

# Visualisierung kontinuierlicher, multimodaler Schmerz Scores am Beispiel akustischer Signale

Masterarbeit

Franz Anders  
HTWK Leipzig

Januar 2017

# Abstract

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der medizinischen Schrei-Forschung</b>	<b>2</b>
2.1	Schmerz Scores . . . . .	2
2.2	Schmerz-Schrei aus medizinischer Sicht . . . . .	4
2.3	Physio-Akustische Modellierung des Weinens . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Signalverarbeitung</b>	<b>7</b>
3.1	Statistische Merkmale . . . . .	9
3.2	Fehlersignale . . . . .	11
3.3	Korrelation . . . . .	12
3.4	Diskrete Fourier-Transformation . . . . .	13
3.4.1	Reelle DFT . . . . .	14
3.4.2	Komplexe DFT . . . . .	18
3.4.3	Short Time Fourier Transform . . . . .	22
3.5	Filter . . . . .	25
3.5.1	Differenzengleichung . . . . .	25
3.5.2	Faltung . . . . .	26
3.5.3	Multiplikation im Frequenz-Bereich . . . . .	27
3.6	akustische Modellierung der menschlichen Stimme . . . . .	29
3.7	Feststellung von Periodizität in Signalen . . . . .	29
3.7.1	Zero-Crossing-Rate . . . . .	29
3.7.2	Methoden des Frequenzbereiches . . . . .	29
3.7.3	Autokorrelation . . . . .	29
3.7.4	Cepstrum . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>30</b>
	<b>Appendices</b>	<b>33</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Veranschaulichung des Grundvokabulars . . . . .	6
3.1	Ein zeit-kontinuierliches Signal (A) und ein zeit-diskretes Signal (B) . . . . .	7
3.2	Ein nicht-periodisches Signal (A) und ein periodisches Signal (B) . . . . .	9
3.3	Statistische Werte eines Signals über das Intervall [50,200] . . . . .	10
3.4	Komponentenweise Addition und Multiplikation zweier Signale . . . . .	10
3.5	Berechnung des MSE, RMSE und SNR eines von Rauschen gestörten Signals	12
3.6	Correlation der Signale $x[n]$ und $y[n]$ . . . . .	12
3.7	Beispiel einer Running Correlation . . . . .	13
3.8	1 s = 44100 Samples der Cosinus-Schwingung $[A = 2] \cdot \cos_{f=4\text{ Hz}}[\ ] = 2 \cdot \cos(2\pi 4 \frac{n}{f_s})$ bei einer Sampling-Rate von $f_s = 44\,100\text{ Hz}$ . . . . .	14
3.9	Synthetisierung eines Signals $x[\ ]$ aus vier Cosinus-Funktionen, mit $\text{Length}(x[\ ]) = 200$ und $f_s = 100\text{ Hz}$ . . . . .	15
3.10	Überblick über die DFT und die inverse DFT . . . . .	17
3.11	Frequenz-Bereich des Beispiels aus Abbildung 3.9 . . . . .	18
3.12	Visualisierung der Eulergleichung . . . . .	19
3.13	Symmetrie des Frequenzbereiches in den Indexen $n = (-N/2 = -0.5 * N), \dots, (N/2 = 0.5 * N)$ . Die Marker 1 und 2 haben eine Amplitude von +0.5, der Marker 3 hat eine Amplitude von -0.5 und Marker 4 eine Amplitude von +0.5 . . . . .	22
3.14	Überblick über die komplexe DFT und inverse DFT . . . . .	23
3.15	Ein 1.8-Sekunden langes Signal. Oben: Der Zeitbereich mit drei klar erkennbaren Events. Unten: Das Frequenz-Spectrum des gesamten Signals mit logarithmisierten Achsen. . . . .	23
3.16	Zerlegung eines Signals in Singal-Fenster . . . . .	24
3.17	Das Hamming-Window . . . . .	24
3.18	STFT des Beispiel-Signals aus Abbildung 3.16 . . . . .	24
3.19	Beispiel für die Faltung . . . . .	27
3.20	Links: Zeit-Bereich einer Impulsantwort $h[\ ]$ des „windowed Sync Filters“. Rechts: Frequenz-Bereich dieser Impulsantwort $\text{DFT}\{h[\ ]\} = H[\ ]$ [24, S. 287]	28
.1	Boxplot-Auswertung über Sensitivity, Specificity und Accuracy der beiden VAD-Modelle . . . . .	35

# 1 Einleitung

## 2 Grundlagen der medizinischen Schrei-Forschung

### 2.1 Schmerz Scores

Bei erwachsenen Menschen wird der Schmerzgrad typischerweise durch eine Selbsteinschätzung des Patienten unter der Leitung gezielter Fragen des Arztes vorgenommen. Bei Kindern unter 3 Jahren ist diese Selbsteinschätzung nicht möglich. Schmerz drückt sich in Veränderungen des psychologischen, körperlichen und biochemischen Verhaltens des Säuglings aus. Die für den Arzt am leichtesten feststellbaren Verhaltensänderungen sind von außen wahrnehmbaren Merkmale, wie zum Beispiel ein Verkrampfen des Gesichtsausdrucks, erhöhte Körperbewegungen oder lang anhaltendes Weinen. Um eine weitestgehend objektive Schmerzfeststellung zu ermöglichen, wurden sogenannte *Pain-Scores* entwickelt, die durch ein Punktesystem den insgesamten Schmerzgrad des Babies quantifizieren.[17] Es existieren *eindimensionale* Pain-Scores, die den Schmerz nur aufgrund der Beobachtung eines Merkmals beurteilen, so wie beispielsweise die reine Beurteilung des Gesichtsausdrucks. *Mehrdimensionale* (auch *multimodale*) Pain-Scores beziehen mehrere Faktoren in das Scoring mit ein.[1]. Tabelle 2.1 zeigt das Scoring-System „Neonatal Infant Pain Scale“ (NIPS) als Beispiel für eine multimodale Pain-Score. Der Säugling wird anhand der aufgeführten Kategorien bewertet und alle vergebenen Punkte aufsummiert. Ein insgesamt Wert von  $> 3$  zeigt Schmerz an, ein Wert von  $> 4$  großen Schmerz.[8]

Tabelle 2.1: NIPS-Scoring

NIPS	0 points	1 point	2 points
Facial Expr.	Relaxed	Contracted	-
Cry	Absent	Mumbling	Vigorous
Breathing	Relaxed	Different than basal	-
Arms	Relaxed	flexed/stretched	-
Legs	Relaxed	flexed/stretched	-
Alertness	Sleeping	uncomfortable	-

In den meisten mehrdimensionalen Scoring-Systeme werden die Schreigeräusche mit einbezogen. Tabelle 2.2 zeigt eine Übersicht über eine ausgewählte Menge an multimodalen Pain-Scores. Alle Pain-Scores sind für Kleinkinder bis 3 Jahren gedacht. In der Übersicht wird nicht wiedergegeben, welche weiteren Merkmale jeweils in das Scoring mit einbezogen werden, oder welche Ingesamtpunktzahlen auf welche Schmerzintensität hinweisen. Es soll an dieser Stelle nur verdeutlicht werden, welche unterschiedlichen Ansätze zur Bewertung des Schreiens aus medizinischer Sicht im Zusammenhang mit Pain-Scores existieren. Folgende Beobachtungen lassen sich aus der Übersicht ziehen:

1. Die zu beobachtenden Eigenschaften des Weinens werden mit subjektiv behafteten Werten charakterisiert. Beispielsweise wird im N-PASS-System ist ein Schmerz-Schrei

als „High-pitched or silent-continuous crying“ beschrieben. Es wird nicht fest definiert, was als „crying“ gilt oder welche Tonhöhe als „high-pitched“ ist. Auch die Erstquellen geben keine festen Definitionen.

2. Es gibt verschiedene Ansätze zur Bewertung des Weinens. Bei CRIE ist die Tonhöhe, bei BIIP die Länge und bei COMFORT die Art des Weinens entscheidend.
3. Die Beschreibungen sind kurz und prägnant gehalten, der Arzt hat in keinem der Modelle auf mehr als drei Parameter des Schreiens zu achten. Die Begründung liegt darin, dass bei allen Modellen a.) das Schreien nur eines von mehreren Faktoren ist, und b.) Die Schmerzbestimmung in einem vorgegebenen Zeitrahmen durchführbare sein muss.

System	P.	Description
FLACC[22]	0	No cry (awake or asleep)
	1	Moans or whimpers; occasional complaint
	2	Crying steadily, screams or sobs, frequent complaints
N-PASS[18]	-2	No cry with painful stimul
	-1	Moans or cries minimally with painful stimuli
	0	Appropriate Crying
	1	Irritable or Crying at Intervals. Consolable
	2	High-pitched or silent-continuous crying. Not consolable
BIIP[7]	0	No Crying
	1	Crying <2 minutes
	2	Crying >2 minutes
	3	Shrill Crying >2 minutes
CRIES[3]	0	If no cry or cry which is not high pitched
	1	If cry high pitched but baby is easily consoled
	2	If cry is high pitched and baby is inconsolable
COVERS[12]	0	No Cry
	1	High-Pitched or visibly crying
	2	Inconsolable or difficult to soothe
PAT[9]	0	No Cry
	1	Cry
DAN[5]	0	Moans Briefly
	1	Intermittent Crying
	2	Long-Lasting Crying, Continuous howl
COMFORT[13]	0	No crying
	1	Sobbing or gasping
	2	Moaning

	3	Crying
	4	Screaming
MBPS[16]	0	Laughing or giggling
	1	Not Crying
	2	Moaning quiet vocalizing gentle or whimpering cry
	3	Full lunged cry or sobbing
	4	Full lunged cry more than baseline cry

Tabelle 2.2: Übersicht über Pain-Scores

## 2.2 Schmerz-Schrei aus medizinischer Sicht

Die Frage ist: Woher kommen diese unterschiedlichen Bewertungen des Weinens in Tabelle 2.2? Gibt es eine Pain-Score, die aus wissenschaftlicher Sicht „recht hat“? Dieser Fragestellung unterliegen unterliegen zwei grundlegendere Fragen: 1.) Ist es überhaupt möglich, anhand der akustischen Eigenschaften den Grund für den Schrei abzuleiten, also beispielsweise Hunger, Einsamkeit oder Schmerz? Anders formuliert: Gibt es überhaupt so etwas wie einen Schmerz-Schrei? 2.) Ist es möglich, anhand der akustischen Eigenschaften den Schweregrad des Unwohlseins abzuleiten (also beispielsweise den Grad des Schrei-Versursachenden Schmerzes)?

Die Annahme, dass es möglich ist, aus dem Schreien den Grund abzuleiten, wird als „Cry-Types Hypothesis“ bezeichnet. Die berühmtesten Befürworter dieser Hypothese ist eine skandinavische Forschungsgruppe, auch bezeichnet als „Scandinavian Cry-Group“, die diese Idee in dem Buch „Infant Crying: Theoretical and Research Perspectives“ [2] publik machte. Die Annahme ist, dass die verschiedenen Ursachen *Hunger, Freude, Schmerz, Geburt und Anderes* klare Unterschiede hinsichtlich ihrer akustischen Merkmale aufweisen, welche an einem Spektogramm ablesbar seien. Entsprechende Beispiele werden in dem Buch gegeben. Nur einige Jahre Später zeigte Müller et al [6] in einem Paper, dass bei leichter Veränderung der Bedingungen der Experimente die Unterscheidung nicht möglich ist. Die Gegenhypothese ist, dass Weinen „nichts als undifferenziertes Rauschen“ sei. 50 Jahre später liegt kein anerkannter Beweis für die eine oder andere Hypothese vor. Es gibt nur starke Hinweise dafür, dass die Plötzlichkeit des Eintretens des Schreigrundes hörbar ist. Ein plötzliches Ereignis, wie ein Nadelstich oder ein lautes Geräusch, führen auch zu einem plötzlich beginnenden Schreien. Ein langsam einretendes Ereignis, wie ein langsam immer stärker werdender physischer Schmerz oder langsam eintretender Hunger führen auch zu einem langsam eintretenden Weinen. Da keine Einigung herrscht, wird empfohlen, den Grund aus dem Kontext abzuleiten.[21]

Die Zweite Frage nach der Ableitung der Stärke des Unwohlseins aus den akustischen Eigenschaften des Geschreis wird in der Fachsprache unter dem Begriff *Cry as a graded Signal* subsumiert. Je „stärker“ das Weinen, desto höher das Unwohlsein (*Level of Distress (LoD)*) des Säuglings. Tatsächlich bemessen wird dabei der von dem Beobachter vermutete Grad des Unwohlsein des Babies, und nicht der tatsächliche Grad, da dieser ohne die Möglichkeit der direkten Befragung des Kindes nie mit absoluter Sicherheit bestimmt werden kann. Dieser vermutete LoD wird entweder durch das subjektive Empfinden der Beobachter oder durch Pain-Scores festgestellt. Ein hohes Level of Distress hat vor allem



eine schnelle Reaktion der Aufsichtspersonen zur Beruhigung des Babies zur Folge, womit dem Geschrei eine Art Alarm-Funktion zukommt. Es gibt starke Hinweise darauf, dass das Level of Distress anhand objektiv messbarer Eigenschaften des Audiosignals bestimmt werden kann. So herrscht beispielsweise weitestgehend Einigung darüber, dass ein „lang“ anhaltendes Geschrei auf einen hohen Level of Distress hinweist. Insofern aus dem Kontext des Schreiens Schmerz als wahrscheinlichste Ursache eingegrenzt werden kann, kann aus einem hohen Level of Distress ein hoher Schmerz abgeleitet werden. [21] und [20]

Es herrscht wiederum keine Einigung darüber, welche akustischen Eigenschaften im Detail ein hohes Level of Distress anzeigen. Carlo V Bellieni et al [5] haben festgestellt, dass bei sehr hohem Schmerz in Bezug auf die DAN-Scala (siehe Tabelle 2.2) die Tonhöhe des Geschreis steigt. Qiaobing Xie et al [20] haben festgestellt, dass häufiges und „verzerrtes“ Schreien (ohne feststellbares Grundfrequenz, da der Ton stimmlos erzeugt wird) auf einen hohen Level of Distress hinweist.[21] Diese Uneinigkeit hat wahrscheinlich zu den verschiedenen Bewertungen in den Pain-Scores geführt. 2.2.

