IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2023 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 13. juni 2023

Om denne eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. *Begge deler må bestås for å bestå eksamen.*
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Du vil få mellom 0 og 60 poeng her.
- Den andre delen består av åtte litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Denne delen er altså verdt noe mer enn den første delen; du kan få mellom 0 og 80 poeng her.
- Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret ditt.
- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen til Universitetet i Oslo. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset, fordi eksamen i dette emnet tilbys både vår og høst.
- En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet.

Kommentarer og tips:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.

Små oppgaver [60 poeng]

Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant».

Større oppgaver [80 poeng]

1 Mengdelære [10 poeng]

La $A = \{1, 2, \{1, 3\}\}$ og $B = \{1, 3, \{1, 2\}\}$.

(a) [4 poeng] Er følgende påstander sanne eller usanne?

1. $3 \in A$
2. $3 \in B$
3. $\{1, 3\} \subseteq A$
4. $\{1, 3\} \subseteq B$

1. Usann.
2. Sann.
3. Usann.
4. Sann.

(b) [4 poeng] Regn ut:

1. $A \setminus B$
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $\mathcal{P}(A)$

1. $A \setminus B = \{1, 2, \{1, 3\}\} \setminus \{1, 3, \{1, 2\}\} = \{2, \{1, 3\}\}$
2. $A \cap B = \{1, 2, \{1, 3\}\} \cap \{1, 3, \{1, 2\}\} = \{1\}$
3. $A \cup B = \{1, 2, \{1, 3\}\} \cup \{1, 3, \{1, 2\}\} = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$
4. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 3\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 3\}\}, \{2, \{1, 3\}\}, \{1, 2, \{1, 3\}\}\}$

(c) [1 poeng] Regn ut $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$.

$\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

(d) [1 poeng] Hva er kardinaliteten til $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$. Begrunn svaret ditt.

Vi har at kardinaliteten til $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$ er lik kardinaliteten til $\{1, 3\}$ multiplisert med kardinaliteten til $\{1, 3\}$ Vi får dermed $2 \cdot 2 = 4$.

2 Relasjoner [10 poeng]

La $M = \{a, b, c\}$. I hver av deloppgavene krever vi (1) at R er en refleksiv relasjon på M, (2) at S er en partiell ordning på M, og (3) at R er en ekte delmengde av S, det vil si at $R \subseteq S$ og $R \neq S$.

(a) [2 poeng] Gi et eksempel på R og S slik at kravene (1)–(3) oppfylles og R *er en ekvivalensrelasjon*.

> For eksempel $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$ og $S = R \cup \{\langle a, b\rangle\}$. Dette er det eneste valget for R. Relasjonen S kan være hvilken som helst partiell ordning på M, bortsett fra R, identitetsrelasjonen.

(b) [3 poeng] Gi et eksempel på R og S slik at kravene (1)–(3) oppfylles *og* R *ikke er transitiv*.

> For eksempel $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$ og $S = R \cup \{\langle a, c\rangle\}$. Her må begge relasjonene inneholde alle tupler på formen $\langle x, x\rangle$. I tillegg må R inneholde noe som gjør at R ikke er transitiv, det vil si to tupler på formen $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, z\rangle$ slik at x, y og z er forskjellige og slik at $\langle x, z\rangle$ ikke er med. Relasjonen S må inneholde det samme, men også $\langle x, z\rangle$. I tillegg må S være anti-symmetrisk, og derfor kan ikke $\langle y, x\rangle$, $\langle z, y\rangle$ eller $\langle z, x\rangle$ være med.

(c) [2 poeng] Hva er den minste verdien $|S|$ (kardinaliteten til S, det vil si antall tupler i S) kan ha dersom kravene (1)–(3) skal oppfylles?

> Fire. For at R skal være refleksiv, må $\langle a, a\rangle$,$\langle b, b\rangle$ og $\langle c, c\rangle$ være med. I tillegg må S inneholde minst ett annet tuppel for at R skal være en ekte delmengde av S.

(d) [3 poeng] Kan S være en ekvivalensrelasjon? Hvis ja, gi et eksempel på R og S; hvis nei, forklar hvorfor.

> Nei, S kan ikke være en ekvivalensrelasjon.
>
> - Anta at S er en ekvivalensrelasjon.
> - (3) gir at det må finnes et tuppel $\langle x, y\rangle$ i S, som ikke er i R.
> - (1) gir at R inneholder $\langle a, a\rangle$,$\langle b, b\rangle$ og $\langle c, c\rangle$. Da må $x \neq y$.
> - Hvis S er en ekvivalensrelasjon, må S være symmetrisk, og da må $\langle y, x\rangle$ finnes i S.
> - (2) gir at S må være anti-symmetrisk, og da må $x = y$.
> - Det gir en motsigelse, og vi kan konkludere med at S ikke kan være en ekvivalensrelasjon.

