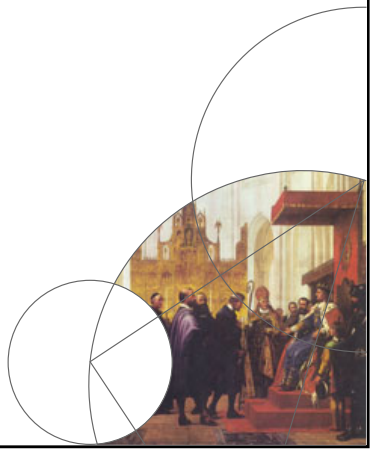
# Opsummering på kursusuge 1-4: (Ch. 1-7 i lærebogen)

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag







## Dagens program

Vi repeterer de fleste ting fra kursusuge 1-4.

- **Lineær regression og ensidet ANOVA:**
  Eksempel delvist beskrevet i lærebogens afsnit 14.1 (s. 388)
- **R programmet:**
  fokus på fortolkning af output og kobling til generelle begreber

Måske / hvis vi har tid

- (Video om) **Prædiktion:**
  Slide 28-35 + R-program fra 29/9-2021
- Lidt om nogle **Generelle begreber:**
  Modelspecifikation, modelfit, eksperimentelle vs. observationelle data mm.
- **Mere om hypotestest** (slides 27-34):
  Gennemgås kun via video som ligger på Absalon (fra 2020).



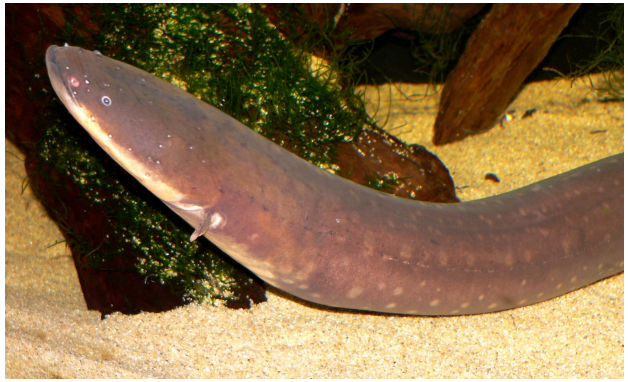


# Lineær regression og ensidet ANOVA: Ikke altid enten-eller





## Elektrisk ål, lever i Syamerika



# Lineær regression vs ensidet ANOVA

Vi har foreløbig skelnet ret skarpt mellem situationer hvor man kan bruger lineær regression og ensidet ANOVA. Men...

**Afsnit 14.1 (side 388):** Elektriske ål udsender elektriske signaler, men afhænger frekvensen af vandtemperaturen?

Data, ligger som **eels** i *isdals*:

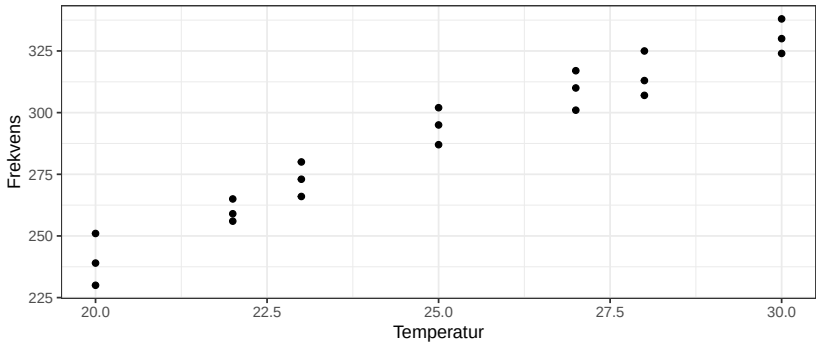
- Syv vandtemperaturer, tre elektriske ål for hver temperatur
- Signalfrekvensen målt for hver af de 21 ål
- To variable: `temp`, `freq`

Datatyper? Tegn data! Hvilke modeller byder sig til?