## 2.3 Physio-Akustische Modellierung des Weinens

Das Ziel dieses Kapitels ist die Schaffung eines einheitlichen Vokabulares, auf den sich bezogen wird, um das Schreien eines Babys zu beschreiben. Die hier vorgestellten Begriffe stammen sowohl aus dem Buch „A Physioacoustic Model of the Infant Cry “ H Golub und M Corwin [10] als auch aus dem Paper „Rythmic organization of the Sound of Infant Cry “ von Zeskind et al.[19]

Die Lautäußerung eines Neugeborenen, umgangssprachlich auch als „Weinen“ oder „Schreien“ bezeichnet, lässt sich im allgemeinen beschreiben als das „rythmische Wiederholen eines beim ausatmen erzeugen Geräusches, einer kurzen Pause, einem Einatmungs-Geräusch, einer zweiten Pause, und dem erneuten Beginnen des Ausatmungs-Geräusches.“[25].

Das Vokabular, welches insbesondere von H Golub und M Corwin geschaffen wurde, ist sehr umfassend. An dieser Stelle wird eine Auswahl grundlegender Begrifflichkeiten vorgestellt, die in dieser Arbeit gebraucht werden. Sie werden in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

**Expiration** beschreibt den Klang, der bei einem einzelnen, ununterbrochenem Ausatmen mit Aktivierung der Stimmbänder durch das Baby erzeugt wird. [19]. Der von Golub et al [10] verwendete Begriff **Cry-Unit** wird in dieser Arbeit synonym verwendet. Umgangssprachlich ist handelt es sich um einen einzelnen, ununterbrochenen *Schrei*.

**Inspiration** beschreibt den Klang, der beim Einatmen durch das Baby erzeugt wird.

**Burst** beshreibt die Einheit von einer Expiration und der darauf folgenden Inspiration. Das heisst, dass die zeitliche Dauer eines Bursts sowohl das Expiration-Geräusch, das Inspiration-Geräusch als auch die beiden Pausen zwischen diesen Geräuschen umfasst. Praktisch ergibt sich das Problem, dass vor allem bei stärkerem Hintergrundrauschen die Inspiration-Geräusche häufig weder hörbar noch auf dem Spektrogramm erkennbar sind. Daher wird die Zeitdauer eines Bursts oder Cry-Unit vom Beginn einer Expiration bis zum Beginn der darauf folgenden Expiration definiert und somit allein von den Expirations auf die Bursts geschlossen. Implizit wird somit eine Inspiration zwischen zwei Expirations angenommen.

**Cry** die insgesamte klangliche Antwort zu einem spezifischen Stimulus. Eine Gruppe meh-

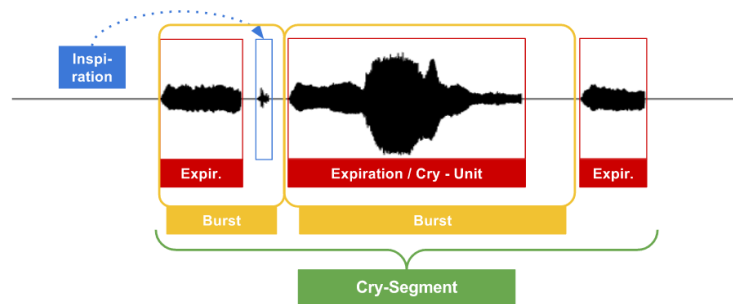


Abbildung 2.1: Veranschaulichung des Grundvokabulars

rerer Cry-Units.[10] In dieser Arbeit wird ein *Cry* als **Cry-Segment** bezeichnet, um Verwechslungen zu vermeiden.

Weiterhin wurden von H Golub und M Corwin [10] Cry-Units in eine der folgenden drei Kategorien eingeführt:

**Phonation** beschreibt eine Cry-Unit mit einer „vollen Vibration der Stimmbänder“ mit einer Grundfrequenz zwischen 250 und 700 Hz. Entspricht umgangssprachlich einem Weinen mit einem „klaren, hörbaren Ton“.

**Hyper-Phonation** beschreibt eine Cry-Unit mit einer „falsetto-artigem Vibration der Stimmbänder“ mit einer Grundfrequenz zwischen 1000 und 2000 Hz. Entspricht umgangssprachlich einem Weinen mit einem „sehr hohen, aber klaren, hörbaren Ton“.

**Dysphonation** beschreibt eine Cry-Unit ohne klar feststellbare Tonhöhe, produziert durch Turbulenzen an den Stimmbändern. Entspricht umgangssprachlichen dem „Brüllen oder Krächzen“.

Eine Cry-Unit gehört dabei mindestens einer dieser Kategorien an, kann aber auch in seinem zeitlichen Verlauf die Kategorie wechseln. H Golub und M Corwin [10] stellen weiterhin eine Reihe an charakteristischen Eigenschaften vor, die in Bezug auf ein Cry-Segment berechnet werden.

**Latency-Period** beschreibt die Dauer zwischen dem zufügen eines Schmerz-Stimulus und dem beginn des ersten Cry-Bursts des Segmentes

**Duration** beschreibt die insgesamt Zeitdauer des Cry-Segmentes. Es wird keine genaue Definition gegeben, wodurch Beginn und Ende definiert werden. Das Segment endet dort, wo es „scheint, aufzuhören“.

**Maximum-Pitch** beschreibt die höchste festgetellte Grunfrequenz des Segmentes.

... und viele weitere, die in [10] nachgelesen werden können, aus Platzgründen an dieser Stelle jedoch nicht vollständig genannt werden.

### 3 Grundlagen der Signalverarbeitung

Ein *Signal* ist eine Funktion eines Parameters mit numerischen Wertebereich. Die Abbildung zwischen Definitions- und Wertebereich kann, aber muss nicht durch eine Formel definiert sein. So fällt  $f(x) = \sin(x)$  genauso unter die Definition eines Signals wie eine Folge numerischer Werte, die durch die Aufnahme eines Messgerätes entstanden sind. Weiterhin kommt dem Wertebereich eine gewisse Bedeutung zu, wie *Zeit* oder *Ort*. Ein typisches Beispiel für ein Signal ist die Spannung, die abhängig von der Zeit von einem Mikrofon erzeugt wird. Da in dieser Arbeit nur Signale von Bedeutung sind, deren Wertebereich sich auf die Zeit bezieht, konzentrieren sich alle folgenden Bereiche auf diesen Bereich. Im Zusammenhang mit Signalen wird der Definitionsbereich auch als *unabhängiger Parameter* und der Wertebereich auch als *abhängiger Parameter* bezeichnet. [24, S. 11-12] [15, S. 22-23]

Bei einem zeit-kontinuierlichen Signal  $x(\cdot)$  ist der Wertebereich kontinuierlich, wie in Formel 3.1 definiert. Bei einem zeit-diskreten Signal  $x[\cdot]$  ist der Wertebereich diskret, wie in Formel 3.2 definiert. Abbildung 3.1 zeigt Beispiele für ein zeit-kontinuierliches und ein zeit-diskretes Signal. So beschreibt beispielsweise  $x[17] = s$  den Wert zur Zeit  $n = 17$ . „Zeit“ hat in diesem Kontext keine Einheit. Ein Wert wird auch als *Sample* oder *Amplitude* bezeichnet. [15, S. 22 - 23]

$$x(\cdot) := \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = s \quad (3.1)$$

$$x[\cdot] := \forall n \in \mathbb{Z} : x[n] = s \quad (3.2)$$

Zeit-diskrete Signale werden häufig dadurch gewonnen, dass ein zeit-kontinuierliches Signal in regelmäßigen Intervallen abgetastet wird. Dieser Prozess wird als *Sampling* bezeichnet und durch Formel 3.3 definiert. Der Parameter  $T_s$  wird als *Sampling-Interval* bezeichnet. Das Reziproke des Sampling-Intervalls heißt *Sampling-Rate* und wird in der Einheit  $\frac{1}{s} = \text{Hz}$ , siehe Formel 3.4. Eine Sampling-Rate von  $f_s = 44\,100 \text{ Hz}$  bedeutete beispielsweise, dass ein Signal 44100 mal pro Sekunde abgetastet wurde. [15, S. 24]

$$x[n] = s(n \cdot T_s), -\infty < n < \infty \quad (3.3)$$

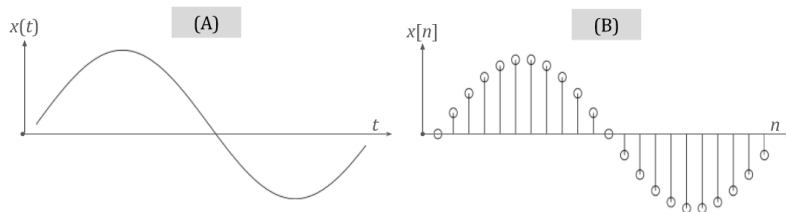


Abbildung 3.1: Ein zeit-kontinuierliches Signal (A) und ein zeit-diskretes Signal (B)

---


$$\text{Samplingrate: } f_s = \frac{1}{T_s} [\text{Hz}] \quad (3.4)$$

Das so genannte *Nyquist-Shannon-Abtasttheorem* nach Formel 3.5 besagt, dass die Samplingrate mindestens doppelt so hoch sein muss wie die höchste im abgetasteten Signal enthaltene Frequenz. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass die höchste im abgetasteten Signal enthaltene Frequenz die Hälfte der Abtastfrequenz entspricht.

$$f_s > 2 \cdot f_{\max} \quad (3.5)$$

Da in dieser Arbeit nur zeit-diskrete Signale von Interesse sind, werden ab diesem Punkt die Definitionen für zeit-kontinuierliche Signale ausgelassen. In den beiden Hauptquellen dieser Arbeit, [24] und [15] ist eine Uneinigkeit und Inkonsistent über die symbolische Bezeichnung von Signal und Sample festzustellen. In [15] wird die Konvention eingeführt, mit  $x[n]$  das gesamte Signal, als auch ein Sample des des Signals zu bezeichnen, was an einigen kritischen Stellen zu unklaren Definitionen führt. In [24] wird eingeführt, dass das gesamte Signal als  $x[ ]$ , und ein Sample als  $x[n]$  bezeichnet wird. Diese Definition wird im Buch jedoch inkonsistent verwendet und an einigen Stellen  $x[n]$  als Bezeichnung für das gesamte Signal verwendet. In dieser Arbeit wird die Konvention eingeführt, mit  $x[ ]$  das gesamte Signal, und mit  $x[n]$  ein Sample dieses Signals zu bezeichnen. Dies führt zwangsweise zur Abwandlung einiger Formeln der beiden Hauptquellen dieses Grundlagentheils, um die Konsistenz beizubehalten.

Der *Support* ist das kleinst mögliche Zeitintervall, der alle Samples enthält, die nicht den Wert 0 haben, wie Formel 3.6 definiert.

$$\begin{aligned} \text{Sup}(x[ ]) &= [sup_s, sup_e] \quad , sup_s, sup_e \in \mathbb{Z} \\ , x[sup_s] &\neq 0 \wedge x[sup_e] \neq 0 \wedge \forall n \notin [sup_s, sup_e] : x[n] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die *Dauer* eines Signales ist die Länge des Supportes nach Formel 3.7. In dieser Arbeit herrscht die Konvention, dass die Länge des Signals kurz mit der Variable  $N$  abgekürzt wird. Das Signal  $x[n] = \cos(n)$ ,  $0 \leq n \leq 3$  hat beispielsweise den Support  $[0, 3] = \{0, 1, 2, 3\}$  und die Dauer 4. Ein *unendliches Signal* hat einen unendlichen langen Support, das heißt es gilt  $\text{Length}(x[ ]) = \infty$ . Ein *endliches Signal* hat einen endlichen Support, das heißt  $\text{Length}(x[ ]) \neq \infty$ . Wird in dieser Arbeit der Support nicht explizit angegeben, gilt bei endlichen Signalen als Konvention  $\text{Sup}(x[ ]) = [0, N - 1]$ . Unabhängig von der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Supportes wird davon ausgegangen, dass sich alle Signale von negativer bis positiver Unendlichkeit erstrecken. Werden also Berechnungen auf Samples eines Signales durchgeführt, die außerhalb seines Supportes liegen, werden diese Samples mit dem Wert 0 angenommen. [15, S. 24]

$$\text{Length}(x[ ]) = sup_e - sup_s + 1 = N \quad (3.7)$$

Ein Signal gilt als *periodisch*, wenn Formel 3.8 erfüllt ist. Der Parameter  $N$  wird als Periode von  $x[ ]$  bezeichnet. Wenn ein Signal mit  $N$  periodisch ist, dann ist es auch mit  $2N, 3N, \dots$  periodisch. Die Grundfrequenz  $N_0$  ist das kleinste  $N$ , für das Formel 3.8 erfüllt

ist. Abbildung 3.2 zeigt ein Beispiel für ein nicht-periodisches und ein periodisches Signal. [15, S. 24]

$$\exists N : \forall n \in \text{Sup} : x[n + N] = x[n] \rightarrow \text{Periodisch}(x[n]) = \text{true} \quad (3.8)$$

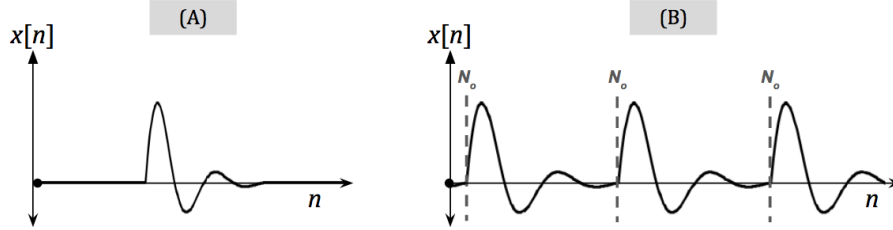


Abbildung 3.2: Ein nicht-periodisches Signal (A) und ein periodisches Signal (B)

### 3.1 Statistische Merkmale

Im folgenden wird ein Überblick über die häufig verwendete Signaleigenschaften gegeben. Abbildung 3.3 visualisiert die Erläuterungen.

