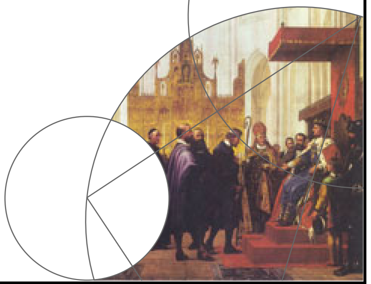
Det Naturvidenskabelige Fakultet

Tosidet variansanalyse

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

Tosidet variansanalyse (ANOVA)

- Additive model (uden vekselvirkning)
- Model med vekselvirkning
- Forskel på additive effekter og vekselvirkning
- Test for vekselvirkning
- Forskellige parametriseringer (primært af den additive model)

Generel info:
Det er ekstremt vigtigt, at I lærer at løse standardopgaver hurtigt og uden hjælp!

Gå i træning nu og træk på de mange hjælpelærere ...

- Afleveringsopgave til onsdag den 7. oktober
- Gamle eksamensopgaver: Kør selv analyserne hvis der er data
- HS-opgaver minder også om kommende eksamensopgaver

Overblik

Vi skal have „udfyldt“ følgende skema over modeller (rækker) og statistiske begreber (søjler):

	Intro	Model	Est.+SE	KI	Test	Kontrol	Præd.
En stikprøve	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ensidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Lineær regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
To stikprøver	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Multipel regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tosidet ANOVA	nu	nu	nu	nu	nu	nu	nu
Blandede modeller							

Tosidet ANOVA uden vekselvirkning

Eksempel: Højde på studieretninger

Spørgeskema med studerende på Statistisk Dataanalyse 2017:
bl.a. info om studieretning og højde.

- Svar fra 50 BB + 42 HV + 31 JØ + 31 NR + 2 andre. Skipper de "2 andre".
- Der mangler desuden højde for en mindre antal studerende $\rightarrow n = 152$

Spørgsmål: Er den gennemsnitlige højde forskellig på studierne?

- Respons: Højde
- Forklarende variabel: Studieretning
- Lægger op til ensidet ANOVA

KØBENHAVNS UNIVERSITET DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET

Ensidet ANOVA

```
oneway <- lm(hojde ~ studie, data = useData)
onesample <- lm(hojde ~ 1, data = useData)
drop1(oneway, test = "F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie
##        Df Sum of Sq   RSS    AIC F value   Pr(>F)
## <none>               11299 662.91
## studie  3    1185.2 12484 672.07  5.1745 0.001985 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Har vi nu vist at "unge menneskers studievalg har noget med deres højde at gøre"? Eller **er der noget vi har overset?**

KØBENHAVNS UNIVERSITET DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET

Tosidet ANOVA

Køn påvirker (formentlig) både højde og studievalg.

Vores egentlige spørgsmål er nok snarere: Er der en forskel på højden på de fire studieretninger, selv hvis vi **justerer for køn?**

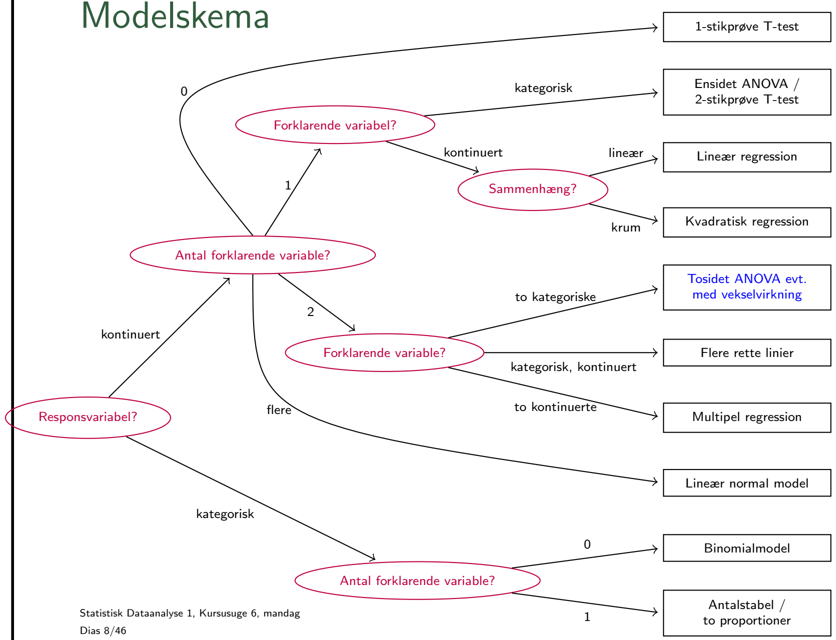
Ny analyse:

- Respons: Højde
- Forklarende var. Studieretning og køn. Begge er **kategoriske**
- **Tosidet ANOVA**

Check modelskemaet.

KØBENHAVNS UNIVERSITET DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET

Modelskema



Statistisk model

Model for **tosidet ANOVA uden vekselvirkning**, kaldes også den **additive model** for tosidet ANOVA:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + e_i$$

hvor e_i'erne som sædvanlig er uafhængige $N(0, \sigma^2)$

Parametre:

- Et α per studie: $\alpha_{JØ}$, α_{NR}, α_{HV}, α_{BB}
- Et β per køn: β_M og β_K
- Residualspredning σ

Additiv tosidet ANOVA

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.

R: Tilføj leddene til `lm`, med + imellem:

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data=useData)
```

