Oppgaver til kapittel 1

1.2 $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{2, 4\}$

Oppgaver til kapittel 2

2.1 (a) $(E \to S)$
(b) $(S \to E)$
(c) $(E \land \neg S)$
(d) $(\neg E \to S) \land (S \to \neg E)$

Oppgaver til kapittel 3

3.2 Formelen i a) er ekvivalent med formelen i d). Formelen i b) er ekvivalent med formelen i e). Formelen i c) er ekvivalent med formelen i f).

a) er ekvivalent med d) fordi a) kun er sann i tilfellet hvor P ikke er sann, eller Q og R er sanne, etter reglene for $\to$-formler. Etter reglene for $\neg$-formler faar vi at d) er ekvivalent med $\neg P \lor (Q \land R)$ – ikke P eller Q og R, som jo er hva vi beskrev for a).

e) er ekvivalent med b) fordi e) kun er sann i tilfellet hvor $P \land Q$ ikke er sann, eller R er sann, etter reglene for $\to$-formler. $\neg(P \land Q)$ er ekvivalent med $(\neg P \lor \neg Q)$, etter De Morgans lover. Ved videre utledning faar vi $((\neg P \lor \neg Q) \lor R)$, som er identisk med b).

Oppgaver til kapittel 4

4.3 (a) For at alle uttrykkene i mengden av argumenter skal vaere sanne, holder det at C og B er sanne. Hvis C er sann, har det ikke noe aa si i uttrykket $(A \to C)$ om hvorvidt A er sann eller ei. For $(A \lor B)$ vet vi allerede at B maa vaere sann. Mengden av premisser kan oppfylles for valuasjonen som gjoer B og C sanne, men A usann. Isaafall er ikke A en logisk konsekvens av mengden, og **argumentet holder ikke**.
(b) Gitt premisset $(A \land C)$, maa A og C vaere sanne. For premisset $(C \to B)$, saa lenge B er sann, er uttrykket sant. Hver gang uttrykkene i mengden av premisser er sanne samtidig, er ogsaa konklusjonen sann. **Argumentet holder**.

Oppgaver til kapittel 5

5.4 Anta for motsigelse at $(P \to (Q \to P))$ ikke er en tautalogi. Det betyr at det finnes en valuasjon v som falsifiserer uttrykket. Isaafall maa v gjoere P sann, og $(Q \to P)$ usann, for det er slik $\to$-formler tolkes. For at $(Q \to P)$ skal vaere usann, maa Q vaere sann, og P usann, jamfoer reglene for implikasjon. Men dette er en motsigelse, for vi har allerede slaatt fast at v maa gjoere P sann. P kan ikke vaere baade sann og usann samtidig. Paastanden om at uttrykket er en tautalogi, er gyldig; den kan ikke vaere usann.

Oppgaver til kapittel 6

6.3 (a) $R = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 1, 2 >, < 2, 1 >\}$

(b) $R = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >\}$

(c) $R = \emptyset$. Teknisk sett er det tomme settet irrefleksivt fordi det ikke finnes noen $x \in \{1, 2, 3\}$ slik at $< x, x >$ er med. Det er ogsaa symmetrisk og transitiv, fordi "hvisdelen av disse kriteriene, aldri blir sann.

(d) $R = \{< 1, 2 >, < 2, 1 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >< 1, 1 >\}$

Oppgaver til kapittel 7

7.1 (a) Dette er ikke en funksjon, fordi $< 3, x >$ mangler, hvor $x \in T$.

(b) Dette er en funksjon som hverken er injektiv eller surjektiv, fordi alle elementene i S kun trefferett element i T, og verdimengden T bestaar av flere elementer enn dette ene elementet.

(c) Dette er en injektiv funksjon, fordi hvert element i S svarer til et unikt element i T. Den kan ikke vaere surjektiv, for det er flere elementer i T, enn i S.

(d) Dette er ikke en funksjon, fordi $< 3, c >$ og $< 3, b >$ inngaar i relasjonen, men $c \neq b$.

7.4 (a) $Z((\neg P \land \neg Q), \neg\neg R) = ((\neg P \land \neg Q) \land \neg\neg R)$
$Z((R \lor \neg P), (P \land (P \land R))) = ((R \lor \neg P) \land (P \land (P \land R)))$

(b) Vi ser kun paa formelens syntaks i Z. Derfor vil $(F_1 \land G_1) = (F_2 \land G_2)$ noedvendigvis bety at $F_1 = F_2$ og $G_1 = G_2$, ettersom $(Q \land P) \neq (P \land Q)$, for alle formler Q og P, syntaktisk sett. To par formler vil derfor aldri gi samme verdi fra Z. Z er injektiv.

(c) Bildemengden til Z er mengden av alle utsagnslogiske formler paa formen $(F \land G)$, hvor F og G er plassholdere for utsagnslogiske formler.