1. Der **Maximalwert** / **Minimalwert** beschreibt den höchsten / niedrigsten in  $x[ ]$  enthaltenen Wert nach den Formel 3.9.

$$\begin{aligned} \max(x[ ]) &= \max_{n=0 \dots N-1} (x[n]) \\ \min(x[ ]) &= \min_{n=0 \dots N-1} (x[n]) \end{aligned} \quad (3.9)$$

2. Der **Durchschnittswert** / **Average Value** beschreibt den durchschnittlichen Wert aller Samples von  $x[ ]$  nach Formel 3.10. Dieser Durchschnittswert wird über dem Intervall  $[n_1, n_2]$  berechnet.

$$\text{AVG}(x[ ]) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \quad (3.10)$$

3. Der **Mean Squared Value** (*MSV*) beschreibt den quadrierten Durchschnittswert über ein bestimmtes Intervall nach Formel 3.11. Er wird auch als *durchschnittliche Energie* oder *average Power* bezeichnet.

$$\text{MSV}(x[ ]) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]^2 \quad (3.11)$$

4. Das **Root Mean Square** (*RMS*) ist die Wurzel des Mean Squared Value nach Formel 3.12. Der RMS findet häufiger Anwendung als der MSV, da er besser ins Verhältnis zu den Werten des Signals gesetzt werden kann. Er wird im Deutschen auch als **Effektivwert** oder **Durchschnittsleistung** bezeichnet. Da die deutschen Begriffe in einigen

Quellen jedoch auch für den MSV verwendet werden, wird an dieser Stelle nur mit den englischen Begriffen gearbeitet.

$$\text{RMS}(x[]) = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]^2} \quad (3.12)$$

5. Die **Energie** / **Energy** bezeichnet die „Stärke“ eines Signals über einen bestimmten Intervall nach Formel 3.13. Sie entspricht dem MSV-Wert multipliziert der Länge des Intervalls. [15, S. 27-28]

$$E(x[]) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]^2 \quad (3.13)$$

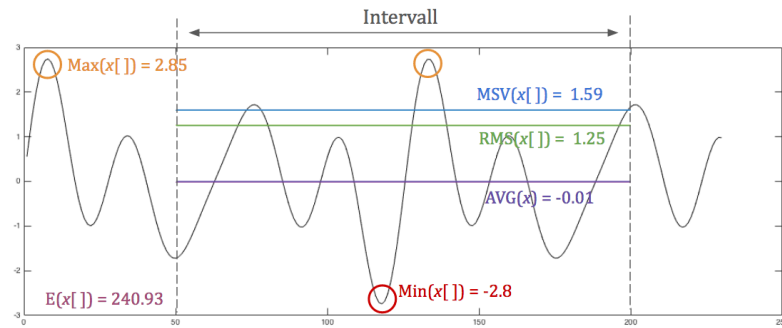


Abbildung 3.3: Statistische Werte eines Signals über das Intervall [50,200]

Die Addition und Multiplikation wird bei Signalen komponentenweise durchgeführt, wie Formel definiert. Abbildung 3.4 visualisiert diese Operationen.

$$\begin{aligned} x_1[] + x_2[] = y[] &:= \bigvee_{n=n_1}^{n_2} : x_1[n] + x_2[n] = y[n] \\ x_1[] \cdot x_2[] = y[] &:= \bigvee_{n=n_1}^{n_2} : x_1[n] \cdot x_2[n] = y[n] \end{aligned} \quad (3.14)$$

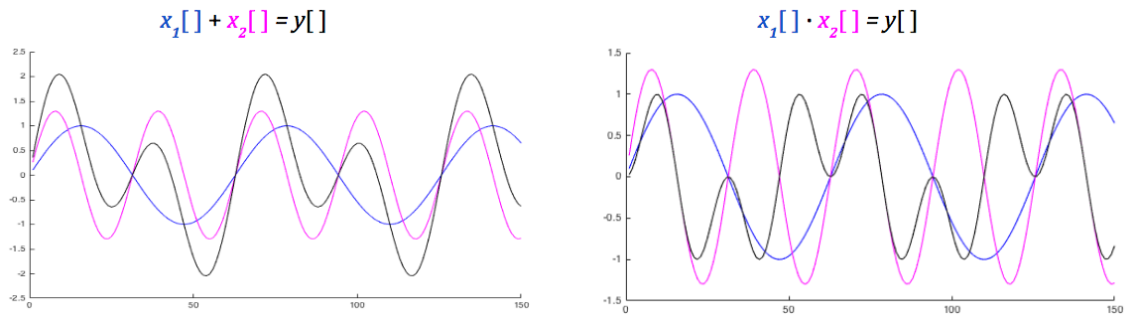


Abbildung 3.4: Komponentenweise Addition und Multiplikation zweier Signale

## 3.2 Fehlersignale

Die Addition wird unter anderem für die Modellierung des Einflusses von Störungen benötigt. Angenommen, ein Signal  $x[ ]$  wird übertragen, auf dem Übertragungsweg jedoch durch ein anderes Störsignal wie z.B. Rauschen  $e[ ]$  überlagert. Dieses Störsignal wird in diesem Zusammenhang auch als „Fehler-Signal bezeichnet. Das resultierende Signal  $x'[ ]$  wird nach Formel 3.15 berechnet. Kennt man sowohl das Eingangssignal  $x[ ]$  als auch das Ausgangssignal  $x'[ ]$ , kann das Störsignal  $e[ ]$  nach Formel 3.16 berechnet werden.

$$x'[ ] := \bigvee_{n=n_1}^{n_2} : x'[n] = x[n] + e[n] \quad (3.15)$$

$$e[ ] := \bigvee_{n=n_1}^{n_2} : e[n] = x'[n] - x[n] \quad (3.16)$$

Errechnet man nun den den MSV- oder RMS-Wert des Störsignales  $e[ ]$ , gibt das Ergebnis einen Eindruck über die „Stärke“ des Fehler-Signals. Der MSE-Wert des Fehlers wird in diesem Zusammenhang auch als *Mean Squared Error* (*MSE*) und der RMS-Wert als *Root Mean Squared Error* (*RMSE*) oder einfach als *Fehler* oder *Error* bezeichnet. Formel 3.17 und 3.18 definierten die Berechnungen des MSE und RMSE. Der RMSE hat im Gegensatz zum MSE den Vorteil, dass er besser ins Verhältnis zu den Werten des Fehlersignals gestetzt werden kann. Ein  $RMSE = 0$  heisst, dass  $x[ ] = x'[ ]$  und somit kein Störsignal vorliegt. Ein  $RMSE = RMS(x)$  heisst, dass Eingangs- und Störsignal den selben Effektivwert und somit die selbe „stärke“ besitzen. Abbildung 3.5 visualisiert die Berechnung des MSE und RMSE. [15, S: 28 - 29]

$$MSE(x[ ], x'[ ]) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} (x[n] - x'[n])^2 \quad (3.17)$$

$$RMSE(x[ ], x'[ ]) = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} (x[n] - x'[n])^2} \quad (3.18)$$

Eine weitere Betrachtungsweise bezüglich der Stärke des Rauschens auf das Signal ist, das Eingangssignal ins Verhältnis zum Rauschsignal zu setzen. Formel 3.19 gibt die Definition. Ein  $SNR_{rel}(x[ ], e[ ]) = 1$  heisst, dass das Eingangssignal den selben MSV wie das Fehlersignal hat. Meistens ist der MSV des Eingangssignals in der Praxis sehr viel höher als der des Fehler-Signals. Um den Zahlenraum zu begrenzen, wird die Pseudo-Einheit dB verwendet. Formel 3.20 den so berechneten *Signal-Rausch-Abstand* (*SNR*, englisch *Signal-to-Noise-Ratio*). Entgegen des MSE weiss ein *niedriger* SNR-Wert auf ein *starkes* Rauschen hin, und ein *hoher* SNR auf ein *schwaches* Rauschen! Abbildung 3.5 visualisiert die Berechnung des SNR.

$$SNR_{rel}(x[ ], e[ ]) = \frac{MSV(x[ ])}{MSV(e[ ])} \quad (3.19)$$

$$SNR(x[ ], e[ ]) = 10 \cdot \lg \left( \frac{MSV(x[ ])}{MSV(e[ ])} \right) \text{ dB} \quad (3.20)$$

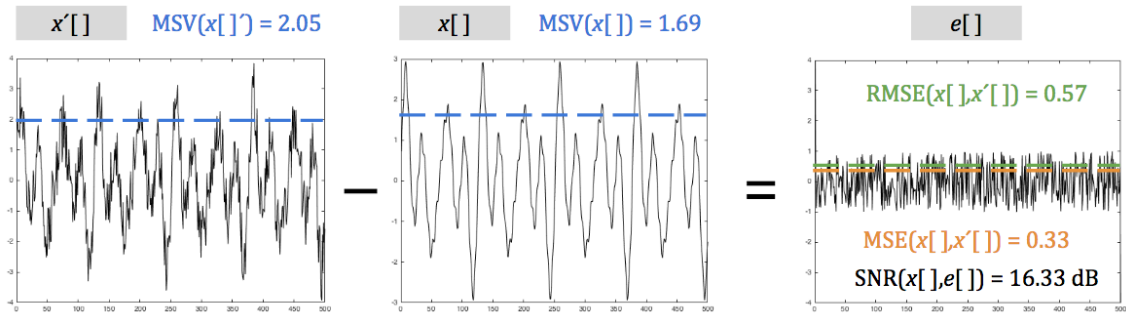


Abbildung 3.5: Berechnung des MSE, RMSE und SNR eines von Rauschen gestörten Signals

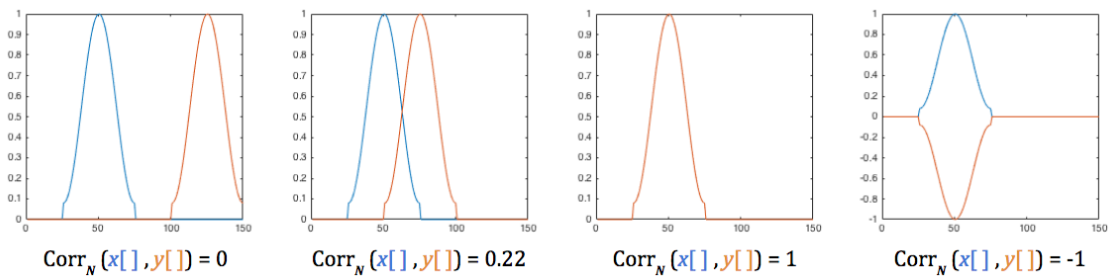
### 3.3 Korrelation

Die *Korrelation* (engl *Correlation*) zweier Signale  $x_1[]$  und  $x_2[]$  wird nach Formel 3.21 als die Summe aller Samples des Produktes der beiden Signale über einen bestimmtes Intervall  $[n_1, n_2]$  definiert. Das Ergebnis ist eine Wert  $\in \mathbb{R}$  welches die „Ähnlichkeit der beiden Signale“ kennzeichnet. Ein Positiver Wert weist auf eine *positive Korrelation* hin, ein negativer Wert auf eine *negative Korrelation*, und ein Wert von  $\text{Corr}(x_1[], x_2[]) = 0$  auf *keine Korrelation*. Aus der gröÙe des Wertes kann die Stärke der Korrelation jedoch nicht direkt interpretiert werden. Bei der *normalisierten Korrelation*  $\text{Corr}_N(x[], y[])$  wird daher die Korrelationswert ins Verhältnis zu den Energien der beiden Signale gesetzt, wie in Formel 3.22 definiert. Der Wertebereich der normalisierten Autokorrelation ist  $-1 \leq \text{Corr}_N(x[], y[]) \leq +1$ . Daraus ergeben sich die in Formel 3.23 definierten Zusammenhänge. Ein Wert von  $\text{Corr}_N(x[], y[]) = 1$  wird auch als *perfekte Korrelation* bezeichnet, ein Wert von  $\text{Corr}_N(x[], y[]) = -1$  als *anti-perfekte Korrelation* [15, S. 46 - 47] Abbildung 3.6 visualisiert die normalisierte Korrelation eines Signales  $x[]$  mit den Signalen  $y[]$ .

$$\text{Corr}(x[], y[]) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot y[n] \quad (3.21)$$

$$\text{Corr}_N(x[], y[]) = \frac{\text{Corr}(x[], y[]) }{\sqrt{E(x[]) \cdot E(y[])}} \quad (3.22)$$

$$\text{Corr}_N(x[], y[]) = \begin{cases} 1 & \rightarrow x[] = y[] \\ -1 & \rightarrow x[] = -y[] \end{cases} \quad (3.23)$$


 Abbildung 3.6: Correlation der Signale  $x[n]$  und  $y[n]$



Die Korrelation und die normalisierte Korrelation werden aufgrund ihrer Eigenschaften verwendet, um ein Signal  $x[ ]$  in einem Signal  $y[ ]$  zu detektieren. Häufig ist das Ziel, ein von einem Rauschen  $e[ ]$  überlagertes Signal  $x[ ] + e[ ] = y[ ]$  auf das Vorhandensein des erwarteten Signales  $x[ ]$  hin zu überprüfen. Wie in Abbildung 3.6 zu sehen ist, ist der Korrelationswert jedoch von der Verzögerung des Signals abhängig. Daher wird in der *Cross – Correlation* das Signal  $y[ ]$  mit einer verzögerten Varianten des Signals  $x[ ]$  korreliert, wie in Formel 3.24 definiert. Der parameter  $k$  wird als *Lag* bezeichnet und gibt die Verzögerung an.

$$\text{X-Corr}(x[ ], y[ ], k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - k] \cdot y[n] \quad (3.24)$$

Im Prozess der so genannten *Running Correlation* nutzt man die Cross-Correlation mit den Lags  $k = 0 \dots k_{max}$  zur Erstellung des *Korrelationssignals*  $r[ ]$ , wie in Gleichung 3.25 definiert. Das Signal  $r[ ]$  gibt Auskunft, zu welchen Verzögerungswerten  $k$  die größten Ähnlichkeiten zwischen  $x$  und  $y$  gefunden wurden.

$$r[ ] := \bigvee_{k=0}^{k_{max}} : r[k] = \text{X-Corr}(x[ ], y[ ], k) \quad (3.25)$$

Abbildung 3.7 zeigt ein Beispiel für die Erzeugung von  $r[ ]$  mit der Sliding Correlation. (A) zeigt das zu detektierende Signal  $x[ ]$  und (B) das Signal  $y[ ]$ . (C) zeigt das Korrelationssignal  $r[ ]$  mit den Lags  $k = 0, \dots, 1150$ . [15, S. 47 - 48]

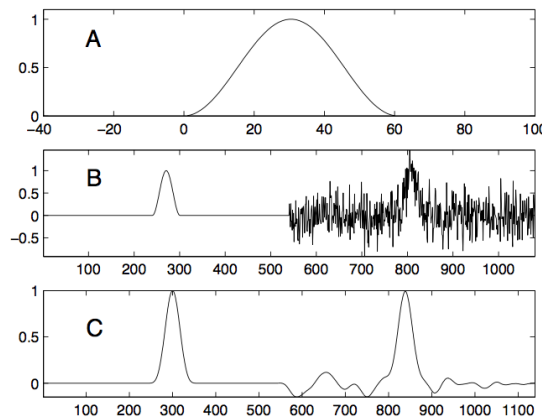


Abbildung 3.7: Beispiel einer Running Correlation

## 3.4 Diskrete Fourier-Transformation

Die *Fourier-Transformation* ist eine Familie von Transformationen, mit deren Hilfe Signale aus dem Zeit-Bereich in den Frequenz-Bereich transformiert werden. Das heißt, dass der unabhängige Parameter nach der Transformation nicht mehr die Zeit, sondern die Frequenz beschreibt.

