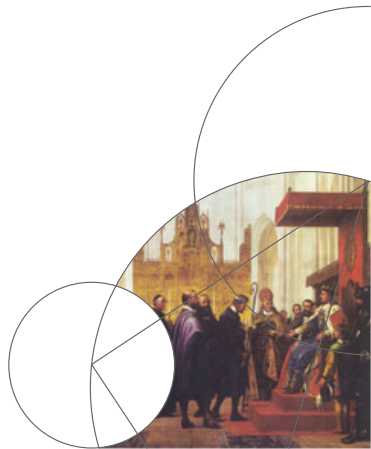




Det Natur- og Biovidenskabelige Fakultet

Tosidet variansanalyse

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

Tosidet variansanalyse (ANOVA)

- Additive model (uden vekselvirkning)
- Model med vekselvirkning
- Forskel på additive effekter og vekselvirkning
- Test for vekselvirkning
- Forskellige parametriseringer (primært af den additive model)

Generel info:

Det er ekstremt vigtigt, at I lærer at løse standardopgaver hurtigt og uden hjælp!

Gå i træning nu og træk på de mange hjælpelærere ...

- Afleveringsopgave til onsdag den 13. oktober
- Gamle eksamensopgaver: Kør selv analyserne hvis der er data
- HS-opgaver minder også om kommende eksamensopgaver



Overblik

Vi skal have „udfyldt“ følgende skema over modeller (rækker) og statistiske begreber (søjler):

	Intro	Model	Est.+SE	KI	Test	Kontrol	Præd.
En stikprøve	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ensidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Lineær regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
To stikprøver	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Multipel regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tosidet ANOVA	nu	nu	nu	nu	nu	nu	nu
Blandede modeller							



Tosidet ANOVA uden vekselvirkning



Eksempel: Højde på studieretninger

Spørgeskema med studerende på Statistisk Dataanalyse 2017:
bl.a. info om studieretning og højde.

- Svar fra 50 BB + 42 HV + 31 JØ + 31 NR + 2 andre. Skipper de "2 andre".
- Der mangler desuden højde for en mindre antal studerende \rightarrow
 $n = 152$



Eksempel: Højde på studieretninger

Spørgeskema med studerende på Statistisk Dataanalyse 2017:
bl.a. info om studieretning og højde.

- Svar fra 50 BB + 42 HV + 31 JØ + 31 NR + 2 andre. Skipper de "2 andre".
- Der mangler desuden højde for en mindre antal studerende $\rightarrow n = 152$

Spørgsmål: Er den gennemsnitlige højde forskellig på studierne?

- Respons: Højde
- Forklarende variabel: Studieretning
- Lægger op til ensidet ANOVA



Ensidet ANOVA

```
oneway <- lm(hojde ~ studie, data = useData)
onesample <- lm(hojde ~ 1, data = useData)
drop1(oneway, test = "F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie
##           Df Sum of Sq   RSS   AIC F value    Pr(>F)
## <none>                 11299 662.91
## studie    3      1185.2 12484 672.07  5.1745 0.001985 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



Ensidet ANOVA

```
oneway <- lm(hojde ~ studie, data = useData)
onesample <- lm(hojde ~ 1, data = useData)
drop1(oneway, test = "F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie
##           Df Sum of Sq   RSS   AIC F value    Pr(>F)
## <none>                11299 662.91
## studie    3      1185.2 12484 672.07  5.1745 0.001985 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Har vi nu vist at "unge menneskers studievalg har noget med deres højde at gøre"? Eller **er der noget vi har overset?**



Tosidet ANOVA

Køn påvirker (formentlig) både højde og studievalg.

Vores egentlige spørgsmål er nok snarere: Er der en forskel på højden på de fire studieretninger, selv hvis vi **justerer for køn?**



Tosidet ANOVA

Køn påvirker (formentlig) både højde og studievalg.

Vores egentlige spørgsmål er nok snarere: Er der en forskel på højden på de fire studieretninger, selv hvis vi **justerer for køn**?