(d) Nei, Z er ikke en surjektiv funksjon, fordi $V_Z = U$ og bildemengden til Z, $Z[U \times U]$ er mengden av alle utsagnslogiske formler paa formen $(F \land G)$. $Z[U \times U] \neq U$. Mao.: alle uttrykk som ikke er paa den gitte formen, blir ikke truffet"av funksjonen.

Oppgaver til kapittel 8

8.2 (a) At $x \in \overline{A \cup B}$ gir oss det foelgende: $x \notin A \land x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \land x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dermed kan vi med sikkerhet konkludere med at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) At $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ betyr per definisjon at $x \in \overline{A} \land x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \notin A \land x \notin B$. Ettersom x hverken er element i A eller B, har vi at $x \in \overline{A \cup B}$. Dermed kan vi med sikkerhet fastslaa at $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

(c) Siden x er et vilkaarlig element som hverken er i A eller B, og $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ og $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, maa $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Oppgaver til kapittel 9

9.1 (a) $R \cup \{\langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

(b) $R \cup \{\langle b, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, a\rangle\}$

Oppgaver til kapittel 10

10.3 Basissteg: $b(0) = 1 \wedge b(1) = 0$

Rekursjonssteg: $b(s1) = b(s)0 \wedge bs(0) = b(s)1$

10.4 Basissteg: $W(P) = 0$, for alle utsagnsvariabler P.

Rekursjonssteg: $W(\neg P) = P$

$W(P \wedge Q) = W(P) + W(Q) + 1$

$W(P \circ Q) = W(P) + W(Q)$, hvor $\circ \in \{\vee, \rightarrow\}$

Oppgaver til kapittel 11

11.2 (a) Paastanden er at summen av alle partall opp til og med $2n$, hvor n er et naturlig tall, er lik $n(n+1)$.

(b) Basissteget er aa vise at paastanden holder for $n = 0$

$2 \cdot 0 = 0$ ved regning
$= 0 \cdot (0+1)$

Paastanden holder for $n = 0$

11.3 (a) Induksjonshypotesen er aa anta at paastanden holder for et tall n, dvs. at

$0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

(b) Anta induksjonshypotesen. Vi vil vise at paastanden holder for $k = n + 1$, altsaa at $0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2k = k(k+1)$

$0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2k$
$= 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1)$ ved aa sette inn for k
$= n(n+1) + 2(n+1)$ ved induksjonshypotesen
$= n^2 + n + 2n + 2$ ved regning
$= n^2 + 3n + 2$ ved regning
$= (n+1)(n+2)$ ved andregradslikningen
$= (n+1)((n+1)+1)$ ved regning
$= k(k+1)$ ved definisjonen av k

Paastanden holder for $k = n+1$; vi ser at hoeyresiden er lik venstresiden. Ved induksjon foelger at paastanden er sann for alle naturlige tall n.

Oppgaver til kapittel 12

12.3 (a) Paastanden er at $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{F})) \Leftrightarrow \mathsf{F}$, for alle F i den induktivt definerte mengden av alle utsagnslogiske formler.

(b) Basissteget er aa vise at paastanden holder for alle utsagnsvariabler. La P vaere en vilkaarlig utsagnsvariabel.

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{P}))$
$= \mathsf{FLIP}(\mathsf{P})$ fra definisjonen til FLIP
$= \mathsf{P}$
$= \mathsf{FLIP}(\mathsf{P})$
$= \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{P}))$

Siden $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{P})) = \mathsf{P}$, er $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{P}))$ ekvivalent med P, saa paastanden holder for alle utsagnsvariabler.

12.4 (a) Induksjonshypotesen er aa anta at paastanden holder for to gitte utsagnslogiske formler F og G, altsaa at

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{F})) \Leftrightarrow \mathsf{F}$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{G})) \Leftrightarrow \mathsf{G}$

(b) Induksjonssteget er aa vise at hvis paastanden er sann for F og G, saa er den sann for

$\neg\mathsf{F}$ og $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, altsaa at

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\neg\mathsf{F})) \Leftrightarrow \neg\mathsf{F}$

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})))$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Ved tilfellet $\neg\mathsf{F}$:

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\neg\mathsf{F}))$
$= \mathsf{FLIP}(\neg\mathsf{FLIP}(\mathsf{F}))$ ved def.
$= \neg\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{F}))$ ved def.
$\Leftrightarrow \neg\mathsf{F}$ ved IH
Paastanden holder for $\neg\mathsf{F}$

Ved tilfellet $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})))$
$= \mathsf{FLIP}((\mathsf{FLIP}(\mathsf{G}) \circ \mathsf{FLIP}(\mathsf{F})))$ ved def.
$= (\mathsf{FLIP}((\mathsf{FLIP}(\mathsf{F})) \circ \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\mathsf{G}))))$ ved def.
$\Leftrightarrow (\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ ved IH
Paastanden holder for $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Ved strukturell induksjon foelger at paastanden holder for alle utsagnslogiske formler.