IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2024 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `in1150-ansvarlige@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 14. juni 2024

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.
- En oversikt over symboler er vedlagt.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Større oppgaver [80 poeng]

1 Mengdelære [10 poeng]

La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 8\}$ og $C = \{1, \{2, 3, 5\}\}$.

(a) [2 poeng] Regn ut:

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup B \cup C$ (iii) $B \cap C$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$ (ii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 8, \{2, 3, 5\}\}$ (iii) $\emptyset$ (iv) $\{0, 4, 8, \{2, 3, 5\}\}$

(b) [4 poeng] Regn ut:

(i) $\mathcal{P}(A)$
(ii) $\mathcal{P}(\emptyset)$
(iii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
(iv) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))|$

Merk at (iv) kun ber om *kardinaliteten* til $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

(i) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
(ii) $\{\emptyset\}$
(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(iv) 16

(c) [4 poeng] Finn uttrykk, som kun bruker mengdene A, B og C, sammen med operasjonene snitt, union og differanse, som gir følgende mengder:

(i) $\{1\}$
(ii) $\{0, 2, 3, 4, 8\}$
(iii) $\{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$
(iv) $\{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$

(i) $A \cap C$ (ii) $(A \cup B) \setminus C$ (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

2 Utsagnslogikk [10 poeng]

Vi definerer de utsagnslogiske formlene F, G og H på følgende måte, hvor A, B og C er utsagnsvariabler:

- F står for $(A \lor \neg B)$,
- G står for $(B \land C)$ og
- H står for $(B \to C)$.

(a) [2 poeng] Finn én valuasjon av A, B og C som gjør alle formlene F, G og H *sanne*.

Valuasjonen som gjør A, B og C sanne.

(b) [2 poeng] Finn én valuasjon av A, B og C som gjør formlene F, G og H *usanne*.

Valuasjonen som gjør A usann, B sann og C usann.

(c) [3 poeng] Vis at G *ikke* er en logisk konsekvens av H.

Enhver valuasjon som gjør B usann gjør H sann, men ikke G. Altså er G ikke en logisk konsekvens av H.

(d) [3 poeng] Vis at formelen $G \land \neg H$ er en *kontradiksjon*.

Anta for motsigelse at en valuasjon gjør $(G \land \neg H)$ sann. Da er G sann og H usann. For at H skal være usann, må B være sann og C være usann. For at G skal være sann, må både B og C være sanne. Da er C både sann og usann, som er en motsigelse.

3 Formelle språk og grammatikker [10 poeng]

I denne oppgaven vil alle språk være over alfabetet $\{a, b\}$.

La følgende grammatikk uttrykke språket $\mathcal{A}$. Startsymbolet er som vanlig S.

$$
\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}S \mid S\mathtt{bb} \mid T \\
T &\to \mathtt{aa} \mid \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

(a) [1 poeng] Gi en utledning av strengen abbb. Vis hvert ledd i utledningen.

$S \Rightarrow aS \Rightarrow aSbb \Rightarrow aTbb \Rightarrow abbb$ eller $S \Rightarrow Sbb \Rightarrow aSbb \Rightarrow aTbb \Rightarrow abbb$

(b) [1 poeng] Gi en utledning av strengen aab Vis alle leddene i utledningen.

$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aab$

Språket $\mathcal{B}$ er beskrevet av det regulære uttrykket `a*(bb)*`.

(c) [2 poeng] Finn en streng av lengde tre som er med i $\mathcal{A}$, men ikke med i $\mathcal{B}$.

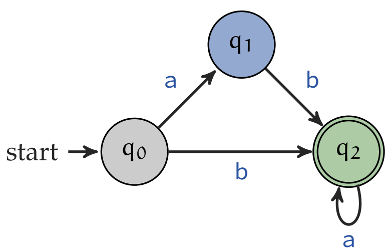
aab eller bbb

(d) [2 poeng] Finn en streng av lengde tre som er med i $\mathcal{B}$, men ikke med i $\mathcal{A}$.

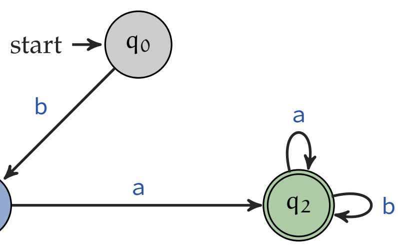
abb

For hver av de endelige tilstandsmaskinene nedenfor, finn et regulært uttrykk som beskriver det samme språket som tilstandsmaskinene.