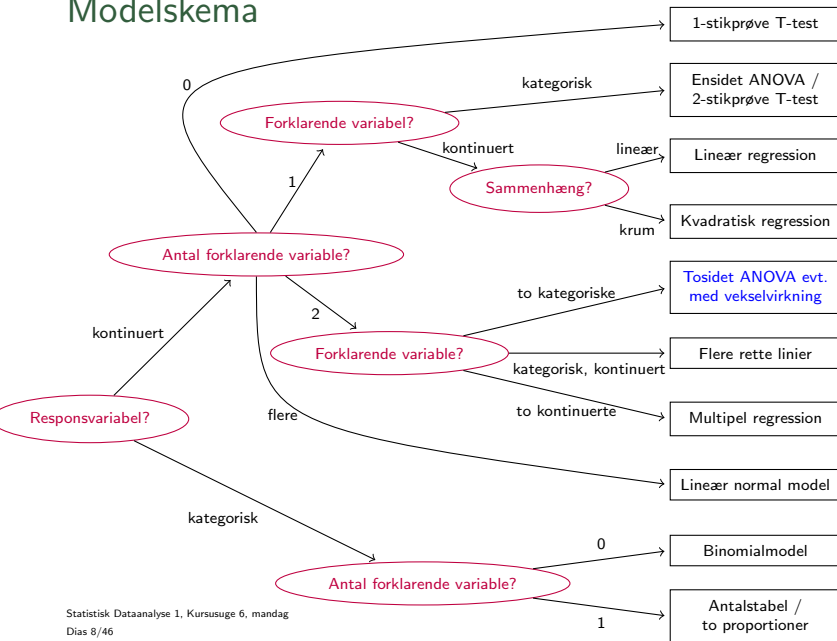
Ny analyse:

- Respons: Højde
- Forklarende var. Studieretning og køn. Begge er **kategoriske**
- **Tosidet ANOVA**

Check modelskemaet.



Modelskema



Statistisk model

Model for **tosidet ANOVA uden vekselvirkning**, kaldes også den **additive model** for tosidet ANOVA:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{køn}_i} + e_i$$

hvor e_i 'erne som sædvanlig er uafhængige $N(0, \sigma^2)$

Parametre:

- Et α per studie: $\alpha_{J\emptyset}$, α_{NR} , α_{HV} , α_{BB}
- Et β per køn: β_M og β_K
- Residualspredning σ



Additiv tosidet ANOVA

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.



Additiv tosidet ANOVA

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.

R: Tilføj leddene til `lm`, med `+` imellem:

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data=useData)
```

NB. Det er lidt sværere at bestemme antal frihedsgrader — men det klarer R heldigvis for os.



Additiv tosidet ANOVA

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.

R: Tilføj leddene til `lm`, med `+` imellem:

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data=useData)
```

NB. Det er lidt sværere at bestemme antal frihedsgrader — men det klarer R heldigvis for os.

Hvad nu?

- **Modelkontrol**: Se dagens R-materiale
- **Fortolkning** af parameterestimer
- **Test** for studieretning når vi justerer for køn



Fortolkning af parameterestimer

R vælger en **referencegruppe for hver variabel**. Her: BB og kvinder.

Følgende estimer aniges:

- „Intercept“: Estimeret middelværdi gives for **kombinationen** af de to referencer, altså for kvindelige BB-studerende
- Estimerede **forskelle** mellem de andre studieretninger og BB
- Estimeret **forskel** mellem mænd og kvinder



Spørgsmål

- Estimat for gennemsnitshøjde blandt kvindelige BB-stud.?
- Estimat for gennemsnitshøjde blandt mandlige BB-stud.?
- Estimat for gennemsnitshøjde blandt mandlige JØ-stud.?
- Hvilket studie estimeres til at have de højeste studerende (når der er korregeret for køn)?
- Estimat for σ ?
- Antal frihedsgrader? Er det mærkeligt?
- Hvordan skal p -værdierne fortolkes?



Additiv tosidet ANOVA

```

twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data=useData)
summary(twoway.add)

##
## Call:
## lm(formula = hojde ~ studie + kon, data = useData)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.5701  -4.1354  -0.2316   4.0228  17.1185
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    168.1051     0.9859  170.517  <2e-16 ***
## studieHusdyrvidenskab     1.1211     1.3901   0.806    0.421
## studieJordbrugsøkonomi   -0.5350     1.5086  -0.355    0.723
## studieNaturressourcer     0.2531     1.4892   0.170    0.865
## konMand              14.5233     1.2590  11.535  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.352 on 147 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.525, Adjusted R-squared:  0.512
## F-statistic: 40.61 on 4 and 147 DF,  p-value: < 2.2e-16

```



Test for studieretning når vi justerer for køn

Statistisk model:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{køn}_i} + e_i$$

