Reglerteknik, Föreläsning 9: Frekvensfunktioner och Bodediagram

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Sinus in sinus ut

Betrakta impulssvaret g med överföringsfunktion

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$$

Låt insignalen vara

$$u(t) = \sin \omega t = \Im e^{i\omega t}, \quad t \geq -\infty$$

Utsingalen blir enligt faltningsformeln

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty g(\tau) u(t-\tau) d\tau = \Im \left(\int_0^\infty g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right) \\ &= \Im \left(\int_0^\infty g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau e^{i\omega t} \right) = \Im \left(G(i\omega) e^{i\omega t} \right) \\ &= \Im \left(|G(i\omega)| e^{i(\omega t + \phi(\omega))} \right) = |G(i\omega)| \sin\left(\omega t + \phi(\omega)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

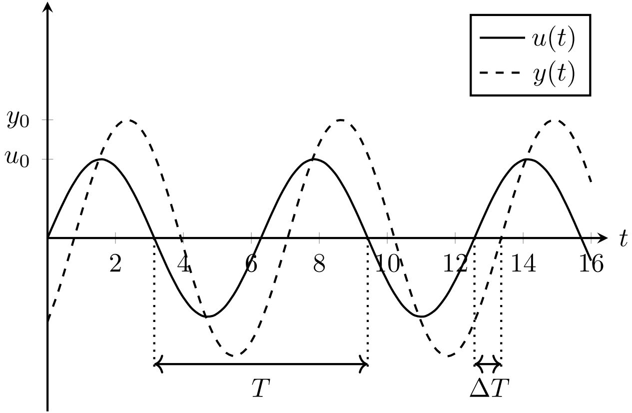
där $\phi(\omega) = \arg G(i\omega)$. Vi inser att utsignalen också blir en sinussignal med samma vinkelfrekvens ω som insignalen. Dock är den *fasförskjuten* med $\phi(\omega)$ och den har en annan *amplitud* som ges av $|G(i\omega)|$.

Frekvensfunktionen

Vi inser från (1) att den s.k. *frekvensfunktionen* $G(i\omega)$ entydigt bestämmer utsignalen y för varje u som är en sinusfunktion.

Frekvensfunktionen är Fouriertransformen av viktsfunktionen g.

Experiment för att bestämma frekvensfunktionen



1. Låt $u(t) = u_0 \sin \omega t$.
2. Vänta tills alla transienter dött ut.
3. Läs av $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi(\omega))$.
4. Beräkna $|G(i\omega)| = y_0/u_0$ och $\phi(\omega) = -2\pi\Delta T/T$.

Generella insignaler

På grund av linjäritet gäller för $u(t) = u_1 \cos \omega_1 t + u_2 \cos \omega_2 t$ att

$$y(t) = |G(i\omega_1)|u_1 \cos\left(\omega_1 t + \phi(\omega_1)\right) + |G(i\omega_2)|u_2 \cos\left(\omega_2 t + \phi(\omega_2)\right)$$

För godtyckligt u som är absolut integrerbart gäller att

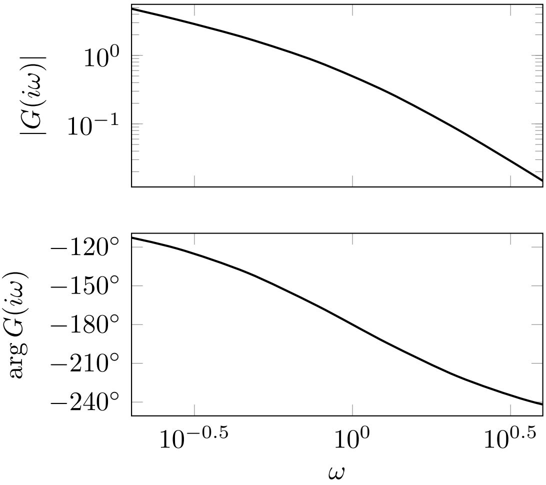
$$u(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |U(i\omega)| \cos\left(\omega t + \beta_u(\omega)\right) d\omega$$

där U är Laplacetransformen för u. Vidare gäller för $Y(s) = G(s)U(s)$ att

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |Y(i\omega)| \cos\left(\omega t + \beta_y(\omega)\right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |G(i\omega)||U(i\omega)| \cos\left(\omega t + \beta_u(\omega) + \phi(\omega)\right) d\omega \end{aligned}$$

där $\phi(\omega) = \arg G(i\omega)$, $\beta_u(\omega) = \arg U(i\omega)$ och $\beta_y(\omega) = \arg Y(i\omega)$. Vi inser att absolutbeloppet och argumentet för överföringsfunktionen G påverkar absolutbelopp och argument för integranden i uttrycket ovan frekvens för frekvens.

