



Analyse af antalstabeller

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



I dag og næste uge

I dag: lærebogen kap. 12 (dog ikke 12.2.3, 12.2.4)

- Intro til test i tabeller
- Test for specifikke sandsynligheder
- Test for ens sandsynligheder (homogenitetstest)
- Test for uafhængighed
- Quiz 7

Næste uge:

- Mandag, forelæsning: repetition vha. nogle opgaver
- Mandag, øvelser: opgaveregning
- Onsdag: Ingen undervisning



















Test i tabeller



Eksempel 12.1: Mendels ærtforsøg

Class	Number
Round, yellow	315
Round, green	108
Wrinkled, yellow	101
Wrinkled, green	32
Total	556

	gg	gY	Yg	YY
ww				
wR				
Rw				
RR				

- 566 ærter fra generation F2 undersøgt for farve og form
- Mendels arvelighedslære: Uafhængighed + dominans → kombinationen af fænotyper skal være forholdet **9 : 3 : 3 : 1**.
- Stemmer data overens med Mendels påstand?



Eksempel: Kastrering og diabetes

Eksempel fra i mandags:

	Diabetes	Ikke diabetes	Total
Kastrerede mus	26	24	50
Ikke-kastrerede mus	12	38	50

- 50 kastrerede og 50 ikke-kastrerede mus undersøgt for diabetes.
- Er sandsynlighederne for diabetes ens i to to grupper? Altså: Er proportionerne ens i de to rækker, på nær tilfældighed?
- Bemærk: Rækkesummerne kendt på forhånd (begge 50)



Eksempel: Politik og økonomi

	Demokrat	Republikaner	Uafhængig
Begrænse udgifter	101	282	61
Øge skatter	38	67	25
Øge offentlige invest.	131	88	31
Lade underskuddet vokse	61	90	25

- 1000 tilfældige amerikanske vælgere adspurgt om to ting: politisk tilhørsforhold og foretrukne finanspolitisk instrument
- Er de to ting uafhængige?
- Bemærk: De 1000 personer er udtrukket tilfældigt. Hverken række- eller søjlesummer, kun totalsummen, kendt på forhånd.



Ligheder og forskelle mellem dataeksemplerne

Data:

- I alle tre eksempler kunne vi beskrive data vha. en **antalstabel** (eng.: contingency table)
- Interesseret i specifikke celledandsynligheder (Mendel) eller sammenhænge mellem celledandsynligheder (de andre eks.)
- I tovejstabellerne: Rækkesummer kendte (diabetes) eller kun totalsummen kendt (politik)

Hypotese afhænger af dataindsamlingen:

- Test for **specifikke sandsynligheder** (goodness-of-fit)
- Test for **ens sandsynligheder/proportioner** (homogenitetstest)
- Test for **uafhængighed**



Hypotesetest i antalstabeller

I alle tilfælde:

- Beregn **forventet antal obs.** i hver celle under hypotesen
- Beregn **teststørrelse**

$$\chi^2_{\text{obs}} = \sum_{\text{alle celler}} \frac{(\text{observeret} - \text{forventet})^2}{\text{forventet}}$$

χ^2_{obs} måler forskellen mellem tabel med observerede værdier og tabel med forventede værdier.

- Bestem **p-værdi** ved at sammenligne χ^2_{obs} med en (den rigtige) χ^2 -fordeling. Detaljer kommer senere.

Er tabellerne med obs. hhv. forventede antal så forskellige at det må skyldes at hypotesen er falsk, eller kan det skyldes tilfældigheder?



Goodness-of-fit test (GOF): Test for specifikke sandsynligheder



Mendels ærtforsøg: Model og hypotese

Class	Number
Round, yellow	315
Round, green	108
Wrinkled, yellow	101
Wrinkled, green	32
Total	556

Stat. model: $n = 556$ uafhængige obs. der hver især kan havne i $k = 4$ grupper; alle med (ukendte) sandsynligheder p_1, \dots, p_k .

Hypotese,

$$H_0 : p_1 = \frac{9}{16}, \quad p_2 = \frac{3}{16}, \quad p_3 = \frac{3}{16}, \quad p_4 = \frac{1}{16}$$

Generelt: $H_0 : p_1 = p_{01}, \dots, p_k = p_{0k}$ for **kendte ssh**, p_{01}, \dots, p_{0k} .