Die konkrete Berechnung der Transformation ist abhängig von den Eigenschaften des Signales. Die Variante, die die meiste Anwendung in der digitalen Signalverarbeitung

findet, ist die *Diskrete Fourier-Transformation* (kurz **DFT**). Sie transformiert *zeit-diskrete, periodische, unendliche* Signale (siehe Formel 3.2 und 3.8) in den Frequenz-Bereich. Es existiert sowohl eine reelle als auch eine komplexe Variante der DFT. Die reelle Variante wird mit Hilfe reeller Zahlen, und die komplexe mit Hilfe komplexer Zahlen berechnet. An dieser Stelle werden beide Variante vorgestellt: Die komplexe, da der effizienteste Algorithmus zur Berechnung der DFT, die *Fast-Fourier-Transformation* (**FFT**) auf ihr beruht, und die reelle, da sie das Verständnis der komplexen vereinfacht. [24, S. 142 - 146]

### 3.4.1 Reelle DFT

Jedes zeitdiskretes, periodisches Signal  $x[ ]$  kann erzeugt werden, indem eine endliche Anzahl von Sinus- und Cosinus-Signalen geeigneter Frequenz und Amplitude aufaddiert werden. Der Umkehrschluss ist, dass sich jedes Signal in eine Menge von Sinus- und Cosinus-Signalen zerlegen lässt, ohne das Information für das Signal  $x[ ]$  verloren geht. Diese Zerlegung des Signals  $x[ ]$  wird als *Dekomposition* bezeichnet, die Kombination der Sinus- und Cosinus-Siganel zu  $x[ ]$  als *Synthese*. Genauer gesagt werden für ein Signal  $x[ ]$  mit  $\text{Length}(x[ ]) = N$  höchstens  $\frac{N}{2} + 1$  Sinus- und  $\frac{N}{2} + 1$  Cosinus-Wellen benötigt, also insgesamt  $N + 2$  Signale. Gleichung 3.26 fasst diese Aussage zusammen. [24, S. 144 - 147]

$$x[ ] := \bigvee_{n=0}^{N-1} : x[n] = A[0] \cos_{f_0}[n] + \dots + A[N/2] \cos_{f_{N/2}}[n] + B[0] \sin_{f_{N/2}}[n] + \dots + B[N/2] \sin_{f_{N/2}}[n] \quad (3.26)$$

Die Cosinus- und Sinus-Schwingungen, die in Gleichung 3.26 verwendet werden, werden in Gleichung 3.27 definiert. Die Faktoren  $A[ ]$ ,  $B[ ]$  geben die Amplitude der entsprechenden Cosinus/Sinus-Schwingung an, der Faktor  $f$  die Frequenz der Schwingung (Perioden pro Sekunde), und  $f_s$  die Sampling-Rate (Siehe Gleichung 3.4). [15, S. 62] [24, S. 150] Abbildung 3.8 zeigt ein Beispiel für die Cosinus-Schwingung  $[A_f = 2] \cdot \cos_{f=4\text{Hz}}[ ]$ .

$$\begin{aligned} \cos_f[n] &= \cos(2\pi f \frac{n}{f_s}) \\ \sin_f[n] &= \sin(2\pi f \frac{n}{f_s}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

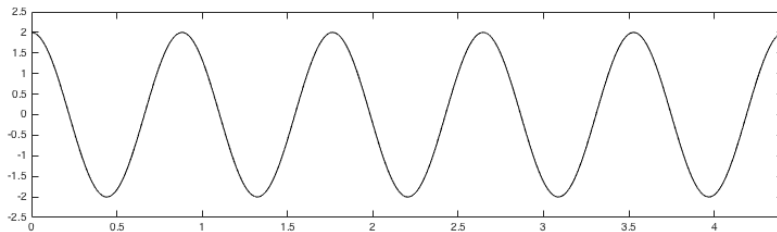


Abbildung 3.8: 1 s = 44100 Samples der Cosinus-Schwingung  $[A = 2] \cdot \cos_{f=4\text{Hz}}[ ] = 2 \cdot \cos(2\pi 4 \frac{n}{f_s})$  bei einer Sampling-Rate von  $f_s = 44100\text{ Hz}$

Abbildung 3.9 zeigt ein Beispiel für die Synthese eines Signal  $x[ ]$  mit  $N = 200$  Samples mit einer Samlingle rate von  $f_s = 100\text{ Hz}$ . Es werden theoretisch  $\frac{N}{2} + 1 = 101$  Cosinus und 101 Sinus-Signale für die Synthese benötigt, da aber nur 4 Signale eine Amplitude  $> 0$

haben, werden auch nur diese Signale gezeigt. Die Frage ist: Angenommen, man kennt nur das Signal  $x[ ]$ , wie errechnet man daraus die Amplituden  $A[ ]$ ,  $B[ ]$  und Frequenzen  $f$  der Cosinus- und Sinus-Signale? Anders gesagt: Wie berechnet man die Dekomposition?

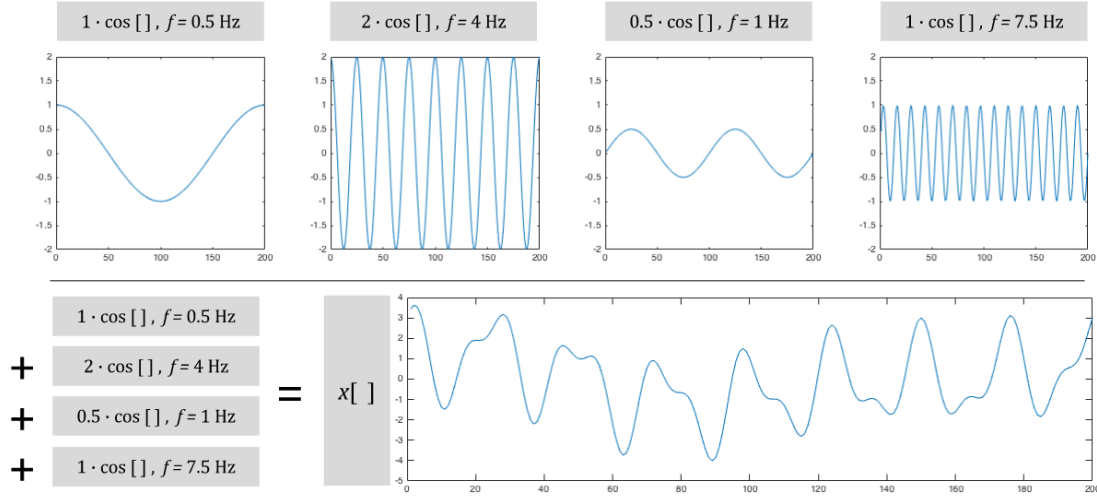


Abbildung 3.9: Synthetisierung eines Signals  $x[ ]$  aus vier Cosinus-Funktionen, mit  $\text{Length}(x[ ]) = 200$  und  $f_s = 100$  Hz

Das Problem lässt sich auf die Berechnung der Amplituden  $A[ ]$ ,  $B[ ]$  beschränken, in dem man den Fakt, dass höchstens  $\frac{2}{N} + 1$  Cosinus- und  $\frac{2}{N} + 1$  Sinus-Signale für die Synthese benötigt werden, in Verbindung mit dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem (Gleichung 3.5) bringt. Die niedrigst mögliche Frequenz, die im Signal  $x[ ]$  enthalten sein kann, ist  $f_0 = 0$  Hz, und die höchst mögliche Frequenz  $f_{max} = \frac{f_s}{2}$ , womit die Frequenzen der Signale  $\cos_{f_0=0}[ ]$ ,  $\cos_{f_{max}=f_s/2}[ ]$ ,  $\sin_{f_0=0}[ ]$ ,  $\sin_{f_{max}=f_s/2}[ ]$  bereits feststehen. Die restlichen  $\frac{2}{N} - 1$  Cosinus-Signale teilen sich gleichmäßig auf diesen Frequenzraum auf, entsprechendes gilt für die Sinus-Signale. Die Frequenz der insgesamt  $N + 2$  Cosinus/Sinus-Signale ergibt sich somit direkt als Funktion der Samplingrate und der Länge des Signals  $x[ ]$ . Gleichung 3.28 fasst diesen Zusammenhang zusammen. Die dort beschriebenen Funktionen  $\cos_k[ ]$  und  $\sin_k[ ]$  werden als *Basisfunktionen* bezeichnet. Aus dem Index  $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$  lässt sich die Frequenz der jeweiligen Basisfunktion nach Gleichung 3.29 berechnen.[24, 140 - 151, S.] In Bezug auf das Beispiel aus Abbildung 3.9 ergeben sich die Indexe  $[\cos_{f=0.5 \text{ Hz}}[ ] = \cos_1[ ]]$ ,  $[\cos_{f=4 \text{ Hz}}[ ] = \cos_8[ ]]$ ,  $[\sin_{f=1 \text{ Hz}}[ ] = \sin_2[ ]]$  und  $[\sin_{f=7.5 \text{ Hz}}[ ] = \sin_{15}[ ]]$

$$\begin{aligned} \cos_k[ ] &:= \forall_{n=0}^{N-1} : \cos_k[n] = \cos(2\pi k \frac{n}{N}) \\ \sin_k[ ] &:= \forall_{n=0}^{N-1} : \sin_k[n] = \sin(2\pi k \frac{n}{N}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$N = \text{Length}(x[ ])$$

$$f = k \frac{f_s}{N} \quad (3.29)$$

Das Problem der Dekomposition wird so auf die Suche der Amplituden-Koeffizienten  $A[k]$ ,  $B[k]$  beschränkt, die zu den jeweiligen Basisfunktionen  $\cos_k[ ]$  und  $\sin_k[ ]$  gehören. Die

Frage ist, vereinfacht formuliert, wie „stark“ jede der Basisfunktionen  $\cos_0[\cdot], \dots, \cos_{N/2}[\cdot]$  und  $\sin_0[\cdot], \dots, \sin_{N/2}[\cdot]$  in  $x[\cdot]$  enthalten ist. Die Antwort darauf ist die in Kapitel 3.3 vorgestellte Korrelation. Der Korrelationswert einer Cosinus-Basisfunktion mit Eingangssignal  $\text{Corr}(x[\cdot], \cos_k[\cdot]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos_k[n]$  gibt somit eine Aussage darüber, wie stark die entsprechende Cosinus-Schwingungen zur Synthese von  $x[\cdot]$  beiträgt. Ein Wert von 0 spricht für keinen Beitrag, ein hoher oder niedriger Wert für einen positiven oder negativen Beitrag. [24, S. 157 - 158]

Dieses Vorgehen lässt sich sogenannten *forward DFT* nach Formel 3.30 verallgemeinern, kurz als **DFT** bezeichnet. Das Ergebnis sind die Koeffizienten  $\bar{A}[\cdot] = \bar{A}[0] \dots \bar{A}[N/2]$  und  $\bar{B}[\cdot] = \bar{B}[0] \dots \bar{B}[N/2]$ . Die Koeffizienten werden gemeinsam als der *Frequenz-Bereich* in *kartesischer Notation*  $X[\cdot]$  bezeichnet. Das  $X[\cdot]$  hat im Zusammenhang mit der reellen DFT einen rein symbolisch bezeichnenden Charakter und wird erst im Zusammenhang mit der *komplexen DFT* in Kapitel 3.4.2 zu einem Signal. [24, S. 158]

$$\text{DFT}\{x[\cdot]\} = X[\cdot] := \begin{cases} \bar{A}[\cdot] := \bigvee_{k=0}^{N/2} : \bar{A}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi k \frac{n}{N}) \\ \bar{B}[\cdot] := \bigvee_{k=0}^{N/2} : \bar{B}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi k \frac{n}{N}) \end{cases} \quad (3.30)$$

In Bezug auf das Beispiel aus Abbildung 3.9 ergeben sich bei Anwendung von Formel 3.30 auf das Signal  $x[n]$  die Koeffizienten  $[\bar{A}_{f=0.5 \text{ Hz}} = \bar{A}[1] = 100]$ ,  $[\bar{A}_{f=4 \text{ Hz}} = \bar{A}[8] = 200]$ ,  $[\bar{B}_{f=1 \text{ Hz}} = \bar{B}[2] = 50]$  und  $[\bar{B}_{f=7.5 \text{ Hz}} = \bar{B}[15] = 100]$ . Um die eigentlichen Koeffizienten  $A[1] = 1$ ,  $A[8] = 2$ ,  $B[2] = 0.5$  und  $B[15] = 1$  zu erhalten, muss die Umrechnungsvorschrift nach den Formel 3.31 und 3.32 angewandt werden. Dieser Transformationsschritt  $\bar{A}[\cdot] \mapsto A[\cdot]$  und  $\bar{B}[\cdot] \mapsto B[\cdot]$  ist ein *Extra-Schritt*, den jeder reelle DFT nach sich zieht. [24, S. 152 - 153]

$$A[\cdot] := \bigvee_{k=0}^{N/2} : A[k] = \begin{cases} \frac{\bar{A}[k]}{N} & , \text{ falls } k = 0 \vee k = N/2 \\ \frac{\bar{A}[k]}{N/2} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$B[\cdot] := \bigvee_{k=0}^{N/2} : B[k] = \frac{B_k}{N/2} \quad (3.32)$$

