# Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT93)

Tentamensdatum: 21 augusti 2025

1. (a) Den önskade blodsockerhalten kan ses som en referenssignal och det tillförda insulinet är styrsignalen medan den faktiska blodsockerhalten är utsignalen som man vill reglera. Variationer i sockerhalten i maten som patienten äter kan ses som en systemstörning som man vill kompensera för med hjälp av regleringen.

   (b) Genom att multiplicera båda sidor i sambandet $Y(s) = G(s)U(s)$ med nämnaren till $G(s)$ får man

   $$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = (s + 4)U(s).$$

   Invers laplacetransformering ger

   $$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + 4u(t).$$

   (c) Det slutna systemet kan skrivas

   $$Y(s) = \frac{G(s)K_P}{1 + G(s)K_P} R(s)$$

   och eftersom det är insignal-utsignalstabilt kan slutvärdesteoremet användas för att räkna ut det sökta gränsvärdet när $R(s) = 1/s$. Med $K_P = 1$ får man

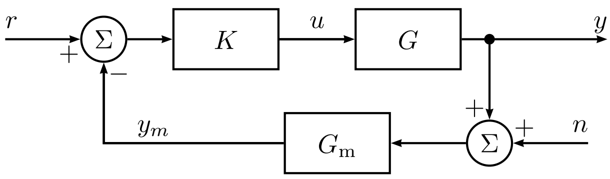
   $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{2}{3}$$

   medan $K_P = 4.5$ ger

   $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{9}{10}.$$

   En fördel med en högre förstärkning i en P-regulator är att reglerfelet ofta blir mindre, förutsatt att det slutna systemet fortfarande är stabilt. En nackdel är att man typiskt behöver kunna ställa ut större styrsignaler i detta fall.

   (d) Enligt uppgiftsbeskrivningen fås följande blockschema




   samt sambandet

   $$\begin{aligned}
   Y(s) &= G(s)K\Big(R(s) - G_m(s)\big(Y(s) + N(s)\big)\Big) \implies \\
   Y(s) &= \frac{KG(s)}{1 + KG(s)G_m(s)} R(s) - \frac{KG(s)G_m(s)}{1 + KG(s)G_m(s)} N(s) \\
   &= \frac{5K(s + 100)}{s(s + 20)(s + 100) + 500K} R(s) - \frac{500K}{s(s + 20)(s + 100) + 500K} N(s)
   \end{aligned}$$

2. (a) Vi vill använda en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + l_0 r$ för att placera det slutna systemets poler i $s = -4$. Det slutna systemets poler ges av dess karakteristiska ekvation

   $$\det(sI - A + BL) = s^2 + (5 + l_1)s + 4l_1 + 3l_2 - 2 = 0$$

   En jämförelse med den önskade karakteristiska ekvationen $(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0$ ger $l_1 = 3$ och $l_2 = 2$. I stationärt tillstånd ($\dot{x} = 0$) har man

   $$\begin{aligned}
   0 &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \end{pmatrix} r \\
   y &= x_1
   \end{aligned}$$

Den första raden i detta samband ger att $x_1 = 0.25 l_0 r$, vilket insatt i mätekvationen $y = x_1$ ger att $y = 0.25 l_0 r$. Med $l_0 = 4$ blir den statiska förstärkningen ett. Återkopplingen ska alltså vara

$$u = -\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} x + 4r$$

(b) De båda delsystemen har samma poler och samma insignal, men olika täljarpolynom. Systemet kan realiseras på tillståndsform genom att använda styrbar kanonisk form, vilket gör att koefficienterna för täljarpolynomen hamnar i $C$-matrisen. Detta ger

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Med dessa matriser blir

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

och eftersom båda dessa matriser har full rang är tillståndsbeskrivningen minimal.

