Método **WENSLO** (**Weights by ENvelope and SLOpe**) **ALWAS** (**Aczel-Alsina Weighted Assessment**):

Sumário

Resumo executivo

- **WENSLO**: método objetivo para calcular pesos de critérios com base na razão *envelope / slope*, usando normalização linear, acumulação dos valores (conceito inspirado em Grey theory), cálculo da "envelope" (distância euclidiana acumulada) e da inclinação (slope). Peso final: normalização aditiva do quociente envelope/slope.
- **WENSLO**: normaliza → acumula → calcula slope/envelope → obtém q_j → normaliza em w_j.
- **ALWAS**: método de agregação/ranqueamento baseado em normas não-lineares Aczel–Alsina — define duas estratégias (média ponderada e geométrica ponderada) e integra ambas através de uma função com parâmetros de estabilização (φ, θ) e parâmetro ξ da família Aczel–Alsina. A saída é um escore 0–1 por alternativa, usado para ordenar.
- **ALWAS**: padroniza → calcula $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ via funções Aczel–Alsina → integra com (19) → obtém scores e ranking; parâmetros ξ, φ, θ controlam comportamento/sensibilidade.

WENSLO

1. **Matriz inicial ($\mathfrak{R}$):** Construir a matriz "m x n" onde "m" são as alternativas e "n" são os critérios. Valores ζ_{ij} representam o desempenho da alternativa "i" no critério "j".

$$\Re(A, C)$$

$$=[\zeta_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} A/C & C_1 & C_2 & \dots & C_j \\ \text{target} & \text{maxmin} & \text{maxmin} & \dots & \text{maxmin} \\ A_1 & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1j} \\ A_2 & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \dots & \zeta_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_i & \zeta_{i1} & \zeta_{i2} & \dots & \zeta_{mn} \end{bmatrix}$$

2. **Normalização linear**: Transformar a matriz inicial em uma matriz normalizada "Z" usando a normalização linear por soma (Eq. 2). O resultado são valores "z_{ij}"entre 0 e 1, tornando os critérios adimensionais e comparáveis.

$$z_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \zeta_{ij}}$$

produz matriz $Z=[z_{ij}]$ com $0< z_{ij} <1$

3. **Intervalo de classe** Δz_j (Sturges rule): Usar a Regra de Sturges (Eq. 5) para calcular a amplitude do intervalo para cada critério "j". Este passo é fundamental para "graduar" o eixo das alternativas, tratando a sequência de valores normalizados de um critério como uma série temporal onde a "distância" entre duas alternativas consecutivas é fixa e igual a Δz_j.

$$\Delta z_j = \frac{\max_i z_{ij} - \min_i z_{ij}}{1 + 3.322 \log(m)}$$

— usado para graduar o eixo e tratar alternativas como "pontos no tempo".

4. **Slope (inclinação do critério) tan φj**: Calcular a tangente do ângulo de inclinação da hipotenusa do triângulo retângulo formado pela acumulação artificial dos dados (Eq. 7). Essa inclinação representa a taxa de crescimento "ideal" ou média do critério.

$$\tan\varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_{ij}}{(m-1)\cdot \Delta z_j} \quad \forall j \in [1, 2, \dots, n]\,.$$

5. **Envelope do critério E_j**: Calcular o comprimento total da poli linha (zig-zag) que conecta os pontos dos valores normalizados ordenados de cada critério (Eq. 8). Esse envelope captura a volatilidade e o comportamento real do critério através das alternativas.

$$E_j = \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{(z_{i+1,j} - z_{i,j})^2 + \Delta z_j^2}$$

$$\forall j \in [1, 2, \dots, n]$$

6. **Razão envelope/slope** (q_j): Calcular a razão entre o envelope (volatilidade real) e a inclinação (tendência média) para cada critério (Eq. 9). Um critério com alto envelope (alta volatilidade) e baixa inclinação (baixa tendência de crescimento) terá uma razão alta, indicando maior importância no processo de decisão.

$$q_j = \frac{E_j}{\tan \varphi_j}$$

$$\forall j \in [1, 2, \ldots, n]$$

7. **Cálculo dos Pesos Finais dos Critérios (w_j):** Normalizar as razões qj para obter os pesos finais (Eq. 10).

$$w_j = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j}$$

$$\forall j \in [1, 2, \ldots, n]$$

interpretações: *alto envelope* + *baixo slope* → *maior peso*.

Observações importantes (WENSLO)

- **Validação do Processo (Acumulação)**: O método é fundamentado na Teoria dos Sistemas Cinzentos (Grey Systems). A validação é feita comparando a acumulação real dos dados normalizados com uma acumulação artificial linear (a hipotenusa). A alta correlação (r ≈ 1) e o baixo Erro Quadrático Médio (MSE ≈ 0) entre as duas sequências (Tabela XI) confirmam que a hipotenusa é uma representação válida para calcular a inclinação (tan φj).
- A acumulação dos z_{ij} (sequência *cumulative*) é usada para reduzir volatilidade e facilitar cálculo do slope — ver eq. (11) no artigo e conceito de acumulação artificial (hipotenusa) vs. real.
- Validação da aproximação artificial foi feita com **MSE** e **coeficiente de correlação**; ex.: para o critério C12 MSE=0.0013 e r=0.9981; média r≈0.9747, média MSE≈0.0126 — indica boa aderência e validade do procedimento.

ALWAS

1. **Home matrix** ζ_{ij} : Utilizar a matriz de decisão original $\mathfrak{R} = [\zeta_{ij}]$ (a mesma do passo 1 do WENSLO).

