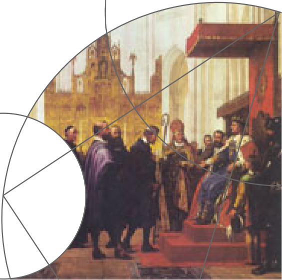
Normalfordelingen

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

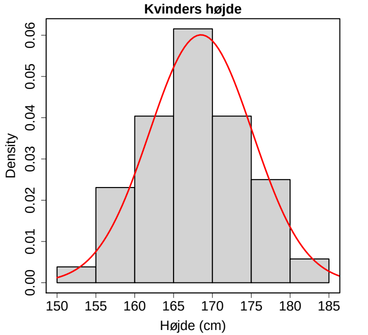
- Hvorfor normalfordelingen, og hvad skal den bruges til?
- Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder
- Er data normalfordelt?
- Summer og skalering af normalfordelte variable

Afsnit 4.2 (en stikprøve) og afsnit 4.4 (den centrale grænseværdisætning): først på onsdag

Hvorfor normalfordelingen og hvad skal vi bruge den til?

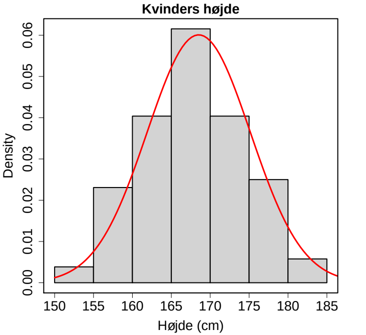
Kvinders højde fra spørgeskema, 2017

- Selvrapporteret højde (i cm) for 104 kvinder: $y_1, \ldots, y_{104}$.
- Histogram normeret så det samlede areal af rektanglerne er 1.
- $\bar{y} = 168.52$, $s = 6.64$
- Graf for tæthed for normalfordeling



Kvinders højde fra spørgeskema, 2017

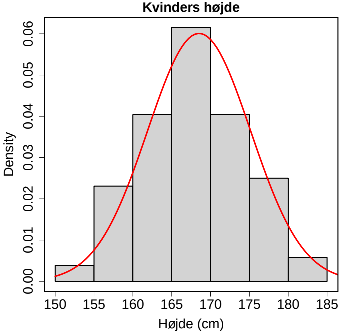
- Selvrapporteret højde (i cm) for 104 kvinder: $y_1, \ldots, y_{104}$.
- Histogram normeret så det samlede areal af rektanglerne er 1.
- $\bar{y} = 168.52$, $s = 6.64$
- Graf for tæthed for normalfordeling



$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Grafen for f er en god approksimation af histogrammet.

Den klokkeformede kurve



- Kurven er **tætheden** (density) for en normalfordeling
- **Kurven ligner histogrammet**. Vi kan bruge normalfordelingen til at beskrive fordelingen af højden

Hvorfor lige normalfordelingen?

Normalfordelingen er vigtig af flere grunde:

- Passer ofte godt til data, evt. efter transformation
- Pæne matematiske egenskaber — giver pæne resultater for estimater, statistiske test mm.
- Centrale grænseværdisætning (CLT): gennemsnit af næsten hvad som helst er approksimativt normalfordelt!

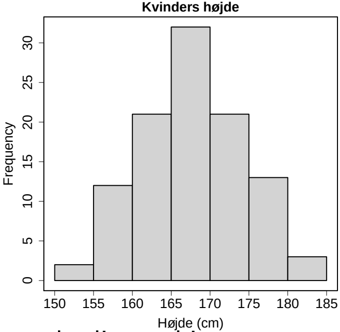
Kaldes også den Gaussiske fordeling.

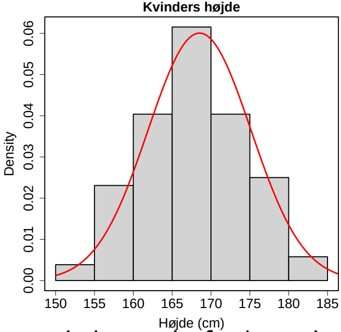
Opkaldt efter Carl Friedrich Gauss, tysk matematiker og fysiker, 1777–1855.