Gleichung 3.33 definiert die Synthese des Signals  $x[\cdot]$  aus den Basis-Funktionen mit Hilfe der Koeffizienten  $A[\cdot]$  und  $B[\cdot]$ . Die Formel wird auch als *inverse DFT* (**iDFT**) bezeichnet. [24, S. 152 - 153]

$$\text{DFT}\{X[\cdot]\} = x[\cdot] := \bigvee_{n=0}^{N-1} : x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} A[k] \cos(2\pi k \frac{n}{N}) + \sum_{k=0}^{N/2} B[k] \sin(2\pi k \frac{n}{N}) \quad (3.33)$$

Abbildung 3.10 gibt einen Überblick über den Zusammenhang  $x[\cdot]$  und  $X[\cdot]$ . Da mit steigender Länge von  $x[\cdot]$  die Anzahl an Basis-Funktionen im Frequenzbereich  $X[\cdot]$  steigt, wird die Auflösung des Frequenz-Bereiches umso höher, je länger  $x[\cdot]$  gewählt wird. Im

Gegenzug sinkt die Auflösung in Bezug auf den Zeit-Bereich: Der Frequenz-Bereich trifft keine Aussage darüber *wann* etwas passiert, sondern nur *welche Frequenzen* daran beteiligt sind.[24, S. 170]

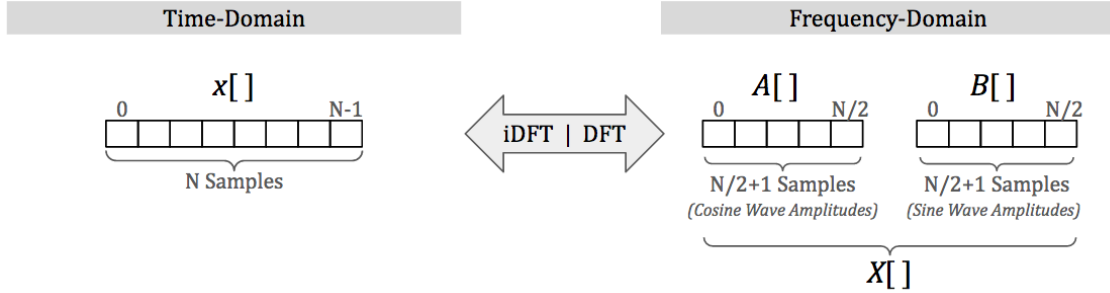


Abbildung 3.10: Überblick über die DFT und die inverse DFT

Aus Formel 3.33 geht hervor, dass bei der Synthese jeweils ein Cosinus-Signal und ein Sinus-Signal der selben Frequenz addiert wird. Diese Addition erzeugt einen sogenannten *Sinusoiden*, eine Cosinuswelle mit der Amplitude  $M$  der Phasenverschiebung  $\phi$  nach Formel 3.34.[24, S. 162]

$$\begin{aligned} A \cos(x) + B \sin(x) &= M \cos(x + \phi) \\ , M &= \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \phi = \arctan(B/A) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Auf Basis von Formel 3.34 lässt sich der gesamte Frequenz-Bereich in kartesischer Notation als Menge von Sinusoiden-Schwingungen mit den Magnituden  $M[] = M[0] \dots M[N/2]$  und den Phasenverschiebungen  $\phi[] = \phi[0] \dots \phi[N/2]$  ausdrücken. Formel 3.35 definierte diese Transformation des Frequenz-Bereichs von kartesischer Notation in die *polare Notation*. Formel definiert die dazu inverse Transformation. [24, S. 162] Abbildung 3.11 zeigt den Frequenzbereich in polarer Notation für das Beispiel aus Abbildung 3.9.

$$(A[], B[]) \mapsto (M[], \phi[]) = \begin{cases} M[] := \forall_{k=0}^{N/2} : M[k] = \sqrt{(A[k]^2 + B[k]^2)} \\ \phi[] := \forall_{k=0}^{N/2} : \phi[k] = \arctan(B[k]/A[k]) \end{cases} \quad (3.35)$$

$$(M[], \phi[]) \mapsto (A[], B[]) = \begin{cases} A[] := \forall_{k=0}^{N/2} : A_k = M_k \cdot \cos(\phi_k) \\ B[] := \forall_{k=0}^{N/2} : B_k = M_k \cdot \sin(\phi_k) \end{cases} \quad (3.36)$$

Die kartesische Notation wird verwendet, um die DFT und die inverse DFT zu berechnen. Die polare Notation hat den Vorteil, dass vor allem die Magnituden  $M_k$  für den Menschen leichter zu interpretieren sind. Die Magnituden  $M_k$  sind Audioingenieuren als *Spectrum* bekannt und werden in dieser Arbeit auch als solches bezeichnet. Die Transformation in die polare Notation wird deshalb vor allem dann Angewandt, wenn der Mensch den Frequenz-Bereich interpretieren soll. [24, S. 164]

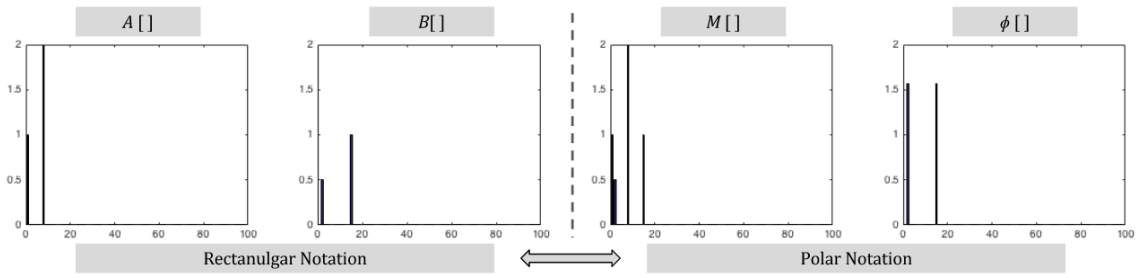


Abbildung 3.11: Frequenz-Bereich des Beispiels aus Abbildung 3.9

Ein Schlussbemerkung: In der Einleitung dieses Kapitels wurde erwähnt, dass die DFT *zeit-diskrete, periodische, unendliche* Signale transformiert, während in der hier vorgestellten Erläuterung das Signal sowohl als endlich angenommen, als auch keine Aussage über die Periodizität gemacht wurde. Bei der DFT wird davon ausgegangen, dass das Signal *außerhalb* des Supportes von  $x$  unendlich oft wiederholt wird, um die Voraussetzungen zu erfüllen. Dabei handelt es sich jedoch um einen „mathematischen Trick“ der nur in Ausnahmefällen Einfluss auf den Frequenz-Bereich hat. Diese Ausnahmefälle tangieren diese Arbeit jedoch nicht, weshalb sie an dieser Stelle nicht weiter erläutert werden.[24, S. 145]

### 3.4.2 Komplexe DFT

Gleichwohl die in Kapitel 3.4.1 vorgestellte *reelle DFT* hilft beim Verständnis des Frequenz-Bereiches hilft, ist die Berechnung der DFT nach Formel 3.30 Rechnerisch zu ineffizient, um in Echtzeit durchgeführt zu werden. Der am weitesten verbreitete Algorithmus zur Berechnung des Frequenz-Bereiches, die *Fast Fourier-Transformation* erlaubt hingegen die Berechnung der DFT in Echtzeit. Da die FFT auf der *complexen* Variante der DFT basiert, wird sie an dieser Stelle vorgestellt. [24, S. 225]

Die Basis der komplexen DFT ist die *Eulerformel*, definiert in Formel 3.37. Sie erlaubt die Darstellung des Funktions-Werte einer Cosinus-Welle und einer Sinus-Welle der selben Frequenz und Amplitude als den Real/Imaginärteil eines komplexen Exponenten der Eulerschen Zahl  $e$ . Gleichung 3.38 zeigt, dass die Isolierung des Real/Imaginärteil von  $e^{ix}$  Zugriff auf Funktionswert der entsprechenden Cosinus/Sinuswelle erlaubt. Außerdem werden die Funktionen  $|e^{ix}|$  und  $\phi(e^{ix})$  definiert. Abbildung 3.12 visualisiert diese Zusammenhänge. Auf einen Beweis der Eulergleichung wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet. [24, S. 569]

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Re(e^{ix}) &= \cos(x) \\ \Im(e^{ix}) &= \sin(x) \\ |e^{ix}| &= \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} \\ \phi(e^{ix}) &= \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dementsprechend lassen sich die Basisfunktionen aus Gleichung 3.28 ebenfalls durch den

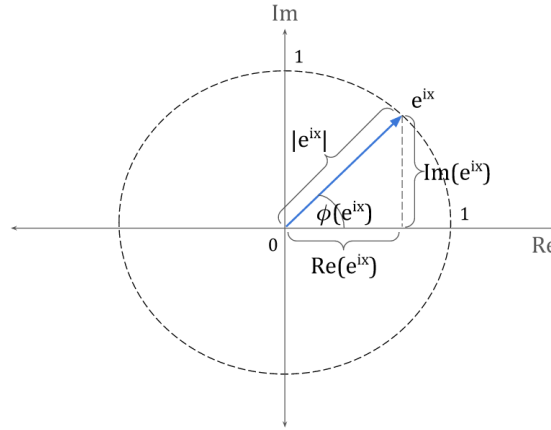


Abbildung 3.12: Visualisierung der Eulergleichung

Real/Imaginärteil der von  $e^{ix}$  nach Gleichung 3.39 definieren. Sie werden als die *komplexe Basisfunktionen* bezeichnet. Die Frequenz der jeweiligen Basisfunktion wird, wie in Formel 3.29 definiert, durch  $f = k \frac{f_s}{N}$  errechnet.

$$\begin{aligned} \cos_k[\ ] &:= \bigvee_{n=0}^{N-1} : \Re(e^{i \cdot 2\pi k \frac{n}{N}}) = \cos_k[n] = \cos(2\pi k \frac{n}{N}) \\ \sin_k[\ ] &:= \bigvee_{n=0}^{N-1} : \Im(e^{i \cdot 2\pi k \frac{n}{N}}) = \sin_k[n] = \sin(2\pi k \frac{n}{N}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Auf Basis dieses Zusammenhanges wird die *komplexe DFT* in *kartesischer Notation* nach Formel 3.40 definiert, das heißt die Transformation vom Zeit-Bereich in den Frequenzbereich mit Hilfe komplexer Zahlen. Formel 3.41 definiert die komplexe DFT in der kompakteren, *polaren Notation*. [24, S. 570]

$$\text{DFT}\{x[\ ]\} = X[\ ] := \bigvee_{k=0}^{N-1} : X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (\cos(2\pi k \frac{n}{N}) - i \sin(2\pi k \frac{n}{N})) \quad (3.40)$$

$$\text{DFT}\{x[\ ]\} = X[\ ] := \bigvee_{k=0}^{N-1} : X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad (3.41)$$

Die wichtigen Unterschiede zwischen den komplexen DFT nach Formel 3.40 und der reellen DFT nach Formel 3.30 Formelsind (a) die Verwendung des Sinus als komplexe Zahl  $i \cdot \sin$ , sowie das invertieren seines Vorzeichens und (b) die Summierung über  $k = 0 \dots N-1$  anstatt  $k = 0 \dots N/2$ . Der Frequenz-Bereich wird nun durch das komplexe Signal  $X[\ ]$  ausgedrückt, welcher die Koeffizienten  $A[\ ], B[\ ]$  in seinem Real/Imaginärteil beinhaltet. Der Frequenz-Bereich  $X[\ ]$  hat die selbe Länge wie der Zeit-Bereich  $x[\ ]$ , das heißt  $\text{Length}(x[\ ]) = \text{Length}(X[\ ])$ . [24, S. 571]

Es gelten die die folgenden Zusammenhänge zwischen der reellen und der komplexen DFT 3.42. Es lässt sich ableiten, dass für die Indexe  $k = 0 \dots N/2$  die Real/Imaginärteil der komplexen DFT  $X[\ ]$  den Koeffizienten  $A[\ ], B[\ ]$  der reellen DFT entspricht. Da

$|X[0]|, \dots, |X[N/2]| = M[\ ]$ , wird in dieser Arbeit  $|X[0]|, \dots, |X[N/2]|$  ebenfalls als *Spektrum* bezeichnet. [24, S. 225 - 226, 555]

$$\begin{aligned}\Re(X[0]), \dots, \Re(X[N/2]) &= A[0], \dots, A[N/2] = A[\ ] \\ \Im(X[0]), \dots, \Im(X[N/2]) &= B[0], \dots, B[N/2] = B[\ ] \\ |(X[0])|, \dots, |(X[N/2])| &= M[0], \dots, M[N/2] = M[\ ] \\ \phi(X[0]), \dots, \phi(X[N/2]) &= \phi[0], \dots, \phi[N/2] = \phi[\ ]\end{aligned}\tag{3.42}$$

Gleichung 3.43 definiert die dazu inverse Operation, die *komplexe inverse DFT* (iDFT) in *polrarer Notation*. [24, S. 572]

$$\text{iDFT}\{X[\ ]\} = x[\ ] := \bigvee_{n=0}^{N-1} : x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{i2\pi k \frac{n}{N}}\tag{3.43}$$

Die Frage ist: Wenn das Signal des Zeit-Bereiches  $x[\ ]$  aus reellen Zahlen besteht, und das Signal des Frequenz-Bereiches  $X[\ ]$  aus komplexen Zahlen, wie „verschwinden“ diese komplexen Zahlen wieder bei der Berechnung der inversen DFT?

