

AED III

Árvores Binárias de Busca Balanceadas — AVL

Ciência da Computação – IFSULDEMINAS

Primeiro Semestre de 2014

Roteiro

- 1 Contextualização
- 2 Árvores AVL
- 3 Fator de Balanceamento
- 4 Rotações
- 5 Rotação Simples e Duplas
- 6 Conclusões
- 7 Exercícios

Contextualização

- Crie a árvore binária de busca:

5, 8, 3, 2, 4, 6, 7, 1, 9

- Crie uma segunda árvore binária de busca:

2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- Quais as considerações podemos fazer em relação às árvores criadas?

Árvores binárias são mais elicientes quando balanceadas ...

Contextualização

- Crie a árvore binária de busca:

5, 8, 3, 2, 4, 6, 7, 1, 9

- Crie uma segunda árvore binária de busca:

2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- Quais as considerações podemos fazer em relação às árvores criadas?

Árvores binárias são mais eficientes quando balanceadas ...

Contextualização

- Crie a árvore binária de busca:

5, 8, 3, 2, 4, 6, 7, 1, 9

- Crie uma segunda árvore binária de busca:

2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- Quais as considerações podemos fazer em relação às árvores criadas?

Árvores binárias são mais eficientes quando balanceadas ...

Contextualização

- Crie a árvore binária de busca:

5, 8, 3, 2, 4, 6, 7, 1, 9

- Crie uma segunda árvore binária de busca:

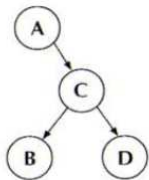
2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- Quais as considerações podemos fazer em relação às árvores criadas?

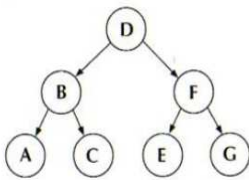
Árvores binárias são mais elicientes quando balanceadas ...

Contextualização

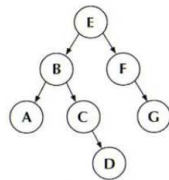
- Dizemos que uma árvore é perfeitamente balanceada se ela tiver apenas a altura mínima necessária para conter os seus nós.
- Infelizmente, é difícil manter árvores perfeitamente balanceadas.
- Uma das estratégias é relaxar o conceito de balanceamento garantindo **árvores baixas** e mais fáceis atualizar.



(a) Desbalanceada



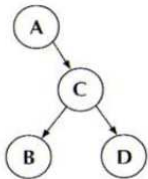
(b) Perfeitamente Balanceada



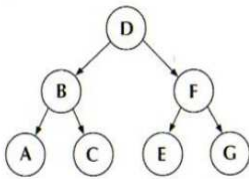
(c) Balanceada

Contextualização

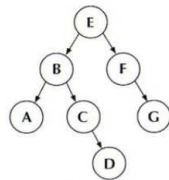
- Dizemos que uma árvore é perfeitamente balanceada se ela tiver apenas a altura mínima necessária para conter os seus nós.
- Infelizmente, é difícil manter árvores perfeitamente balanceadas.
- Uma das estratégias é relaxar o conceito de balanceamento garantindo **árvores baixas** e mais fáceis atualizar.



(a) Desbalanceada



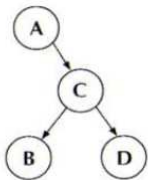
(b) Perfeitamente Balanceada



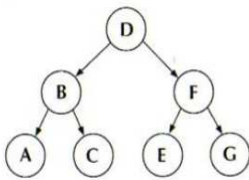
(c) Balanceada

Contextualização

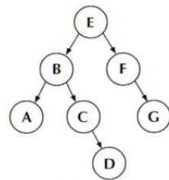
- Dizemos que uma árvore é perfeitamente balanceada se ela tiver apenas a altura mínima necessária para conter os seus nós.
- Infelizmente, é difícil manter árvores perfeitamente balanceadas.
- Uma das estratégias é relaxar o conceito de balanceamento garantindo **árvores baixas** e mais fáceis atualizar.



