Det Natur- og Biovidenskabelige Fakultet

# Multipel lineær regression

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag





## Dagens program

**Husk:**
Upload besvarelse af den frivillige afleveringsopgave i Absalon!

Vi gennemgår lærebogens Kapitel 8.1

- Multipel lineær regression
- Begrebet (multi)kollinearitet
- Specialtilfælde: kvadratisk og kubisk regression
  (læses selv: slides 24-33 + R-program)

Opsummering på kursusuge 5 (videoer)

- Gennemgang af slides 27-34 fra mandag d. 4/10-2021
  (allerede på Absalon)
- Gennemgang af Quiz 5 (omkring weekenden)
- Eventuelle hængepartier





## Overblik

Vi skal have „udfyldt" følgende skema over modeller (rækker) og statistiske begreber (søjler):

| | Intro | Model | Est.+SE | KI | Test | Kontrol | Præd. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| En stikprøve | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Ensidet ANOVA | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Lineær regr. | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| To stikprøver | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Multipel regr. | nu | nu | nu | nu | nu | nu | nu |
| Tosidet ANOVA | | | | | | | |





# Multipel lineær regression

# Eksempel 8.1: Volumen af kirsebærtræer

Data fra 31 kirsebærtræer, ligger som **trees** i *isdals*.

- Diameter i brysthøjde. Meget nem at måle
- Højde. Nogenlunde nem at måle
- Volumen. Kan kun måles efter fældning

NB: Variablen med diameter hedder `girth` (omkreds) i datasættet, men ifølge `?trees` indeholder den faktisk diameteren.

Spørgsmål:

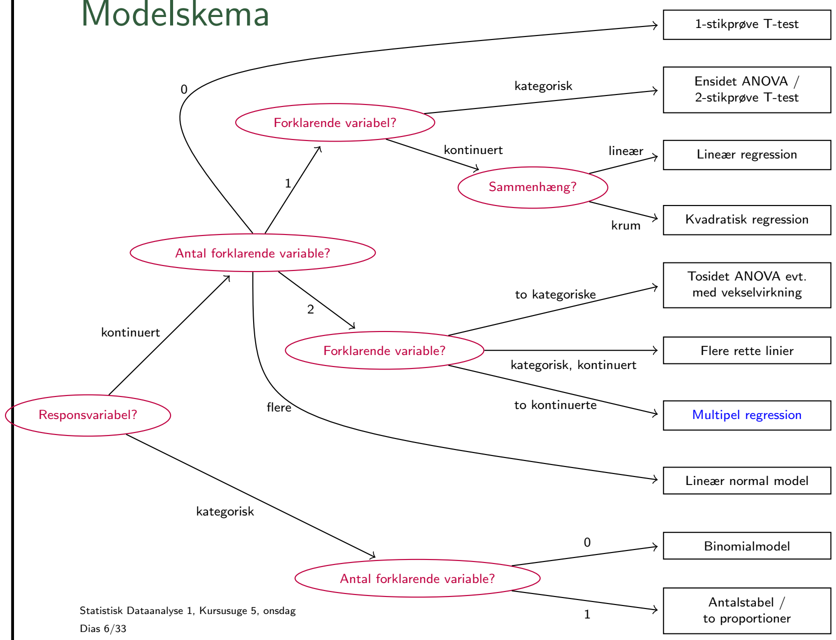
- Bestem en **god prædiktionsmodel** for volume
- **Kan det betale sig også at måle højden?** Bidrager den faktisk med til at beskrive volumen (når vi har diameter)?

Respons? Forklarende variable? Hvor er vi i modelskemaet?





# Modelskema

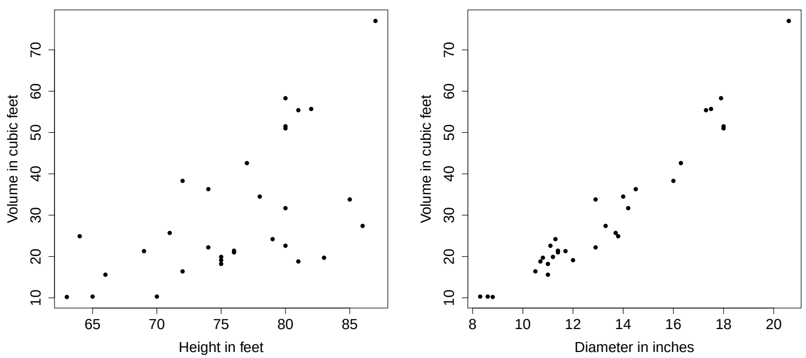







# (Simpel) Lineær regression

Simpel lineær regression beskriver sammenhængen mellem responsvariabel og **én** kontinuert forklarende variabel:








