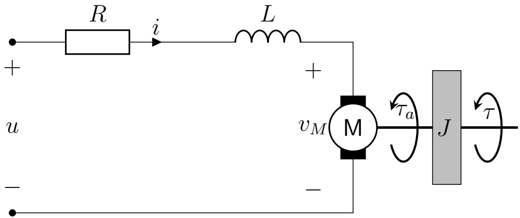
Reglerteknik, Föreläsning 6: Tillståndsform

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Likströmsmotor



Motorn alstrar vridmoment τ_a proportionellt mot strömmen i enligt

$$\tau_a = k_a i$$

där $k_a$beror på motorns egenskaper.

Momentbalans för motorn ger

$$J\ddot{\theta}(t) = k_a i - \mu\dot{\theta}(t) + \tau(t)$$

där θ är vinkeln för motoraxeln, μ relaterar till viskös friktion och τ är ett yttre pålagt moment.

Likströmsmotor

Spänningen över motorn ges av

$$v_M(t) = k_v \dot{\theta}(t)$$

där k_v beror på motorns egenskaper.

Kirchhoffs spänningslag ger

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_M(t)$$

Oftast är L försumbar, och vi kan därför härleda följande differentialekvation för likströmsmotorn

$$J\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{k_a k_v}{R} + \mu\right)\dot{\theta}(t) = \frac{k_a}{R}u(t) + \tau(t)$$

Två första ordningens differentialekvationer

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$
$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{J}\left(\frac{k_a k_v}{R} + \mu\right)\omega(t) + \frac{k_a}{JR}u(t) + \frac{1}{J}\tau(t)$$

Låt $x_1(t) = \theta(t)$ och $x_2(t) = \omega(t)$, $v(t) = R/k_a\tau(t)$ samt

$$a = \frac{1}{J}\left(\frac{k_a k_v}{R} + \mu\right), \quad b = \frac{k_a}{JR}$$

Då kan vi skriva differentialekvationerna som

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + b\left(u(t) + v(t)\right)$$

Tillstånd

Med *tillståndsvektorn* eller *tillståndet*

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

gäller för $v(t) = 0$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ a(-\omega(t) + bu(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t) \qquad (1)$$

Vi kan skriva utsignalen $y(t) = \theta(t)$ som

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Tillståndsform

Vi kan med matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

beskriva likströmsmotorn på *tillståndsformen*

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Mer generellt kan en tillståndsform också innehålla en *direktterm* från $u(t)$ till $y(t)$.

Tillståndsform

Definition

Ett system på tillståndsform ges av

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \tag{2}$$

Matriserna (A, B, C, D) kallas *systemmatriserna* och definierar systemet.

Tillståndsvektorn x, insignalen u och utsignalen y kan ha godtyckliga dimensioner.

Om man bara vill referera till den första ekvationen kan man göra det med (A, B). Om man bara vill referera till systemet då man inte är intresserad av insignalens påverkan göra det med (A, C)

Lösning av differentialekvation

Betrakta

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \tag{3}$$

med givet initalvärde $x(0) = x_0$. Inför *matrisexponentialen*

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

som konvergerar för alla kvadratiska matriser X. Lösningen till (3) ges av

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{4}$$

Bevis: derivera uttrycket ovan:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots\right)x_0 \\ &= \left(A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \cdots\right)x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t)\end{aligned}$$

Vi har nu också lärt oss att

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \tag{5}$$

Exempel

Antag att

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Då gäller att

$$A^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$$

och därför är

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k(-t)^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-t(-t)^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Lösningsformel med insignal

Med hjälp av formeln i (5) och regler för hur man deriverar integraler kan man visa att

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{6}$$

löser den första ekvationen i (2) som resulterar i

RESULTAT

Lösningsformel:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Viktsfunktion

Om vi låter $x_0 = 0$ och $u(\tau) = \delta(\tau)$ så föjer att $y(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$. Alltså ges impulssvaret eller viktsfunktionen för ett system på tillståndsform av

Resultat

Viktsfunktion:

$$g(\tau) = Ce^{A\tau}B + D\delta(\tau)$$

Från detta följer att system på tillståndsformen i (2) är linjära och kausala.

Exempel

Antag att

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Då gäller att

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

enligt förra exemplet. Vi har därför att impulssvaret är

$$g(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1-t)e^{-t}$$

Karakteristiskt polynom

Låt oss definiera a_i som koefficienterna för det *karakteristiska polynomet*

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{7}$$

Exempel

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Då är det karakteristiska polynomet

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

och vi ser att $a_1 = -4$ och $a_2 = 3$.