(a) Desbalanceada



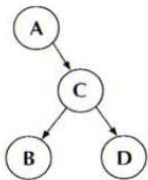
(b) Perfeitamente Balanceada



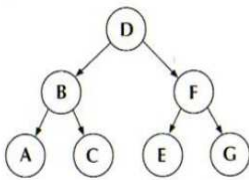
(c) Balanceada

Contextualização

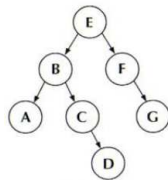
- Dizemos que uma árvore é perfeitamente balanceada se ela tiver apenas a altura mínima necessária para conter os seus nós.
- Infelizmente, é difícil manter árvores perfeitamente balanceadas.
- Uma das estratégias é relaxar o conceito de balanceamento garantindo **árvores baixas** e mais fáceis atualizar.



(a) Desbalanceada



(b) Perfeitamente Balanceada



(c) Balanceada

Árvores AVL - Definição

Uma das primeiras definições de *árvores quase balanceadas* que foi dada por **Adelson-Velskii** e **Landis** e estas árvores ficaram conhecidas como árvores **AVL**:

Árvore AVL

Uma árvore é dita AVL se para todo nó a altura entre suas duas sub-árvores diferir em no máximo uma unidade.

Árvores AVL - Definição

Uma das primeiras definições de *árvores quase balanceadas* que foi dada por **Adelson-Velskii** e **Landis** e estas árvores ficaram conhecidas como árvores **AVL**:

Árvore AVL

Uma árvore é dita AVL se para todo nó a altura entre suas duas sub-árvores diferir em no máximo uma unidade.

Fator de Balanceamento (FB)

- **AVL é uma árvore binária de busca** onde a diferença em altura entre as subárvores esquerda e direita de um nó n é no máximo 1.
- A essa diferença chamamos de **fator de balanceamento** de n .
- Essa informação deverá constar em cada nó de uma árvore balanceada.

Nó

Nó:

...

fb fator de balanceamento do nó;

...

Fator de Balanceamento (FB)

- **AVL é uma árvore binária de busca** onde a diferença em altura entre as subárvores esquerda e direita de um nó n é no máximo 1.
- A essa diferença chamamos de **fator de balanceamento** de n .
- Essa informação deverá constar em cada nó de uma árvore balanceada.

Nó

Nó:

...

fb fator de balanceamento do nó;

...

Fator de Balanceamento (FB)

- **AVL é uma árvore binária de busca** onde a diferença em altura entre as subárvores esquerda e direita de um nó n é no máximo 1.
- A essa diferença chamamos de **fator de balanceamento** de n .
- Essa informação deverá constar em cada nó de uma árvore balanceada.

Nó

Nó:

...

fb fator de balanceamento do nó;

...

Fator de Balanceamento (FB)

- **AVL é uma árvore binária de busca** onde a diferença em altura entre as subárvores esquerda e direita de um nó n é no máximo 1.
- A essa diferença chamamos de **fator de balanceamento** de n .
- Essa informação deverá constar em cada nó de uma árvore balanceada.

Nó

Nó:

...

fb fator de balanceamento do nó;

...

Fator de Balanceamento (FB)

Fator de Balanceamento

$FB(\text{nó } p) = \text{altura}(\text{sub-árvore direita de } p) - \text{altura}(\text{sub-árvore esquerda de } p)$

- O fator de balanceamento de um nó folha é 0.
- Para uma árvore ser AVL os fatores de balanceamento devem ser, necessariamente, -1, 0, 1.

Fator de Balanceamento (FB)

Fator de Balanceamento

$FB(\text{nó } p) = \text{altura}(\text{sub-árvore direita de } p) - \text{altura}(\text{sub-árvore esquerda de } p)$

- O fator de balanceamento de um nó folha é 0.
- Para uma árvore ser AVL os fatores de balanceamento devem ser, necessariamente, -1, 0, 1.

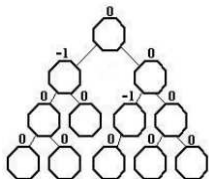
Fator de Balanceamento (FB)

Fator de Balanceamento

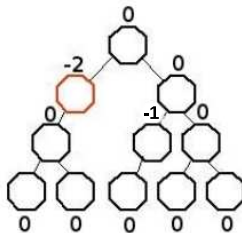
$FB(\text{nó } p) = \text{altura}(\text{sub-árvore direita de } p) - \text{altura}(\text{sub-árvore esquerda de } p)$

- O fator de balanceamento de um nó folha é 0.
- Para uma árvore ser AVL os fatores de balanceamento devem ser, necessariamente, **-1, 0, 1**.

