Reglerteknik, Föreläsning 4: Återkoppling

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Proportionell Reglering

Ett system (öppet systemet) givet av

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = b_0 u(t) \tag{1}$$

regleras med P-regulatorn

$$u(t) = K_P(r(t) - y(t)) \tag{2}$$

Det slutna systemet beskrivs då av

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + (1 + b_0 K_P) y(t) = b_0 K_P r(t)$$

Jämför vänsterledet i denna differentialekvation med vänsterledet i

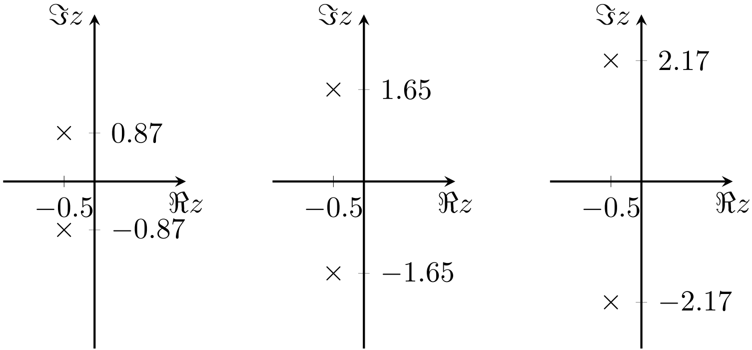
$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 r(t)$$

Dessa ekvationer är samma om $\omega_0^2 = 1 + b_0 K_P$ samt $2\zeta\omega_0 = 1$.

Karakteristisk Ekvation

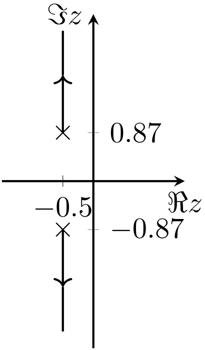
$$z^2 + 2\zeta\omega_0 z + \omega_0^2 = 0$$

som har rötter $z_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_d$, där $\zeta\omega_0 = -1/2$ och $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 = \sqrt{1 + b_0 K_P - 1/4}$.



Rötter till karakteristiska ekvationen för $K_P = 0$ till vänster, $K_P = 2$ i mitten och $K_P = 4$ till höger.

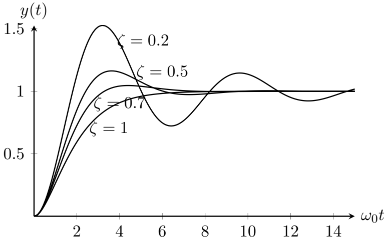
Rotort



Rotort som visar hur karakteristiska ekvationens rötter varierar med K_P där pilen anger riktningen för ökande värden av K_P, och där $\times$ anger rötterna för $K_p = 0$.

De två linjerna kallas för rotortens *grenar*. Man ser att rötterna går mot oändligheten då K_P går mot oändligheten. Vidare ser man också att ω_0 ökar och att ζ minskar med ökande K_P.

Stegsvar och Stabilitet



Det slutna systemet har mindre stigtid $T_r \sim \omega_0^{-1}$, men också större översläng med större K_P. Insvängningstiden (5%) $T_s \approx 3/(\omega_0\zeta)$ går inte att påverka.

Impulssvaret som ges av

$$g(t) = \dot{y}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\zeta\omega_0 \sin\left(\omega_d t + \phi\right) - \omega_d \cos\left(\omega_d t + \phi\right)\right)$$

där $y(t)$ är stegsvaret, är absolut integrerbart. Alltså är slutna systemet insignalutsignalstabilt.