Hypotese:

$$H_0 : \alpha_{J\emptyset} = \alpha_{NR} = \alpha_{HV} = \alpha_{BB}$$



Test for studieretning når vi justerer for køn

Statistisk model:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{køn}_i} + e_i$$

Hypotese:

$$H_0 : \alpha_{J\emptyset} = \alpha_{NR} = \alpha_{HV} = \alpha_{BB}$$

Testes med F -test. Flere metoder i R, men med samme resultat:

- Fit stat. model + model under hypotese og brug anova med de to modeller som argumenter. Hvad er nulmodellen her?
- drop1: Kan vi "droppe" hvert af leddene fra modellen?
- Brug **ikke** anova med kun en model som argument



Test for studieretning når vi justerer for køn: med drop1

```
twoway.add <- lm(hojde ~ studie + kon, data = useData)
drop1(twoway.add, test = "F")
```

```
## Single term deletions
```

```
##
```

```
## Model:
```

```
## hojde ~ studie + kon
```

```
##           Df Sum of Sq      RSS      AIC  F value Pr(>F)
```

```
## <none>                5930.7  566.93
```

```
## studie    3           44.4  5975.1  562.06    0.3666 0.7772
```

```
## kon       1          5368.6 11299.3  662.91  133.0654 <2e-16 ***
```

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



Test for studieretning når vi justerer for køn: med anova

```
oneway.kon <- lm(hojde ~ kon, data=useData)
anova(oneway.kon, twoway.add)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: hojde ~ kon
## Model 2: hojde ~ studie + kon
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1     150 5975.1
## 2     147 5930.7   3    44.371 0.3666 0.7772
```



Konklusion

Der er **ikke** signifikant forskel på højden af studerende på de fire studieretninger når vi korrigerer for køn ($p = 0.78$).



Konklusion

Der er **ikke** signifikant forskel på højden af studerende på de fire studieretninger når vi korrigerer for køn ($p = 0.78$).

I denne situation var vi mest interesseret i den ene variabel (studieretning), men vi **kunne også have undersøgt den anden:**

- Hypotese, $H_0 : \beta_M = \beta_K$
- Testes med F -test eller t -test. Begge giver $p \approx 0$
- Konklusion: Gennemsnitshøjden **er** forskellig for mænd og kvinder, også når vi korrigerer for studieretning

Uden vekselvirkning: Vi lavede implicit en antagelse ...



Antagelsen om additivitet

I eksemplet brugte vi den additive model, modellen uden vekselvirkning:

- Vi antog implicit at der var samme højdeforskel i mænd og kvinder for alle studieretninger (og omvendt).
- R: Vi skrev + mellem leddene i `lm`.

Men sådan er det jo ikke nødvendigvis: Det kan være at effekten af en variabel afhænger af den anden variabel → **vekselvirkning**



Additive effekter vs. vekselvirkning



Prisskilt fra isbod

- 1 kugle 15
- 2 kugler 20
- 3 kugler 23
- 1 kugle med guf 19
- 2 kugler med guf 24
- 3 kugler med guf 27



To ækvivalente prisskilte

Prisskilt 1:

- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf19
- 2 kugler med guf24
- 3 kugler med guf27

Prisskilt 2:

- 1 kugle, uden guf ...15
- 2 kugler+5
- 3 kugler+8
- med guf+4



To ækvivalente prisskilte

Prisskilt 1:

- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf19
- 2 kugler med guf24
- 3 kugler med guf27

Prisskilt 2:

- 1 kugle, uden guf ...15
- 2 kugler+5
- 3 kugler+8
- med guf+4

Seks forskellige is at vælge imellem, men **"effekterne" af guf og størrelse indgår additivt**. Guf koster altid 4 kr ekstra.

Dermed kan priserne beskrives med kun **fire parametre** ($1 + 2 + 1$)



Eksempel med højdedata

Tilsvarende for den additive model for højdedata

- Der er otte kombinationer af studieretning og køn
- Men kun $1 + 3 + 1 = 5$ parametre i den additive model: En for ref-gruppen, tre for studieretningsforskelle, en for kønsforskel.



Vekselvirkning

Når effekten af én variabel af niveauet af en anden variabel, så siger man at der er **vekselvirkning** mellem de to variable.

Engelsk: **Interaction**



Vekselvirkning

Når effekten af én variabel af niveauet af en anden variabel, så siger man at der er **vekselvirkning** mellem de to variable.