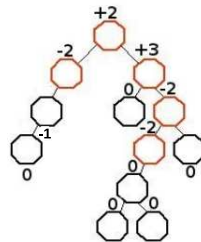
Fator de Balanceamento (FB)



(a) AVL



(b) Não AVL



(c) Não AVL

Inserção em AVL

Características

- Inicialmente inserimos um novo nó na árvore.
- A inserção deste novo nó pode ou não violar a propriedade de balanceamento.
- Caso a inserção do novo nó não viole a propriedade de balanceamento podemos então continuar inserindo novos nós.
- Caso contrário, precisamos nos preocupar em restaurar o balanceamento da árvore. A restauração deste balanceamento é efetuada através do que denominamos **ROTAÇÕES** na árvore.

Inserção em AVL

Características

- Inicialmente inserimos um novo nó na árvore.
- A inserção deste novo nó pode ou não violar a propriedade de balanceamento.
- Caso a inserção do novo nó não viole a propriedade de balanceamento podemos então continuar inserindo novos nós.
- Caso contrário, precisamos nos preocupar em restaurar o balanceamento da árvore. A restauração deste balanceamento é efetuada através do que denominamos **ROTAÇÕES** na árvore.

Inserção em AVL

Características

- Inicialmente inserimos um novo nó na árvore.
- A inserção deste novo nó pode ou não violar a propriedade de balanceamento.
- Caso a inserção do novo nó não viole a propriedade de balanceamento podemos então continuar inserindo novos nós.
- Caso contrário, precisamos nos preocupar em restaurar o balanceamento da árvore. A restauração deste balanceamento é efetuada através do que denominamos **ROTAÇÕES** na árvore.

Inserção em AVL

Características

- Inicialmente inserimos um novo nó na árvore.
- A inserção deste novo nó pode ou não violar a propriedade de balanceamento.
- Caso a inserção do novo nó não viole a propriedade de balanceamento podemos então continuar inserindo novos nós.
- Caso contrário, precisamos nos preocupar em restaurar o balanceamento da árvore. A restauração deste balanceamento é efetuada através do que denominamos **ROTAÇÕES** na árvore.

Inserção em AVL

Características

- Inicialmente inserimos um novo nó na árvore.
- A inserção deste novo nó pode ou não violar a propriedade de balanceamento.
- Caso a inserção do novo nó não viole a propriedade de balanceamento podemos então continuar inserindo novos nós.
- Caso contrário, precisamos nos preocupar em restaurar o balanceamento da árvore. A restauração deste balanceamento é efetuada através do que denominamos **ROTAÇÕES** na árvore.

Rotações

Rotações

Reajustam a árvore de forma que fique balanceada, podem ocorrer: **à direita** e/ou **à esquerda**.

- **Direita**

- ▶ Ocorre quando o lado esquerdo está desbalanceado
- ▶ FB negativo

- **Esquerda**

- ▶ Ocorre quando o lado direito está desbalanceado
- ▶ FB positivo

Rotações

Reajustam a árvore de forma que fique balanceada, podem ocorrer: **à direita** e/ou **à esquerda**.

- **Direita**

- ▶ Ocorre quando o lado esquerdo está desbalanceado
- ▶ FB negativo

- **Esquerda**

- ▶ Ocorre quando o lado direito está desbalanceado
- ▶ FB positivo

Rotações

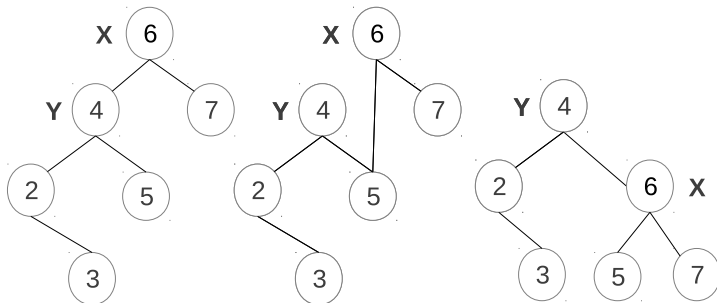
Reajustam a árvore de forma que fique balanceada, podem ocorrer: **à direita** e/ou **à esquerda**.

- **Direita**
 - ▶ Ocorre quando o lado esquerdo está desbalanceado
 - ▶ FB negativo
- **Esquerda**
 - ▶ Ocorre quando o lado direito está desbalanceado
 - ▶ FB positivo

Rotação à Direita

Rotação à Direita

- Seja X o nó desbalanceado.
- Seja Y o filho à esquerda de X.
- Torne o filho à direita de Y o filho à esquerda de X.
- Torne X o filho à direita de Y.