Allmänt Öppet Dynamiskt System

Betrakta

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t) \tag{3}$$

Introducera derivataoperatorn

$$py(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Då fås

$$p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \ldots + a_{n-1} p y(t) + a_n y(t) = b_0 p^m u(t) + \ldots + b_{m-1} p u(t) + b_m u(t)$$

eller ekvivalent som

$$A(p) y(t) = B(p) u(t)$$

där

$$A(p) = p^n + \cdots + a_{n-1} p + a_n, \quad B(p) = b_0 p^m + \cdots + b_{m-1} p + b_m$$

Slutet Systemet

Med P-regulatorn $u(t) = K_P(r(t) - y(t))$ ges slutna systemet av

$$(A(p) + K_P B(p))\, y(t) = K_P B(p) r(t) \tag{4}$$

Den karakteristisk ekvationen för differentialekvationen för det slutna systemet är alltså

$$A(z) + K_P B(z) = 0 \tag{5}$$

där som innan z är ett komplext tal. Vi vet att vi har insignalutsignalstabilitet för det slutna systemet då alla rötter till den karakteristiska ekvationen har en realdel som är negativ.

Observera att polynomet i karateristiska ekvationen ovan är samma som polpolynomet för slutna systemets överföringsfunktion om vi byter ut z mot s.

Regler för att Rita Rotort

Det gäller att (5) med $K = K_P$ är ekvivalent med

$$K = -\frac{A(z)}{B(z)} \tag{6}$$

Ingen inskränkning att anta att $b_0 = 1$ om b_0 antas vara positiv, eftersom andra värden kan inkluderas i K genom normering.

- *Symmetri.* Eftersom A och B antas ha reella koefficienter så gäller att om z är en rot så är även komplexkonjugatet $\bar{z}$ en rot. Det inses genom att komplexkonjugera ekvationen i (5). Alltså är rotorten symmetrisk med avseende på den reella axeln i det komplexa talplanet.
- *Antal grenar.* Algebrans fundamentalsats säger att (5) har lika många rötter som det största gradtalet för A och B, vilket vi antar är n. Alltså har rotorten n stycken *grenar*.

Ytterligare Regler

- *Start och ändpunkter.* Vi inser från (6) att $K = 0$ för de z som är nollställen till A och att $K = \infty$ för de z som är nollställen till B. Rotorten startar alltså för $K = 0$ i nollställena till A och slutar för $K = \infty$ i nollställena till B eller i oändligheten.
- *Reella axeln.* Endast de delar av reella axeln, som har ett udda antal nollställen för A och B till höger om sig, tillhör rotorten.
- *Asymptoter.* Det gäller för stora värden på z att rotorten närmar sig räta linjer som startar i $-(a_1 - b_1)/(n - m)$ och som går ut i riktningarna

$$\frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-m-1$$

Exempel

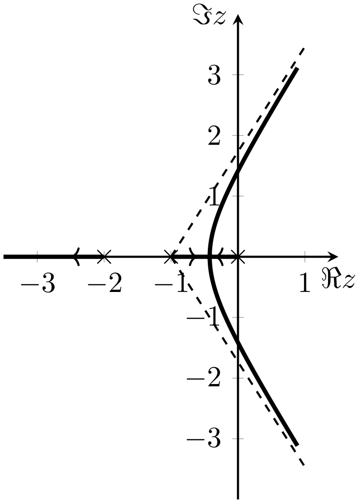
Exempel

Låt polynomen i (5) ges av

$$A(z) = z(z+1)(z+2), \qquad B(z) = 1$$

Vi har att $m = 0$ och $n = 3$ och alltså har vi tre grenar. De olika grenarna startar i nollställena till A som är $0, -1, -2$. Den del av reella axeln som ligger till vänster om -2 tillhör rotorten liksom den del som ligger mellan -1 och 0. Vidare är $n - m = 3$ och alltså har vi i detta tre asymptoter. Det gäller att $A(z) = z^3 + 3z^2 + 2z$ och alltså är $a_1 = 3$. Vidare är $b_1 = 0$. Därför startar asymptoterna i $-a_1/n = -3/3 = -1$. Riktningarna är $\pi/3$, π och $5\pi/3$.

Rotort



Grenarna som startar i 0 och -1 möts på reella axeln och viker därefter ut i det komplexa talplanet för att närma sig sina asymptoter då K närmar sig oändligheten.