Engelsk: **Interaction**

- Is: Ingen vekselvirkning mellem guf og kugler: Guf kostede 4 kr uanset antal kugler.
Ækvivalent: Prisen for ekstra kugler er den samme uanset om der skal guf på eller ej.



Vekselvirkning

Når effekten af én variabel af niveauet af en anden variabel, så siger man at der er **vekselvirkning** mellem de to variable.

Engelsk: **Interaction**

- Is: Ingen vekselvirkning mellem guf og kugler: Guf kostede 4 kr uanset antal kugler.
Ækvivalent: Prisen for ekstra kugler er den samme uanset om der skal guf på eller ej.
- Højde: Antog at kønsforskellen er den samme på alle studier.
Ækvivalent: Forskel ml. studier er den samme for begge køn.



Prisskilte uden/med vekselvirkning

Nye priser giver rabat på guf hvis man køber store is:

Gamle priser:

- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf ... 19
- 2 kugler med guf .. 24
- 3 kugler med guf .. 27

Nye priser:

- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf ... 19
- 2 kugler med guf .. 22
- 3 kugler med guf .. 23



Prisskilte uden/med vekselvirkning

Nye priser giver rabat på guf hvis man køber store is:

Gamle priser:

- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf ... 19
- 2 kugler med guf .. 24
- 3 kugler med guf .. 27

Nye priser:

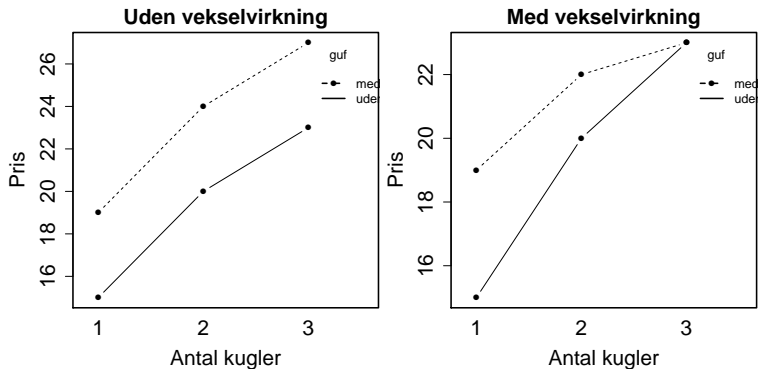
- 1 kugle15
- 2 kugler20
- 3 kugler23
- 1 kugle med guf ... 19
- 2 kugler med guf .. 22
- 3 kugler med guf .. 23

Nu er der vekselvirkning/interaktion! Prisen for guf afhænger af antal kugler: 4/2/0 kr ved 1/2/3 kugler.

Det kræver **seks parametre** at beskrive den nye prisstruktur.



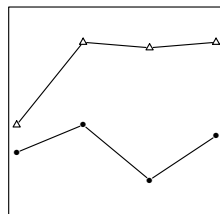
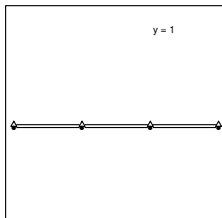
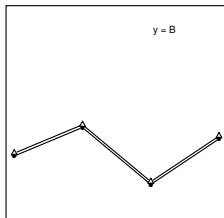
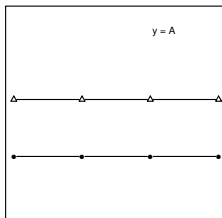
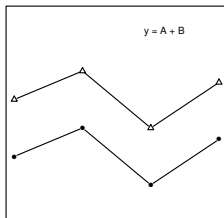
Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot



Plottet visualiserer vekselvirkning. Kig efter **parallelitet**:

- Parallelle profiler \leftrightarrow Ingen vekselvirkning
- Ikke-parallele profiler \leftrightarrow Vekselvirkning

Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot, forventede værdier



Tosidet ANOVA med/uden vekselvirkning



Model uden vekselvirkning

Modellen uden vekselvirkning:

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + e_i$$

Modellen angiver middelværdien for alle otte kombinationer af studie og køn — men lægger **restriktioner** på dem.

Model uden vekselvirkning = additiv model.



Model med vekselvirkning

Modellen med vekselvirkning lægger **ingen restriktioner** på de otte middelværdier. Vi skriver

$$\text{højde}_i = \alpha_{\text{studie}_i} + \beta_{\text{kon}_i} + \gamma_{\text{studie}_i, \text{kon}_i} + e_i$$

eller blot

$$\text{højde}_i = \gamma_{\text{studie}_i, \text{kon}_i} + e_i$$

Dette svarer faktisk til en ensidet ANOVA efter den variabel der inddeler obs. i otte grupper.