Rotação à Direita

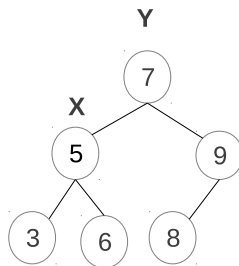
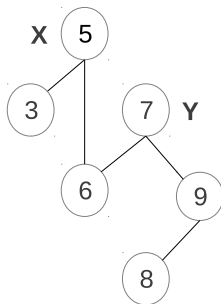
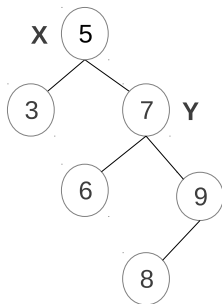
Rotação à Direita

```
ROTACAO_DIREITA(x) {  
    y = x.esquerda;  
    x.esquerda = y.direita;  
    y.direita = x;  
    x = y;  
}
```

Rotação à Esquerda

Rotação à Esquerda

- Seja X o nó desbalanceado.
- Seja Y o filho à direita de X.
- Torne o filho à esquerda de Y o filho à direita de X.
- Torne X o filho à esquerda de Y.



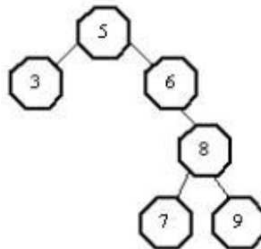
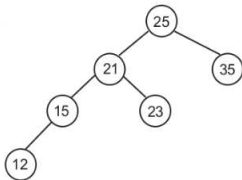
Rotação à Esquerda

Rotação à Esquerda

```
ROTACAO_ESQUERDA(x) {  
    y = x.direita;  
    x.direita = y.esquerda;  
    y.esquerda = x;  
    x = y;  
}
```


Exercícios

Faça as respectivas rotações nas seguintes árvores:



Rotações Simples e Duplas

- **Rotação Simples:** são rotações únicas, para a esquerda ou para a direita.
- **Rotação Dupla:** são formadas por duas rotações simples:
 - ▶ Rotação para esquerda e para a direita; ou
 - ▶ Rotação para a direita e para a esquerda.
- Para identificarmos quando uma rotação é simples ou dupla observamos os sinais dos FBs.

Rotações Simples e Duplas

- **Rotação Simples:** são rotações únicas, para a esquerda ou para a direita.
- **Rotação Dupla:** são formadas por duas rotações simples:
 - ▶ Rotação para esquerda e para a direita; ou
 - ▶ Rotação para a direita e para a esquerda.
- Para identificarmos quando uma rotação é simples ou dupla observamos os sinais dos FBs.

Rotações Simples e Duplas

- **Rotação Simples:** são rotações únicas, para a esquerda ou para a direita.
- **Rotação Dupla:** são formadas por duas rotações simples:
 - ▶ Rotação para esquerda e para a direita; ou
 - ▶ Rotação para a direita e para a esquerda.
- Para identificarmos quando uma rotação é simples ou dupla observamos os sinais dos FBs.

Rotações Simples

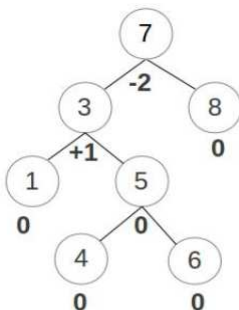
- **Direita:** o nó desbalanceado e seu filho da esquerda possuem FB com sinais iguais (negativos).
- **Esquerda:** o nó desbalanceado e seu filho da direita possuem FB com sinais iguais (positivos).

Rotações Simples

- **Direita:** o nó desbalanceado e seu filho da esquerda possuem FB com sinais iguais (negativos).
- **Esquerda:** o nó desbalanceado e seu filho da direita possuem FB com sinais iguais (positivos).

Rotações Duplas

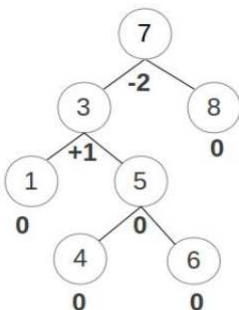
- Se um nó estiver desbalanceado e seu filho estiver inclinado no sentido inverso ao pai, teremos uma rotação dupla:
 - Primeiro trabalha-se com o nó filho.
 - Depois trabalha-se com o nó pai.



