IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2024

Tid: *Fredag 14. juni 2024 kl. 09:00–13:00*

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.
- En oversikt over symboler er vedlagt.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Større oppgaver [80 poeng]

1 Mengdelære [10 poeng]

La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 8\}$ og $C = \{1, \{2, 3, 5\}\}$.

(a) [2 poeng] Regn ut:

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup B \cup C$ (iii) $B \cap C$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$

(b) [4 poeng] Regn ut:

(i) $\mathcal{P}(A)$
(ii) $\mathcal{P}(\emptyset)$
(iii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
(iv) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))|$

Merk at (iv) kun ber om *kardinaliteten* til $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

(c) [4 poeng] Finn uttrykk, som kun bruker mengdene A, B og C, sammen med operasjonene snitt, union og differanse, som gir følgende mengder:

(i) $\{1\}$
(ii) $\{0, 2, 3, 4, 8\}$
(iii) $\{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$
(iv) $\{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$

2 Utsagnslogikk [10 poeng]

Vi definerer de utsagnslogiske formlene F, G og H på følgende måte, hvor A, B og C er utsagnsvariabler:

- F står for $(A \vee \neg B)$,
- G står for $(B \wedge C)$ og
- H står for $(B \rightarrow C)$.

(a) [2 poeng] Finn én valuasjon av A, B og C som gjør alle formlene F, G og H *sanne*.

(b) [2 poeng] Finn én valuasjon av A, B og C som gjør formlene F, G og H *usanne*.

(c) [3 poeng] Vis at G *ikke* er en logisk konsekvens av H.

(d) [3 poeng] Vis at formelen $G \wedge \neg H$ er en *kontradiksjon*.

3 Formelle språk og grammatikker [10 poeng]

I denne oppgaven vil alle språk være over alfabetet $\{a, b\}$.

La følgende grammatikk uttrykke språket $\mathcal{A}$. Startsymbolet er som vanlig S.

$$
\begin{aligned}
S &\to aS \mid Sbb \mid T \\
T &\to aa \mid b
\end{aligned}
$$

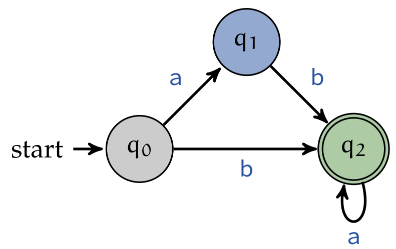
(a) [1 poeng] Gi en utledning av strengen abbb. Vis hvert ledd i utledningen.
(b) [1 poeng] Gi en utledning av strengen aab Vis alle leddene i utledningen.

Språket $\mathcal{B}$ er beskrevet av det regulære uttrykket `a*(bb)*`.

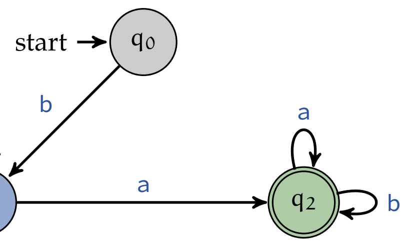
(c) [2 poeng] Finn en streng av lengde tre som er med i $\mathcal{A}$, men ikke med i $\mathcal{B}$.
(d) [2 poeng] Finn en streng av lengde tre som er med i $\mathcal{B}$, men ikke med i $\mathcal{A}$.

For hver av de endelige tilstandsmaskinene nedenfor, finn et regulært uttrykk som beskriver det samme språket som tilstandsmaskinene.

(e) [2 poeng]



(f) [2 poeng]



4 Førsteordens logikk [10 poeng]

Kvantifiserte utsagn.

Anta at T, F og M er relasjonsymboler med tolkningene:

- $\mathsf{T}x$ tolkes som at *x er en trekant*.
- $\mathsf{F}x$ tolkes som at *x er en firkant*.
- $\mathsf{M}xy$ tolkes som at *x er mindre enn y*.

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn:

(a) [2 poeng] Det finnes ikke en firkant som også er en trekant.
(b) [2 poeng] Alle firkanter er mindre enn alle trekanter.
(c) [2 poeng] Det finnes ikke en trekant som er mindre enn alle firkanter.

La domenet D være $\{a, b\}$. Vi definerer formlene G og H, på følgende måte, der S har aritet én, og T har aritet to.

- Formelen G er $\exists x(\mathsf{S}x \land \forall y \mathsf{T}xy)$.
- Formelen H er $\forall x(\mathsf{S}x \land \exists y \mathsf{T}xy)$.

(d) [2 poeng] Finn en tolkning av S og T som gjør både G og H usanne.
(e) [2 poeng] Lag en tolkning av S og T som viser at G *ikke* er en logisk konsekvens av H.

5 Telle strenger og funksjoner [10 poeng]

La $\mathcal{S}$ være mengden strenger over alfabetet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}$ av nøyaktig lengde åtte.