Opskrivningen med græske bogstaver ikke så vigtig. Vigtigt:

- at forstå den konceptuelle forskel mellem de to modeller
- at kunne fortolke output/estimerer fra R



Eksempel: Højde efter studieretning og køn

Ingen mandlige HV-studerende i datasættet:

- Lidt bøvlet når vi skal have vekselvirkning med \rightarrow vi dropper HV-studerende (selvom det faktisk ikke er nødvendigt)
- Datasættet `useData2` indeholder data fra 110 studerende med højderegistreringer: 49 BB, 30 JØ, 31 NR.



Modellen uden vekselvirkning

```
useData2 <- filter(useData, !(studie == "Husdyrvidenskab") )
twoway.add2 <- lm(hojde ~ studie + kon, data = useData2)
summary(twoway.add2)

##
## Call:
## lm(formula = hojde ~ studie + kon, data = useData2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.5701  -3.1051  -0.1051   3.8949  17.1185
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    168.1051     0.9841  170.825  <2e-16 ***
## studieJordbrugsøkonomi  -0.5350     1.5059   -0.355    0.723
## studieNaturressourcer    0.2531     1.4866    0.170    0.865
## konMand           14.5233     1.2567   11.556  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.34 on 106 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5726, Adjusted R-squared:  0.5605
## F-statistic: 47.33 on 3 and 106 DF, p-value: < 2.2e-16
```



Med vekselvirkning

```
twoway.int <- lm(hojde ~ studie + kon + studie*kon, data=useData2)
round(summary(twoway.int)$coef, digits = 5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
## (Intercept)	167.76471	1.09212	153.61443	0.00000
## studieJordbrugsøkonomi	-0.45701	2.07657	-0.22008	0.82624
## studieNaturressourcer	1.66387	2.02220	0.82280	0.41251
## konMand	15.63529	1.97388	7.92109	0.00000
## studieJordbrugsøkonomi:konMand	-0.64887	3.06611	-0.21163	0.83281
## studieNaturressourcer:konMand	-3.06387	3.02956	-1.01132	0.31421



Modelfit og fortolkning af estimater

Modelfit:

- Uden vekselvirkning:
`lm(hojde ~ studie + kon, data=useData2)`
- Med vekselvirkning:
`lm(hojde ~ studie + kon + studie*kon, data=useData2)`

Modellen uden vekselvirkning: Estimerer læses som før, men er lidt anderledes da HV ikke er med mere.

Modellen med vekselvirkning:

- Hvorfor netop seks linier med estimater?
- Estimat for BB, kvinder? For JØ, kvinder? For JØ, mænd?



Opsummering

Tosidet ANOVA efter to kategoriske variable, A og B:

- Model uden vekselvirkning: $A+B$
- Model med vekselvirkning: $A+B+A*B$
- Faktisk mange versioner af modellen med vekselvirkning:
 $A+B+A:B$ eller $A*B$ eller $A:B$. Prøv selv!

Estimater:

- R vælger referencegrupper for A og B (i de fleste versioner). Så er interceptet estimatet for referencekombinationen.
- Estimat for andre kombinationer: Intercepttestimatet plus de relevante estimater.



Test for vekselvirkning



Er der faktisk vekselvirkning?

- Uformelt: Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot
- Formelt: Hypotesetest



Vekselvirkningsgraf/interaktionsplot

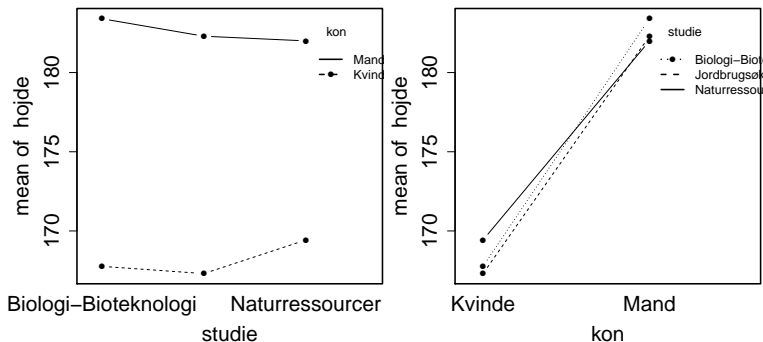
- Gennemsnit plottes med profiler med den ene variabel på x-aksen og med profiler for niveauerne af den anden var.
- Er profilerne **parallelle, på nær tilfældig variation?**
- Parallelle → tegn på at der ikke er vekselvirkning. Ikke-parallelle → tegn på at der er vekselvirkning.

Under alle omstændigheder nyttig til at forstå samspillet.

- Svært at vurdere om ikke-parallelitet faktisk skyldes vekselvirkning eller blot tilfældig variation
- R: `interaction.plot` (se dagens R-kode)



Velselvirkningsgraf/interaktionsplot



- Profiler ser ganske parallelle ud, så næppe vekselvirkning
- Helt parallelle profiler på "den ene graf" ⇔ Helt parallelle profiler på "den anden graf"

Hypotesetest

Model uden vekselvirkning er et **specialtilfælde** af model med vekselvirkning \rightarrow de to modeller er nestede $\rightarrow F$ -test.

- Hypotese, H_0 : Ingen vekselvirkning mellem studie og køn (dvs. kønseffekt den samme for alle studier, eller omvendt).
- Beskriver modellen med vekselv. faktisk data bedre end modellen uden vekselvirkning?
- Brug **anova** med de to modeller som argumenter, eller **drop1** på model med vekselvirkning.



Konklusion

Der er ikke signifikant vekselv. mellem studie og køn ($p = 0.59$)

Vi ser defor nærmere på modellen uden vekselvirkning:

- Der er en sign. kønseffekt ($p \approx 0$), men ikke en signifikant effekt af studieretning ($p = 0.88$).
- Mænd estimeres til at være 14.5 cm (SE 1.26) højere end kvinder; 95% konfidensinterval (12.0, 17.0)



R: Hypotesetest ved brug af anova