10 DM


GU5672972S2
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
ZEHN DEUTSCHE MARK
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. September 1999
GU5672972S2

Histogram og relative hyppigheder





I standardiseret histogram er det samlede areal af rektangler lig 1. Så er **relativ hyppighed lig areal af tihørende rektangler**, fx:

$$\frac{\text{antal højder i interval }]155\text{cm}, 160\text{cm}]}{104} = \frac{12}{104} \approx 0.115 = 11.5\%$$

Tætheder og sandsynligheder

Tilsvarende for tætheden: **Sandsynligheden for at en obs. falder i intervallet fra a til b er lig arealet under kurven**, fx

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy = 0.079 = 7.9\%$$

Tætheder og sandsynligheder

Tilsvarende for tætheden: **Sandsynligheden for at en obs. falder i intervallet fra *a* til *b* er lig arealet under kurven**, fx

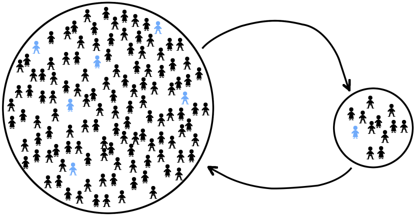
$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\,dy = 0.079 = 7.9\%$$

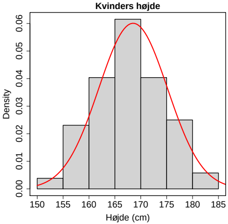
De to sandsynligheder er ikke ens. **Population vs stikprøve**.

- Hvis populationsværdier er fordelt som tætheden beskriver, så vil histogram for stikprøve fra populationen ligne tætheden.
- Normalfordelingstæthed som **model** for histogrammet.

Viser senere hvordan vi faktisk fik beregnet integralet til 7.9%.

Populationer, tæthed vs stikprøve, histogram



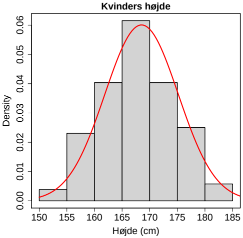


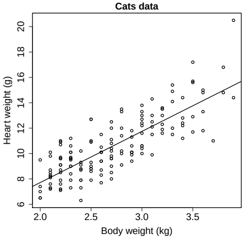
- Population: Normalfordelingstæthed
- Stikprøve: Histogram

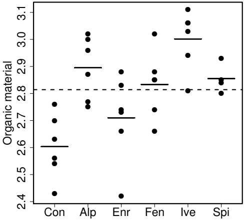
Hvad skal vi bruge normalfordelingen til?

Til at beskrive variationen i data når reponsen er kontinuert:

En stikprøve, lineær regression, ensidet variansanalyse, ...







Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

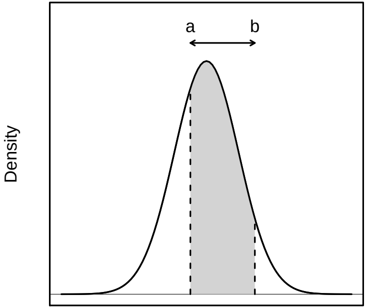
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

- Siger, at en variabel Y **er normalfordelt med middelværdi** μ **og spredning** σ hvis det for alle intervaller $[a, b]$ gælder at

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy.$$

- Vi skriver $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

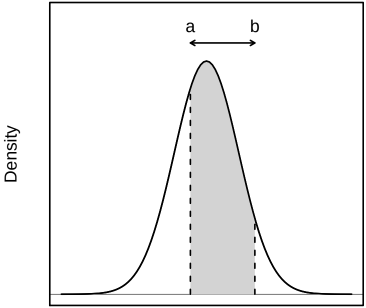
Tæthed og sandsynligheder



$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$$

Tæthed og sandsynligheder



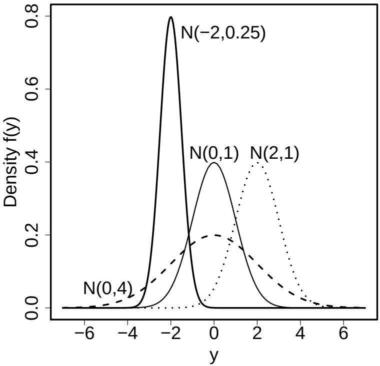
$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$$

- $f(y_1) > f(y_2)$: mere sandsynligt at havne omkring y_1 end y_2.
- $P(a < Y < b) = P(a < Y \leq b) = P(a \leq Y < b) = P(a \leq Y \leq b)$