# Lineær regression

Regression af volumen på **højde:**

```
##              Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -87.12361 29.2731221 -2.976232 0.0058346689
## Height        1.54335  0.3838693  4.020509 0.0003783823
```

Regression af volumen på **diameter:**

```
##               Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -36.943459   3.365145 -10.97827 7.621449e-12
## Girth         5.065856   0.247377  20.47829 8.644334e-19
```

Men hvad hvis **begge** variable har en betydning for volumen?

## Multipel lineær regression

**Multipel lineær regression:** $d \geq 2$ kvantitative forkl. variable.

Statistisk model:

$$y_i = \alpha + \beta_1 \cdot x_{i1} + \cdots + \beta_d \cdot x_{id} + e_i$$

med iid. restled $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ som sædvanlig.

Når $d = 2$ er der tre middelværdiparametre:

- $\alpha$ skæring (intercept) med $y$-aksen når $x_{i1} = x_{i2} = 0$.
- $\beta_1$ og $\beta_2$ er **partielle hældninger**, dvs. ændring i $y$ hvis en var. ændres med 1, og den anden forklarende var. "fastfryses".

Desuden er spredningen $\sigma$ som sædvanlig en ukendt parameter.





## Multipel lineær regression: Statistisk inferens

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.

R: Tilføj yderligere led til `lm`, med + imellem, fx:

```
multipel1 <- lm(Volume ~ Height + Girth, data=trees)
summary(multipel1)$coefficients

##               Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -57.9876589  8.6382259 -6.712913 2.749507e-07
## Height        0.3392512  0.1301512  2.606594 1.449097e-02
## Girth         4.7081605  0.2642646 17.816084 8.223304e-17
```

**Fortolkning** af parameterestimater?





## Er det en fornuftig model?

Er det en **fornuftig model?**

- Modelkontrol OK?
- Fra et mere "teoretisk" synspunkt? Modeller for træer?

Naive modeller for træer:

- Træets form kan approksimeres med en **cylinder**
- Træets form kan approksimeres med en **kegle**





## Transformation

De naive modeller:

- Cylinder med diameter $d$, højde $h$: volumen, $v = ?$
- Kegle med grundfladediameter $d$ og højde $h$: vol. $v = \frac{\pi}{12} \cdot h \cdot d^2$

I begge tilfælde:

$$v = \text{konstant} \cdot h \cdot d^2$$

Træer er hverken cylindre eller kegler, men vi kan gøre modellen mere **fleksibel** ved at tillade andre potenser:

$$v = c \cdot h^{\beta_1} \cdot d^{\beta_2}$$

Efter log-transformation fås en **multipel lineær regression**:

$$\log v_i = \alpha + \beta_1 \cdot \log h_i + \beta_2 \cdot \log d_i + e_i$$

# R

```
multipel2 <- lm(log(Volume) ~ log(Height) + log(Girth)
                , data = trees)
summary(multipel2)$coefficients

##                Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -6.631617 0.79978973 -8.291701 5.057138e-09
## log(Height)  1.117123 0.20443706  5.464388 7.805278e-06
## log(Girth)   1.982650 0.07501061 26.431592 2.422550e-21

newData <- data.frame(Girth = 14, Height = 80)
predict(multipel2, newData, interval = "p")

##        fit      lwr      upr
## 1 3.495974 3.32548 3.666467
```