Genau wie das Signal des Zeitbereiches  $x[\ ]$  als unendlich und periodische außerhalb des transformierten Bereiches  $x[0] \dots x[N-1]$  angenommen wird, ist auch der Frequenz-Bereich unendlich und periodisch außerhalb des Bereiches  $X[0] \dots X[N-1]$ . Gleichung 3.44 definiert diese Aussage. [24, S. 572]

$$\forall k \in \mathbb{Z} : X[n + kN] = X[n]\tag{3.44}$$

Daraus lässt sich Schlussfolgern, dass  $X[-N/2], \dots, X[-1] = X[N/2], \dots, X[N-1]$ . Die Werte  $X[-N/2] \dots X[-1]$  werden als die *negativen Frequenzen* bezeichnet. Dazu kommt der Fakt, dass der Frequenz-Bereich in Bezug auf das Intervall  $X[-N/2], \dots, X[N/2]$  eine Symmetrie aufweist: Der Realteil ist Achsensymmetrisch an der Stelle  $X[0]$ , und der Imaginäre Teil Punktsymmetrisch. Formel 3.45 definiert diese Symmetrie, und Abbildung 3.13 visualisiert sie Anhand eines Beispiels. Diese Symmetrie tritt nur auf, falls das Signal im Zeitbereich nur aus Reellen Zahlen besteht, was bei der Arbeit mit herkömmlichen akustischen Signalen immer erfüllt ist. Auf die Herleitung dieser Symmetrie wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet. [24, S. 574]

$$\bigvee_{n=0}^{N-1} : \text{Re}(X[n]) = \Re(X[-n]) \wedge \Im(X[n]) = -\Im(X[-n])\tag{3.45}$$

Diese Symmetrie ist der Grund dafür, warum bei der inversen DFT nach Formel 3.43 nach der Synthese alle Imaginärteile verschwinden. Zum besseren Verständnis wird die



polare Notation der komplexen inversen DFT zur *kartesischen Notation* nach Formel 3.46 erweitert [24, S. 573]

$$\begin{aligned} \text{iDFT}\{X[k]\} = x[n] := \sum_{k=0}^{N-1} \Re(X[k]) \cdot (\cos(2\pi k \frac{n}{N}) + i \sin(2\pi k \frac{n}{N})) \\ - \sum_{k=0}^{N-1} \Im(X[k]) \cdot (\sin(2\pi k \frac{n}{N}) - i \cos(2\pi k \frac{n}{N})) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Das weitere vorgehen wird anhand des Beispiels aus Abbildung 3.13 erklärt. Aus Formel 3.46 geht hervor, dass jeder Realteil von  $X[k]$  zu einer reellen Cosinuswelle und einer imaginären Sinuswelle beiträgt. Jeder Imaginärteil trägt zu einer reellen Sinuswelle und einer imaginären Cosinuswelle bei. Angenommen, im Zeit-Bereich soll eine Cosinuswelle mit der Frequenz  $f/f_s = 0.23$  und der Amplitude 1 synthetisiert werden, also  $x[n] = 1 \cdot \cos(2\pi 0.23n)$ . Für die Synthese wird sowohl eine positive als auch eine Frequenz benötigt. Marker 1 in Abbildung 3.13 erzeugt somit eine reelle Cosinuswelle und eine imaginäre Sinuswelle im Zeitbereich mit der Frequenz 0.23 und der Amplitude 0.5, also  $0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) + i \sin(2\pi 0.23n)$ . Genau so trägt die Negative Frequenz von  $-0.23$  bei Marker 2 zu einer reellen Cosinus-Welle und einer imaginären Sinuswelle im Frequenzbereich bei, also  $0.5 \cdot \cos(2\pi(-0.23)n) + i \sin(2\pi(-0.23)n)$ . Nach der Beziehung  $\cos(x) = \cos(-x)$  und  $\sin(x) = -\sin(-x)$  lässt sich der Beitrag der negativen Frequenzen umformen zu  $0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) - i \sin(2\pi 0.23n)$ . Die Addition dieser beiden Beiträge des reellen und des imaginären Teils, welche bei der Synthese vorgenommen wird, wird in Formel 3.47 zusammengefasst. Wie zu sehen ist, addieren sich die reellen Cosinuswellen, während sich die imaginären Sinuswellen auslöschen. [24, S. 573- 574]

$$\begin{aligned} & 0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) + i 0.5 \cdot \sin(2\pi 0.23n) \\ + & 0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) - i 0.5 \cdot \sin(2\pi 0.23n) \\ \hline & 1 \cdot \cos(2\pi 0.23n) \end{aligned} \quad (3.47)$$

In der selben weise kann eine reelle Sinuswelle im Zeitbereich mit Hilfe der imaginären Werte von  $X[k]$  synthetisiert werden. Marker 3 zeigt die positive Frequenz 0.23 und 4 die Negative Frequenz  $-0.23$  im Imaginärteil von  $X$ . Folgt man dem selben Prinzip der oben vorgestellten Rechnung zur Synthese einer Cosinuswelle, ergibt sich die in Gleichung 3.48 Addition. Dieses mal löschen sich die Cosinuswellen aus, während die Sinuswellen addiert werden. Außerdem ist zu sehen, dass das Vorzeichen der Sinuswelle invertiert wird. Diese Invertierung muss entweder bei der Synthese oder der Dekomposition mit einbezogen werden und ist der Grund für die invertierung des Vorzeichens vor dem Sinus in Gleichung 3.40. [24, S. 574]

$$\begin{aligned} & -0.5 \cdot \sin(2\pi 0.23n) - i 0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) \\ - & 0.5 \cdot \sin(2\pi 0.23n) + i 0.5 \cdot \cos(2\pi 0.23n) \\ \hline & -1 \cdot \sin(2\pi 0.23n) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die hier vorgestellte Beispielrechnung verdeutlicht, wie die Symmetrie des Frequenzbereiches genutzt wird, um bei der Summation einer positiven und der entsprechenden

negativen Frequenz zu einem rein reellwertigen Signal im Frequenz-Bereich zu führen. Wird der Frequenzbereich jedoch durch den Menschen betrachtet, wird, wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben, das als *Spectrum* bezeichnete  $M[\ ]$ -Signal verwendet, definiert in Formel 3.42 als der Absolutwert des komplexen Frequenz-Bereiches. Dazu wird die Betrachtung auf den Indexbereich  $n = 0, \dots, N/2$  eingeschränkt, was dem Index-Bereich der reellen DFT entspricht, da die negativen Frequenzen aufgrund ihrer Symmetrie bei der Betrachtung redundante Informationen darstellen. Daraus ergibt sich, dass es für die Erzeugung des Spectrums rein mathematisch betrachtet unerheblich ist, ob die reelle oder die komplexe DFT verwendet wird. Abbildung 3.14 gibt einen zusammenfassenden Überblick über die Indexierung der des Zeit- und Frequenzbereiches bei Verwendung der komplexen DFT. [24, S. 225 - 226]

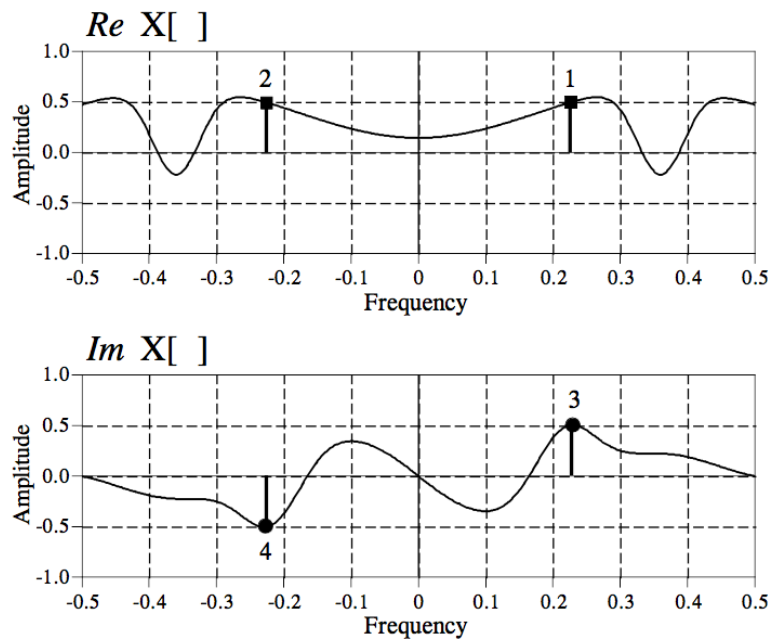


Abbildung 3.13: Symmetrie des Frequenzbereiches in den Indexen  $n = (-N/2 = -0.5 * N), \dots, (N/2 = 0.5 * N)$ . Die Marker 1 und 2 haben eine Amplitude von +0.5, der Marker 3 hat eine Amplitude von -0.5 und Marker 4 eine Amplitude von +0.5

Wie zur Einleitung dieses Kapitels erwähnt wurde, wird die Berechnung der komplexen DFT und inversen DFT mit Hilfe eines Algorithmus implementiert, der als *Fast Fourier Transformation* (**FFT** bzw. **iFFT**). Die Funktionsweise dieses Algorithmus wird an dieser Stelle aus Platzgründen nicht näher erläutert. Schlussendlich ist das Ergebnis der FFT bzw. iFFT der Frequenz-/Zeit-Bereich nach den in diesen Kapitel vorgestellten definitionen. Die FFT fordert als einzige voraussetzung, dass die Länge des Signals als Potenz von zwei gewählt wird, das heißt  $\text{Length}(x[\ ]) = N = 2^k$ . [24, S. 225 - 226]

### 3.4.3 Short Time Fourier Transform

Wie aus Kapitel 3.4.2 hervorgeht, enthält die Signal des Zeit-Bereiches die Informationen über den zeitlichen Verlauf des Signals, während der Frequenz-Bereich Aufschluss über Frequenzanteile des Signales gibt. Abbildung 3.15 visualisiert den Zusammenhang: Oben

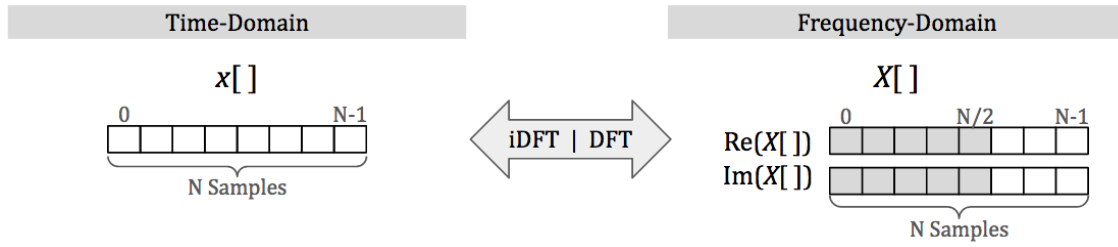


Abbildung 3.14: Überblick über die komplexe DFT und inverse DFT

ist der Zeit-Bereich eines 1.8 Sekunden langen Signals zu sehen. Es können klar drei nacheinander gespielte Töne erkannt werden. Der Zeit-Bereich macht nicht erkennbar, welche Frequenz-Anteile in den Tönen enthalten sind. Unten ist das Frequenz-Spectrum (Magnituden-Signal im Bereich  $n = 0, \dots, N/2$ ) abgebildet. Die x-Achse bezeichnet die Frequenz von 0 bis 22050 Hz, die x und die y-Achse werden logarithmisiert dargestellt. Wie zu erkennen ist, gibt das Frequenz-Spectrum einen Eindruck der Frequenz-Anteile des Signals, aber die zeitliche Information über die drei Töne geht verloren.

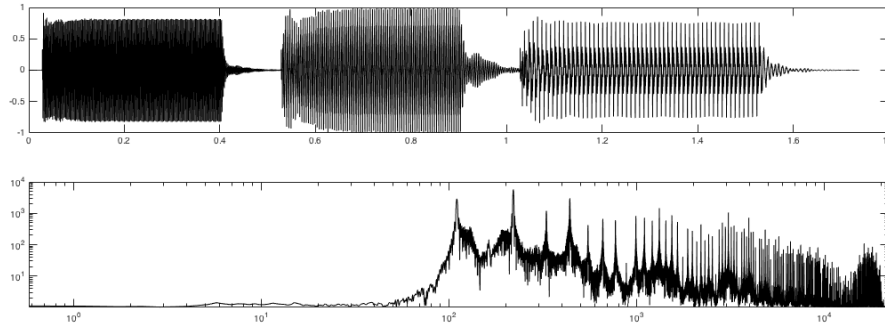


Abbildung 3.15: Ein 1.8-Sekunden langes Signal. Oben: Der Zeitbereich mit drei klar erkennbaren Events. Unten: Das Frequenz-Spectrum des gesamten Signals mit logarithmisierten Achsen.

Es ist wünschenswert, einen Kompromiss aus den Vorteilen beider Bereiche zu finden, in dem man das Frequenz-Spectrum kürzerer Zeitabschnitte des Signals bildet. Dazu wird der Zeit-Bereich  $x[]$  in Fenster der Länge  $M$  zerlegt. Die zeitliche Differenz zwischen zwei Fenstern wird als *Hoptime*  $R$  bezeichnet. Gleichung definiert die Bildung des Signal-Fensters  $x_m[]$ . [23]

$$x_m[] := \begin{matrix} M-1 \\ \forall \\ n=0 \end{matrix} : x_m[n] = x[n + m \cdot R] \quad (3.49)$$

Abbildung 3.16 gibt ein Beispiel für die Zerlegung von  $x$  in Signalfenster  $x_0[], \dots, x_4[]$ . Die Samplingrate des Signals ist  $f_s = 44100$ , die Fensterlänge beträgt  $M = 22050/f_s = 0.5$  s und die Hoptime  $R = M/2 = 0.25$  s.