(e) [2 poeng]



(f) [2 poeng]



(e) `(b|ab)a*` eller `(ab|b)a*` eller `(ba*|aba*)` eller `(aba*|ba*)`
(f) `bb*a(a|b)*` eller `b+a(a|b)*` eller `bb*a(b|a)*` eller `b+a(b|a)*`

4 Førsteordens logikk [10 poeng]

Kvantifiserte utsagn.

Anta at T, F og M er relasjonsymboler med tolkningene:

- Tx tolkes som at *x er en trekant*.
- Fx tolkes som at *x er en firkant*.
- Mxy tolkes som at *x er mindre enn y*.

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn:

(a) [2 poeng] Det finnes ikke en firkant som også er en trekant.

$\neg\exists x(Fx \land Tx)$ eller $\forall x\neg(Fx \land Tx)$

(b) [2 poeng] Alle firkanter er mindre enn alle trekanter.

$\forall x(Fx \to \forall y(Ty \to Mxy))$ eller $\forall x\forall y((Fx \land Ty) \to Mxy)$

(c) [2 poeng] Det finnes ikke en trekant som er mindre enn alle firkanter.

$\neg\exists x(Tx \land \forall y(Fy \to Mxy))$ eller $\forall x\neg(Tx \land \forall y(Fy \to Mxy))$

La domenet D være $\{a, b\}$. Vi definerer formlene G og H, på følgende måte, der S har aritet én, og T har aritet to.

- Formelen G er $\exists x(Sx \land \forall y Txy)$.
- Formelen H er $\forall x(Sx \land \exists y Txy)$.

(d) [2 poeng] Finn en tolkning av S og T som gjør både G og H usanne.

Enhver tolkning av T dersom $S = \emptyset$. Dersom et element x er med i S, må hverken $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, x\rangle$ eller $\langle x, y\rangle$ og $\langle x, y\rangle$ være med i T. Dersom $S = \{a, b\}$, kan T inneholde null eller ett par.

På eksamen stod det «F og G» i stedet for «G og H». Det ble korrigert i første halvdel av eksamenstiden.

(e) [2 poeng] Lag en tolkning av S og T som viser at G *ikke* er en logisk konsekvens av H.

Her må S være lik $\{a, b\}$, mens T kan være $\{\langle b, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$, $\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$ eller $\{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$. Dette gjør H sann, men G usann, som viser at G ikke er en logisk konsekvens av H.

5 Telle strenger og funksjoner [10 poeng]

La $\mathcal{S}$ være mengden strenger over alfabetet $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$ av nøyaktig lengde åtte.

(a) [1 poeng] Hvor mange forskjellige strenger er det i $\mathcal{S}$?

> For hver av de åtte tengene, har vi fire valg. Vi får $4^8 = 65536$.

(b) [2 poeng] Hvor mange strenger i $\mathcal{S}$ har ingen b-er?

> For hvert tegn har vi tre valg, a, c eller d. Vi får $3^8 = 6561$

(c) [3 poeng] Hvor mange strenger i $\mathcal{S}$ inneholder nøyaktig to forekomster av a-er?

> Vi skal velge to av de åtte posisjonene til å ha a-er, og får «8 velg 2». Da har vi seks gjenstående plasser, der vi kan velge tre forskjellige symboler, alt untenom a-er. Vi ganger dette sammen og får $\binom{8}{2} \cdot 3^6 = 28 \cdot 729 = 20412$.

Vi skal nå telle antall funksjoner mellom A og en annen mengde.

(d) [1 poeng] Hvor mange bijektive funksjoner fra A til A er det?

> Siden definisjonsmengden og verdimengden er like store, blir det like mange bijektive funksjoner som vi har injektive funksjoner. Vi får $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

(e) [1 poeng] Hvor mange injektive funksjoner fra A til $\{0, 1\}$ er det?

> 0. Siden verdimengden er mindre enn definisjonsmengden finnes det ingen injektive funksjoner.

(f) [2 poeng] Hvor mange surjektive funksjoner fra A til $\{0, 1\}$ er det?

> De eneste funksjonene som *ikke* er surjektive, er den hvor alle elementer sendes til 0, og den hvor alle elementer sendes til 1. Vi får de surjektive funksjonene ved å regne ut alle funksjoner minus disse to. Det blir $2^4 - 2 = 14$.