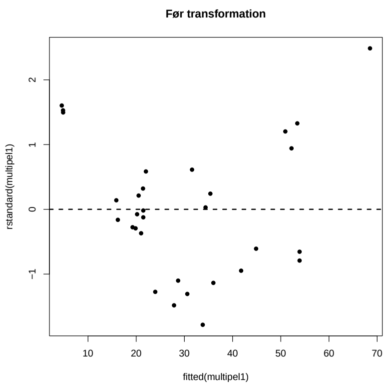
# Spørgsmål

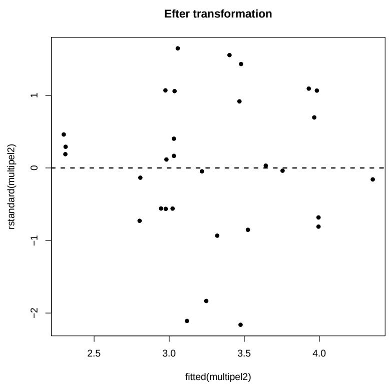
- Er modelantagelserne OK?
- Træ med diameter 14 og højde 80. Hvad er et fornuftigt bud på volumen? Prædiktionsinterval?
- Fortolkning af $\beta_1$ og $\beta_2$?
- Kan det betale sig også at måle højden? Bidrager den faktisk med til at beskrive volumen (når vi har diameter)?
- De naive modeller havde begge $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$. Passer det med data?





# Residualplot for de to modeller




Ser bedst ud efter log-transformation.





# Er sammenhængen som i de naive modeller?

Statistiske modeller:

- Generel model: $\log v_i = \alpha + \beta_1 \cdot \log h_i + \beta_2 \cdot \log d_i + e_i$
- Naive modeller: $\log v_i = \alpha + 1 \cdot \log h_i + 2 \cdot \log d_i + e_i$

De naive model er (som vi vidste) specialtilfælde af den generelle model. Svarer til **hypotesen**

$$H_0 : \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 2$$

- **Hver for sig** kan $H_0 : \beta_1 = 1$ og $H_0 : \beta_2 = 2$ testes med $t$-test
- **Hele hypotesen** kan testes med $F$-test (med 2 df i tælleren)
- $F$-testet giver $p = 0.85$, så $H_0$ accepteres. Potenserne fra de naive modeller er OK.

## R: test for om $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$

```
naiv <- lm(log(Volume) ~ offset(1*log(Height) + 2*log(Girth))
           , data=trees)
anova(naiv, multipel2)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: log(Volume) ~ offset(1 * log(Height) + 2 * log(Girth))
## Model 2: log(Volume) ~ log(Height) + log(Girth)
##   Res.Df     RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1     30 0.18769
## 2     28 0.18546  2 0.0022224 0.1678 0.8464
```



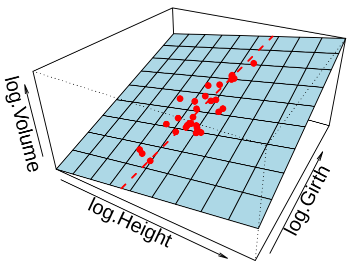


# Multikollinearitet i multipel lineær regression





## Fortolkning og kollinearitet




- Model $y_i = \alpha + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + e_i$
- $\beta_1$, $\beta_2$: **partielle hældninger**, dvs. ændringen i $y$ hvis andre variable fastfryses.
- Hvis $x_1$ og $x_2$ er **afhængige**, så er det svært at adskille effekten af dem. Dette kaldes **kollinearitet**.





## Potentielle problemer ved multikollinearitet

Tegn på multikollinearitet:

- **Unaturlige estimater**, f.eks. forkert fortegn.
- Hverken $\beta_1$ eller $\beta_2$ er signifikante, men begge led ikke kan undværes på samme tid

Pas på med fortolkningerne.

Måske giver det slet ikke mening af tale om ændringen i en variabel, mens de andre fastholdes...

## Eksempel: Timeløn vs. uddannelse, erfaring og alder

Data:

- Lille uddrag fra The Current Population Survey (CPS, USA, 1985)
- 52 observationer fra kvinder, som alle arbejder i professionskategorien "other".
- Respons: Timeløn (USD)
- Forklarende variable: samlet længde uddannelse, alder, erfaring (alle i år)





## Eksempel: Timeløn vs. uddannelse, erfaring og alder

```
> summary(lm(wage ~ edu + exper + age, data=myData))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -15.4931     6.6457  -2.331    0.024 *
edu           0.7059     0.8524   0.828    0.412
exper        -0.6247     0.8723  -0.716    0.477
age           0.6775     0.7964   0.851    0.399
```

Spørgsmål:

- Hvad er fortolkningen af fortegnet for erfaring (exper)?
- Er der signifikant effekt af uddannelse (edu) hhv. erfaring (exper) hhv. alder (age)?





