# Mecânica e Termodinâmica

Lista de exercícios 1

Ministrado por Paulo Maia e Luca Mariconi

**Nome:** Anderson Aquiles
**Instituição:** IMPATech

**Data:** 11 de setembro de 2024

**Questão 1**:

**A)** Pela figura, podemos ver que no ponto mais alto da trajetória, a distância em y não varia, uma vez que temos um campo gravitacional constante o que culmina em um movimento parabólico. Como a distância em y não varia (ponto máximo da parábola), a velocidade em y é nula, logo, resta apenas a velocidade em x. Como não há forças na direção x, a velocidade em x se conserva em toda a trajetória, logo, a velocidade $V$ no ponto mais alto da trajetória será:

$$V = V_0 \times \cos\theta$$

Esquematizando o vetor V na figura abaixo:

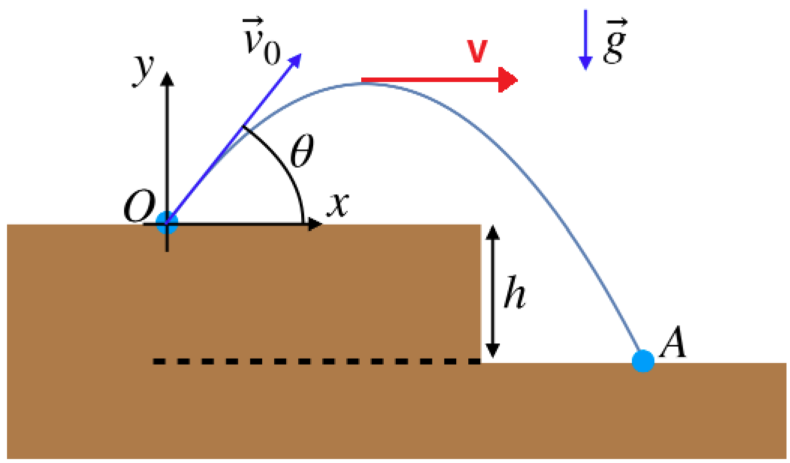



Figura 1: Trajetória do obejeto e o vetor V

**B)** Sabemos que a velocidade em X é constante, logo, para saber o alcance total precisamos saber o tempo $t$ que o lançamento dura. Primeiramente, analisando o movimento na vertical, estamos saindo de uma altura h e queremos chegar na altura 0. Como o corpo se movimenta para cima com uma velocidade inicial $V_{0y} = V_0 \sin\theta$ e possui aceleração $-g$ onde $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$, pela cinemática newtoniana:

$$\mathrm{d}V = -g\mathrm{d}t$$

Onde V representa velocidade. Integrando:

$$V_y = V_0 \sin\theta - gt$$

t é o tempo desde o inicio (t=0) até o final, ou seja, t é o tempo total.

Logo:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = V_y$$

Veja que S é o espaço percorrido. Tomando o espaço inicial como h e o espaço final como 0, basta integrar e chegar em:

$$V_0 \sin\theta t - \frac{gt^2}{2} + h = 0$$

No qual, resolvendo por Bhaskara, encontramos:

$$t = \frac{-V_0 \sin\theta \pm \sqrt{(V_0 \sin\theta)^2 + 2gh}}{-g}$$

Como a figura da parábola em si é infinita no eixo x, há dois momentos durante todo o eixo x que ela toca a altura 0 (no ponto A e antes dele), mas, estamos interessados apenas na parte da parábola limitada entre O e A no eixo x, logo, apenas o tempo positivo (devido à convenção) será o que buscamos, logo:

$$t = \frac{V_0 \sin\theta + \sqrt{(V_0 \sin\theta)^2 + 2gh}}{g}$$

Uma vez que o tempo t representa o tempo total do movimento e a velocidade em x é dada por $V_x = V_0 \cos\theta$, o alcance será então:

$$A = V_0 \cos\theta t = \frac{V_0^2 \sin\theta \cos\theta + V_0 \cos\theta \sqrt{(V_0 \sin\theta)^2 + 2gh}}{g}$$

Observe que se h=0, chegamos na equação do alcance comum.