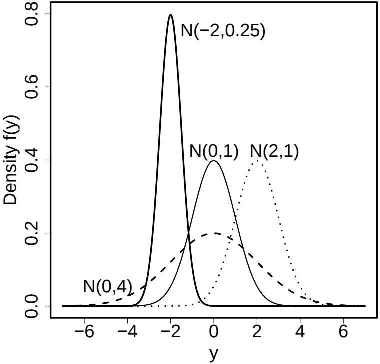
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$



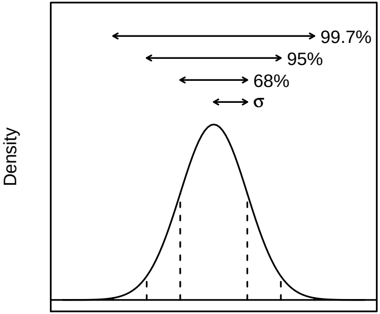
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$

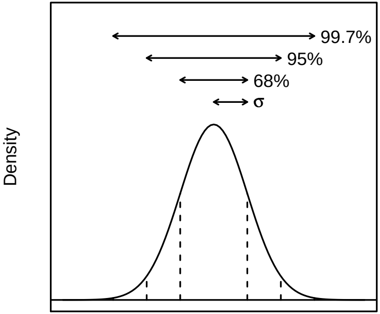


Bemærk: Vi skriver $N(\mu, \sigma^2)$ — ikke $N(\mu, \sigma)$. Hvis $Y \sim N(0, 4)$ har Y altså spredning 2.

Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$



Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$



- 68% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm \sigma$
- 95% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 2 \cdot \sigma$
- 99.7% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 3 \cdot \sigma$

Gælder for **alle** normalfordelinger — uanset værdierne af μ og σ.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Hvad så?

- Via omskrivninger til $N(0,1)$. Sådan står det i bogen.
- Nemmere: Brug funktionen `pnorm` i R med angivelse af `mean` og `sd`. Beregner sandsynligheder $P(Y \leq b)$.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Antag at Y er normalfordelt med middelværdi 168.52 og spredning 6.64, altså $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$.

Hvad er $P(155 < Y \leq 160)$?

```
> pnorm(160, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.09972282
> pnorm(155, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.02086792
> pnorm(160,mean=168.52,sd=6.64)-pnorm(155,mean=168.52,sd=6.
[1] 0.0788549
```

Altså:

- $P(Y \leq 160) = 0.0997$ og $P(Y \leq 155) = 0.0209$
- $P(155 < Y \leq 160) = 0.0997 - 0.0209 = 0.0789$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

```
> qnorm(0.90, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 177.0295
```

Tallet 177.03 kaldes **90% fraktilen** i $N(168.52, 6.64^2)$.

Beregning af sandsynligheder og fraktiler i N

Beregning af sandsynligheder og fraktiler i R

- Givet b, bestem sandsynlighed $P(Y \leq b)$: Brug `pnorm`
- Givet ssh. p, bestem b så $P(Y \leq b) = p$: Brug `qnorm`

I begge tilfælde skal både middelværdi og spredning også angives.

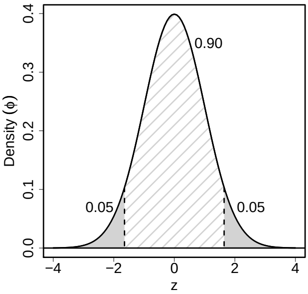
Standardnormalfordelingen

En N-fordelt variabel kan standardiseres:

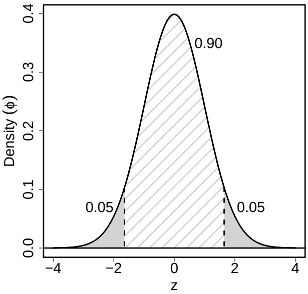
$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Vi kalder $N(0, 1)$ for **standardnormalfordelingen**: $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Standardnormalfordelingen

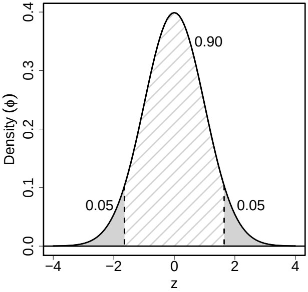


Standardnormalfordelingen



- **95%-fraktilen** er 1.6449: $P(Z \leq 1.6449) = 0.95 \ldots$ og dermed er $P(-1.6449 < Z < 1.6449) = 0.9$