NB. Det er lidt sværere at bestemme antal frihedsgrader — men det klarer R heldigvis for os.

Hvad nu?

- **Modelkontrol:** Se dagens R-materiale
- **Fortolkning** af parameterestimater
- **Test** for studieretning når vi justerer for køn

Fortolkning af parameterestimater

R vælger en **referencegruppe for hver variabel**. Her: BB og kvinder.

Følgende estimater angives:

- „Intercept“: Estimeret middelværdi gives for **kombinationen** af de to referencer, altså for kvindelige BB-studerende
- Estimerede **forskelle** mellem de andre studieretninger og BB
- Estimeret **forskel** mellem mænd og kvinder

Spørgsmål

- Estimat for gennemsnitshøjde blandt kvindelige BB-stud.?
- Estimat for gennemsnitshøjde blandt mandlige BB-stud.?
- Estimat for gennemsnitshøjde blandt mandlige JØ-stud.?
- Hvilket studie estimeres til at have de højeste studerende (når der er korrigeret for køn)?
- Estimat for σ?
- Antal frihedsgrader? Er det mærkeligt?
- Hvordan skal p-værdierne fortolkes?

Additiv tosidet ANOVA

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data=useData)
summary(twoway.add)


##
## Call:
## lm(formula = hojde ~ studie + kon, data = useData)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.5701  -4.1354  -0.2316   4.0228  17.1185
##
## Coefficients:
##                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)             168.1051     0.9859 170.517   <2e-16 ***
## studieHusdyrvidenskab     1.1211     1.3901   0.806    0.421
## studieJordbrugsøkonomi   -0.5350     1.5086  -0.355    0.723
## studieNaturressourcer     0.2531     1.4892   0.170    0.865
## konMand                  14.5233     1.2590  11.535   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.352 on 147 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.525,Adjusted R-squared:  0.512
## F-statistic: 40.61 on 4 and 147 DF,  p-value: < 2.2e-16
```


Test for studieretning når vi justerer for køn

Statistisk model:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + e_i$$

Hypotese:

$$H_0 : \alpha_{JØ} = \alpha_{NR} = \alpha_{HV} = \alpha_{BB}$$

Testes med F-test. Flere metoder i R, men med samme resultat:

- Fit stat. model + model under hypotese og brug `anova` med de to modeller som argumenter. Hvad er nulmodellen her?
- `drop1`: Kan vi "droppe" hvert af leddene fra modellen?
- Brug **ikke** `anova` med kun en model som argument

Test for studieretning når vi justerer for køn: med `drop1`

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data = useData)
drop1(twoway.add, test = "F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie + kon
##        Df Sum of Sq     RSS    AIC  F value Pr(>F)
## <none>                5930.7 566.93
## studie  3      44.4  5975.1 562.06   0.3666 0.7772
## kon     1    5368.6 11299.3 662.91 133.0654 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


Test for studieretning når vi justerer for køn: med `anova`