Para encontrar o vetor $V_a$, precisamos achar sua componente em y (pois a componente em x é constante). Como mostrado anteriormente, $V_y = V_0 \sin\theta - gt$. A coordenada em y do vetor $V_a$ será $V_y$ no tempo t já descoberto, logo:

$$V_a = (V_x(t), V_y(t)) = \left(V_0 \cos\theta, -\sqrt{(V_0 \sin\theta)^2 + 2gh}\right)$$

Onde em módulo será:

$$|V_a| = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

Que é o mesmo que a equação de Torricelli.

Desenhando $V_a$:

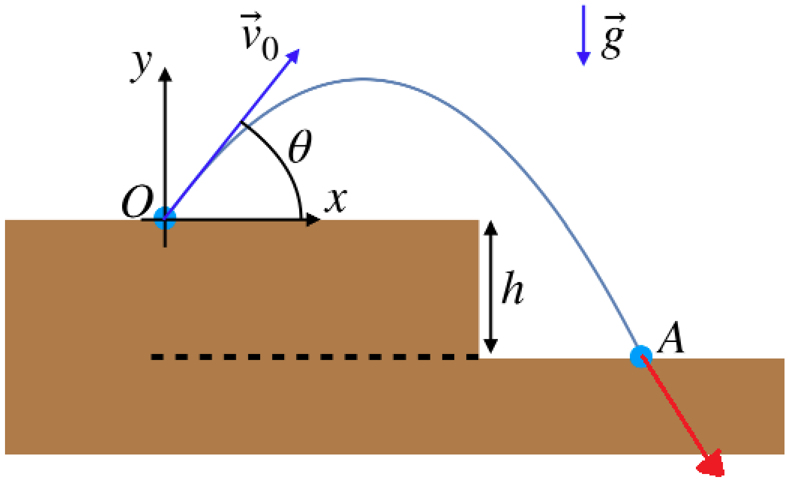



Figura 2: Trajetória do obejeto e o vetor V

**Questão 2**:

Para min, essa questão possui um pouco de ambiguidade na hora de compreender o enunciado. A forma como interpretei a aceleração $\vec{a}$ dada no enunciado foi da seguinte forma: Se o foguete não estivesse acelerando, ele iria fazer um movimento parabólico, mas como está acelerando de forma que ele vá em linha reta, significa que na vertical, o motor realiza uma aceleração do tipo $\vec{a_{my}}$ e na horizontal o motor realiza aceleração $\vec{a_{mx}}$. Interpretarei a aceleração $\vec{a}$ do foguete como sendo a aceleração resultando, ou seja, ela será a soma vetorial de $\vec{a_m}$ (aceleração causada pelo motor) com $\vec{g}$ (aceleração da gravidade). Nas soluções abaixo, apresentarei $\vec{g}$ como $\vec{g} = (0, -g)$ onde $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$. Por convenção, utilizarei setas para indicar vetor e a ausência de setas para indicar um escalar, exemplo: $|\vec{g}| = g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$. Dito isso, iremos aos itens.

**A)** Para que o foguete se mova em linha reta, o ângulo $\theta$ precisa ser constante durante o espaço percorrido. Como $\vec{a}$ é a aceleração total do foguete, temos, decompondo $\vec{a}$:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Veja que isso é possível pois a direção e sentido do movimento do foguete condiz com a direção e sentido do vetor aceleração resultante.