Als Vorbereitungsschritt für die Transformation der Signal-Fenster in den Frequenz-Bereich wird nun jedes Fenster mit einer sogenannten *Fensterfunktion* (engl *window*)  $w[]$  multipliziert. Gleichung 3.50 definiert eine der am weitesten verbreiteten Fenster-Funktionen,

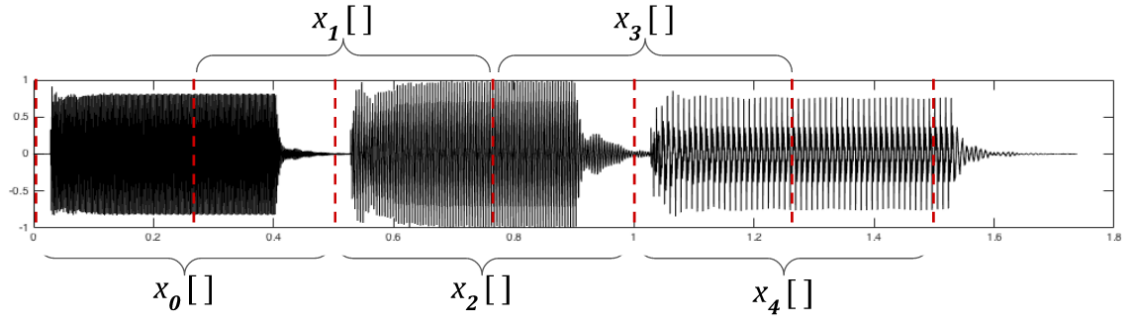


Abbildung 3.16: Zerlegung eines Signals in Singal-Fenster

das *Hamming-Window*. Der Paramter  $M$  gibt die länge des Fensters an. Abbildung 3.17 visualisiert das Hamming-Window. [24, S. 286]

$$w[] := \bigvee_{n=0}^{M-1} : w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad (3.50)$$

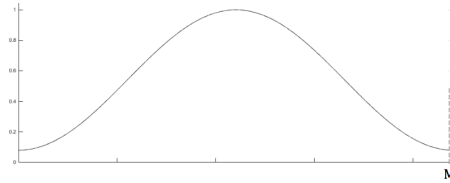


Abbildung 3.17: Das Hamming-Window

Die Gleichung 3.51 definiert die *Kurzzeit-Fourier-Transformation* (engl *Short Time Fourier Transformation*, *STFT*), implementiert mit Hilfe der DFT. Dabei wird das Signal-fenster  $x_m[]$  mit der Fensterfunktion  $w[]$  multipliziert und in das *Frequenz-Fenster*  $X_m[]$  transformiert.[4] Abbildung 3.18 visualisiert die STFT des Beispiels aus Abbildung 3.16.

$$\text{STFT}\{x_m[]\} = X_m[] := \bigvee_{k=0}^{M-1} : X_m[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x_m[n] \cdot w[n] \cdot e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad (3.51)$$

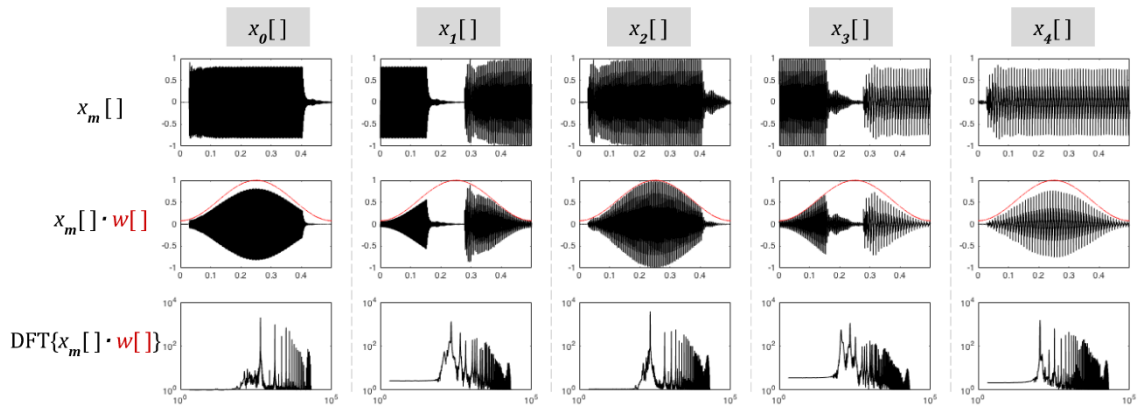


Abbildung 3.18: STFT des Beispiel-Signals aus Abbildung 3.16

## 3.5 Filter

Ein *Filter* ist eine Funktion, welches ein Eingangs-Signal  $x[ ]$  auf ein Sample eines Ausgangssignals  $y[n]$  abbildet. Er wird mit Hilfe des sogenannten *Signal Operators*  $T_n$  notiert, wie Gleichung 3.52 definiert. [11, „Definition of a Filter“]

$$T_n\{x[ ]\} = y[n] \quad (3.52)$$

Auf Basis des 3.52 wird die *Transformation*  $T\{ \}$  als Operation definiert, welche das Signal  $x[ ]$  auf ein Signal  $y[ ]$  abbildet, in dem  $T_n$  für mehrere  $n$  angewandt wird, wie Gleichung 3.53 definiert. Diese Notation ist bereits bekannt aus den Gleichungen der DFT und iDFT bekannt (Gleichungen 3.41, 3.40 und 3.43). [11, „Definition of a Filter“]

$$T\{x[ ]\} = y[ ] := \bigvee_{n=n_1}^{n_2} : T_n\{x[ ]\} = y[n] \quad (3.53)$$

Besonders interessant im Zusammenhang mit Audioverarbeitung ist die Klasse der *Lineare, Zeit-Invariante Filter* (engl. *Linear Time-Invariant Filters*, **LTI**-Filter), notiert mit durch  $L_n\{ \}$ . Dabei handelt es sich um Filter, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

**Scaling** , das heißt, dass eine Skalierung des Input-Signals  $x[ ]$  um den Faktor  $\alpha$  zur Skalierung des Output-Samples  $y[n]$  um den selben Faktor führt, wie Gleichung 3.54 definiert.

$$L_n\{\alpha \cdot x[ ]\} = \alpha \cdot y[n] \quad (3.54)$$

**Super-Position** , das heißt, dass das Anwenden des Filters auf die Summe zweier Signale zum selben Ergebnis führt wie die isolierte Anwendung des Filters auf die beiden Signale mit nachgelagerter Summation, wie Gleichung 3.55 definiert. [11, „Linear Filters“]

$$L_n\{x_1[ ] + x_2[ ]\} = L_n\{x_1[ ]\} + L_n\{x_2[ ]\} \quad (3.55)$$

**Zeit-Invariant** , das heißt, dass die Verzögerung des Eingangssignals um einen Faktor  $n_0$  zur selben Verzögerung der Ausgangs-Samples führt, wie Gleichung 3.56 definiert. [14, Filters III, S. 2 - 5 ]

$$L_{n-n_0}\{x[ ]\} = y[n - n_0] \quad (3.56)$$

An dieser Stelle werden verschiedene Betrachtungsweisen von Filtern vorgestellt. Jede dieser *Repräsentationen* definiert den Filtern vollständig, bietet jedoch unterschiedliche Betrachtungsweisen des Einflusses des Filters auf das Eingangssignal. [14, Filters III, S. 1 ]

### 3.5.1 Differenzengleichung

Eine Variante der Beschreibung eines Filters ist mit Hilfe einer *Differenzengleichung* nach Gleichung 3.58. In dieser Arbeit wird ein Linearer Filter, welcher durch eine Differenzengleichung implementiert wird, mit dem Operator  $ab_n\{ \}$  gekennzeichnet. Ein solcher Filter

wird vollständig durch die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_N$  und  $b_0, \dots, b_M$  definiert. Ein Filter hat somit  $N$  a-Glieder und  $M + 1$  b-Glieder. [11, „Difference Equation“]

$$\begin{aligned}
 ab_n\{x[\ ]\} &= \overbrace{y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_Mx[n-M]}^{\text{Feed-Forward}} \\
 &\quad \underbrace{- a_1y[n-1] - \dots - a_Ny[n-N]}_{\text{Feed-Back}} \\
 &= \sum_{i=0}^M b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^N a_j y[n-j]
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Die Glieder  $b_0, \dots, b_M$  sind die Koeffizienten des aktuellen Samples und vergangener Samples des Eingangssignals, und werden auch als *Feed-Forward*-Koeffizienten bezeichnet. Die Glieder  $a_1, \dots, a_N$  sind die Koeffizienten vergangener Samples der Antwort  $y[\ ]$ . Sie werden daher auch als *Feed-Back*-Koeffizienten oder *rekursive Glieder* bezeichnet. Verwendet ein Filter nur b-Glieder und kein a-Glied, wird er als *Finite Impulse Response*-Filter (**FIR**-Filter) bezeichnet. Verwendet ein Filter zumindest ein a-Glied, wird er als *Infinite Impulse Response*-Filter (**IIR**-Filter) bezeichnet. [11, „Difference Equation“]

$$\begin{aligned}
 \text{FIR} &:= \forall j = [1, N] : a_j = 0 \\
 \text{IIR} &:= \exists j \in [1, N] : a_j \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Die *Ordnung* eines Filters wird definiert als die  $\max(M, N)$ . [11, „Filter Order“].

> Hier folgt ein Beispiel für Filter <.

### 3.5.2 Faltung

Die *Faltung* (engl. *Convolution*) ist eine der Zentralen Operationen zwischen zwei Signalen, so wie die Addition oder die Multiplikation. Sie wird mit dem Symbol  $*$  notiert. Sie wird notiert mit  $x[\ ] * h[\ ] = y[\ ]$ .

Die Faltung basiert auf der sogenannten *Faltungs-Summe*, definiert in Gleichung 3.59. In diesem Zusammenhang wird  $x[\ ]$  Eingangs- und  $y[\ ]$  als Ausgangs-Signal bezeichnet. Je nach Anwendungsfall bekommt  $h[\ ]$  den Namen *Faltungs-Kernel*, *Filter-Kernel* oder einfach *Kernel*. In dieser Arbeit wird die Faltungs-Summe mit dem Operator  $h_n\{\ }$  definiert. [24, S. 107-108]

$$h_n\{x[\ ]\} = y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=1}^M h[i] \cdot x[n-i] \tag{3.59}$$

Wird die Faltung auf alle Samples des Signal  $x[\ ]$ , wird das Ausgangs-Signal  $y[\ ]$  im Vergleich zum Eingangs-Signal um die Länge des Faltungskern verlängert, wie Gleichung 3.60 definiert.  $x[\ ]$  ist ein Signal mit  $\text{Support}(x[\ ]) = [0, N-1]$  und  $\text{Length}(x[\ ]) = N$ .  $h[\ ]$  ist ein Signal mit  $\text{Support}(h[\ ]) = [0, M-1]$  und  $\text{Length}(h[\ ]) = M$  und  $y[\ ]$  ist ein Signal mit  $\text{Support}(y[\ ]) = [0, N+M-2]$  und  $\text{Length}(y[\ ]) = N+M-1$ . um die Länge

des Faltungskerns verlängert wird. Abbildung 3.20 zeigt ein Beispiel für die Faltung.[24, S. 115-120]

$$h\{x[\ ]\} = x[\ ] * h[\ ] = y[\ ] := \bigvee_{n=0}^{N+M-2} : x[n] * h[n] = y[n] \quad (3.60)$$

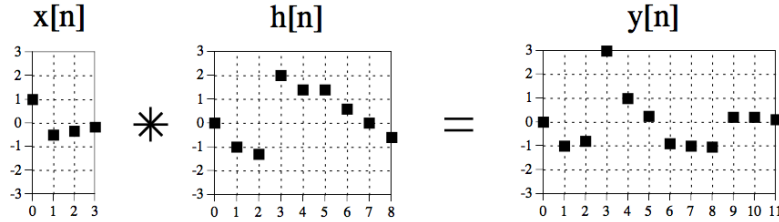


Abbildung 3.19: Beispiel für die Faltung

Das neutrale Element der Faltung ist der *Delta-Funktion*  $\delta[\ ]$ , definiert in Gleichung 3.61. Das heißt, dass  $x[\ ] * \delta[\ ] = x[\ ]$ . Die Faltung ist kommutativ, das heißt  $x[\ ] * h[\ ] = h[\ ] * x[\ ] = y[\ ]$ . [24, S. 107, 113] Weiterhin ist die Faltung assoziativ, das heißt  $(x[\ ] * y[\ ]) * z[\ ] = x[\ ] * (y[\ ] * z[\ ])$ . [24, S. 133]

$$\delta[\ ] := \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} : \delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Die Faltung ist eine der Varianten der Umsetzung von linearen, zeit-invarianten Filtern, neben den in Kapitel 3.5.1 vorgestellten Differenzengleichungen. Während ein Filter  $L_n\{\ }$  in der Repräsentation als Differenzen-Gleichung vollständig durch die Koeffizienten  $a$  und  $b$  beschrieben wird, wird bei der Faltungs-Repräsentation ein Filter vollständig durch die Impulsantwort  $h[\ ]$  beschrieben. Um die Impulsantwort für einen Filter zu erhalten, der zunächst durch einen anderen linearen Filter repräsentiert wird, filtert man den Delta-Impuls mit diesem Filter, wie Gleichung 3.62 definiert. Wird also beispielsweise ein Filter als Differenzengleichung definiert, aber soll mit Hilfe der Faltung umgesetzt werden, so erhält man die Impulsantwort durch  $h[n] = L_n\{\delta[n]\}$ . [11, Impulse-Response Representation]

$$h[\ ] := \bigvee_{n=0}^{\infty} : h[n] = L_n\{\delta[n]\} \quad (3.62)$$

Daraus ergibt sich, dass bei FIR-Filtern die Impuls-Antwort endlich ist, das heißt  $\text{Length}(h[\ ]) = M \neq \text{infy}$ , womit bei einem endlichen Eingangssignal  $x[\ ]$  auch das Ausgangssignal  $y[\ ]$  endlich wird. Bei IIR Filtern ist die Impulsantwort hingegen unendlich, da heißt  $\text{Length}(h[\ ]) = M = \text{infy}$ , womit auch das Ausgangssignal  $y[\ ]$  zwangsweise eine unendliche Länge erhält. [11, „The Finite in FIR“]

### 3.5.3 Multiplikation im Frequenz-Bereich

Die Faltung im Zeit-Bereich nach den in Kapitel 3.5.3 vorgestellten Prinzipien entspricht einer Multiplikation im Ortsbereich, wie Formel 3.63 definiert. Das Prinzip wird auch als *FFT-Convolution* bezeichnet. Dazu werden zunächst das Eingangssignal und die Impulsantwort mit Hilfe der DFT in den Frequenz-Bereich transformiert, also  $\text{DFT}\{x[\ ]\} = X[\ ]$  und

$\text{DFT}\{h[]\} = H[]$ . Diese beiden Frequenz-Bereiche werden nun miteinander Multipliziert, um den Frequenz-Bereich des Ausgangssignals zu erzeugen, das heißt  $\forall n = [0, N - 1] : X[n] \cdot H[n] = Y[n]$ . Mit Hilfe der inversen DFT wird der Frequenz-Bereich in den Zeit-Bereich zurücktransformiert, also  $\text{iDFT}\{Y[]\} = y[]$ . Das so erzeugte Ausgangs-Signal entspricht dem Signal, welches durch die Faltung  $x[] * h[] = y[]$  entstanden wäre.[24, S. 182]

$$x[] * h[] = y[] = \text{iDFT}\left\{ \text{DFT}\{x[]\} \cdot \text{DFT}\{h[]\} \right\} \quad (3.63)$$