```
oneway.kon <- lm(hojde ~ kon, data=useData)
anova(oneway.kon, twoway.add)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: hojde ~ kon
## Model 2: hojde ~ studie + kon
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1    150 5975.1
## 2    147 5930.7  3    44.371 0.3666 0.7772
```

Konklusion

Der er **ikke** signifikant forskel på højden af studerende på de fire studieretninger når vi korrigerer for køn ($p = 0.78$).

I denne situation var vi mest interesseret i den ene variabel (studieretning), men vi **kunne også have undersøgt den anden:**

- Hypotese, $H_0 : \beta_M = \beta_K$
- Testes med F-test eller t-test. Begge giver $p \approx 0$
- Konklusion: Gennemsnitshøjden **er** forskellig for mænd og kvinder, også når vi korrigerer for studieretning

Uden vekselvirkning: Vi lavede implicit en antagelse ...

Antagelsen om additivitet

I eksemplet brugte vi den additive model, modellen uden vekselvirkning:

- Vi antog implicit at der var samme højdeforskel i mænd og kvinder for alle studieretninger (og omvendt).
- R: Vi skrev + mellem leddene i `lm`.

Men sådan er det jo ikke nødvendigvis: Det kan være at effekten af en variabel afhænger af den anden variabel $\rightarrow$ **vekselvirkning**

Additive effekter vs. vekselvirkning

Prisskilt fra isbod

- 1 kugle 15
- 2 kugler 20
- 3 kugler 23
- 1 kugle med guf 19
- 2 kugler med guf 24
- 3 kugler med guf 27

To ækvivalente prisskilte

Prisskilt 1:

- 1 kugle 15
- 2 kugler 20
- 3 kugler 23
- 1 kugle med guf 19
- 2 kugler med guf 24
- 3 kugler med guf 27

Prisskilt 2:

- 1 kugle, uden guf 15
- 2 kugler .... +5
- 3 kugler .... +8
- med guf .... +4

Seks forskellige is at vælge imellem, men **"effekterne" af guf og størrelse indgår additivt.** Guf koster altid 4 kr ekstra.

Dermed kan priserne beskrives med kun **fire parametre** $(1 + 2 + 1)$

Eksempel med højdedata

Tilsvarende for den additive model for højdedata

- Der er otte kombinationer af studieretning og køn
- Men kun $1 + 3 + 1 = 5$ parametre i den additive model: En for ref-gruppen, tre for studieretningsforskelle, en for kønsforskel.

Vekselvirkning

Når effekten af én variabel af niveuaet af en anden variabel, så siger man at der er **vekselvirkning** mellem de to variable.

Engelsk: **Interaction**

- Is: Ingen vekselvirkning mellem `guf` og `kugler`: Guf kostede 4 kr uanset antal kugler.