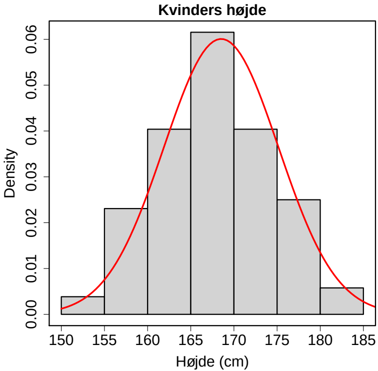
Standardnormalfordelingen

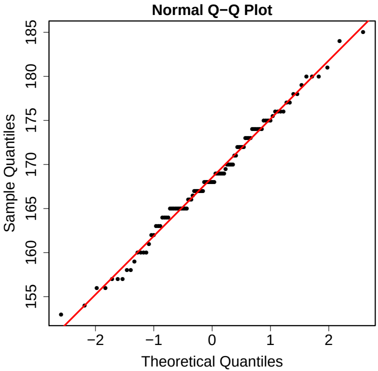


- **95%-fraktilen** er 1.6449: $P(Z \leq 1.6449) = 0.95$ . . . og dermed er $P(-1.6449 < Z < 1.6449) = 0.9$
- **97.5%-fraktilen** er 1.960: $P(Z \leq 1.960) = 0.975$ . . . og dermed er $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

Er data normalfordelt?

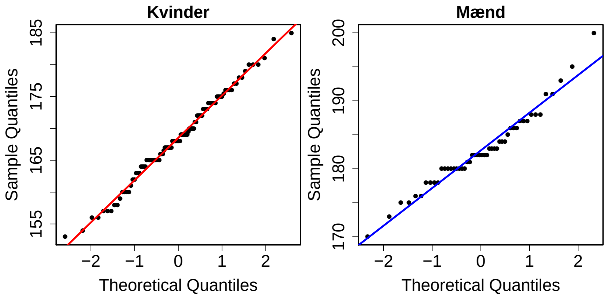
Hvordan checkes om data er normalfordelt?





- Histogram sammen med tæthed for $N(\bar{y}, s^2)$. Kun for n stor.
- **QQ-plot:** Ligger punkterne omkring en ret linie?

QQ-plot



- **Quantile-quantile** (fraktil-fraktil) plot
- x-aksen tilpasset så normalfordelte data ligger på ret linie
- Sammenlign med **ret linie med skæring $\bar{y}$ og hældning s**
- R: QQ-plot med `qqnorm`, linie med `abline`

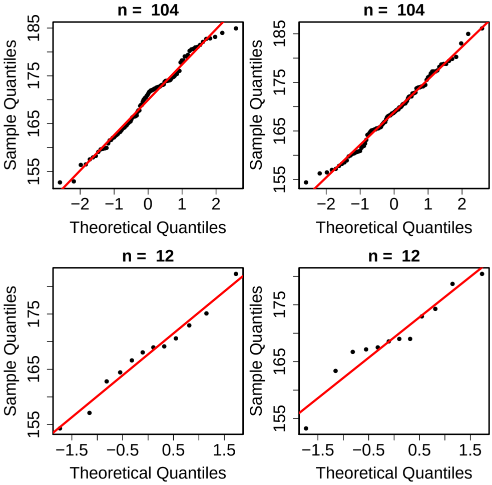
Vurdering af QQ-plot

Hvor store skal afvigelserne fra en ret linie være for at man kan konkludere at data **ikke** er normalfordelte?

- Afhænger af antal observationer
- Kan være nyttigt at se på simulerede N-data: Hvordan ser QQ-plots ud når vi **ved** at data er N-fordelte.