## Eksempel: Timeløn vs. uddannelse, erfaring og alder

```
> summary(lm(wage ~ exper + edu, data=myData))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -11.85350    5.07118  -2.337   0.0235 *
exper         0.11552    0.06237   1.852   0.0700 .
edu           1.38007    0.31307   4.408 5.68e-05 ***
```

Spørgsmål:

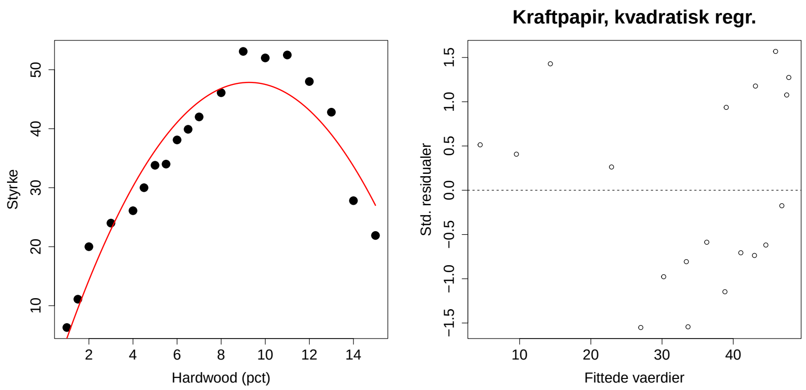
- Hvad skete der med fortegnet for erfaring?
- Er der signifikante effekter?
- Kan vi forklare "hvad der sker"?





# Polynomiel regression

# Eksempel 8.3: Kraftpapir (sidste uge)




- Kvadratisk regression: $\text{str}_i = \alpha + \beta_1 \cdot \text{hw}_i + \beta_2 \cdot \text{hw}_i^2 + e_i$
- Måske ikke helt tilfredse: Fanger ikke toppen, asymmetri





# Polynomiel regression

**Kvadratisk regression:** $\text{str}_i = \alpha + \beta_1 \cdot \text{hw}_i + \beta_2 \cdot \text{hw}_i^2 + e_i$

**Specialtilfælde af multipel lineær regression:**

- De forklarende varible er potenser af samme variabel
- Kan ikke fortolke estimater som i multipel lineær regresison. Hvorfor ikke?

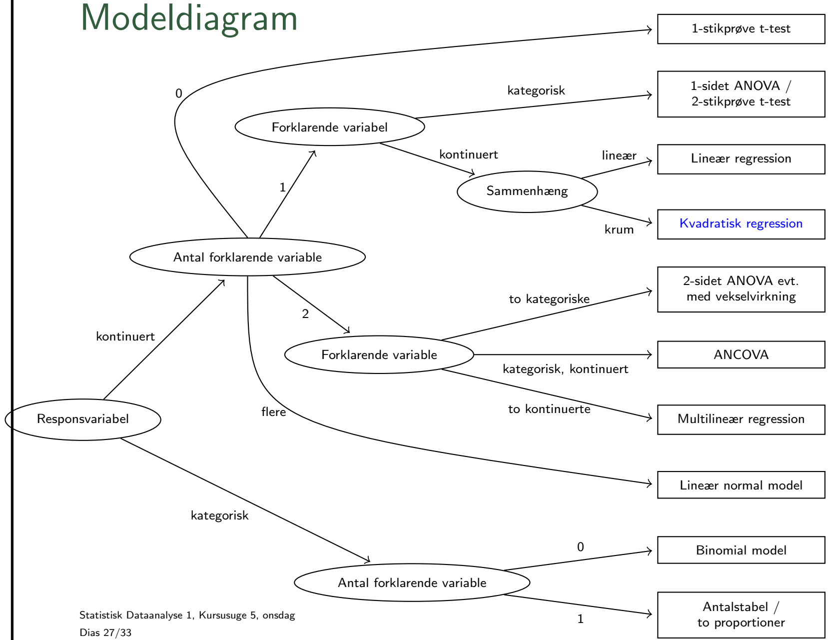
Check modeldiagram.

