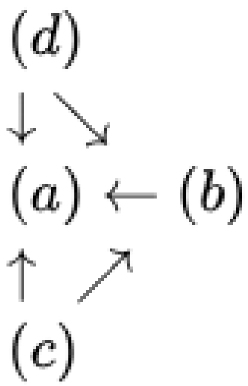

Figur 1: Oppgave 5.2

Oppgaver til kapittel 5

5.1 (a) Usann. Moteksempel: $81 > 55$, og 81 er et oddetall, da det ikke er delelig med 2. 81 er heller ikke et primtall, da det er delelig med 9.

(b) Anta for motsigelse at alle formler F som er slik at $\neg F$ er en kontradiksjon, er falsifiserbare. At F er falsifiserbar, betyr at F for en gitt valuasjon v, er usann. For den samme valuasjonen v vil $\neg F$ vaere sann, for det er slik $\neg$ tolkes. Dette er er en motsigelse. Vi gikk ut ifra at $\neg F$ var en kontradiksjon, som altsaa ikke kan oppfylles. Paastanden er sann; den kan ikke vaere usann.

(c) Usann. $\top$ er en tautalogi som ikke har noen tautalogier.

(d) Usann. Moteksempel: La F vaere slik at $F = P$. Dermed har vi at $\neg F = \neg P$. F oppfylles av valuasjonen som gjoer P sann, og $\neg F$ oppfylles av valuasjonen som gjoer P usann. Dermed er hverken F eller $\neg F$ en kontradiksjon, siden de begge kan oppfylles.

5.2 Se figur 1. MERK: Les $\rightarrow$ som $\Rightarrow$ Vi har at ogsaa at $(c) \Leftrightarrow (d)$.

Forskjellen mellom (a) og (b) er at (a) kun sier noe om at det *eksisterer* en gitt valuasjon som gjoer F sann. (b) sier spesifikt at valuasjonen v gjoer F sann. Vi kan ikke dedusere paa basis av (a) at noeyaktig valuasjonen v gjoer F sann. Men gitt at (b) er sann, kan vi konkludere med at (a) er sann.

5.3 La G vaere tautalogien $(A \lor \neg A)$ og F vaere A.

Dermed kan $(F \rightarrow G)$ representeres ved $(A \rightarrow (A \lor \neg A))$, en tautalogi, jamfoer reglene for implikasjon (saa lenge det impliserte er sant, vil uttrykket alltid evalueres til aa bli sant).

For valuasjonen som gjoer A usann, ser vi at G er sann, mens F er usann, jamfoer reglene for implikasjon (dersom det som impliserer er usant, og det som blir implisert er sant, vil hele uttrykket falsifiseres). Alle valuasjoner gjoer ikke F sann, saa resonnementet holder ikke; det er ikke gyldig.

5.4 Anta for motsigelse at $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ ikke er en tautalogi. Det betyr at det finnes en valuasjon v som falsifiserer uttrykket. Isaafall maa v gjoere P sann, og $(Q \rightarrow P)$ usann, for det er slik $\rightarrow$-formler tolkes. For at $(Q \rightarrow P)$ skal vaere usann, maa Q vaere sann, og P usann, jamfoer reglene for implikasjon. Men dette er en motsigelse, for vi har allerede slaatt fast at v maa gjoere P sann. P kan ikke vaere baade sann og usann samtidig. Paastanden om at uttrykket er en tautalogi, er gyldig; den kan ikke vaere usann.

Oppgaver til kapittel 6

6.1 (a) R er ikke refleksiv, ikke symmetrisk, ikke transitiv, ikke anti-symmetrisk, ikke irrefliksiv.
(b) R er refliksiv, symmetrisk, transitiv, antis-symmetrisk og ikke irrefliksiv.
(c) R er ikke irrefliksiv, ikke refliksiv, ikke anti-symmetrisk. R er transitiv og symmetrisk.
(d) R ikke refliksiv, ikke symmetrisk. R er irrefliksiv, transitiv og anti-symmetrisk.

6.2 $R = \{< 6, 3 >, < 12, 6 >, < 12, 3 >, < 15, 3 >, < 3, 1 >, < 6, 1 >, < 7, 1 >, < 12, 1 >, < 15, 1 >, < 17, 1 >\}$

R er anti-symmetrisk, irrefliksiv og transitiv. R er ikke refliksiv og ikke symmetrisk.

6.3 (a) $R = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 1, 2 >, < 2, 1 >\}$
(b) $R = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >\}$
(c) $R = \emptyset$. Teknisk sett er det tomme settet irrefleksivt fordi det ikke finnes noen $x \in \{1, 2, 3\}$ slik at $< x, x >$ er med. Det er ogsaa symmetrisk og transitiv, fordi "hvisdelen av disse kriteriene, aldri blir sann.
(d) $R = \{< 1, 2 >, < 2, 1 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >< 1, 1 >\}$

6.4 (a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$. AEB, fordi $A \setminus B = \{1\}$.
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3\}$. Disse to mengdene er ikke relatert til hverandre, fordi $A \setminus B = \{1, 2\}$.
(b) Dersom E er symmetrisk, vil det vaere slik at hvis AEB, saa BEA. La A og B vaere slik at $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1\}$.
$A \setminus B = \{2\}$, saa AEB.
$B \setminus A = \emptyset$, som ikke har noe element. Derfor $< B, A > \notin E$.
E er ikke symmetrisk.
(c) La M vaere en mengde slik at $M = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{3\}\}$. Transitive relasjoner defineres slik: Dersom xRy og yRz, saa xRz.
$\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$, saa disse to inngaar i relasjonen E.
$\{2, 3\} \setminus \{3\} = \{2\}$, saa disse to inngaar i relasjonen E.
Dersom E er en transitiv relasjon, vil $\{1, 2, 3\}E\{3\}$. Men dette stemmer ikke, fordi $\{1, 2, 3\} \setminus \{3\} = \{1, 2\}$.
E er ikke transitiv.
(d) Anta for motsigelse at E er ikke er irrefleksiv. Det betyr at det finnes minst to elementer A_1 og A_2 (to mengder) i relasjonen E paa en vilkaarlig mengde, som er slik at $A_1 = A_2$, og mengdedifferansen mellom disse bestaar av noeyaktig ett element. Dette er en motsigelse, fordi mengdedifferansen mellom to like mengder alltid er $\emptyset$. Paastanden kan ikke vaere usann; E er irrefleksiv.