Mendels ærtforsøg: Forventede værdier

Hvis hypotesen er sand, hvor mange observationer ville vi så **forvente** i hver gruppe?

$$E_i = \text{expected}_i = n \cdot p_{i0}$$

For Mendels data:

Class	Observed	Expected
Round, yellow	315	312.75
Round, green	108	104.25
Wrinkled, yellow	101	104.25
Wrinkled, green	32	34.75
Total	556	556



Mendels ærtforsøg: Teststørrelse og p -værdi

Teststørrelse:

$$\begin{aligned} \chi^2_{\text{obs}} &= \sum_{i=1}^4 \frac{(\text{observed}_i - \text{expected}_i)^2}{\text{expected}_i} \\ &= \frac{(315 - 312.75)^2}{312.75} + \dots + \frac{(32 - 34.75)^2}{34.75} = 0.470 \end{aligned}$$

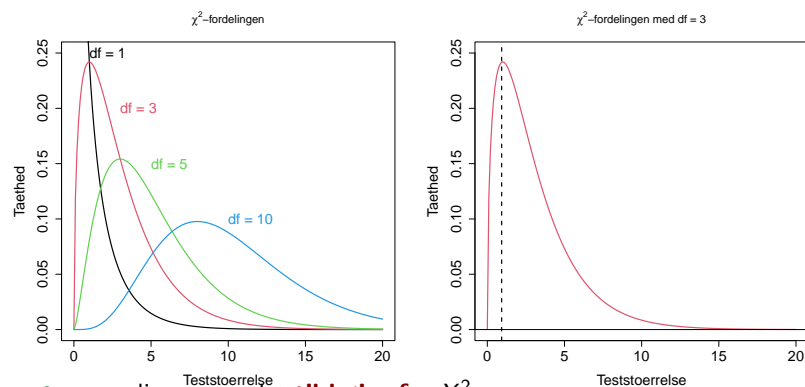
χ^2 er altid ≥ 0 , og **store værdier passer dårligt med H_0** (er kritiske), små værdier passer godt med H_0 .

p -værdi:

- Sandsynlighed for at få værdi af χ^2 der er $\geq \chi^2_{\text{obs}}$
- Viser sig at p -værdien skal bestemmes i χ^2 -fordelingen (chi-i-anden) med $k - 1 = 4 - 1 = 3$ frihedsgrader.



χ^2 -fordelinger, beregning af p -værdi



- p -værdien er arealet til højre for χ^2_{obs}
- Her fås p -værdien 0.93, så vi accepterer hypotesen



R: chisq.test

```
### Testet
chisq.test(c(315,108,101,32), p=c(9,3,3,1)/16)

##
## Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  c(315, 108, 101, 32)
## X-squared = 0.47002, df = 3, p-value = 0.9254

### De forventede værdier
chisq.test(c(315,108,101,32), p=c(9,3,3,1)/16)$expected

## [1] 312.75 104.25 104.25 34.75
```



Mendels ærtforsøg: Opsummering

- Stat. model: 556 uafhængige obs. der hver især kan havne i 4 grupper; alle med (ukendte) sandsynligheder p_1, \dots, p_4 .
- Hypotese, svarende til Mendels love:

$$p_1 = \frac{9}{16}, p_2 = \frac{3}{16}, p_3 = \frac{3}{16}, p_4 = \frac{1}{16}$$

- χ^2 -test gav $p = 0.93$ ($X^2_{\text{obs}} = 0.47$, $df = 3$)
- Hypotesen accepteres, så data er i fin overensstemmelse med Mendels teorier



Test for ens sandsynligheder/proportioner: Homogenitetstest



Eksempel: Kastrering og diabetes

	Diabetes	Ikke diabetes	Total
Katrerede mus	26	24	50
Ikke-kastrerede mus	12	38	50

- **Rækkesummer kendt på forhånd.** Kunne have organiseret data det i stedet var søjlesummerne der var kendt på forhånd.
- I hver række har vi sandsynligheder for at havne i hver søjle. **For hver række summerer sandsynlighederne til 1.**
- Vi er interesseret i **om sandsynligheden for diabetes er ens for kastrerede og ikke-kastrerede mus**
- Der kunne være flere rækker og/eller søjler



Homogenitetstest: Generel notation

	søjle 1	søjle 2	...	søjle k	Total
række 1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	n_1
række 2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	n_2
...
række r	y_{r1}	y_{r2}	...	y_{rk}	n_r
Total	s_1	s_2	...	s_k	n

Dataindsamling:

- **r populationer** (rækker), n_i observationer fra population i
- I hver population er observationerne klassificeret efter et kriterium med k muligheder.
- Rækkesummer (men ikke søjlesummer) kendt på forhånd.