(c) Med $u = u_1$, $u_2 = y_1$, $y = y_2$ och $x = \begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T \end{pmatrix}^T$ får man

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

(d) De två första termerna i serieutvecklingen är $I$ (en enhetsmatris med samma dimension som $A$) och $At$. Den tredje termen är en nollmatris (med samma dimension som $A$) eftersom $A^2 = 0$. Detta leder till att alla efterföljande termer i serieutvecklingen också kommer att vara noll och det slutna uttrycket för $e^{At}$ blir:

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1+6t & -9t & 0 \\ 4t & 1-6t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Matrismultiplikation ger

$$Ae^{At} = \begin{pmatrix} 6+36t-36t & -54t-9+54t & 0 \\ 4+24t-24t & -36t-6+36t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

och derivering ger

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

De båda uttrycken är identiska och sambandet $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$ har därmed verifierats i det aktuella fallet.

3. (a) Känslighetsfunktionen har en resonanstopp i intervallet $[1, 3]$ rad/s vilket innebär att systemstörningar mellan dessa vinkelfrekvenser förstärks. Lågfrekventa systemstörningar dämpas däremot ut väl.

Den komplementära känslighetsfunktionens amplitud är mindre än 1 och avtar för vinkelfrekvenser större än 1 rad/s och detta innebär att systemet är mer robust mot modellfel vid högre frekvenser och att högfrekventa mätstörningar dämpas ut väl. Mätstörningar med vinkelfrekvenser under 1 rad/s påverkar däremot reglerprestandan mer.

(b) En sinusformad insignal ger en sinusformad utsignal när transienterna har klingat av eftersom systemet är linjärt och stabilt (poler i $s = -0.2 \pm i\sqrt{0.96}$). Resultatet är

$$y(t) = |G(i3)| \sin(3t + \arg(G(i3)))$$

där

$$|G(i3)| = \frac{3.1}{\sqrt{8^2 + 1.2^2}} = 0.383$$
$$\arg G(i3) = 0 - \arg(1.2i - 8) = \arctan\left(\frac{1.2}{8}\right) - \pi \approx -2.99$$

Dessa värden kan alternativt läsas av direkt i bodediagrammet.

(c) En D-del i regulatorn har en stabiliserande inverkan och minskar typiskt på överslängarna i stegsvaret och resonanstopparna i bodediagrammet för det slutna systemet. Stegsvar C och D, som är de mest väldämpade, och bodediagram I och II, som har minst resonanstoppar bör därför höra till regulator (ii) och (iv). En högre förstärkning i regulatorn ger typiskt ett snabbare slutet system med kortare stigtid och högre bandbredd. Regulator (iv) bör därför höra till stegsvar C, som har kortare stigtid än D, och bodediagram II, som har högre bandbredd än I. Alltså: (iv)-C-II och (ii)-D-I. Vidare bör regulator (i) som har lägre förstärkning än (iii) höra till stegsvar B, som är långsammare än A, och bodediagram III, som har lägre bandbredd än IV. Alltså: (i)-B-III och (iii)-A-IV.

(d) Vi har att

$$G^0(s) = \frac{(1+\delta)(s-1)}{(s^2-s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{(s-1)}{(s^2-s+1)(s+2)}}_{:=G(s)}(1 + \underbrace{\delta}_{:=\Delta_G(s)}) = G(s)\big(1 + \Delta_G(s)\big) \qquad (1)$$

där det relativa modellfelet kan identifieras som $\Delta_G(s) = \delta$.

(e) Enligt uppgift 3e är $K = 1.75$ en stabiliserade återkoppling för modellen $G(s)$. Vidare har $G^0(s)$ och $G(s)$ samma antal poler i HHP och slutligen går både $KG(s)$ och $KG^0(s)$ mot noll d $|s|$ gr mot noll. Robusthetskriteriet garanterar oss då stabilitet om

$$|\Delta_G(iw)| < \frac{1}{|T(iw)|} \quad \forall w$$

Eftersom $T(s) = G_C(s)$ och $\max_w G_C(iw) = 8$ enligt Figur 4, ger det oss att det återkopplade systemet är stabilt för $|\delta| < 1/8$. För $|\delta| \geq 1/8$ kan ingen utsaga göras (med robusthetskriteriet) huruvida det återkopplade systemet är stabilt eller inte eftersom rubusthetskriteriet är ett tillräckligt men inte nödvändigt villkor för stabilitet.