Kan udvide modellen med **flere potenser** $\rightarrow$ polynomiel regression





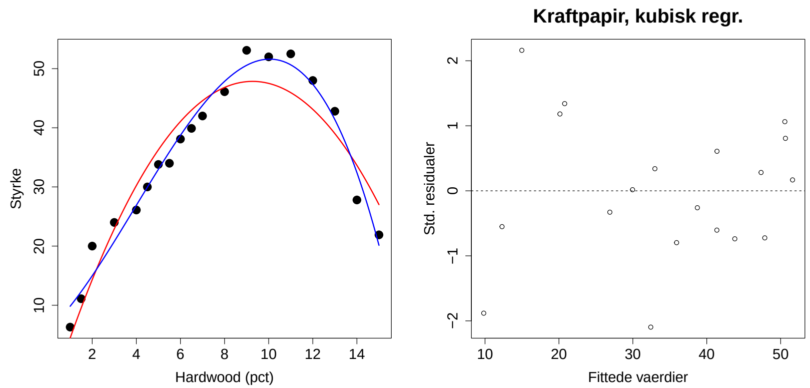
# Modeldiagram








# Eksempel 8.3: Kraftpapir




- Kubisk regression: $\text{str}_i = \alpha + \beta_1 \cdot \text{hw}_i + \beta_2 \cdot \text{hw}_i^2 + \beta_3 \cdot \text{hw}_i^3 + e_i$
- Residualplottet ser umiddelbart bedre ud

# Hypotesetest

I sidste uge:

- Kvadratisk regression: $\text{str}_i = \alpha + \beta_1 \cdot \text{hw}_i + \beta_2 \cdot \text{hw}_i^2 + e_i$
- Hypotese, $H_0 : \beta_2 = 0$. Testet gav $T_{\text{obs}} = -10.3$, $p = 1.9 \cdot 10^{-8}$
- Konklusion: Kvadratisk model beskriver data bedre end lineær model

Tilsvarende:

- Kubisk regression: $\text{str}_i = \alpha + \beta_1 \cdot \text{hw}_i + \beta_2 \cdot \text{hw}_i^2 + \beta_3 \cdot \text{hw}_i^3 + e_i$
- Hypotese, $H_0 : \beta_3 = 0$. Testet giver $T_{\text{obs}} - 5.6$, $p = 4.7 \cdot 10^{-5}$
- Konklusion: Kubisk model beskriver data bedre end kvadratisk model





# Konklusion

Kraftpapir:

- Den kubiske model beskriver data signifikant bedre end kvadratisk model
- Den kvadratiske model har dog **simplere** fortolkning (godt)
- Begge modeller har den vigtigste feature: der er en **optimal træmængde** der giver den største forventede styrke





# R: kvadratisk regressionsmodel

```
kvadreg <- lm(strength ~ hardwood + I(hardwood^2)
              , data = paperstr)
summary(kvadreg)$coefficients

##                  Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)    -6.6741916 3.39970751  -1.963166 6.725203e-02
## hardwood       11.7640057 1.00278222  11.731366 2.854174e-09
## I(hardwood^2) -0.6345492 0.06178832 -10.269727 1.894349e-08
```





# R: kubisk regressionsmodel

```
cubicreg <- lm(strength ~ hardwood + I(hardwood^2)
               + I(hardwood^3), data = paperstr)
summary(cubicreg)$coefficients

##                  Estimate  Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)     5.6483950 2.954663227  1.911688 7.521268e-02
## hardwood        3.5784894 1.565854129  2.285327 3.726535e-02
## I(hardwood^2)   0.6536355 0.231329713  2.825558 1.278280e-02
## I(hardwood^3)  -0.0551876 0.009788835 -5.637811 4.721725e-05
```

# Potentielle problemer med polynomiel regression

Vær **ekstra forsigtig med ekstrapolation** (prædiktion udover observationsområdet)

Pas på med at **"overfitte"**, dvs. tilpasse modellen **for godt**, således at resultatet ikke vil være reproducerbart.

- Kan tilpasse kurven fuldstændigt til data hvis vi bruger nok $n - 1$ potenser. Ikke reproducerbart
- Modellen skal fange egentlige features, men ikke tilfældige udsving.

Der findes andre metoder til kurvetilpasning (ikke StatDat1)