3 Førsteordens formler [10 poeng]

Anta at R, K og S er relasjonssymboler slik at

Rx tolkes som «x *er et rugbrød*»,
Kx tolkes som «x *er et kakestykke*» og
Sxy tolkes som «x *er søtere enn* y».

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn.

(a) [2 poeng] Alle kakestykker er rugbrød.

$\forall x(Kx \to Rx)$

(b) [2 poeng] Alle kakestykker er søtere enn alle rugbrød.

$\forall x \forall y((Kx \land Ry) \to Sxy)$
$\forall x \forall y((Rx \land Ky) \to Syx)$
$\forall x(Kx \to \forall y(Ry \to Sxy))$
$\forall x(Rx \to \forall y(Ky \to Syx))$

(c) [2 poeng] Alt som er søtere enn et kakestykke må være et rugbrød.

$\forall x(\exists y(Ky \land Sxy) \to Rx)$
$\forall x \forall y((Ky \land Sxy) \to Rx)$
$\forall x \forall y(Ky \to (Sxy \to Rx))$
$\forall y(Ky \to \forall x(Sxy \to Rx))$

(d) [2 poeng] Det finnes et kakestykke som er søtere enn alle kakestykker.

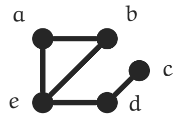
$\exists x(Kx \land \forall y(Ky \to Sxy))$
$\exists x \forall y(Kx \land (Ky \to Sxy))$

(e) [2 poeng] Det finnes ikke et rugbrød som er søtere enn alle kaker og rugbrød.

$\neg \exists x(Rx \land \forall y(Ky \lor Ry \to Sxy))$
$\neg \exists x(Rx \land \forall y(Ky \to Sxy) \land \forall y(Ry \to Sxy))$
$\forall x(Rx \to \exists y((Ky \lor Ry) \land \neg Sxy))$

4 Grafteori [10 poeng]

La G være følgende graf:



(a) [1 poeng] Hva er summen av gradene til alle nodene i G?

> Det er fem kanter, og vi får $2 \cdot 5 = 10$.

(b) [2 poeng] Forklar kort hva en eulerkrets er og hvorfor G ikke har en eulerkrets.

> En eulerkrets er en vandring som bruker alle kantene, som er slik at ingen kanter gjentas og hvor første og siste node sammenfaller. Nodene c og e har begge grader som er oddetall, henholdsvis 1 og 3, og da finnes det ikke en eulerkrets.

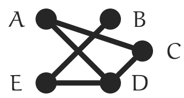
(c) [2 poeng] Mellom hvilke to noder kan man legge til en kant slik at grafen får en *eulerkrets*?

> Vi kan legge til en kant mellom nodene c og e. Da blir $a - b - e - d - c - e - a$ en eulerkrets.

(d) [2 poeng] Mellom hvilke to noder kan man legge til en kant slik at grafen får en *hamiltonsykel*? Her er det to svar, og begge må oppgis.

> - Vi kan legge til en kant mellom nodene b og c. Da blir $a - b - c - d - e(-a)$ en hamiltonsykel.
> - Vi kan legge til en kant mellom nodene a og c. Da blir $a - c - d - e - b(-a)$ en hamiltonsykel.

La F være følgende graf:



(e) [3 poeng] Grafene G og F er *isomorfe*, det vil si at det finnes en bijeksjon fra nodene i G til nodene i F. I dette tilfellet finnes det to bijeksjoner. Oppgi disse.

> - $\{a \mapsto A, b \mapsto C, c \mapsto B, d \mapsto E, e \mapsto D\}$
> - $\{a \mapsto C, b \mapsto A, c \mapsto B, d \mapsto E, e \mapsto D\}$

5 Kombinatorikk [10 poeng]

La M være mengden $\{1, 2, 3\}$.

(a) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har M?

Det er 7 ikke-tomme delmengder av M. Det er $2^3 = 8$ delmengder totalt, men én av disse er den tomme mengden.

(b) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har potensmengden til M?

Det er 255 ikke-tomme delmengder av potensmengden til M. Det er $2^8 = 256$ delmengder totalt, fordi potensmengden har $2^3 = 8$ elementer, men én av disse er den tomme mengden.

(c) [2,5 poeng] Hvor mange irrefleksive relasjoner finnes det på M?