Homogenitetstest: Sandsynligheder og hypotese

	søjle 1	søjle 2	...	søjle k	Total
række 1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1k}	1
række 2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2k}	1
...
række r	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rk}	1

Hypotesen er at sandsynlighederne/proportionerne er ens i alle populationer:

$$p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{rj} \text{ for alle søjler } j$$

Altså at fordelingen henover søjlerne er den samme for alle rækker.

Hvis der kun er to søjler: Sammenligning af r binomialfordelinger



Homogenitetstest: Statistisk model og hypotese

Statistisk model:

- Uafhængige obs. fra r populationer med n_i obs. i population i . Hver obs. kan havde i k grupper/celler
- I population i er sandsynligheden for at havne i gruppe j lig p_{ij} . Summen af p_{ij} 'erne er 1 for hvert i for sig
- Hvis der kun er to søjler: r binomialfordelinger

Hypotesen om homogenitet er at søjlesandsynlighederne er ens for alle rækker:

$$p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{rj} \text{ for alle søjler } j.$$

To søjler: Sammenligning af binomialsandsynligheder!



Homogenitetstest: Forventede værdier

Under hypotesen **estimeres søjlesandsynlighederne** — fælles for alle rækker — naturligt som

$$\hat{q}_j = \frac{s_j}{n} = \frac{\text{søjlesum}_j}{n}$$

Forventet antal i celle (i, j) hvis hypotesen er sand:

$$E_{ij} = n_i \cdot \hat{q}_j = \frac{\text{rækkesum}_i \cdot \text{søjlesum}_j}{\text{totalsum}}$$



Kastrering og diabetes: Forventede værdier

Data:

	Diabetes	Ikke diabetes	Total
Katrerede mus	26	24	50
Ikke-kastrerede mus	12	38	50

Forventede værdier:

	Diabetes	Ikke diabetes	Total
Katrerede mus	19	31	50
Ikke-kastrerede mus	19	31	50



Kastrering og diabetes: Teststørrelse og p -værdi

Teststørrelse:

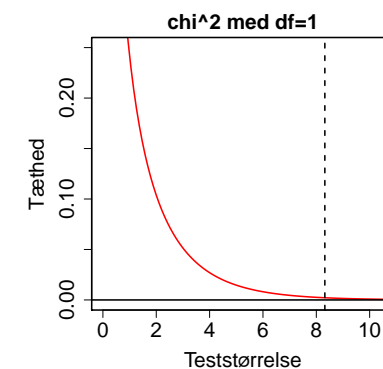
$$\begin{aligned} \chi^2_{\text{obs}} &= \sum_{\text{alle celler}} \frac{(y_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \sum_{\text{alle celler}} \frac{(\text{observed}_{ij} - \text{expected}_{ij})^2}{\text{expected}_{ij}} \\ &= \frac{(26 - 19)^2}{19} + \frac{(24 - 31)^2}{31} + \frac{(12 - 19)^2}{19} + \frac{(38 - 31)^2}{31} \\ &= 8.32 \end{aligned}$$

Store værdier passer dårligt med H_0 , små værdier passer godt.

p -værdi: Viser sig at χ^2_{obs} skal vurderes i χ^2 -fordelingen med $df = (r - 1)(k - 1) = 1$



Kastrering og diabetes: χ^2 -fordelingen og p -værdien



- p -værdien er arealet **til højre for** den χ^2_{obs}
- Her fås p -værdien 0.0039, så hypotesen forkastes klart



R: chisq.test

```
diabetes <- matrix(c(26,12,24,38), 2,2)
diabetes

##      [,1] [,2]
## [1,]  26  24
## [2,]  12  38

chisq.test(diabetes, correct=FALSE)

##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data:  diabetes
## X-squared = 8.3192, df = 1, p-value = 0.003923

chisq.test(diabetes, correct=FALSE)$expected

##      [,1] [,2]
## [1,]  19  31
## [2,]  19  31
```