(a) [1 poeng] Hvor mange forskjellige strenger er det i $\mathcal{S}$?
(b) [2 poeng] Hvor mange strenger i $\mathcal{S}$ har ingen $\texttt{b}$-er?
(c) [3 poeng] Hvor mange strenger i $\mathcal{S}$ inneholder nøyaktig to forekomster av $\texttt{a}$-er?

Vi skal nå telle antall funksjoner mellom A og en annen mengde.

(d) [1 poeng] Hvor mange bijektive funksjoner fra A til A er det?
(e) [1 poeng] Hvor mange injektive funksjoner fra A til $\{0, 1\}$ er det?
(f) [2 poeng] Hvor mange surjektive funksjoner fra A til $\{0, 1\}$ er det?

6 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner [10 poeng]

Vi ser nå på formler som kun bruker utsagnslogiske variablene P og Q. Husk at to formler F og G er logisk ekvivalente dersom de har samme sannhetsverdi under enhver valuasjon. Logisk ekvivalens $\Leftrightarrow$ er en *evkivalens-relasjon* som relaterer logisk ekvivalente formler. Ekvivalensklassen til F, notert $[\mathsf{F}]$, angir mengden av formler som er logisk ekvivalent med F.

(a) [1 poeng] Gi en formel F slik at $\mathsf{F} \in [(\neg \mathsf{Q} \vee \mathsf{P})]$.

(b) [1 poeng] Gi en formel F slik at $\mathsf{F} \notin [(\neg \mathsf{Q} \vee \mathsf{P})]$.

(c) [4 poeng] Vis at det er uendelig mange elementer i hver ekvivalensklasse av $\Leftrightarrow$.

(d) [4 poeng] Hvor mange ekvivalensklasser har $\Leftrightarrow$? Husk at vi kun ser på formler med to utsagnslogiske variabler P og Q.

7 Rekursivt definerte funksjoner og algebra [10 poeng]

La alfabetet M være lik $\{a, b\}$, og la $A : M^* \to M^*$ være funksjonen som fjerner alle instanser av a-er i en streng. Vi kan definere A rekursivt som:

$$
\begin{aligned}
A(\Lambda) &= \Lambda \\
A(sa) &= A(s) \\
A(sb) &= A(s)b
\end{aligned}
$$

der $s \in M^*$.

(a) [1 poeng] Regn ut $A(aba)$ ved hjelp av den rekursive definisjonen. Vis alle stegene i utregningen.
(b) [2 poeng] Forklar med ord hvorfor funksjonen A er idempotent.

Vi definerer også funksjonen R til å bytte a-er og b-er i en streng. Vi kan definerer R rekursivt ved:

$$
\begin{aligned}
R(\Lambda) &= \Lambda \\
R(sa) &= R(s)b \\
R(sb) &= R(s)a
\end{aligned}
$$

der $s \in M^*$.

(c) [1 poeng] Regn ut $R(aba)$ ved hjelp av den rekursive definisjonen. Vis alle stegene i utregningen.
(d) [2 poeng] Hva er den inverse funksjonen til R? Begrunn svaret kort.

Husk at identitetsfunksjonen $\mathtt{id}_X$ på en mengde X er definert slik at $\mathtt{id}_X(x) = x$ for alle $x \in X$.

(e) [4 poeng] Vis at dersom en funksjon $f : M^* \to M^*$ er injektiv og idempotent, så er f lik identitetsfunksjonen $\mathtt{id}_{M^*}$.

8 Strukturell induksjon [10 poeng]

La R og A være definert fra forrige oppgave. Selv om du ikke har svart på forrige oppgave kan du svare på denne. Vi definerer nå også $B : M^* \to M^*$ til å fjerne alle forekomster av $\mathtt{b}$-er i en streng. Vi kan definere B rekursivt til å være:

$$B(\Lambda) = \Lambda$$
$$B(s\mathtt{a}) = B(s)\mathtt{a}$$
$$B(s\mathtt{b}) = B(s)$$

der $s \in M^*$.

(a) [1 poeng] Regn ut $B(R(\mathtt{bab}))$. Du trenger *ikke* å vise alle stegene.
(b) [1 poeng] Regn ut $R(A(\mathtt{bab}))$. Du trenger *ikke* å vise alle stegene.

Vi skal nå vise med strukturell induksjon at $B(R(s)) = R(A(s))$ for alle $s \in M^*$.

(c) [1 poeng] Utfør basissteget i induksjonsbeviset. Vis alle steg.
(d) [1 poeng] Forklar hva induksjonshypotesen er.
(e) [2 poeng] Forklar i detalj hva som skal vises i induksjonsteget. Vis hva som skal følge av hva.
(f) [4 poeng] Gjennomfør induksjonssteget i beviset.