Det er $2^6 = 64$ irrefleksive relasjoner på M. På en mengde med tre elementer er det ni forskjellige mulige tupler som kan være med å utgjøre en relasjon, men tre av disse er på formen $\langle x, x\rangle$. Da er det seks elementer som kan være med eller ikke. Dette er $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$ og $\langle 3, 2\rangle$. Vi får dermed 2^6 mulige *irrefleksive* relasjoner. For eksempel dersom *ingen* av tuplene er med, får vi den tomme relasjonen. Dersom *alle* tuplene er med, får vi relasjonen hvor ethvert tall er relatert til ethvert *annet* tall.

(d) [2,5 poeng] Hvor mange bijeksjoner f på M, slik at $f(x) \neq x$ for alle x, finnes det?

Det er kun to slike. Dersom $f(a) = b$, får vi at $f(b) = c$ og $f(c) = a$. Dersom $f(a) = c$, får vi at $f(b) = a$ og $f(c) = b$.

6 Ekvivalensrelasjoner [10 poeng]

La S være mengden av alle ikke-tomme strenger over alfabetet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, det vil si den minste mengden S slik at $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in S$ og hvis $s \in S$, så er $s\mathtt{a} \in S$ og $s\mathtt{b} \in S$. (Legg merke til at a og b legges til på høyre side av s.) Vi sier at en streng i S er **a-redusert** dersom den ikke inneholder noen forekomster av aa. En a-redusert streng vil altså ikke inneholde to a-er ved siden av hverandre. For eksempel er bbb, baba og abba alle a-reduserte strenger, men aa, baab og abbaabba er *ikke* a-reduserte strenger. La f være funksjonen på S som «a-reduserer en streng», altså som tar en streng og som returnerer den samme strengen, men hvor enhver sammenhengende sekvens av a-er har blitt erstattet med nøyaktig én a. For eksempel vil $f(\mathtt{aa}) = \mathtt{a}$ og $f(\mathtt{aabaaabb}) = \mathtt{ababb}$.

(a) [1 poeng] Hva blir $f(\mathtt{abbbaaa})$?

$f(\mathtt{abbbaaa}) = \mathtt{abbba}$

Funksjonen f kan defineres rekursivt. I de neste to deloppgavene skal du definere f rekursivt ved å ta utgangspunkt i hvordan S er induktivt definert.

(b) [1 poeng] Oppgi basissteget i definisjonen av f.

Basissteget: $f(\mathtt{a}) = \mathtt{a}$ og $f(\mathtt{b}) = \mathtt{b}$

(c) [4 poeng] Oppgi rekursjonssteget i definisjonen av f.

Rekursjonssteget:

- $f(s\mathtt{aa}) = f(s\mathtt{a})$
- $f(s\mathtt{ab}) = f(s\mathtt{a})\mathtt{b}$
- $f(s\mathtt{ba}) = f(s\mathtt{b})\mathtt{a}$ eller $f(s\mathtt{ba}) = f(s)\mathtt{ba}$
- $f(s\mathtt{bb}) = f(s\mathtt{b})\mathtt{b}$ eller $f(s\mathtt{bb}) = f(s)\mathtt{bb}$

La relasjonen $\sim$ være slik at $s \sim t$ dersom $f(s) = f(t)$. Dette blir en ekvivalensrelasjon. Du trenger ikke å vise dette. Husk at *ekvivalensklassen* til strengen s betegnes med $[s]$.

(d) [2 poeng] Hvilke strenger i $[\mathtt{abab}]$ har nøyaktig lengde fem, det vil si har nøyaktig fem symboler?

Strengene i ekvivalensklassen som har nøyaktig lengde fem, er: aabab og abaab.

(e) [2 poeng] Hvilke strenger i $[\mathtt{aba}]$ har *maksimalt* lengde fem, det vil si har mellom null og fem symboler.

Strengene i ekvivalensklassen som har maksimalt lengde fem, er: aba, aaba, aaaba, abaa og abaaa.

7 Naturlig deduksjon [10 poeng]

(a) [2 poeng] Hva må stå i boksene $\boxed{1}$ og $\boxed{2}$ for at følgende utledning i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Q]^1}{\boxed{1}}\,\vee\text{I} \qquad \neg(Q \vee \neg Q)}{\boxed{2}}\,\to\text{E}}{Q}\,\text{RAA}_1$$

$\boxed{1}$: $(Q \vee \neg Q)$ $\boxed{2}$: $\bot$

(b) [4 poeng] Hva stå i boksene $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ og $\boxed{6}$ for at følgende bevis i naturlig deduksjon skal være korrekt?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^2}{(Q \vee R)}\,\wedge\text{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(Q \vee R) \wedge \neg Q]^2}{\boxed{4}}\,\boxed{3} \qquad [Q]^1}{\bot}\,\to\text{E}}{R}\,\bot \qquad [R]^1}{\boxed{5}}\,\vee\text{E}_1}{((Q \vee R) \wedge \neg Q) \to R}\,\boxed{6}_2$$