```
anova(twoway.add2, twoway.int)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: hojde ~ studie + kon
## Model 2: hojde ~ studie + kon + studie * kon
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1     106 4261.1
## 2     104 4217.4  2      43.7 0.5388 0.5851
```



R: Hypotesetest ved brug af drop1

```
drop1(twoway.int, test="F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie + kon + studie * kon
##           Df Sum of Sq    RSS    AIC F value Pr(>F)
## <none>                4217.4 413.12
## studie:kon    2         43.7 4261.1 410.25  0.5388 0.5851
```



Modellen uden vekselvirkning (- studerende på HV)

```
drop1(twoWay.add2, test="F")

## Single term deletions
##
## Model:
## hojde ~ studie + kon
##
```

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC	F value	Pr(>F)
<none>			4261.1	410.25		
studie	2	9.9	4271.1	406.50	0.1233	0.8841
kon	1	5368.6	9629.7	497.93	133.5478	<2e-16 ***

```
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

summary(twoWay.add2)$coef

##
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	168.1051102	0.9840758	170.8253621	3.135005e-131
studieJordbrugsøkonomi	-0.5349840	1.5058537	-0.3552696	7.230936e-01
studieNaturressourcer	0.2530765	1.4865576	0.1702433	8.651433e-01
konMand	14.5233067	1.2567448	11.5562892	1.759654e-20



Diverse om vekselvirkning

Vekselvirkning ml. A og B siger ikke at der er sammenhæng mellem A og B , men at effekten af A på y afhænger af B .

Vi taler om **hovedeffekter** og **vekselvirkning** af de to variable:

- Ofte ligger den primære interesse i hovedeffekterne, men sommetider er vekselvirkningen det primære
- Inddrag kun vekselvirkning hvis det giver faglig mening

Vekselvirkningsmodellen kræver **gentagelser**: Kan ikke fittes hvis der kun er en obs. for hver kombination af de to variable.



Diverse om vekselvirkning

Det giver ikke mening af tale om effekten (bestemt form) af en variabel hvis den indgår i vekselvirkning med en anden:

- Fx kan man ikke bestemme estimatet for kønseffekten i modellen hvor studie og køn indgår med vekselvirkning
- Fx kan man ikke teste hovedeffekten af køn i modellen hvor studie og køn indgår med vekselvirkning



Opsummering — til eget brug

- Hvornår kan man bruge tosidet ANOVA?
- Hvad betyder det at der vekselvirkning mellem to variable?
- Hvordan fitter du en tosidet ANOVA (med/uden vekselvirkning) i R, og hvordan bruger du estimerterne?
- Hvordan undersøger man om de er vekselvirkning?