Mas, a aceleração resultado é $\vec{a} = \vec{a_m} + \vec{g}$, ou seja:

$$\vec{a} = (a_x,\ a_y) = (a_{mx},\ a_{my} - g)$$

Substituindo $a_y$ e $a_x$ na equação de $\tan\theta$ temos:

$$\tan\theta = \frac{a_{my} - g}{a_{mx}}$$

Ou seja:

$$a_{my} = a_{mx}\tan\theta + g$$

Portanto, o vetor $\vec{a_m}$ (aceleração do motor do foguete) será:

$$\vec{a_m} = (a_{mx}, a_{mx}\tan\theta + g)$$

Então, a força exercida pelo mortor, $\vec{F_m}$, é dada por:

$$\vec{F_m} = (ma_{mx},\ ma_{mx}\tan\theta + mg)$$

**B)** Como a aceleração vertical do motor é maior do que a aceleração resultante (uma vez que a aceleração da gravidade diminui em módulo a aceleração vertical do motor), temos que a aceleração do motor possui componente em y maior que a aceleração total (ambos em módulo). Como não há aceleração horizontal além da aceleração do motor, a aceleração horizontal tanto do motor quanto da resultante são iguais. Com essas informações, podemos esquematizar os vetores aceleração do motor (amarelo), aceleração resultante (vermelho) e aceleração da gravidade (laranja).

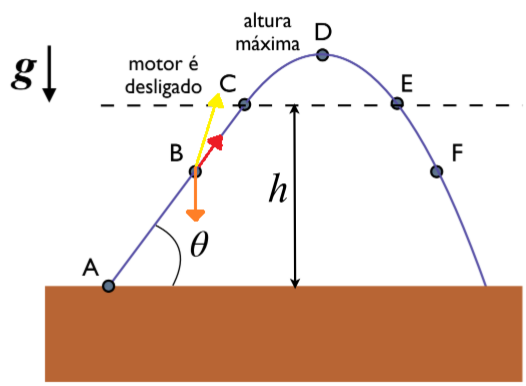



Figura 3: Trajetória do obejeto e o vetor V

**C)** Primeiramente, perceba que a aceleração do foguete na direção horizontal é dada por $a_x = a\cos\theta$. Por Torricelli, como a velocidade inicial do foguete é nula (pois parte do repouso), a velocidade V na horizontal quando o foguete chegar no ponto C será:

$$V = \sqrt{2a_x h \cot\theta}$$

Quando o foguete atinge essa velocidade horizontal, ele desliga o motor e começa um movimento de lançamento oblíquo comum, logo, como não há aceleração horizontal, a velocidade horizontal será constante apartir desse ponto, logo, a velocidade no ponto D será dada (em módulo) por V, mas, como não há velocidade vertical, o vetor velocidade total no ponto D se torna:

$$\vec{V} = \left(\sqrt{2a_x h \cot\theta},\ 0\right)$$

**D)** Como o foguete acelera de A a C, a velocidade em C é maior que em A. Como em C o foguete para de acelerar, em C a velocidade é maior (pois há velocidade vertical) do que em D, e por questão de simetria, a velocidade em E é igual a velocidade em C e a velocidade em F é maior que em E, pois a velocidade aumenta de E pra F devido a aceleração da gravidade. Com esses dados, podemos desenhar na figura a velocidade nos pontos B,C,D,E e F.