PID-Reglering

Den enklaste PID-regulator man kan tänka sig ges av

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(s)ds + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

där $e = r - y$ är reglerfelet, y ärvärdet, r referensvärdet och u styrsignalen.

Vi kallar den första termen för *proportionaltermen*, den andra för *integraltermen* och den tredje för *derivatatermen*.

Ibland ersätter vi ordet term med del, t.ex. kallar vi proportionaltermen för proportionaldel.

Vi kallar K_P för *proportionalförstärkning*, K_I för *integralförstärkning* och K_D för *derivataförstärkning*.

Alternativ Parameterisering

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(s)ds + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

där $K = K_P$, $K/T_I = K_I$ och $KT_D = K_D$. De nya parametrarna T_I och T_D har dimensionen tid och T_I kallas för *integraltid* och T_D för *derivatatid*.

Laplacetrasnformering ger

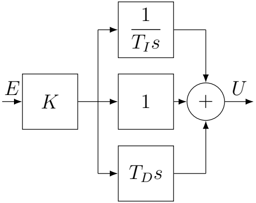
$$U(s) = F_p(s)E(s)$$

där regulatorns överföringsfunktions ges av

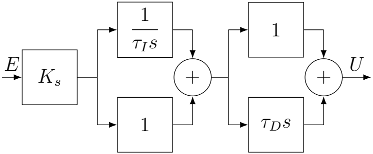
$$F_p(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

Vi använder indexet p för att ange att detta är en PID-regulator på s.k. *parallellform*.

Blockschema för PID-regulatorer



(a) Parallellform.



(b) Serieform.

Man kan också definiera en PID-regulator på *serieform* med överföringsfunktion

$$F_s(s) = K_s \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)(1 + \tau_D s)$$

Den är en seriekoppling av en PI-regulator med en PD-regulator.

Serieform kan skrivas på Parallellform

Utför multiplikationen av parenteserna i serieformen:

$$K_s \left(1 + \tau_D/\tau_I + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

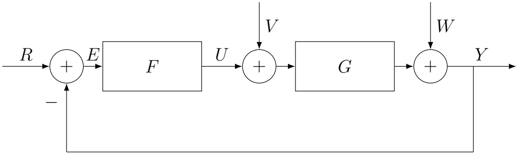
och

$$K = \kappa K_s, \quad T_I = \kappa \tau_I, \quad T_D = \tau_D/\kappa$$

där $\kappa = (\tau_I + \tau_D)/\tau_I$.

Det är inte alltid möjligt att uttrycka K_s, τ_I och τ_D i K, T_I och T_D. Detta beror på att PID-regulatorn på parallellform kan ha komplexkonjugerade nollställen vilket PID- regulatorn på serieform inte kan ha.

Det Återkopplade Systemet



Referensevärdet ges av $R(s)$ och det finns en *insignalstörning* $V(s)$ och en *utsignalstörning* $W(s)$.

Målet är att välja $F(s)$ så att reglerfelet $E(s)$ blir litet trots de yttre signalerna, $R(s)$, $V(s)$ och $W(s)$.

Superposition

Vi har

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= W(s) + G(s)\left(V(s) + F(s)(R(s) - Y(s))\right) \\
U(s) &= F(s)\left(R(s) - W(s) - G(s)(V(s) + U(s))\right)
\end{aligned}
$$

Vi löser nu ut $Y(s)$ ur den första ekvationen och $U(s)$ ur den andra ekvationen och erhåller

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} V(s) + \frac{1}{1 + G(s)F(s)} W(s) \\
U(s) &= \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s) - \frac{F(s)G(s)}{1 + G(s)F(s)} V(s) - \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)} W(s)
\end{aligned}
$$

Vi inser att såväl $Y(s)$ som $U(s)$ är linjära i $R(s)$, $V(s)$ och $W(s)$.

Man kan erhålla den totala utsignalen genom att addera bidragen från vardera insignal. Detta kallas *superposition*.