Bodediagram



Första grafen kallas för *amplitud-* eller *beloppskurvan* och andra grafen kallas för *faskurva*.

Logaritmiska skalor

Låt $G(s) = G_1(s)G_2(s)$. Då gäller

$$\begin{aligned} \log|G(i\omega)| &= \log|G_1(i\omega)| + \log|G_2(i\omega)| \\ \arg G(i\omega) &= \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) \end{aligned} \tag{2}$$

och produkten av överföringsfunktioner blir addition i Bodediagrammet.

Vi har för $G(s) = s^p$ att $\log|G(i\omega)| = \log|i\omega|^p = p\log\omega$, som är en linjär funktion av $\log\omega$ med lutningskoefficient p.

Skälet till den logaritmiska skalan för vinkelfrekvensen är att potenser av s blir räta linjer.

Skissa Bodediagram

För en allmän rationell överföringsfunktion kan såväl nämnaren som täljaren skrivas som produkten av faktorer av formen

$$K, \quad s, \quad 1 + \frac{s}{a}, \quad 1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

Om vi har Bodediagrammen för dessa faktorer kan Bodediagrammet för en generell överföringsfunktion erhållas genom att addera och/eller subtrahera Bodediagrammen för faktorerna.

De faktorer som finns i täljaren adderas, medan de faktorer som finns i nämnaren subtraheras.

Det förra följer av (2), medan det senare följer av att för $G(i\omega) = G_1(i\omega)/G_2(i\omega)$ gäller att

$$\begin{aligned} \log|G(i\omega)| &= \log|G_1(i\omega)| - \log|G_2(i\omega)| \\ \arg G(i\omega) &= \arg G_1(i\omega) - \arg G_2(i\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

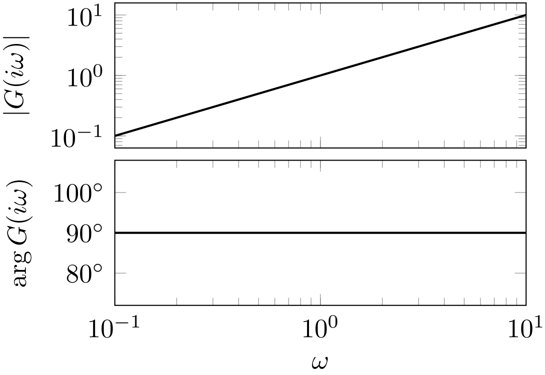
$G(s) = K$

För $G(s) = K$ gäller att

$$\log|G(i\omega)| = \log|K|, \quad \arg G(i\omega) = 0$$

som har ett trivialt Bodediagram som lämnas som en övning att rita.

$G(s) = s$

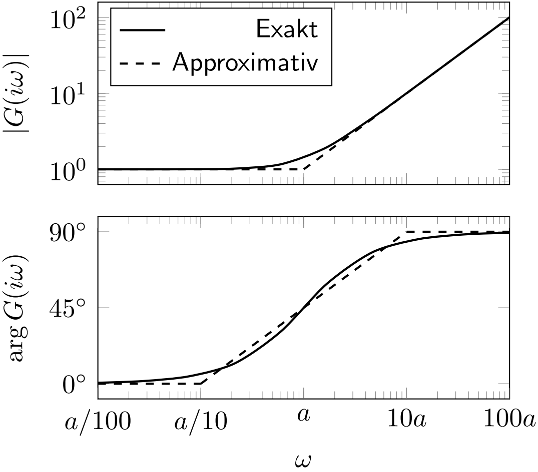


Vi har för $G(s) = s$ att

$$\log|G(i\omega)| = \log\omega, \quad \arg G(i\omega) = \pi/2 = 90^\circ$$

från vilket vi inser att amplitudkurvan blir en rät linje med lutning plus ett i ett loglog-diagram, och att faskurvan är konstant.