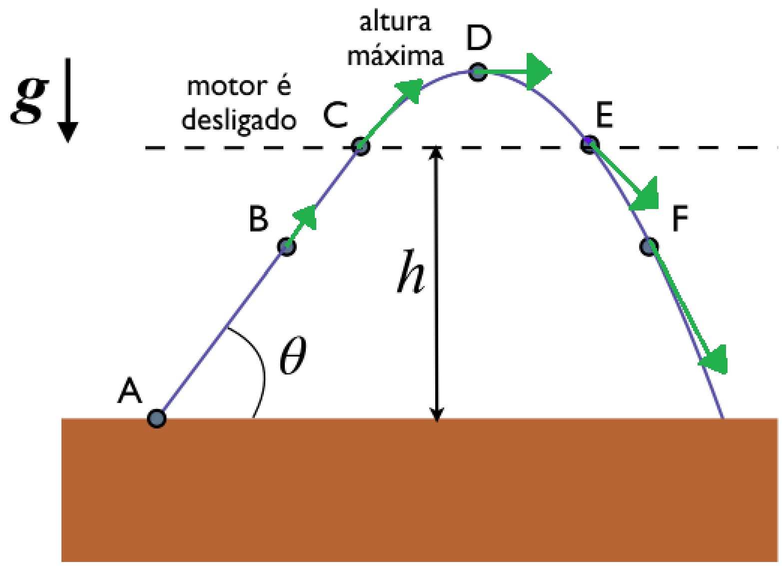



Figura 4: Trajetória do obejeto e o vetor V

**Questão 3**:

**Primeira forma.** Essa questão é um pouco delicada para se fazer, portanto, antes de responder os itens, atacaremos o problema indiretamente, tentando buscar um maior entendimento da questão.

De início, perceba que como cada formiga está "apontada"em direção a outra, temos que cada formiga estará sempre com a mesma velocidade em direção à outra, ou seja, tome $D_{ij}$ a distância entre a formiga $i$ e formiga $j$, então podemos concluir que, em qualquer instante de tempo:

$$D_{12} = D_{23} = D_{31}$$

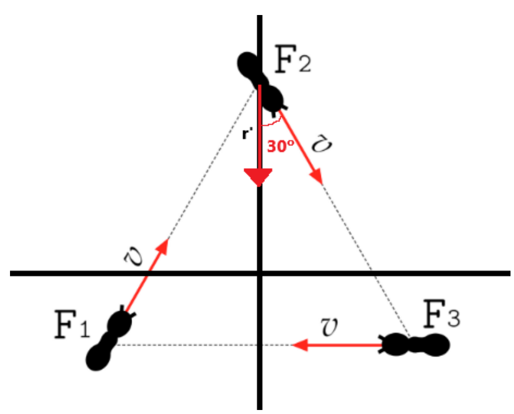
Da mesma forma, podemos decompor as velocidades de cada formiga com relação ao centro de massa do triângulo inicial. Como as velocidades serão as mesmas, seja $D_{ic}$ a distância da formiga i até o centro de massa do triângulo, então, a qualquer instante de tempo:

$$D_{1c} = D_{2c} = D_{3c}$$

Isso acontece, pois inicialmente todas as formigas estão a mesma distância do centro de massa e como as velocidades radiais são as mesmas, sempre vão estar a mesma distância do centro de massa.

Com essas hipóteses, podemos concluir que, os pontos que marcam as posiçoes das formigas sempre formarão um triângulo equilátero, onde o centro de massa será o mesmo centro de massa do triângulo desenhado na questão, ou seja, o ponto de encontro das formigas será o centro de massa do triângulo. Se tomarmos um tempo $dt$, as formigas se deslocarão a mesma distância com relação ao centro de massa e a mesma distância com relação umas as outras, logo, teremos um triângulo equilátero. Fazendo isso recursivamente, teremos sempre essa formação de triângulo equilátero.

Primeiramente, seja $\dot{r}$ a velocidade radial da formiga. Vejamos que $\dot{r}$ equivale à velocidade da formiga com relação ao centro, ou seja, $\dot{r} = -v\cos 30$ (o sinal de menos é devido à convenção adotada de que dr é positivo quando cresce ao longo do vetor r), como ilustra a figura abaixo.



Portanto, temos que $dr = \frac{\sqrt{3}}{2}vdt$, isto é, integrando obtemos:

$$r = R_i - \frac{\sqrt{3}}{2}vt$$

Onde $R_i$ é a distância inicial, que será $\frac{2h}{3}$ onde h é a altura, ou seja:

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}vt$$

Além disso, temos também que a posição (curva) da formiga em coordenadas polares segue a seguinte relação para um deslocamento infinitesimal:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$$

Basta tomar $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e tomar $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Apartir disso, podemos usar que $v = \frac{ds}{dt}$ para concluir que:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

No entanto, $\dot{r} = -v\cos 30$, portanto temos que:

$$v^2 = \frac{3}{4}v^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Isolando $\dot{\theta}$ chegamos na seguinte expressão:

$$\dot{\theta} = \frac{v}{2r}$$

Podemos substituir $r$ encontrado anteriormente para obter a expressão abaixo:

$$d\theta = \frac{vdt}{2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}vt}{2}\right)}$$

Integrando ganhamos:

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}vt\right) + C$$

Onde C representa uma constante de integração (devido a $\theta_i = -\frac{\pi}{6}$ e $t = 0$). Disso, concluimos que em coordenada polar, a curva da formiga representa uma espiral logaritmica.