  Ækvivalent: Prisen for ekstra kugler er den samme uanset om der skal guf på eller ej.
- Højde: Antog at kønsforskellen er den samme på alle studier.

  Ækvivalent: Forskel ml. studier er den samme for begge køn.

Prisskilte uden/med vekselvirkning

Nye priser giver rabat på guf hvis man køber store is:

Gamle priser:

- 1 kugle 15
- 2 kugler 20
- 3 kugler 23
- 1 kugle med guf 19
- 2 kugler med guf 24
- 3 kugler med guf 27

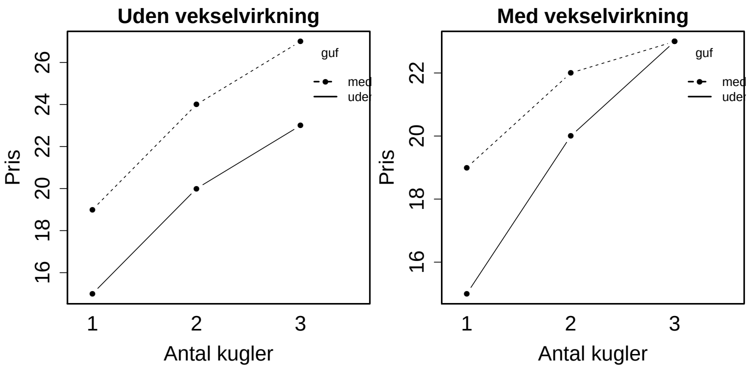
Nye priser:

- 1 kugle 15
- 2 kugler 20
- 3 kugler 23
- 1 kugle med guf 19
- 2 kugler med guf 22
- 3 kugler med guf 23

Nu er der vekselvirkning/interaktion! Prisen for guf afhænger af antal kugler: 4/2/0 kr ved 1/2/3 kugler.

Det kræver **seks parametre** at beskrive den nye prisstruktur.

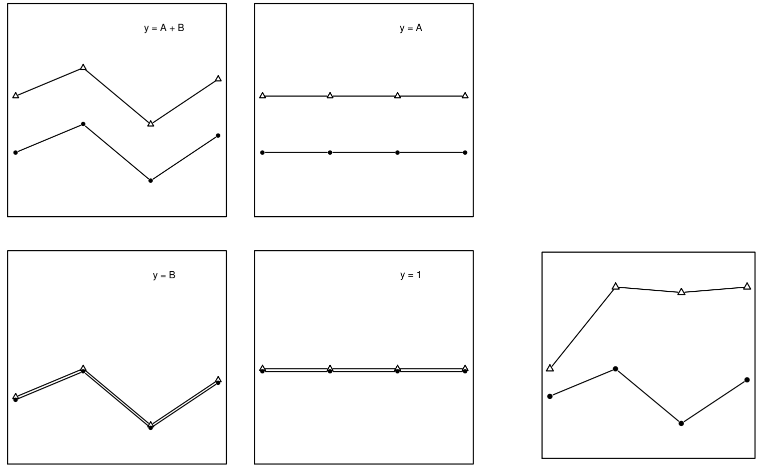
Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot



Plottet visualiserer vekselvirkning. Kig efter **parallellitet:**

- Parallelle profiler ↔ Ingen vekselvirkning
- Ikke-parallelle profiler ↔ Vekselvirkning

Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot, forventede værdier



Tosidet ANOVA med/uden vekselvirkning

Model uden vekselvirkning

Modellen uden vekselvirkning:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + e_i$$

Modellen angiver middelværdien for alle otte kombinationer af studie og køn — men lægger **restriktioner** på dem.

Model uden vekselvirkning = additiv model.

Model med vekselvirkning

Modellen med vekselvirkning lægger **ingen restriktioner** på de otte middelværdier. Vi skriver

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + \gamma_{\text{studie}_i,\text{kon}_i} + e_i$$

eller blot

$$\text{højde}_i = \gamma_{\text{studie}_i,\text{kon}_i} + e_i$$

Dette svarer faktisk til en ensidet ANOVA efter den variabel der inddeler obs. i otte grupper.

Opskrivningen med græske bogstaver ikke så vigtig. Vigtigt:

- at forstå den konceptuelle forskel mellem de to modeller
- at kunne fortolke output/estimater fra R

Eksempel: Højde efter studieretning og køn

Ingen mandlige HV-studerende i datasættet:

- Lidt bøvlet når vi skal have vekselvirkning med → vi dropper HV-studerende (selvom det faktisk ikke er nødvendigt)
- Datasættet `useData2` indeholder data fra 110 studerende med højderegistreringer: 49 BB, 30 JØ, 31 NR.

Modellen uden vekselvirkning