Bodediagram för $G(s) = 1 + \frac{s}{a}$



Frekvensfunktion för $G(s) = 1 + \frac{s}{a}$

Vi har för $G(s) = 1 + \frac{s}{a}$ att

$$|G(i\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}, \quad \arg G(i\omega) = \arctan \frac{\omega}{a}$$

och från detta följer att

$$\log |G(i\omega)| = \frac{1}{2} \log \left(\omega^2 + a^2\right) - \log a$$

Approximativ frekvensfunktion

Vi kan approximera med räta linjer:

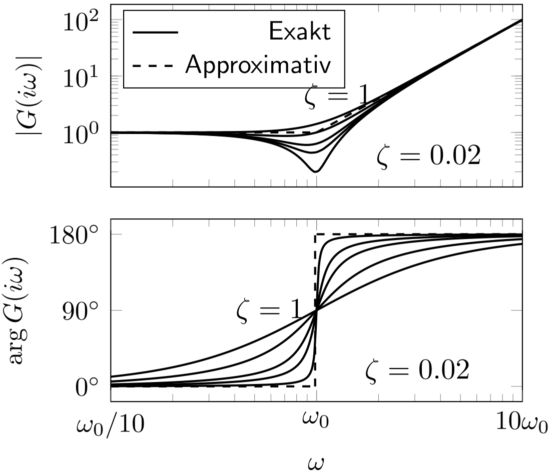
$$\log|G(i\omega)| \approx \begin{cases} 0, & \omega < a \\ \log\omega - \log a, & \omega \geq a \end{cases}$$

$$\arg G(i\omega) \approx \begin{cases} 0, & \omega < a/10 \\ 45^\circ + 45^\circ\left(\log\omega - \log a\right), & a/10 \leq \omega < 10a \\ 90^\circ, & \omega \geq 10a \end{cases}$$

För absolutbeloppet gäller att felet för approximationen vid $\omega = a$ är $\sqrt{2}$ eller $20\log\left(\sqrt{2}\right)\mathrm{dB} \approx 3\mathrm{dB}$.

Vi inser att för beloppskurvan gäller att de två asymptoterna skär varandra för $\omega = a$ samt att för detta värde på ω så har faskurvan beloppet 45°. Denna vinkelfrekvens kallas *brytfrekevensen.* Lutningen för beloppsasymptoten är noll för $\omega < a$ och lutningen är ett för $\omega > a$.

Bodediagram för $G(s) = 1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$



Frekvensfunktion för $G(s) = 1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$

För

$$G(s) = 1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

gäller att

$$\log|G(i\omega)| = \frac{1}{2}\log\left(\omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2(2\zeta^2 - 1) + \omega_0^4\right) - 2\log\omega_0$$

$$\arg G(i\omega) = \begin{cases} \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}, & \omega < \omega_0 \\ 90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ 180^\circ - \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}, & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Approximativ frekvensfunktion

Vi kan approximera detta med räta linjer enligt

$$\log|G(i\omega)| \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_0 \\ 2\log\omega - 2\log\omega_0, & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\arg G(i\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \ll \omega_0 \\ 180^\circ, & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

Vi inser att för beloppskurvan gäller att de två asymptoterna skär varandra för $\omega = \omega_0$ samt att för detta värde på ω så har faskurvan beloppet 90°. Brytfrekvensen är alltså ω_0. Lutningen för beloppsasymptoten är noll för $\omega < \omega_0$ och lutningen är två för $\omega > \omega_0$. För $\omega = \omega_0$ gäller för små värden på ζ att beloppskurvan är väldigt liten.