**Segunda forma.** Nem sempre é possível resolver o caminho de um corpo de forma objetiva e rápida como fizemos, então tentemos também obter o caminho da formiga computacionalmente. Suponha que tenha decorrido um tempo pequeno, então, teríamos que as formigas teriam andado e chegaríamos a algo parecido com a imagem abaixo:

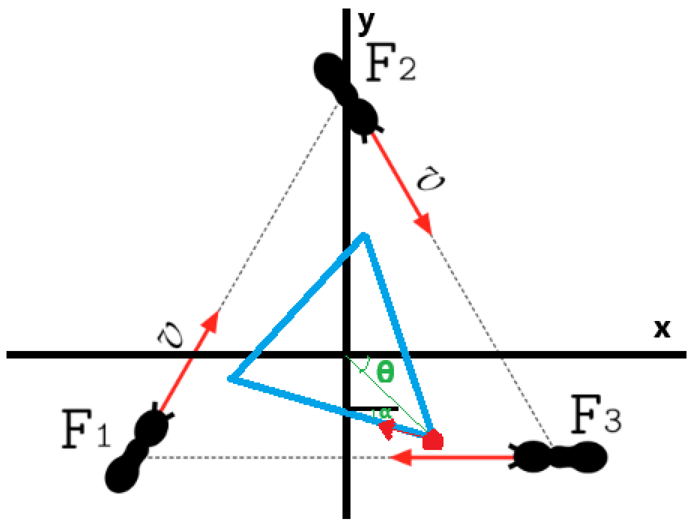



Figura 5: Esquematização

A bola em vermelho com uma flecha (no vértice mais inferior do triangulo azul) representa a formiga 3 e a flecha representa o vetor velocidade dela. O ângulo $\alpha$ representa a reta tangente da função que descreve a trajetória da formiga 3. Da figura acima, podemos concluir que:

$$\tan\theta = \frac{-y}{x}$$

Pois, queremos $\alpha$ em módulo. Também temos que:

$$(\alpha) + (180 - \theta) + (30) = 180$$
$$\alpha = \theta - 30$$

Onde $\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$. Sabemos o valor inicial de $\theta$, x e y, basta apenas traçar o gráfico dessa função onde $\alpha$ está no intervalo $[0,\ \frac{\pi}{2}]$. Após $\alpha$ passar de $\frac{\pi}{2}$, é preciso re-fazer o processo para outro por (x,y) inicial.

Temos então, que:

$$tan\theta = \frac{-y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

Apartir da EDO descoberta, podemos traçar parte da curva que a formiga (nesse caso a formiga 3) descreverá. Quando a inclinação da reta tangente ultrapassar $\frac{\pi}{2}$, precisaremos fazer outra esquematização da situação para encontrar outra EDO e ir traçando função por função. Após algumas iterações, chegamos na seguinte trajetória (para a=15), onde (0,0) é o centro de massa do triângulo:

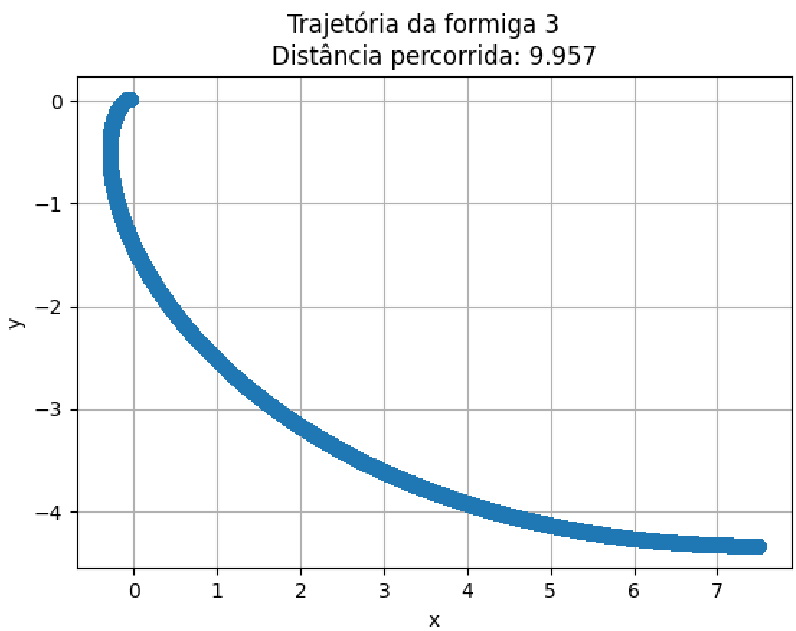



Figura 6: Gráfico

O algoritmo segue uma das ideias mais simples de solução de EDO: Apartir de um ponto inicial $(x_0,\ y_0)$, e apartir de $dy/dx$ traçar toda a função (parte, no nosso caso, pois teremos infinitas funções).

O Código python das duas soluções com seus respectivos gráficos se encontra no github, onde é possível analisar e concluir que a função em coordenada polar condiz com essa segunda solução: `https://github.com/andersonaquiles35/IMPATech/tree/main/Fisica_1/lista_1`

Com isso, podemos concluir, também, que a trajetória da formiga será em formato espiral. A forma mais direta seria tentar solucionar computacionalmente, uma vez que nem sempre é possível encontrar uma solução analítica para o problema.

Com essas informações em mãos e uma visão mais abrangente do problema, podemos tentar responder os itens diretamente, agora.

**A)** As formigas se encontrarão no centro de massa do triângulo. Por análise dimensional, a distância até o encontro seria proporcional à "$a$", pois quanto maior o lado do triângulo, mais tempo deve levar. As únicas grandezas que a distância pode depender, é do espaço e da velocidade. Como a distância é unidade de espaço, e depende proporcionalmente de "$a$", então, não deve depender da velocidade devido às unidades do sistema.

**B)** Como o tempo de encontro é o tempo que uma formiga leva até chegar no centro de massa, podemos decompor a velocidade de alguma formiga (a 1, por exemplo) com relação ao centro de massa, e encontramos a seguinte figura:

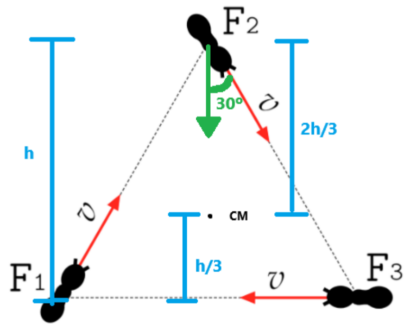



Figura 7: Decomposição vetorial

Como $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos então que o tempo transcorrido até o encontro será:

$$t = \frac{2h}{3V_r} = \frac{2h}{3V\cos(30)} = \frac{a\sqrt{3}}{3V\cos(30)} = \frac{2a}{3V}$$

**C)** A velocidade total da formiga é V, logo, a distância total percorrida pela formiga, será:

$$D = V \times t = \frac{2a}{3}$$

Obs: Veja que se a = 15, a distância total será 10, o que condiz com o gráfico da página 7, a diferença entre a distância da formula aqui descoberta e dadistância dada pelo gráfico, mora no fato de que tracei apenas 4 iterações de funções no gráfico, o que ja me retornava uma aproximação boa o suficiente.

**D)** Como mostrado anteriormente, a trajetória é em formato espiral.