6 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner [10 poeng]

Vi ser nå på formler som kun bruker utsagnslogiske variablene P og Q. Husk at to formler F og G er logisk ekvivalente dersom de har samme sannhetsverdi under enhver valuasjon. Logisk ekvivalens $\Leftrightarrow$ er en *evkivalens-relasjon* som relaterer logisk ekvivalente formler. Ekvivalensklassen til F, notert $[F]$, angir mengden av formler som er logisk ekvivalent med F.

(a) [1 poeng] Gi en formel F slik at $F \in [(\neg Q \lor P)]$.

For eksempel $(\neg Q \lor P)$, $\neg\neg(\neg Q \lor P)$ eller $(Q \to P)$.

(b) [1 poeng] Gi en formel F slik at $F \notin [(\neg Q \lor P)]$.

For eksempel P, Q, eller $(Q \land P)$.

(c) [4 poeng] Vis at det er uendelig mange elementer i hver ekvivalensklasse av $\Leftrightarrow$.

Her må man argumentere for at gitt en formel, kan man konstruere uendelig antall ekvivalente formler med den. For eksempel:

- Hver ekvivalensklasse er per definisjon ikke-tom. La F være en formel i en vilkårlig ekvivalensklasse $[x]$. Vi får uendelig antall formler som er ekvivalent med F ved å konstruere $\neg\neg F$, og deretter $\neg\neg\neg\neg F$, og så videre. Dermed er det uendelig antall formler i $[x]$, og siden ekvivalensklassen var vilkårlig valgt, er det uendelig antall formler i alle ekvivalensklassene.
- Hver ekvivalensklasse er per definisjon ikke-tom. Anta for motsigelse at ekvivalensklassen $[x]$ er endelig. Da finnes det et en formel F i $[x]$ som har like mange eller flere konnektiver enn alle andre formler i evkivalensklassen. Siden $\neg\neg F$ er ekvivalent med F, vil også $\neg\neg F$ være i $[x]$, men siden $\neg\neg F$ har flere konnektiver enn F, bryter dette antagelsen vår om at det finnes et element med flest konnektiver, så ekvivalensklassen må ha uendelig antall elementer.

Man kan også bruke andre ekvivalente konstruksjoner enn $\neg\neg F$, som $(F \lor (P \land \neg P))$ eller $(F \land (P \lor \neg P))$.

(d) [4 poeng] Hvor mange ekvivalensklasser har $\Leftrightarrow$? Husk at vi kun ser på formler med to utsagnslogiske variabler P og Q.

Vi har $2^2 = 4$ antall forskjellige tilordninger av sannhetsverdier for de to utsagnslogiske variablene. For hver av de fire tilfellene, kan en formel enten være sann eller usann. Det gir oss to muligheter fire ganger, og vi får $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$.

7 Rekursivt definerte funksjoner og algebra [10 poeng]

La alfabetet M være lik $\{a, b\}$, og la $A : M^* \to M^*$ være funksjonen som fjerner alle instanser av a-er i en streng. Vi kan definere A rekursivt som:

$$A(\Lambda) = \Lambda$$
$$A(sa) = A(s)$$
$$A(sb) = A(s)b$$

der $s \in M^*$.

(a) [1 poeng] Regn ut $A(aba)$ ved hjelp av den rekursive definisjonen. Vis alle stegene i utregningen.

> $A(aba) = A(ab) = A(a)b = A(\Lambda)b = \Lambda b = b$

(b) [2 poeng] Forklar med ord hvorfor funksjonen A er idempotent.

> Vi skal vise at gitt en streng $s \in M^*$, så er $A(A(s)) = A(s)$. Siden strengen $A(s)$ ikke inneholder noen a-er, vil ikke strengen endre seg dersom vi fjerne alle forekomster av a-er, og dermed er $A(A(s)) = A(s)$.

Vi definerer også funksjonen R til å bytte a-er og b-er i en streng. Vi kan definerer R rekursivt ved:

$$R(\Lambda) = \Lambda$$
$$R(sa) = R(s)b$$
$$R(sb) = R(s)a$$

der $s \in M^*$.

(c) [1 poeng] Regn ut $R(aba)$ ved hjelp av den rekursive definisjonen. Vis alle stegene i utregningen.

> $R(aba) = R(ab)b = R(a)ab = R(\Lambda)bab = \Lambda bab = bab$

(d) [2 poeng] Hva er den inverse funksjonen til R? Begrunn svaret kort.