Cayley-Hamilton

Sats

Cayley-Hamilton: Varje matris satisfierar sin egen karakterstiska ekvation, d.v.s.

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

där a_i definieras av (7)

Styrbarheter

Definition

Ett tillstånd x_0 säges vara *styrbart* för ett system (A, B) om det finns en insignal u så att $x(t_f) = 0$ för ett ändligt t_f när $x(0) = x_0$. Om alla x_0 är styrbara så säges systemet (A, B) vara styrbart.

Vi har från (6) att

$$x(t_f) = e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B u(\tau) d\tau = 0$$

och eftersom e^{At_f} är inverterbar, så är detta ekvivalent med att

$$x_0 = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = -\int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-A\tau)^k B u(\tau) d\tau$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

för några funktioner $\alpha_k(\tau)$.

Styrbarhetsmatris

Den sista likheten följer från Sats 1 varur det följer att varje potens A^k för $k \geq n$ uttryckas som en linjärkombination av $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Vi inser nu att x_0 kan skrivas som en linjärkombination av $A^k B$ och vi inför därför följande definition.

Definition

Styrbarhetsmatrisen för (A, B) ges av

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{8}$$

och det underrum som spänns av styrbarhetsmatrisen kallas det *styrbara underrummet*.

Styrbarhetssats

Sats

Styrbarhet: Ett tillstånd x_0 är styrbart för ett system (A, B) om och endast om det ligger i det styrbara underrummet. Systemet är styrbart om och endast om styrbarhetsmatrisen har full radrang.

Exempel

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Då gäller att

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och stryrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

som är inverterbar, och systemet är därför styrbart.

Observerbarhet

Definition

Ett tillstånd $x_0 \neq 0$ säges vara *icke observerbart* för ett system (A, C) om det finns ett ändligt t_f så att $y(t) = 0$ när $x(0) = x_0$ och $u(t) = 0$ för $0 \leq t \leq t_f$. Om det inte finns några icke observerbara tillstånd så säges systemet vara observerbart.

Vi har från Resultat 1 att

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

eftersom $u(t) = 0$. Genom att derivera upprepade gånger inser vi att

$$\frac{d^k y(t)}{dx^k} = CA^k x(t)$$

Genom att evaluera för $t = 0$ erhåller vi, eftersom $y(t)$ och alla dess derivator är noll, att $CA^k x_0 = 0$ för alla $k \geq 0$. Sats 1 säger nu att det räcker att undersöka $0 \leq k \leq n - 1$.

Observerbarhetsmatris

Definition

Observerbarhetsmatrisen för (A, C) ges av

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

och nollrummet till observerbarhetsmatrisen kallas det *icke-observerbara underrummet*.

Observerbarhetssats

Sats

Observerbarhet: Ett tillstånd $x_0 \neq 0$ är icke-observerbart för ett system (A, C) om och endast om det ligger i det icke-observerbara underrummet. Systemet är observerbart om och endast om observerbarhetsmatrisen har full kollumnrang.

Tillståndstransformation

Antag system definierat av (2). Låt nu för en inverterbar matris T $z(t) = Tx(t)$. Då följer att

$$\frac{dz(t)}{dt} = T\frac{dx(t)}{dt} = TAx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t)$$

och att

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t)$$

Resultat

Tillståndstransformation: För ett system givet av (2) gäller att

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned} \tag{10}$$

med $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$ beskriver samma system för godtycklig inverterbar matris T.

Invarians av egenvärden

Egenvärdena för A är desamma som egenvärdena för $\bar{A}$ vilket lätt inses ur

$$\lambda z = \bar{A}z \iff \lambda Tx = TAT^{-1}z \iff \lambda x = Ax$$

där $z = Tx$.

Resultat

Invarians av egenvärden En tillståndstransformation påverkar inte systemmatrisens egenvärden, d.v.s. A och TAT^{-1} har samma egenvärden för alla inverterbara T.

Diagonalform

En speciellt enkel form, kallad *diagonalform*, kan erhållas då A har distinkta, d.v.s. olika egenvärden. Då gäller att det finns inverterbart T så att

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

Diagonalform

Från detta följer att komponenterna z_i i det nya tillsåndet z satisfierar

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \lambda_1 z_1(t) + b_1 u(t)$$
$$\frac{dz_2(t)}{dt} = \lambda_1 z_2(t) + b_2 u(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dz_n(t)}{dt} = \lambda_1 z_n(t) + b_n u(t)$$

där $\bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$. Dessa komponenter kallas för *moder*. Ovan har vi antagit att $u(t)$ är skalärvärd. Om också $y(t)$ är skalärvärd så gäller att vi kan skriva

$$y(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \cdots + c_n z_n(t) + du(t)$$

där $\bar{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ och $D = d$.