QQ-plots fra simulerede data

Her **er** data normalfordelte:



Summer og skalering af normalfordelte variable mm

Sum af uafhængige normalfordelte variable

Infobox 4.2(a): Hvis Y_1 og Y_2 er **uafhængige**, $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, så er **summen**

$$Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(Y_1 + Y_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Sum af uafhængige normalfordelte variable

Infobox 4.2(a): Hvis Y_1 og Y_2 er **uafhængige**, $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, så er **summen**

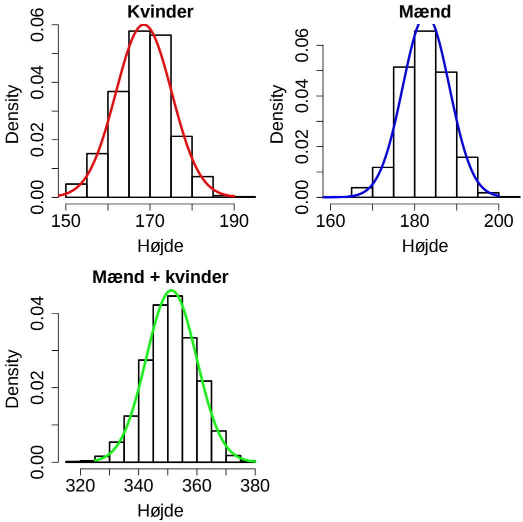
$$Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(Y_1 + Y_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Eksempel:

- Antag at kvinders højde er $N(168.52, 6.64^2)$ fordelt
- Antag at mænds højde er $N(182.70, 5.54^2)$ fordelt
- Vælg mand og kvinde tilfældigt fra populationerne. Deres **samlede højde** er $N(351.22, 74.78)$. Spredning 8.65.

Simulationer



Skalering og flytning af normalfordelt variabel

Infobox 4.2(b) Hvis $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ og a og b er kendte tal, så er

$$a + b \cdot Y \sim N(a + b \cdot \mu, b^2 \cdot \sigma^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(a + b \cdot Y) = |b| \cdot \mathrm{sd}(Y)$

Skalering og flytning af normalfordelt variabel

Infobox 4.2(b) Hvis $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ og a og b er kendte tal, så er

$$a + b \cdot Y \sim N(a + b \cdot \mu, b^2 \cdot \sigma^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(a + b \cdot Y) = |b| \cdot \mathrm{sd}(Y)$

Nyttigt ved omregning mellem enheder.

(Tænkt) Eksempel:

- Antag at daglig max temperatur (Y) i grader Celsius er $\sim N(23.5, 3.5^2)$
- Temperatur i grader Fahrenheit (Z)

$$Z = 9/5 \cdot Y + 32 \sim N(74.5, 6.3^2)$$

Gennemsnit af normalfordelte variable

Infobox 4.3 Hvis $Y_1, \ldots, Y_n$ er uafhængige og alle $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, så er gennemsnittet $\bar{Y}$ også normalfordelt:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(\bar{Y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gennemsnit af normalfordelte variable

Infobox 4.3 Hvis $Y_1, \ldots, Y_n$ er uafhængige og alle $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, så er gennemsnittet $\bar{Y}$ også normalfordelt:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(\bar{Y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Eksempel:

- Antag at kvinders højde i cm er $N(168.52, 6.64^2)$ fordelt
- Vælg 25 kvinder tilfældigt fra populationen og se på deres gennemsnitshøjde. Gennemsnitshøjden er $N(168.52, 1.33^2)$

Nyttige R-kommandoer

```
pnorm(160, mean=168.52, sd=6.64)   ## Beregn sandsynlighed
qnorm(0.90, mean=168.52, sd=6.64)  ## Beregn fraktil

qqnorm(hojde)                      ## Lav QQ-plot
abline(168.52, 6.64)               ## Indlæg linie

hist(hojde, prob=TRUE)             ## Histogram
f1 <- function(y) dnorm(y, 168.52, 6.64) ## Tætheden smom funktion
plot(f1, 145, 190, add=TRUE)       ## Indtegn tæthed
```

Husk: Beregn gerne sandsynligheder og fraktiler som ovenfor i stedet for at regne tilbage til $N(0, 1)$.

Opsummering — til eget brug

- Hvad vil det sige at Y er normalfordelt?
- Hvor mange procent af en normalfordeling ligger i intervallet "middelværdi ± 2 gange spredning"?
- Hvordan beregner man sandsynligheder i normalford. i R?
- Hvordan checker man om data kommer fra en normalfordeling?
- Hvad er fordelingen af $X + Y$ hvis både X og Y er normalfordelte?
- Hvad er fordelingen af gennemsnittet af ens fordelte normalfordelte variable?