R: prop.test

```
prop.test(c(26,12), c(50,50), correct=FALSE)

##
## 2-sample test for equality of proportions without continuity
## correction
##
## data:  c(26, 12) out of c(50, 50)
## X-squared = 8.3192, df = 1, p-value = 0.003923
## alternative hypothesis: two.sided
## 95 percent confidence interval:
##  0.09781821 0.46218179
## sample estimates:
## prop 1 prop 2
##  0.52   0.24
```



Kastrering og diabetes: Opsummering

- Statistisk model: Data fra to binomialfordelinger med successandsynligheder p_{11} og p_{21}
- Hypotese om homogenitet, $H_0 : p_{11} = p_{21}$. Vi fik $p = 0.0039$, så hypotesen afvises.
Der er forskel på risikoen for at udvikle diabetes.
- Kastrering øger risikoen for diabetes: Forskellen mellem ssh. estimeres til 0.280 med 95% KI (0.098 , 0.462)



Test for uafhængighed



Studerende på StatData1 i 2021

Ved forelæsningen i StatData1 d. 8/9-2021 svarede 173 studerede bl.a. på følgende spørgsmål

- Glæder du dig til kurset Statistisk Dataanalyse 1? (Ja/Nej)
- Giv et realistisk bud på din karakter ved eksamen i Statistisk Dataanalyse 1 (her grupperet: 00-4, 7, 10-12)

```
##
##      00-4 10-12  7
##   Ja    21    28 62
##   Nej    28     4 30
##
##      00-4    10-12      7
##   Ja 31.43931 20.53179 59.0289
##   Nej 17.56069 11.46821 32.9711
```

- Hverken række- eller søjlesummer kendt på forhånd.
- Er svarene på de to spørgsmål uafhængige? ... Hvad skal det egentlig betyde?



Forventning til SD1 og til eksamenskarakter

Hypotese: Ingen sammenhæng mellem forventning til SD1 og forventning til eget eksamensresultat.

For eksempel:

$$P(00-4 \text{ og Ja}) = P(00-4) \cdot P(\text{Ja})$$

Altså at sandsynligheden for at begge dele er opfyldt fås ved at **gange** de to sandsynligheder. Skal gælde for **alle celler** i tabellen.

Hvis p_{ij} er cellesandsynligheder, p_i er rækkesandsynligheder og q_j er søjlesandsynligheder er hypotesen at

$$p_{ij} = p_i \cdot q_j \text{ for alle } i, j$$



Uafhængighedstest: Generel notation

	søjle 1	søjle 2	...	søjle k	Total
række 1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	n_1
række 2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	n_2
...
række r	y_{r1}	y_{r2}	...	y_{rk}	n_r
Total	s_1	s_2	...	s_k	n

- Alle observationer **klassificeret efter to kriterier**. Organiseret i r rækker og k søjler
- **Kun totalsummen n er kendt på forhånd**
- Rækkesummer og søjlesummer ikke kendt på forhånd, men kan selvfølgelig beregnes når vi har data



Uafhængighedstest: Statistisk model

Statistisk model:

- n uafhængige obs. der hver især kan havne i $r \cdot k$ celler
- Ssh. for celle (i, j) kaldes p_{ij} . Sum af **alle** p_{ij} 'er er 1

Rækkesandsynligheder p_i og søjlesandsynligheder q_j . Sum af de relevante cellesandsynligheder.

	søjle 1	søjle 2	...	søjle k	Total
række 1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1k}	p_1
række 2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2k}	p_2
...
række r	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rk}	p_r
Total	q_1	q_2	...	q_k	1



Uafhængighedstest: Hypotese

Hypotese om uafhængighed:

- p_{ij} = Sandsynlighed for række i og søjle j
- = Sandsynlighed for række i · Sandsynlighed for søjle j
- = $p_i \cdot q_j$

Hypotesen er at dette gælder for **alle** i og j , dvs. alle celler.