Kretsförstärkning och Känslighetsfunktion

Definition

För ett system med överföringsfunktion $G(s)$ som regleras i återkoppling med en regulator $F(s)$ kallar vi $G_o(s) = F(s)G(s)$ för *kretsförstärkningen*.

Definition

För ett slutet system med kretsförstärkning $G_o(s)$ kallar vi

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}$$

för *känslighetsfunktionen*.

Komplementär Känslighetsfunktion

Definition

För ett slutet system med kretsförstärkning $G_o(s)$ kallar vi

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

för *komplementära känslighetsfunktionen*.

Slutna Systemet

Nu gäller

$$Y(s) = T(s)R(s) + G(s)S(s)V(s) + S(s)W(s) \tag{7}$$

$$U(s) = F(s)S(s)R(s) - T(s)V(s) - F(s)S(s)W(s) \tag{8}$$

Att se till att göra $E(s) = R(s) - Y(s)$ liten är nu det samma som att se till att göra $T(s)$ nära ett och $S(s)$ nära noll enligt den första ekvationen.

Ingen inneboende konflikt i detta eftersom $S(s) + T(s) = 1$.

Dock är det så att kretsförstärkningen ges av

$$G_o(s) = F(s)G(s)$$

och vi inser att den måste göras stor för att vi ska uppnå vårt mål. För de flesta fysikaliska system är $G(s)$ liten för stora värden på s och därför måste vi då välja $F(s)$ stor för att kompensera för detta. Enligt (8) bli då $U(s)$ stor.

Vad blir F för önskat T?

Låt oss bara studera hur referensvärdet påverkar utsignalen (superposition), d.v.s.

$$Y(s) = T(s)R(s)$$

där

$$T(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} \tag{9}$$

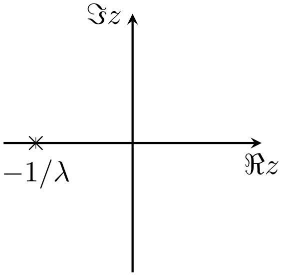
Lös med avseende på $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{T(s)}{1 - T(s)} \tag{10}$$

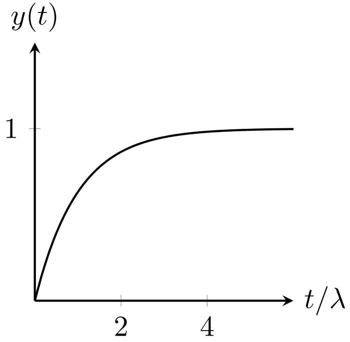
Om vi vill att $T(s) = 1$, så att vi erhåller perfekt reglering, så blir $F(s) = \infty$.

Detta är inte möjligt att realisera.

λ-Inställning



(a) Pol för $T(s)$.



(b) Stegsvar.

Dock kan vi istället välja

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

för $\lambda > 0$. Ju mindre vi väljer λ ju mindre stigtid och insvängningstid får vi. Vi får ingen översläng.

PI-reglering

Vi ska nu undersöka vad λ-inställning ger för regulatorer i några exempel.

Exempel

Antag att

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

Då gäller att

$$F(s) = \frac{s+a}{b} \frac{\frac{1}{1+\lambda s}}{1 - \frac{1}{1+\lambda s}} = \frac{s+a}{b\lambda s} = \frac{1}{b\lambda}\left(1 + \frac{a}{s}\right)$$

Detta är en PI-regulator

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

med $K = 1/(b\lambda)$ och $T_I = 1/a$.

PID-reglering på Serieform

Exempel

Antag att

$$G(s) = \frac{b}{(s+a_1)(s+a_2)}$$

Då gäller att

$$F(s) = \frac{(s+a_1)(s+a_2)}{b} \frac{\frac{1}{1+\lambda s}}{1 - \frac{1}{1+\lambda s}} = \frac{a_2}{b\lambda} \left(1 + \frac{a_1}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{a_2}\right)$$

Detta är en PID-regulator på serieform

$$F(s) = K_s \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) (1 + \tau_D s)$$

med $K_s = a_2/(b\lambda)$, $\tau_I = 1/a_1$ och $\tau_D = 1/a_2$.