Resonanstopp

För $H(i\omega) = 1/G(i\omega)$, vars Bodediagram erhålles genom att spegla Bodediagrammet för $G(\imath\omega)$ i ω-axeln, säger man att det finns en *resonanstopp* nära ω_0, ty insingaler med frekvenser nära ω_0 kommer att förstärkas mycket. Detta följer från (1) som säger att

$$y(t) = |H(i\omega)| \sin(\omega t + \phi_H(\omega)) = \frac{1}{|G(i\omega)|} \sin(\omega t - \phi(\omega))$$

där ϕ_H är fasförskjutningen för H och ϕ är fasförskjutningen för G.

Exempel

Betrakta

$$G(s)\frac{s+1}{s(s+10)}$$

och skriv

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_3(s)G_4(s)}$$

där

$$G_1(s) = 0.1, \quad G_2(s) = 1 + s, \quad G_3(s) = s, \quad G_4(s) = 1 + \frac{s}{10}$$

Faktorer i täljaren ska adderas och faktorer i nämnaren ska subtraheras.

För G_2 och G_4 gäller att asymptoterna för såväl beloppskurvan som faskurvan är noll till vänster om respektive brytfrekvens. Dessa vinkelfrekvenser är 1 respektive 10.

Lågfrekvensasymptoter

Detta betyder att det endast är G_1 och G_3 som har någon inverkan på asymptoter för låga frekvenser. Vi kallar därför $G_1(s)/G_3(s)$ för *lågfrekvensasymptoten* och det gäller att

$$G(i\omega) \approx \frac{G_1(i\omega)}{G_3(i\omega)} = \frac{0.1}{i\omega}$$

för $\omega \ll 1$, där 1 är den lägsta brytfrekvensen. Vi har alltså att

$$\begin{gathered}\log|G(i\omega) \approx \log|G_1(i\omega)| - \log|G_3(i\omega)| = \log 0.1 - \log\omega \\ \arg G(i\omega) \approx \arg G_1(i\omega) - \arg G_3(i\omega) = 0 - 90^\circ = -90^\circ\end{gathered}$$

för $\omega \ll 1$. Bodediagrammet för lågfrekvensasymptoten är alltså en spegling i ω-axeln samt för beloppskurvan också en translation i den andra axelns riktning av Bodediagrammet vi ritade för $G(s) = s$.

Vad händer nära första brytfrekvensen?

När vi närmar oss bryfrekvensen 1 så kommer G_2 att börja påverka kurvorna.

För beloppskurvan så kommer det att adderas en rät linje med lutning plus ett vid $\omega = 1$. Den totala lutningen blir därför noll, eftersom den innan var minus ett.

Fasen har vid denna vinkelfrekvens ökat med 45° från -90° till -45° och för vinkelfrekvenser som är mycket större kommer faskurvan att närma sig 0°.

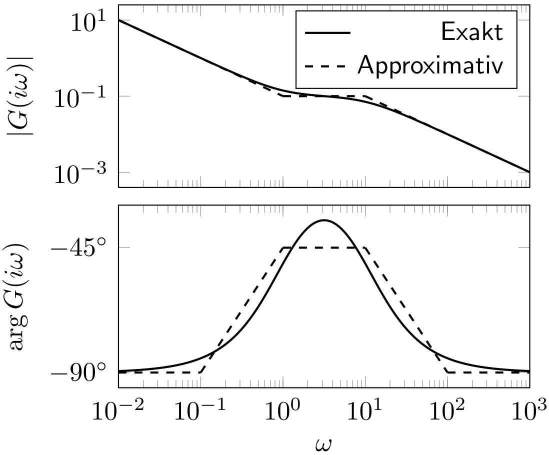
Vad händer nära andra brytfrekvensen?

När vi närmar oss bryfrekvensen 10 så kommer G_4 att börja påverka kurvorna.

För beloppskurvan så kommer det att adderas en rät linje med lutning minus ett vid $\omega = 10$. Den totala lutningen blir därför minus ett, eftersom den innan var noll.

Fasen har vid denna vinkelfrekvens minskat med 45° från nära 0° till -45° och för vinkelfrekvenser som är mycket större kommer faskurvan att närma sig -90°.

Bodediagram



Repetitionsfrågor

1. Vad är frekvensfunktionen?
2. Vad ritar man upp i ett Bodediagram och vad visar de olika axlarna?
3. Hur kan man experimentellt ta fram ett Bodediagram?