In Kapitel wurde erwähnt, dass sich ein Signal  $x[]$  durch die Faltung um die Länge der Impulantwort ausdehnt. Daher muss sichergestellt werden, dass das Signal  $x[]$  vor der Transformation in den Frequenz-Bereich mindestens  $\text{Length}(h[]) = M$  0-Samples an seinem Ende hat, welche gegebenenfalls zuerst angehängen werden müssen. Dadurch wird der Frequenz-Bereich von  $x[]$  nur dahingehend beeinflusst, dass seine Auflösung erhöht wird. Damit die Frequenz-Bereiche  $X[]$  und  $H[]$  multipliziert werden können, müssen sie die selbe Länge haben. Da die Impulsantwort meistens kürzer als das Eingangssignal ist, müssen ihr vor der DFT meist 0-Samples angehängen werden, um sie auf die selbe Länge wie das Eingangssignal „zu strecken“.[24, S. 183 -184]

Ein weiterer Vorteil der FFT-Convolution ist, dass Einblick über den Einfluss des Filters auf den Frequenz-Bereich des Eingangs-Signals zur Erzeugung des Ausgangs-Signals gibt. Abbildung 3.20 verdeutlicht dieses Prinzip am Beispiel des „windowed Sync Filters“. Links ist der Zeit-Bereich des Filter-Kernels zu sehen, rechts der Frequenzbereich  $\text{DFT}\{h[]\} = H[]$ . Der Frequenz-Bereich macht deutlich dass es sich bei der Impuls-Antwort um einen Tiefpass-Filter handelt, also ein Filter, welcher hohe Frequenzen des Eingangs-signals  $x[]$  bei seiner Anwendung blockiert, aber tiefe Frequenzen jedoch passieren lässt.[24, S. 180]

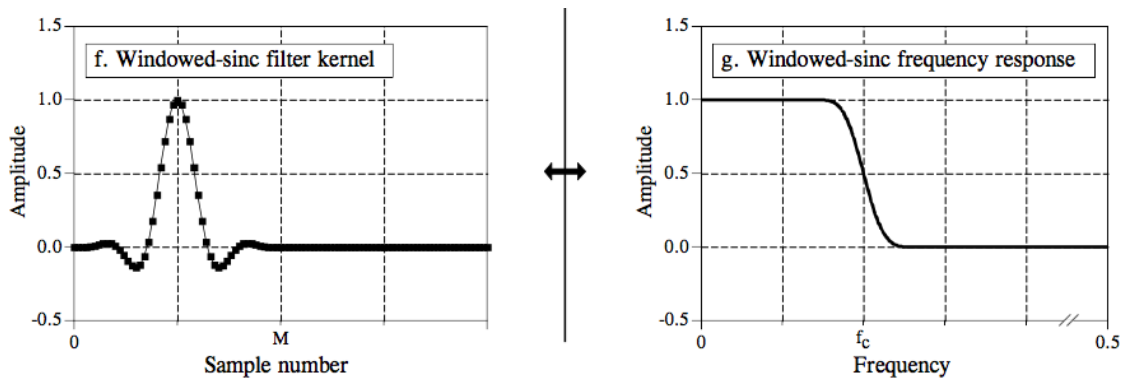


Abbildung 3.20: Links: Zeit-Bereich einer Impulsantwort  $h[]$  des „windowed Sync Filters“. Rechts: Frequenz-Bereich dieser Impulsantwort  $\text{DFT}\{h[]\} = H[]$  [24, S. 287]

Da ein FIR-Filter eine endlich lange Impulsantwort hat, folgt daraus auch ein endlichlanger Frequenz-Bereich. Ein IIR-Filter hingegen hat einen unendlich lange Impulsantwort und somit auch einen unendlich langen Frequenz-Bereich.



## **3.6 akustische Modellierung der menschlichen Stimme**

### **3.7 Feststellung von Periodizität in Signalen**

#### **3.7.1 Zero-Crossing-Rate**

#### **3.7.2 Methoden des Frequenzbereiches**

#### **3.7.3 Autokorrelation**

#### **3.7.4 Cepstrum**

## 4 Zusammenfassung

# Literaturverzeichnis

- [1] K J S Anand. *Pain in Neonates and Infants*. Elsevier, 2007.
- [2] Zachariah Boukydis Barry Lester. *Infant Crying: Theoretical and Research Perspectives*. Springer, 1985.
- [3] Judy Bildner. *CRIES Instrument Assessment Tool of Pain in Neonates*. City of Hope Pain, 1997. Online unter <http://prc.coh.org/pdf/CRIES.pdf>.
- [4] Richard Brown. The short time fourier transform, 2014. Online erhältlich unter: [http://spinlab.wpi.edu/courses/ece503\\_2014/12-6stft.pdf](http://spinlab.wpi.edu/courses/ece503_2014/12-6stft.pdf).
- [5] R Sisto & Giuseppe Buonocore Carlo Bellieni, Franco Bagnoli. Cry features reflect pain intensity in term newborns: An alarm threshold. *Pediatric Research*, 5:142–146, 1. Online unter [https://www.researchgate.net/publication/297827342\\_Cry\\_features\\_reflect\\_pain\\_intensity\\_in\\_term\\_newborns\\_An\\_alarm\\_threshold](https://www.researchgate.net/publication/297827342_Cry_features_reflect_pain_intensity_in_term_newborns_An_alarm_threshold).
- [6] H. Hollien & T Murry E Müller. Perceptual responses to infant crying: identification of cry types. *Journal of Child Language*, 1(1):89–95, 1974. Online unter <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-child-language/article/perceptual-responses-to-infant-crying-identification-of-cry-types/4F0F8088116FCE381851D8D560697A5F>.
- [7] Jan Hamers & Peter Gessler Eva Cignac, Romano Mueller. Pain assessment in the neonate using the Bernese Pain Scale for Neonates. *Early Human Development*, 78(2):125–131, 2004. Online unter <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378378204000337>.
- [8] Health Facts For You. *Using Pediatric Pain Scales Neonatal Infant Pain Scale (NIPS)*, 2014. Online unter <https://www.uwhealth.org/healthfacts/parenting/7711.pdf>.
- [9] Hodgkinson. Neonatal Pain Assessment Tool , 2012. Online unter [http://www.rch.org.au/uploadedFiles/Main/Content/rchcpg/hospital\\_clinical\\_guideline\\_index/PAT%20score%20update.pdf](http://www.rch.org.au/uploadedFiles/Main/Content/rchcpg/hospital_clinical_guideline_index/PAT%20score%20update.pdf).
- [10] Michael J Corwin Howard L Golub. A Physioacoustic Model of the Infant Cry. In *Infant Crying - Theoretical and Research Perspectives*, chapter 3, pages 59 – 82. Plenum, 1985.
- [11] Julian O Smith III. Introduction to digital filters with audio applications, 2007. Online erhältlich unter: <https://ccrma.stanford.edu/~jos/filters/filters.html>.
- [12] Donna Geiss Laura Wozniak & Charles Hall Ivan Hand, Lawrence Noble. COVERS Neonatal Pain Scale: Development and Validation. *International Journal of Pediatrics*, 2010, 2010. Online unter <https://www.hindawi.com/journals/ijpedi/2010/496719/>.
- [13] Hans M Koot Dick Tibboel Jan Passchier & Hugo Duivenvoorden Monique van Dijk, Josien de Boer. The reliability and validity of the COMFORT scale as a postoperative pain instrument in 0 to 3-year-old infants. *Pain*, 84(2):367—377, 2000. Online unter

- <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304395999002390>.
- [14] D L Neuhoff. *Filters in the Time-Domain I, II and III*. Online erhältlich unter: <http://www.eecs.umich.edu/courses/eecs206/archive/spring02/notes.dir/filters1.pdf>, <http://www.eecs.umich.edu/courses/eecs206/archive/spring02/notes.dir/filters2.pdf>.
  - [15] D L Neuhoff. *Signal and Systems I - EECS 206 Laboratory*. The University of Michigan, 2002. Online erhältlich unter: <http://www.eecs.umich.edu/courses/eecs206/archive/spring02/> abgerufen am 11. Januar 2016.
  - [16] Taddio Nulman. A revised measure of acute pain in infants. *J Pain Symptom Manage*, 10:456–463, 1995. Online unter [http://geriatricphysio.yolasite.com/resources/Modified%20Behavioral%20Pain%20Scale%20\(MBPS\)%20in%20infants.pdf](http://geriatricphysio.yolasite.com/resources/Modified%20Behavioral%20Pain%20Scale%20(MBPS)%20in%20infants.pdf).
  - [17] J L Mathew P J Mathew. Assessment and management of pain in infants. *Postgrad Med J*, 79:438–443, 2003. Online unter <http://pmj.bmj.com/content/79/934/438.full>.
  - [18] Steven Creech & Marc Weiss. Patricia Hummel, Mary Puchalski. N-PASS: Neonatal Pain, Agitation and Sedation Scale – Reliability and Validity. *Pediatrics/Neonatology*, 2(6), 2004. Online unter <http://www.anestesiarianimazione.com/2004/06c.asp>.
  - [19] Susan Parker-Price & Ronald Barr Philip Zeskind. Rythmic organization of the Sound of Infant Cry. *Dev Psychobiol*, 26(6):321–333, 1993. Online unter <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/8119482>.
  - [20] R Ward & C Laszlo Qiaobing Xie. Automatic Assessment of Infants’ Levels-of-Distress from the Cry Signals. *IEEE Transanctions on Speech and Audio Processing*, 4(4):253–265, 1996. Online unter <http://ieeexplore.ieee.org/document/506929/>.
  - [21] Brian Hopkins & James Green Ronald Barr. *Crying as a Sign, a Symptom, and a Signal*. Mac Keith Press, 2000.
  - [22] J R Shayevitz & Shobha Malviya Sandra Merkel, Terri Voepel-Lewis. The FLACC: A Behavioral Scale for Scoring Postoperative Pain in Young Children. *Pediatric Nursing*, 23(3):293–7, 1996. Online unter [https://www.researchgate.net/publication/13998379\\_The\\_FLACC\\_A\\_Behavioral\\_Scale\\_for\\_Scoring\\_Postoperative\\_Pain\\_in\\_Young\\_Children](https://www.researchgate.net/publication/13998379_The_FLACC_A_Behavioral_Scale_for_Scoring_Postoperative_Pain_in_Young_Children).
  - [23] Julius Smith. *Spectral Audio Signal Processing*. Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), 1993. Online unter [https://www.dsprelated.com/freebooks/sasp/Short\\_Time\\_Fourier\\_Transform.html](https://www.dsprelated.com/freebooks/sasp/Short_Time_Fourier_Transform.html).
  - [24] Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 1999. Online erhältlich unter: <http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>.
  - [25] P H Wolff. The role of biological rhythms in early psychological development. *Bulletin of the Menninger Clinic*, 31:197–218, 1967.

# Appendices

Tabelle .1: Accuracy-Werte der Grenzwertfindung mit REPTree

$S_{Training}$	3 dB				50 dB				50+3 dB			
$A_{Test}$	3 dB	50 dB	7 dB*	Mean	3 dB	50 dB	7 dB*	Mean	3 dB	50 dB	7 dB*	Mean
Zeit	77.81%	79.02%	86.04%	80,96%	49.33%	94.70%	48.66%	64,23%	77.54%	92.47%	84.38%	84,80%
Freq	82.05%	89.28%	82.71%	84,68%	70.52%	94.37%	55.06%	73,31%	81.75%	91.22%	74.90%	82,62%
Ceps	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>	86.83%	94.68%	92.83%	<b>91,45%</b>	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>
Corr	80.45%	73.47%	84.89%	79,60%	73.07%	87.14%	77.98%	79,39%	77.90%	84.88%	82.84%	81,87%
Zeit+Freq	82.05%	89.28%	82.71%	84,68%	70.52%	94.37%	55.06%	73,31%	81.75%	91.22%	74.90%	82,62%
Zeit+Ceps	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>	86.83%	94.68%	92.83%	<b>91,45%</b>	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>
Zeit+Corr	80.45%	73.47%	84.89%	79,60%	49.33%	94.70%	48.66%	64,23%	80.32%	92.35%	88.22%	86,96%
Freq+Ceps	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>	70.65%	94.75%	55.06%	73,49%	88.98%	94.72%	92.96%	<b>92,22%</b>
Freq+Corr	82.05%	89.28%	82.71%	84,68%	70.52%	95.60%	95.60%	87,24%	81.75%	94.42%	74.90%	83,69%

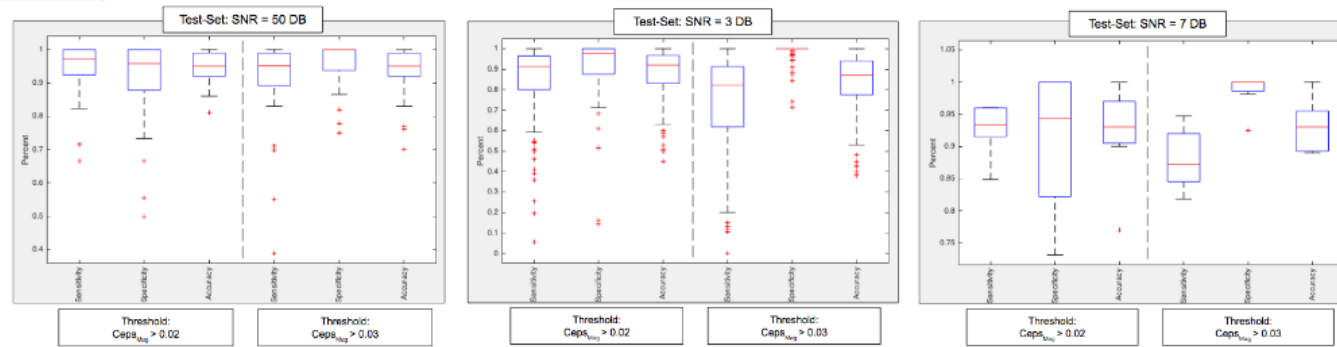


Abbildung .1: Boxplot-Auswertung über Sensitivity, Specificity und Accuracy der beiden VAD-Modelle