PID-reglering på Parallellform

Exempel

Antag att

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_o^2}$$

Då gäller att

$$F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_o^2}{b} \frac{\frac{1}{1+\lambda s}}{1 - \frac{1}{1+\lambda s}} = \frac{2\zeta\omega_0}{b\lambda}\left(1 + \frac{\omega_0}{2\zeta s} + \frac{s}{2\zeta\omega_0}\right)$$

Detta är en PID-regulator på parallellform

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

med $K = 2\zeta\omega_0/(b\lambda)$, $T_I = 2\zeta/\omega_0$ och $T_D = 1/(2\zeta\omega_0)$. Denna PID-regulator går inte att skriva på serieform, eftersom den har komplexkonjugerade nollställen.

Vad blir Styrsignalen?

Vi har att styrsignalen beror av referensevärdet enligt

$$U(s) = F(s)S(s)R(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)}R(s) = \frac{T(s)}{G(s)}R(s)$$

Man inser att nollställena till $G(s)$ är poler för överföringsfunktionen från $R(s)$ till $U(s)$ såvida de inte förkortas bort, vilket de gör om $T(s)$ också har dem som nollställen.

Om något av dessa nollställen ligger i höger halvplan och inte förkortas bort, så har vi inte insignalutsignalstabilitet från r till u.

Man kan modifiera valet av $T(s)$ så att förkortning sker, se läroboken.

Hur undertrycks Insignalstörningar?

För husuppvärmningsexemplet i Föreläsning 1 gäller

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t) + b_v v(t)$$

där $a = (h+k)/C$, $b = k/(h+k)$, och $b_v = h/(k+h)$. Här är y inomhustemperaturen som vi vill reglera med framvattentemperaturen u. Signalen v är utomhustemperaturen som är en insignalstörning.

Laplacetransformering ger

$$Y(s) = G(s)\left(U(s) + \frac{b_v}{b}V(s)\right)$$

där

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

λ-inställning

Vi inser att $G(s)$ har samma form samma som i Exempel 2, och därför erhåller vi med λ-inställning en PI-regulator

$$F(s) = \frac{1}{b\lambda}\left(a + \frac{a}{s}\right)$$

som resulterar i

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

som är överföringsfunktionen från R till Y.

Vi kan välja tidskonstanten λ godtyckligt liten.

Överföringsfunktionen från V till Y

ges av

$$\frac{b_v}{b}S(s)G(s) = \frac{b_v}{b}(1 - T(s))G(s) = \frac{b_v}{b}\left(1 - \frac{1}{\lambda s + 1}\right)\frac{b}{s+a}$$
$$= \frac{\lambda b_v s}{(\lambda s + 1)(s + a)}$$

Låt $V(s) = 1/s$, d.v.s. ett enhetssteg, och vi får med partialbråksuppdelning

$$\frac{b_v}{b}S(s)G(s)V(s) = \frac{\lambda b_v}{(\lambda s + 1)(s + a)} = \frac{A}{\lambda s + 1} + \frac{B}{s + a}$$

Invers $\mathcal{L}$-transform ger

$$\frac{A}{\lambda}e^{-t/\lambda} + Be^{-at}$$

Den största av λ och $1/a$ bestämmer hur lång tid det tar att undertrycka insignalstörningen, och

$$\frac{1}{a} = \frac{C}{h + k} = \frac{1000}{100 + 100}h = 5h$$

Repetitionsfrågor

1. Vad är en rotort?
2. Vad är en PID-regulator?
3. Vad skiljer en PID-regulator på serieform från en PID-regulator på parallellform?
4. Vad är kretsförstärkningen?
5. Vad är känslighetsfunktionen?
6. Vad är den komplementära känslighetsfunktionen?
7. Vad är λ-inställning?
8. Vilka för- och nackdelar har λ-inställning?