcal{M}}\rangle \in P^{\mathcal{M}}$, og dermed $\mathcal{M} \models Peu$. Ettersom $\mathcal{M}$ var vilkårlig vil dette holde for alle modeller av A, og dermed kan vi konkludere med $A \models Peu$.

(c) [4 poeng] Vis at i alle modeller $\mathcal{M}$ som oppfyller alle formlene i A, så er $O^{\mathcal{M}}$ symmetrisk.

Anta at $\mathcal{M}$ er en vilkårlig modell som oppfyller alle formlene i A. Vi må vise at for alle $a, b \in |\mathcal{M}|$ så vil $\langle a, b\rangle \in O^{\mathcal{M}}$ implisere $\langle b, a\rangle \in O^{\mathcal{M}}$. Velg derfor to vilkålige $a, b \in |\mathcal{M}|$. Da vil

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models O\bar{a}\bar{b} &\Rightarrow \text{det finnes en } c \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models P\bar{c}\bar{a} \wedge P\bar{c}\bar{b} \text{ (fra aksiom 6)} \\
&\Rightarrow \text{det finnes en } c \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models P\bar{c}\bar{b} \wedge P\bar{c}\bar{a} \\
&\Rightarrow \mathcal{M} \models O\bar{b}\bar{a} \text{ (fra aksiom 5)}
\end{aligned}$$

Siden a og b var vilkårlig valgt vil dette gjelde for alle par av elementer i $|\mathcal{M}|$, og $O^{\mathcal{M}}$ er dermed symmetrisk.

Kommentar:

(a) 1 poeng for å lage en gyldig modell, 1 poeng for at modellen er riktig.
(b) 1 poeng per hovedsteg i beviset. -2 for riktig men uformell argumentasjon
(c) 1 poeng per hovedsteg i beviset. -2 for riktig men uformell argumentasjon

8 Reverserte strenger

La REV være funksjonen som *reverserer* strenger over alfabetet $\{0, 1\}$. Den er rekursivt definert slik:

$$\begin{aligned}
\text{REV}(\Lambda) &= \Lambda \\
\text{REV}(sx) &= x\text{REV}(s)
\end{aligned}$$

der $x \in \{0, 1\}$ og $s \in \{0, 1\}^*$.

(a) [1 poeng] Bruk definisjonen av REV og vis alle steg i utregningen for følgende uttrykk:

$$\text{REV}(001) = 100$$

$$\text{REV}(001) = 1\text{REV}(00) = 10\text{REV}(0) = 100\text{REV}(\Lambda) = 100\Lambda = 100$$

(b) [2 poeng] Forklar hvorfor det første symbolet i en ikke-tom streng s vil være det siste symbolet i $\textsc{rev}(s)$, altså at $\textsc{rev}(xs) = \textsc{rev}(s)x$ for alle $x \in \{0, 1\}$ og for alle $s \in \{0, 1\}^*$.

Funksjonen vil rekursivt flytte symboler fra slutten av strengen til begynnelsen. Når et symbol flyttes til begynnelsen så flyttes de resterende symbolene mot slutten. Det første symbolet i strengen vil flyttes mot slutten helt til resten av strengen er reversert, og ender opp som siste symbol i strengen.

(c) [3 poeng] Vis ved strukturell induksjon at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$ for alle strenger $s \in \{0, 1\}^*$. *Hint:* Du kan bruke at $\textsc{rev}(xs) = \textsc{rev}(s)x$ for alle $x \in \{0, 1\}$ og alle $s \in \{0, 1\}^*$.

Basissteget Observer at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(\Lambda)) = \textsc{rev}(\Lambda) = \Lambda$.
Induksjonshypotese Anta at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$ for en vilkårlig streng $s \in \{0, 1\}^*$.
Induksjonssteget Vi må nå vise at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(sx)) = sx$ der $x \in \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}
\textsc{rev}(\textsc{rev}(sx)) &= \textsc{rev}(x\textsc{rev}(s)) && \text{Per definisjon av rekursjonssteget} \\
&= \textsc{rev}(\textsc{rev}(s))x && \text{Per egenskapen i oppgave (b)} \\
&= sx && \text{Per induksjonshypotesen}
\end{aligned}$$

Konklusjon Ved strukturell induksjon har vi vist at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$ for alle $s \in \{0, 1\}^*$.

(d) [4 poeng] Vis at $\textsc{rev}$ er bijektiv. *Hint:* Du kan bruke at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$.

$\textsc{rev}$ er bijektiv dersom den både er injektiv og surjektiv.

Injektiv Anta at $s, t, u \in \{0, 1\}^*$ og at $\textsc{rev}(s) = u$ og $\textsc{rev}(t) = u$. Fra forrige deloppgaver vet vi at $\textsc{rev}(u) = \textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$ og at $\textsc{rev}(u) = \textsc{rev}(\textsc{rev}(t)) = t$. Fordi $\textsc{rev}$ er en funksjon, så må også $s = t$, altså er $\textsc{rev}$ injektiv.

Surjektiv Anta at s er en vilkårlig streng i $\{0, 1\}^*$. Dersom det finnes en streng $t \in \{0, 1\}^*$ slik at $\textsc{rev}(t) = s$, så er $\textsc{rev}$ surjektiv. Hvis $t = \textsc{rev}(s)$ så er $\textsc{rev}(t) = \textsc{rev}(\textsc{rev}(s))$, og fra forrige deloppgave vet vi at $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$. Altså finnes det en streng t slik at $\textsc{rev}(t) = s$, nemlig $t = \textsc{rev}(s)$, og vi kan konkludere med at $\textsc{rev}$ er surjektiv.

Bijektiv Siden $\textsc{rev}$ både er injektiv og surjektiv er den også bijektiv.

Alternativ bevis Et alternativt bevis tar utgangspunkt i at en funksjon $f : A \to B$ er bijektiv hvis og bare hvis den har en inversfunksjon $f^{-1} : B \to A$ slik at $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle x. Funksjonen $\textsc{rev}$ er *sin egen invers*, fordi $\textsc{rev}(\textsc{rev}(s)) = s$, og da må den også være en bijeksjon.

Kommentar:

(a) Alle steg skal være med for å gi full pott.
(b) Et bevis er ikke nødvendig i denne oppgaven. Gyldige forklaringer gis to poeng.
(c) Ett poeng for et gyldig basissteg og to poeng for et gyldig induksjonssteg.
(d) I denne oppgaven kreves et gyldig bevis. Det kan gis 1.5 poeng for å vise at $\textsc{rev}$ er injektiv, 1.5 poeng for å vise at $\textsc{rev}$ er surjektiv, og ett poeng for å konkludere med at $\textsc{rev}$ er bijektiv. Det gis ingen poeng for å kun gjengi definisjonen av en bijektiv funksjon.