2. **Padronização / standardização**: transforma ζ_{ij} em valore padronizados usando a regra do artigo (eq. (16)), com tratamento distinto para critérios do tipo benefício (B) e custo (C) e preservando a proporção dos valores originais (Eq. 16). Esta etapa é diferente da normalização linear do WENSLO.

$$\Re^{s} = [\hat{\zeta}_{ij}]_{m\times n}$$

$$\hat{\zeta}_{ij} = \begin{cases} \hat{\zeta}_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{\zeta'_{j}}, \text{ if } j \in \text{B} \\ \hat{\zeta}_{ij} = -\frac{\zeta_{ij}}{\zeta'_{j}} + \max\limits_{1\le i\le m}\left(\frac{\zeta_{ij}}{\zeta'_{j}}\right) + \min\limits_{1\le i\le m}\left(\frac{\zeta_{ij}}{\zeta'_{j}}\right), \text{ if } j \in \text{C} \end{cases}$$

3. **Definir estratégias ponderadas Aczel–Alsina**: Aplicar dois operadores de agregação não-lineares baseados nas normas triangulares de Aczel-Alsina, que introduzem um parâmetro de flexibilidade ξ (ξ ≥ 1) para simular diferentes atitudes do decisor (e.g., aversão ao risco).
    - **Estratégia de Média Ponderada de Aczel-Alsina: $Ri^{(1)}\xi$ (Aczel–Alsina weighted averaging)** — eq. (17).
    - **Estratégia Geométrica Ponderada de Aczel-Alsina $R^{(2)}\xi$ (geometric)** — eq. (18).

onde $f(\hat{\zeta}_{ij}) = \hat{\zeta}_{ij} / \sum_i \hat{\zeta}_{ij}$ e os pesos w_j são os obtidos por WENSLO.

$$\mathbb{R}_i^{(1)\xi} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\zeta}_{ij}\left(1 - e^{-\left(\sum\limits_{j=1}^{n} w_j\left(-\ln\left(1-f\left(\hat{\zeta}_{ij}\right)\right)\right)^{\xi}\right)^{1/\xi}}\right)$$

$$\mathbb{R}_i^{(2)\xi} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\zeta}_{ij} \cdot e^{-\left(\sum\limits_{j=1}^{n} w_j\left(-\ln\left(f\left(\hat{\zeta}_{ij}\right)\right)\right)^{\xi}\right)^{1/\xi}}$$

4. **Integração das estratégias (𝕊i)**: Combinar as duas estratégias anteriores $R_{\xi}^{(1)}$ e $R_{\xi}^{(2)}$ em uma única medida de avaliação integrada usando uma função não-linear que incorpora dois parâmetros de estabilização, φ (que balanceia a importância entre as duas estratégias) e θ (Eq. 19). O ranking final é obtido ordenando as alternativas de forma decrescente pelos valores de 𝕊i.

$$\Im_i = \frac{\mathbb{R}_i^{(1)\xi} + \mathbb{R}_i^{(2)\xi}}{1 + \left\{ \phi \left(\frac{1 - f\left(\mathbb{R}_i^{(1)\xi}\right)}{f\left(\mathbb{R}_i^{(1)\xi}\right)} \right)^{\theta} + (1 - \phi) \left(\frac{1 - f\left(\mathbb{R}_i^{(2)\xi}\right)}{f\left(\mathbb{R}_i^{(2)\xi}\right)} \right)^{\theta} \right\}^{1/\theta}} \tag{19}$$

where $\theta > 0$, $\phi \geq 0$, $f(\mathbb{R}_i^{(1)\xi}) = \mathbb{R}_i^{(1)\xi} / \mathbb{R}_i^{(1)\xi} + \mathbb{R}_i^{(2)\xi}$, and $f(\mathbb{R}_i^{(2)\xi}) = \mathbb{R}_i^{(2)\xi} / \mathbb{R}_i^{(1)\xi} + \mathbb{R}_i^{(2)\xi}$.

Análise de Sensibilidade - Parâmetros e sensibilidade (ALWAS)

- **ξ (xi)** controla a "não-linearidade". Os autores recomendam valores baixos (ex.: ξ = 1) para boa separação; na experimentação do artigo variações grandes (ξ ≥ 36) nivelaram scores e inverteram ordens (ex.: alteração entre A1 e A6 para ξ alto). Recomenda-se explorar 1 ≤ ξ ≤ 5 para discriminação útil.
- **φ e θ**: φ regula o peso relativo entre as duas estratégias; φ=0.5 e θ=1 foram usados como solução inicial. Mudanças em φ (abaixo de ~0.46) causaram pequenas trocas entre algumas posições (ex.: A4 vs A5). θ afeta estabilidade, mas não rearranjos grandes no estudo.

Validação e comparação (no artigo)

- WENSLO: Comparação com outros métodos de ponderação objetiva (Entropia, CRITIC, SIDev). O WENSLO mostrou alta correlação de Spearman (>96%) com todos eles, confirmando a credibilidade dos pesos.
- ALWAS: foi comparado com **MABAC, TOPSIS, WASPAS, TODIM** — alto grau de correlação; pequenas diferenças apareceram em TOPSIS para posições intermediárias.

Limitações apontadas no artigo

- O método **não incorpora incerteza** (ruído/intervalos/valores faltantes) — autores sugerem extensão com teoria de incerteza (fuzzy, intervalos, etc.).

Ferramenta Computacional