- Como os nós pai e filho estão no sentido inverso seus FBs são diferentes.

Rotações Duplas

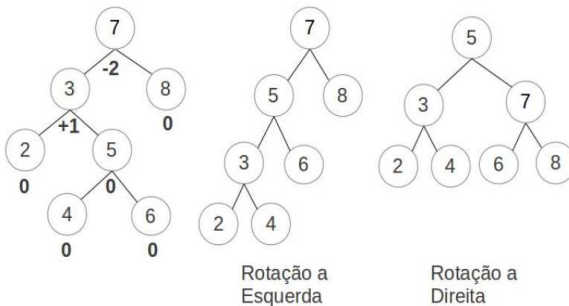
- Se um nó estiver desbalanceado e seu filho estiver inclinado no sentido inverso ao pai, teremos uma rotação dupla:
 - Primeiro trabalha-se com o nó filho.
 - Depois trabalha-se com o nó pai.



- Como os nós pai e filho estão no sentido inverso seus FBs são diferentes.

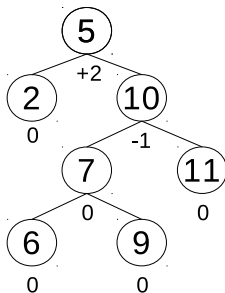
Rotações Duplas - Esquerda Direita

- Primeiro trabalha-se com o nó filho, como o FB é positivo fazemos rotação à esquerda no nó filho.
- Depois trabalha-se com o nó pai, como o FB é negativo fazemos rotação à direita no nó pai.



Rotações Duplas - Direita Esquerda

- Primeiro trabalha-se com o nó filho, como o FB é negativo fazemos rotação à direita no nó filho.
- Depois trabalha-se com o nó pai, como o FB é positivo fazemos rotação à esquerda no nó pai.
- Exercício:



Operações

- **Pesquisa:** igual a pesquisa da árvore binária, pois toda AVL é uma árvore binária de busca.
- **Inserção:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Remoção:** ao remover um elemento da árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Obs:** para manter a árvore balanceada devemos verificar os fatores de balanceamento e fazer rotações.

Operações

- **Pesquisa:** igual a pesquisa da árvore binária, pois toda AVL é uma árvore binária de busca.
- **Inserção:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Remoção:** ao remover um elemento da árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Obs:** para manter a árvore balanceada devemos verificar os fatores de balanceamento e fazer rotações.

Operações

- **Pesquisa:** igual a pesquisa da árvore binária, pois toda AVL é uma árvore binária de busca.
- **Inserção:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Remoção:** ao remover um elemento da árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Obs:** para manter a árvore balanceada devemos verificar os fatores de balanceamento e fazer rotações.

Operações

- **Pesquisa:** igual a pesquisa da árvore binária, pois toda AVL é uma árvore binária de busca.
- **Inserção:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Remoção:** ao remover um elemento da árvore, a árvore deve continuar balanceada.
- **Obs:** para manter a árvore balanceada devemos verificar os fatores de balanceamento e fazer rotações.

Vantagens X Desvantagens

- **Vantagens:**

- ▶ São mais rápidas nas operações de busca.

- **Desvantagens:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.

- ▶ Perde-se tempo quando necessitamos fazer um rebalanceamento. Isso pode ocorrer nas inserções e remoções.

Vantagens X Desvantagens

- **Vantagens:**

- ▶ São mais rápidas nas operações de busca.

- **Desvantagens:** ao inserir um elemento na árvore, a árvore deve continuar balanceada.

- ▶ Perde-se tempo quando necessitamos fazer um rebalanceamento. Isso pode ocorrer nas inserções e remoções.

Exercícios

- 1 Desenhe uma árvore AVL, com as seguintes chaves: 20, 10, 5, 30, 25, 27, 28, 32, 14, 39, 6.
- 2 Apresente a árvore AVL para a entrada: 20, 15, 25, 12, 17, 24, 30, 10, 14, 13. Apresente também a árvore AVL após a remoção dos elementos 14, 10 e 13.
- 3 Faça a simulação da árvore AVL inserindo a sequência de números a seguir: 10, 15, 2, 20, 12, 14, 3, 6, 1, 23. Utilizando a árvore gerada, realize a remoção dos seguintes nós: 2, 20, 14, 15.