Diagonalform

Resultat

Diagonalform Om matrisen A är diagonaliserbar så finns tillståndstransformation så att (2) kan beskrivas med

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_1(t)}{dt} &= \lambda_1 z_1(t) + b_1 u(t) \\
\frac{dz_2(t)}{dt} &= \lambda_1 z_2(t) + b_2 u(t) \\
&\vdots \\
\frac{dz_n(t)}{dt} &= \lambda_1 z_n(t) + b_n u(t) \\
y(t) &= c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \cdots + c_n z_n(t) + du(t)
\end{aligned}
$$

Exempel

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena för A är 1 och 3. Egenvektor x för $\lambda = 1$ ska lösa

$$(1 \times I - A)x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lösning är $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. En egenvektor x för $\lambda = 3$ ska lösa

$$(3 \times I - A)x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lösning är $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Vi låter nu

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel

Då gäller att

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Impulssvar

Sats

Impulssvaret för ett system är invariant under tillståndstransformationer.

Bevis.

Det gäller att

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} &= e^{TAT^{-1}t} = I + TAT^{-1}t + \frac{1}{2!}\left(TAT^{-1}t\right)^2 + \cdots \\ &= T\left(I + At + \frac{1}{2!}(t)^2 + \cdots\right)T^{-1} = Te^{At}T^{-1} \end{aligned}$$

Från detta följer att $\bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} = CT^{-1}Te^{At}T^{-1}TB = Ce^{At}B$. □

Styrbar kanonisk form

Sats

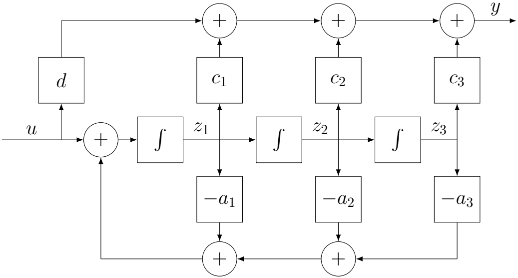
Styrbar kanonisk form: Låt (A, B, C, D) definiera ett system på tillståndsformen. Antaga att styrbarhetsmatrisen $\mathcal{S}$ för (A, B) är inverterbar. Då existerar en tillståndstransformation $z(t) = Tx(t)$ så att

$$\frac{dz(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} z(t) + du(t)$$

där $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = CT^{-1}$ och $d = D$. Här är a_i koefficienterna för det karakteristiska polynomet i (7).

Styrbar kanonisk form



Observerbar kanonisk form

SATS

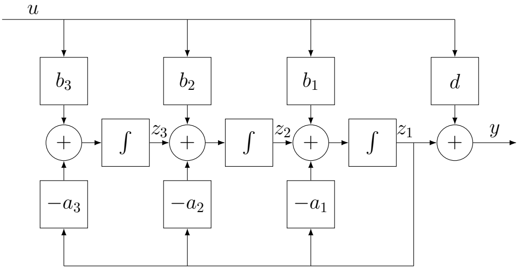
Observerbar kanonisk form: Låt (A, B, C, D) definiera ett system på tillståndsform. Antag att observerbarhetsmatrisen $\mathcal{O}$ för (A, C) är inverterbar. Då existerar en tillståndstransformation $z(t) = Tx(t)$ så att

$$\frac{dz(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z(t) + du(t)$$

där $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T = TB$ och $d = D$. Här är a_i koefficienterna för det karakteristiska polynomet i (7).

Observerbar kanonisk form



Repetitionsfrågor

1. Vad är en tillståndsform?
2. Ange lösningsformeln för ett system på tillståndsform.
3. Vad är viktsfunktionen för ett system på tillståndsform?
4. Definiera styrbarhet och observerbarhet.
5. Ange kriterier för att ett system ska vara styrbart respektive observerbart.
6. Vad är en tillståndstransformation?
7. Vad menas med att egenvärdena för en tillståndsform är invarianta under en tillståndstransformation?
8. Ge exempel på system på diagonalform, styrbar kanonisk form, och observerbar kanonisk form.