> Den inverse funksjonen til R er R. Det er fordi R gjør a-er til b-er og b-er til a-er, så for en $s \in M^*$ vil $R(R(s))$ være lik s.

Husk at identitetsfunksjonen id_X på en mengde X er definert slik at $\mathrm{id}_X(x) = x$ for alle $x \in X$.

(e) [4 poeng] Vis at dersom en funksjon $f : M^* \to M^*$ er injektiv og idempotent, så er f lik identitetsfunksjonen id_{M^*}.

> Siden f er injektiv, som vil si at hvis $x \neq y$ så er $f(x) \neq f(y)$ for alle $x, y \in M^*$; kontrapositivt har vi at hvis $f(x) = f(y)$ så er $x = y$. Vi har også at f er idempotent, som vil si at vi har at $f(f(x)) = f(x)$.
>
> La $x \in M^*$, og la $y = f(x)$. Siden f er idempotent følger det at $f(y) = f(f(x)) = f(x)$. Siden f er injektiv følger det at $y = x$. Altså er $f(x) = x$.
>
> Siden x var vilkårlig valgt, gjelder dette for alle elementer i M^*, og f er lik identitetsfunskjonen.

8 Strukturell induksjon [10 poeng]

La R og A være definert fra forrige oppgave. Selv om du ikke har svart på forrige oppgave kan du svare på denne. Vi definerer nå også $B : M^* \to M^*$ til å fjerne alle forekomster av b-er i en streng. Vi kan definere B rekursivt til å være:

$$B(\Lambda) = \Lambda$$
$$B(sa) = B(s)a$$
$$B(sb) = B(s)$$

der $s \in M^*$.

(a) [1 poeng] Regn ut $B(R(bab))$. Du trenger *ikke* å vise alle stegene.

$B(R(bab)) = B(R(ba)a) = B(R(b)ba) = B(R(\Lambda)aba) = B(aba) = B(ab)a = B(a)a = B(\Lambda)aa = aa$

(b) [1 poeng] Regn ut $R(A(bab))$. Du trenger *ikke* å vise alle stegene.

$R(A(bab)) = R(A(ba)b) = R(A(b)b) = R(A(\Lambda)bb) = R(bb) = R(b)a = R(\Lambda)aa = aa$

Vi skal nå vise med strukturell induksjon at $B(R(s)) = R(A(s))$ for alle $s \in M^*$.

(c) [1 poeng] Utfør basissteget i induksjonsbeviset. Vis alle steg.

Basissteget er å vise at påstanden holder for s i basismengden, altså når s er lik den tomme strengen Λ. Vi får $B(R(\Lambda)) = B(\Lambda) = \Lambda$ og $R(A(\Lambda)) = R(\Lambda) = \Lambda$. Altså er $B(R(\Lambda)) = R(A(\Lambda))$, så basissteget stemmer.

(d) [1 poeng] Forklar hva induksjonshypotesen er.

Induksjonshypotesen er antagelsen om at $B(R(s)) = R(A(s))$ for en vikårlig valgt $s \in M^*$.

(e) [2 poeng] Forklar i detalj hva som skal vises i induksjonsteget. Vis hva som skal følge av hva.

I induksjonsteget skal vi vise at hvis påstanden holder for en vilkårlig $s \in M^*$, så holder påstanden også for sa og sb. Spesifikt skal vi vise at $B(R(sa)) = R(A(sa))$ og at $B(R(sb)) = R(A(sb))$ følger fra induksjonshypotesen $B(R(s)) = R(A(s))$.

(f) [4 poeng] Gjennomfør induksjonssteget i beviset.

Vi viser først at $B(R(sa)) = R(A(sa))$.

Vi får at venstresiden blir $B(R(sa)) = B(R(s)b) = \overbrace{B(R(s)) = R(A(s))}^{\text{I.H.}}$.
Høyresiden blir $R(A(sa)) = R(A(s))$, som er likt venstresiden.

Vi viser deretter at $B(R(sb)) = R(A(sb))$.

Vi får at venstresiden blir $B(R(sb)) = B(R(s)a) = \overbrace{B(R(s))a = R(A(s))a}^{\text{I.H.}}$.
Høyresiden blir $R(A(sb)) = R(A(s)b) = R(A(s))a$, som er likt venstresiden.
Vi har dermed vist induksjonssteget.