```
useData2 <- filter(useData, !(studie == "Husdyrvidenskab") )
twoway.add2 <- lm(hojde ~ studie + kon, data = useData2)
summary(twoway.add2)


##
## Call:
## lm(formula = hojde ~ studie + kon, data = useData2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.5701  -3.1051  -0.1051   3.8949  17.1185
##
## Coefficients:
##                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)            168.1051     0.9841 170.825   <2e-16 ***
## studieJordbrugsøkonomi  -0.5350     1.5059  -0.355    0.723
## studieNaturressourcer    0.2531     1.4866   0.170    0.865
## konMand                 14.5233     1.2567  11.556   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.34 on 106 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5726,Adjusted R-squared:  0.5605
## F-statistic: 47.33 on 3 and 106 DF,  p-value: < 2.2e-16
```


Med vekselvirkning

```
twoway.int <- lm(hojde ~ studie + kon + studie*kon, data=useData2)
round(summary(twoway.int)$coef, digits = 5)


##                                 Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                    167.76471    1.09212 153.61443  0.00000
## studieJordbrugsøkonomi          -0.45701    2.07657  -0.22008  0.82624
## studieNaturressourcer            1.66387    2.02220   0.82280  0.41251
## konMand                         15.63529    1.97388   7.92109  0.00000
## studieJordbrugsøkonomi:konMand  -0.64887    3.06611  -0.21163  0.83281
## studieNaturressourcer:konMand   -3.06387    3.02956  -1.01132  0.31421
```

Modelfit og fortolkning af estimater

Modelfit:

- Uden vekselvirkning: `lm(hojde ~ studie + kon, data=useData2)`
- Med vekselvirkning:
  `lm(hojde ~ studie + kon + studie*kon, data=useData2)`

Modellen uden vekselvirkning: Estimater læses som før, men er lidt anderledes da HV ikke er med mere.

Modellen med vekselvirkning:

- Hvorfor netop seks linier med estimater?
- Estimat for BB, kvinder? For JØ, kvinder? For JØ, mænd?

Opsummering

Tosidet ANOVA efter to kategoriske variable, `A` og `B`:

- Model uden vekselvirkning: `A+B`
- Model med vekselvirkning: `A+B+A*B`
- Faktisk mange versioner af modellen med vekselvirkning: `A+B+A:B` eller `A*B` eller `A:B`. Prøv selv!

Estimater:

- R vælger referencegrupper for `A` og `B` (i de fleste versioner). Så er interceptet estimatet for referencekombinationen.
- Estimat for andre kombinationer: Interceptestimatet plus de relevante estimater.

Test for vekselvirkning

Er der faktisk vekselvirkning?

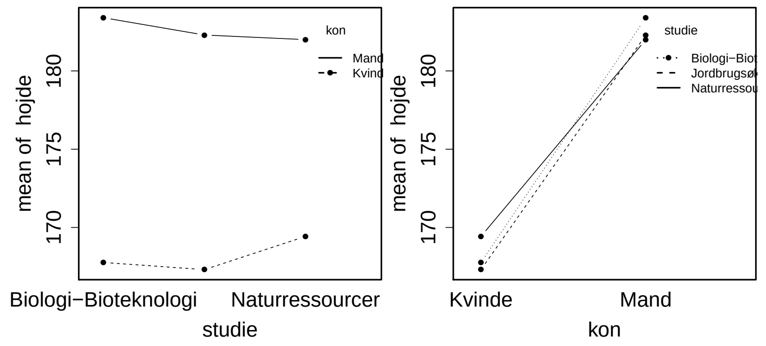
- Uformelt: Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot
- Formelt: Hypotesetest

Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot

- Gennemsnit plottes med profiler med den ene variabel på x-aksen og med profiler for niveauerne af den anden var.
- Er profilerne **parallelle, på nær tilfældig variation?**
- Parallelle $\rightarrow$ tegn på at der ikke er vekselvirkning. Ikke-parallelle $\rightarrow$ tegn på at der er vekselvirkning.

  Under alle omstændigheder nyttig til at forstå samspillet.
- Svært at vurdere om ikke-parallellitet faktisk skyldes vekselvirkning eller blot tilfældig variation
- R: `interaction.plot` (se dagens R-kode)

Velselvirkningsgraf/interaktionsplot



- Profiler ser ganske parallelle ud, så næppe vekselvirkning
- Helt parallelle profiler på "den ene graf" $\Leftrightarrow$ Helt parallelle profiler på "den anden graf"

Hypotesetest

Model uden vekselvirkning er et **specialtilfælde** af model med vekselvirkning $\rightarrow$ de to modeller er nestede $\rightarrow$ F-test.

- Hypotese, H_0: Ingen vekselvirkning mellem studie og køn (dvs. kønseffekt den samme for alle studier, eller omvendt).
- Beskriver modellen med vekselv. faktisk data bedre end modellen uden vekselvirkning?
- Brug `anova` med de to modeller som argumenter, eller `drop1` på model med vekselvirkning.

Konklusion

Der er ikke signifikant vekselv. mellem studie og køn ($p = 0.59$)

Vi ser defor nærmere på modellen uden vekselvirkning:

- Der er en sign. kønseffekt ($p \approx 0$), men ikke en signifikant effekt af studieretning ($p = 0.88$).
- Mænd estimeres til at være 14.5 cm (SE 1.26) højere end kvinder; 95% konfidensinterval (12.0 , 17.0)

R: Hypotesetest ved brug af anova