Forventede værdier

Estimer for række- og søjlesandsynligheder:

$$\hat{p}_i = \frac{\text{rækkesum}_i}{\text{totalsum}} = \frac{n_i}{n}, \quad \hat{q}_j = \frac{\text{søjlesum}_j}{\text{totalsum}} = \frac{s_j}{n}$$

Under hypotesen har vi derfor følgende **estimer for cellessh.**:

$$\hat{p}_{ij} = \hat{p}_i \cdot \hat{q}_j = \frac{\text{rækkesum}_i \cdot \text{søjlesum}_j}{n^2}$$

Forventet antal i celle (i, j) hvis H_0 er sand:

$$E_{ij} = n \cdot \hat{p}_{ij} = \frac{\text{rækkesum}_i \cdot \text{søjlesum}_j}{\text{totalsum}}$$

Præcis det **samme som for homogenitetstestet!**



SD1 og eksamenskarakter: Forventede værdier

Data:

	00-4	7	10-12	I alt
Ja	21	62	28	111
Nej	28	30	4	62
I alt	49	92	32	173

Forventede værdier:

	00-4	7	10-12	I alt
Ja	31.44	59.03	20.53	111
Nej	17.56	32.97	11.47	62
I alt	49	92	32	173



SD1 og eksamenskarakter: Teststørrelse og p -værdi

Teststørrelse

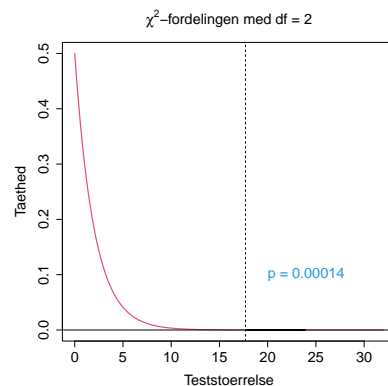
$$\begin{aligned} \chi_{\text{obs}}^2 &= \sum_{\text{alle celler}} \frac{(y_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \sum_{\text{alle celler}} \frac{(\text{observed}_{ij} - \text{expected}_{ij})^2}{\text{expected}_{ij}} \\ &= \frac{(21 - 31.44)^2}{31.44} + \dots + \frac{(4 - 11.47)^2}{11.47} \\ &= 17.669 \end{aligned}$$

Store værdier passer dårligt med H_0 , små værdier passer godt.

p -værdi: Viser sig at χ_{obs}^2 skal vurderes i χ^2 -fordelingen med $df = (r - 1)(k - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$. **Ligesom homogenitetstestet!**



SD1 og eksamenskarakter: χ^2 -fordelingen og p -værdien



- p -værdien er arealet **til højre for** X_{obs}^2
- Her fås stort set en p -værdi på 0, så hypotesen forkastes



R: chisq.test

```
sd1data <- matrix(c(21, 28, 62, 30, 28, 4), 2, 3)
sd1data

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  21  62  28
## [2,]  28  30   4

chisq.test(sd1data, correct = FALSE)

##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data:  sd1data
## X-squared = 17.669, df = 2, p-value = 0.0001456
```



R: chisq.test

```
### De forventede værdier
chisq.test(sd1data)$expected

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 31.43931 59.0289 20.53179
## [2,] 17.56069 32.9711 11.46821
```



SD1 og eksamenskarakter: Opsummering

- Stat. model: 173 uafhængige obs. der hver især kan havne i 6 grupper; alle med (ukendte) sandsynligheder p_{ij}
- Hypotese om uafhængighed: $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ for alle i, j
- χ^2 -test gav $p = 0.00014$ ($X_{obs}^2 = 17.669$, $df = 2$)
- Hypotesen forkastes, så forventningen til kurset StatData1 og til eksamensresultatet er IKKE uafhængige



Diverse



Uafhængighedstest vs. homogenitetstest

Beregningerne er helt identiske:

- Forventede værdier beregnes som $E_{ij} = \frac{\text{rækkesum}_i \cdot \text{søjlesum}_j}{\text{totalsum}}$
- Teststørrelse beregnes som $X_{\text{obs}}^2 = \sum \frac{(\text{observeret} - \text{forventet})^2}{\text{forventet}}$
- Teststørrelsen vurderes i χ^2 -ford. med $df = (r - 1)(k - 1)$: p -værdien beregnes som sandsynlighed til højre for X_{obs}^2
- Hypotesen forkastes/afvises på baggrund af p -værdien som sædvanlig
- Testet kan udføres med `chisq.test` i R

Men: **Hypotesen og derfor fortolkningen er forskellig** afhængig af datastrukturen/-indsamlingen.