$\boxed{3}$: $\wedge$E $\boxed{4}$: $\neg Q$ $\boxed{5}$: R $\boxed{6}$: $\to$I

Anta at vi legger til følgende slutningsregel i naturlig deduksjon:

$$\dfrac{P \qquad P \vee Q}{P \wedge Q}\,\wedge\text{I}$$

(c) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *sunn*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Kalkylen er ikke sunn, fordi den kan utlede en konklusjon som ikke er en logisk konsekvens av premissene. Med denne regelen kan vi gi en utledning av Q, med P som eneste antakelse, uansett hva P og Q er.

$$\dfrac{\dfrac{P \qquad \dfrac{P}{P \vee Q}\,\vee\text{I}}{P \wedge Q}\,\wedge\text{I}}{Q}\,\wedge\text{E}$$

(d) [2 poeng] Er kalkylen fremdeles *komplett*? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Kalkylen er komplett, fordi det å legge til en regel ikke kan begrense antall formler som kan bevises.

8 Strukturell induksjon [10 poeng]

Dersom f og g er operasjoner på en mengde A, og L er en liste over A, har vi at $\textsc{map}$ er rekursivt definert ved

$$(1)\ \textsc{map}(f, ()) = () \quad \text{og} \quad (2)\ \textsc{map}(f, x :: L) = (f(x) :: \textsc{map}(f, L))$$

og at funksjonssammensetning er definert ved $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(a) [2 poeng] Hvis s er definert ved $s(x) = x+1$, altså funksjonen som legger til én, og t er definert ved $t(x) = 2 \cdot x$, altså funksjonen som ganger med to, hva er verdien til følgende uttrykk?

$$\textsc{map}(s, (1,2,3)) \qquad \textsc{map}(t, (1,2,3)) \qquad \textsc{map}(t \circ s, (1,2,3)) \qquad \textsc{map}(s \circ t, (1,2,3))$$

$$(2,3,4) \qquad (2,4,6) \qquad (4,6,8) \qquad (3,5,7)$$

Anta at f og g er operasjoner på en mengde A. Du skal nå bevise at $\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L)) = \textsc{map}(g \circ f, L)$ holder for alle lister L over A ved strukturell induksjon.

(b) [2 poeng] Vis *basissteget*, og ikke utelat noen steg.

Basissteget er å vise at påstanden holder for den tomme listen $()$, og dette er sant fordi:

$$\begin{aligned} \textsc{map}(g, \textsc{map}(f, ())) &= \textsc{map}(g, ()) && \text{ved (1) av definisjonen av } \textsc{map} \\ &= () && \text{ved (1) av definisjonen av } \textsc{map} \end{aligned}$$

og

$$\textsc{map}(g \circ f, ()) = () \qquad \text{ved (1) av definisjonen av } \textsc{map}.$$

(c) [1 poeng] Forklar hva induksjonshypotesen er.

Induksjonshypotesen vår er at $\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L)) = \textsc{map}(g \circ f, L)$ for en vilkårlig liste L.

(d) [2 poeng] Forklar i detalj hva som må gjøres i induksjonssteget. Angi spesifikt hva som skal følge fra hva.

Induksjonssteget er å vise at *hvis*

$$\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L)) = \textsc{map}(g \circ f, L)$$

er sant, så må også

$$\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, (x :: L))) = \textsc{map}(g \circ f, (x :: L))$$

være sant.

(e) [3 poeng] Gjennomfør induksjonssteget.

Anta at

$$\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L)) = \textsc{map}(g \circ f, L)$$

er sant. Vi må fra denne antakelsen vise at

$$\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, (x :: L))) = \textsc{map}(g \circ f, (x :: L))$$

er sant.

$$\begin{aligned}
\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, (x :: L))) &= \textsc{map}(g, (f(x) :: \textsc{map}(f, L))) && \text{ved (2) av definisjonen av } \textsc{map} \\
&= (g(f(x)) :: \textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L))) && \text{ved (2) av definisjonen av } \textsc{map}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textsc{map}(g \circ f, (x :: L)) &= ((g \circ f)(x) :: \textsc{map}(g \circ f, L)) && \text{ved (2) av definisjonen av } \textsc{map} \\
&= (g(f(x)) :: \textsc{map}(g \circ f, L)) && \text{ved definisjonen av } \circ \\
&= (g(f(x)) :: \textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L))) && \text{ved induksjonshypotesen}
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at $\textsc{map}(g, \textsc{map}(f, L)) = \textsc{map}(g \circ f, L)$ for alle lister ved strukturell induksjon.