```
anova(twoway.add2, twoway.int)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: hojde ~ studie + kon
## Model 2: hojde ~ studie + kon + studie * kon
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1    106 4261.1
## 2    104 4217.4  2      43.7 0.5388 0.5851
```


R: Hypotesetest ved brug af drop1

```
drop1(twoway.int, test="F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie + kon + studie * kon
##            Df Sum of Sq    RSS    AIC F value Pr(>F)
## <none>                  4217.4 413.12
## studie:kon  2      43.7 4261.1 410.25  0.5388 0.5851
```


Modellen uden vekselvirkning (- studerende på HV)

```
drop1(twoway.add2, test="F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie + kon
##        Df Sum of Sq    RSS    AIC  F value Pr(>F)
## <none>              4261.1 410.25
## studie  2       9.9 4271.1 406.50   0.1233 0.8841
## kon     1    5368.6 9629.7 497.93 133.5478 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

summary(twoway.add2)$coef

##                          Estimate Std. Error     t value      Pr(>|t|)
## (Intercept)            168.1051102  0.9840758 170.8253621 3.135005e-131
## studieJordbrugsøkonomi  -0.5349840  1.5058537  -0.3552696  7.230936e-01
## studieNaturressourcer    0.2530765  1.4865576   0.1702433  8.651433e-01
## konMand                 14.5233067  1.2567448  11.5562892  1.759654e-20
```


Diverse om vekselvirkning

Vekselvirkning ml. A og B siger ikke at der er sammenhæng mellem A og B, men at effekten af A på y afhænger af B.

Vi taler om **hovedeffekter** og **vekselvirkning** af de to variable:

- Ofte ligger den primære interesse i hovedeffekterne, men sommetider er vekselvirkningen det primære
- Inddrag kun vekselvirkning hvis det giver faglig mening

Vekselvirkningsmodellen kræver **gentagelser:** Kan ikke fittes hvis der kun er en obs. for hver kombination af de to variable.

Diverse om vekselvirkning

Det giver ikke mening af tale om effekt**en** (bestemt form) af en variabel hvis den indgår i vekselvirkning med en anden:

- Fx kan man ikke bestemme estimat**et** for kønseffekten i modellen hvor studie og køn indgår med vekselvirkning
- Fx kan man ikke teste hovedeffekten af køn i modellen hvor studie og køn indgår med vekselvirkning

Opsummering — til eget brug

- Hvornår kan man bruge tosidet ANOVA?
- Hvad betyder det at der vekselvirkning mellem to variable?
- Hvordan fitter du en tosidet ANOVA (med/uden vekselvirkning) i R, og hvordan bruger du estimaterne?
- Hvordan undersøger man om de er vekselvirkning?