Uafhængighedstest vs. homogenitetstest

Uafhængighedstest:

- Når **to kategoriske variable** med hhv. r og k kategorier er observeret for **en enkelt population**
- Hverken række- eller søjlesummer er kendt på forhånd
- Hypotese om **uafhængighed** mellem de to variable

Homogenitetstest:

- Når **en enkelt kategorisk variabel** med k kategorier er observeret i **r forskellige populationer**
- Rækkesummer (eller søjlesummer) kendt på forhånd
- Hypotese om **ens proportioner/sandsynligheder** for de r populationer



Kontinuitetskorrektion

For 2×2 tabeller (men ikke større tabeller) laver `chisq.test` som default en **kontinuitetskorrektion**, når X^2 beregnes.

- `chisq.test(..., correct=FALSE)`: Giver det vi netop har beregnet
- `chisq.test(..., correct=TRUE)`: Giver lidt andre resultater — faktisk forbedret.

Begge dele er OK til eksamen, medmindre der står noget specifikt.



R: Med og uden kontinuitetskorrektion

```
diabetes

##      [,1] [,2]
## [1,]   26  24
## [2,]   12  38

chisq.test(diabetes, correct=TRUE)

##
## Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
##
## data:  diabetes
## X-squared = 7.1732, df = 1, p-value = 0.0074

chisq.test(diabetes, correct=FALSE)

##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data:  diabetes
## X-squared = 8.3192, df = 1, p-value = 0.003923
```



SD1 og eksamenskarakter: R warning

Man kan komme ud for, at `chisq.test` giver en advarsel!

Her benyttes alle trin på karakterskalaen

```
new_sd1data

##
##      00 eller -3 10 12  2  4  7
## Ja      0 23  5  5 16 62
## Nej      1  2  2  7 20 30

chisq.test(new_sd1data, correct = FALSE)

## Warning in chisq.test(new_sd1data, correct = FALSE): Chi-squared approximation may be incorrect

##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data:  new_sd1data
## X-squared = 19.521, df = 5, p-value = 0.001536
```



Approximation

Vi har hele tiden sagt at X^2 kommer fra χ^2 -fordeling når hypotesen er sand, men faktisk er det kun en approksimation.

Tommelfingerregel: **Approximationen er kun god hvis de forventede værdier i alle celler er ≥ 5 .**

```
chisq.test(new_sd1data)$expected

## Warning in chisq.test(new_sd1data): Chi-squared approximation
may be incorrect

##
##      00 eller -3      10      12      2      4      7
## Ja    0.6416185 16.040462 4.491329 7.699422 23.09827 59.0289
## Nej    0.3583815  8.959538 2.508671 4.300578 12.90173 32.9711
```



Hvad gør man hvis forventede antal er for små?

- **Slå rækker og/eller søjler** sammen så tommelfingerreglen om forventede værdier er OK.

Sammenlægningen skal selvfølgelig give mening, typisk for ordinale data. (Kunne godt gøres her!)

- Beregn p -værdien ved **simulation**.

Laver mange datasæt som de ville se ud hvis hypotesen var sand og beregner X^2 . Hvor ofte er den større end X_{obs}^2 ?



R: Simuleret p -værdi

```
set.seed(2019)
chisq.test(new_sd1data, simulate.p.value = TRUE, B=10000)

##
## Pearson's Chi-squared test with simulated p-value (based on 10000
## replicates)
##
## data: new_sd1data
## X-squared = 19.521, df = NA, p-value = 0.0007999
```



SD1 og eksamenskarakter: Konklusion

- Simulerede p -værdierne lidt forskellige fra gang til gang (medmindre man som her vælger fast seed)
- De simulerede p -værdier tæt på p -værdien baseret på χ^2 -approximationen (0.001536)
- Tegn på sammenhæng ml. forventning til SD1 og forventning til eksamenskarakter



Opsummering vedr. R

Test i tabeller:

- `chisq.test`: Giver X^2_{obs} og p -værdi samt forventede værdier. Kan også beregne simulerede p -værdier. Ingen konfidensint.
- `prop.test`: Kan bruges hvis der kun er to søjler (evt. flere rækker). Giver ikke de forventede værdier.
Også KI for forskel mellem rækkessh. for 2×2 tabeller.
- For 2×2 tabeller: `chisq.test` og `prop.test` fås med/uden kontinuitetskorrektion.
- Data skal indtastes forskelligt når man bruger `chisq.test` og `prop.test`.

Vælg selv metoden medmindre du bliver spurgt om noget eksplicit.