# Elektriske ål: Dataplot

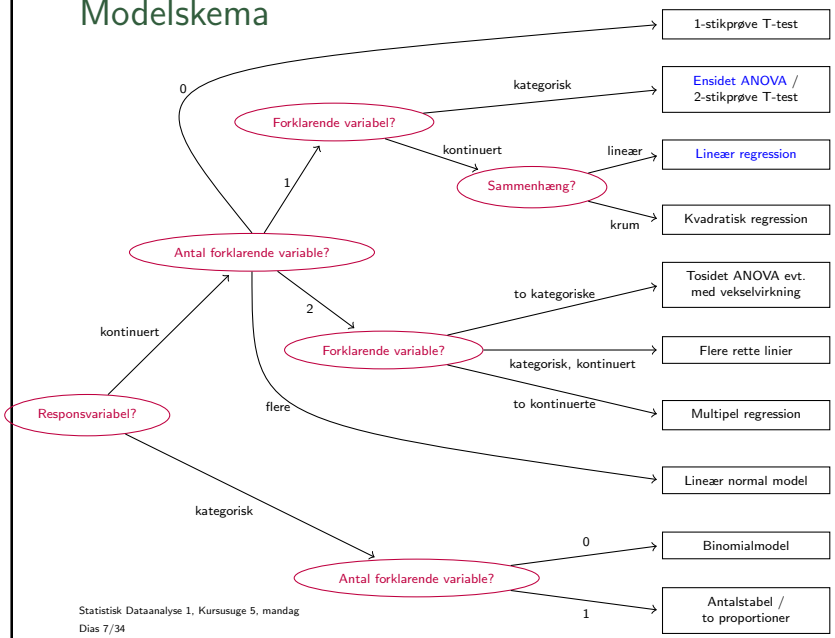



- Ser rimeligt lineært ud → **lineær regression** er en mulighed
- Kan også tænke på temperatur som en inddeling af obs. i syv grupper → **ensidet ANOVA** er en mulighed





# Modelskema








# Spørgsmål

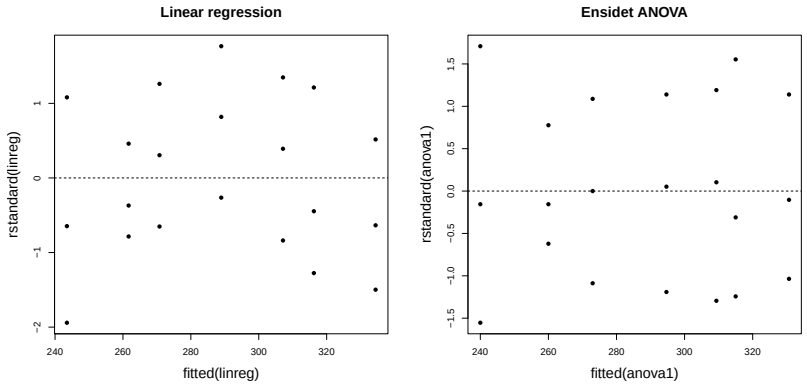
Opskrive modellerne.

Kan vi estimere følgende størrelser vha. begge modeller?

- Forventet frekvens ved 22 grader
- Forventet frekvens ved 26 grader
- Forskel i forventet frekvens ved 20 og 30 grader
- Forskel i forventet frekvens ved temperaturstigning på 1 grad

Dette taler umiddelbart for den lineære regression. Men hvis nu sammenhængen ikke havde været approksimativt lineær, så...

## Residualplots for de to modeller




Kommentarer?





## Modellerne er nestede

Antagelserne om uafhængighed, normalfordelte restled og ens spredninger for alle observationer er helt ens for de to modeller.

Kun middelværdierne er forskellige for de to modeller:

- **Ensidet ANOVA:** Forventet frekvens er ens indenfor grupper, men der er ingen restriktioner på de syv middelværdier
- **Lineær regression:** Forventet frekvens er en lineær funktion af temperaturen

Linearitet er en ekstra restriktion → lineær regression er et specialtilfælde af ensidet ANOVA → de to modeller er **nestede.**





## Test for linearitet: Mulighed 1

Vi kan teste den simple model mod den mere komplekse model.

I dette tilfælde svarer dette til at teste hypotesen om at middelværdien vokser lineært med temperaturen:

$$H_0 : \alpha_j = \gamma + \beta t_j$$

hvor $\alpha_j$ er middelværdien i temperaturgruppe $j$, og $\gamma$ og $\beta$ er skæring og hældning.

- Vi får $F_{\text{obs}} = 0.70$ der skal vurderes i $F$-fordelingen $(5, 14)$ frihedsgrader. Dette giver $p$-værdiern 0.63.
- Vi afviser ikke hypotesen; data passer fint med linearitet.

Dette test dur kun fordi vi har **gentagelser** for hver temperatur.





## Test for linearitet: Mulighed 2

Et andet test for linearitet: Sammenlign en lineær og en kvadratisk regression.

- Lineær regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i$
- Kvadratisk regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i + \delta \cdot t_i^2$

Den lineære regressionsmodel er et specialtilfælde af den kvadratiske regressionsmodel svarende til at $\delta = 0$.

To muligheder:

- Fit den kvadratiske regression og se på $t$-testet for hypotesen $H_0 : \delta = 0$ vha. `summary`.
- Fit begge modeller, sammenlign dem med $F$-test vha. `anova`

Vi får $p = 0.08$, så heller ikke her kan vi ikke afvise linearitet.

# Opsummering

- Når der er gentagelser for hver værdi af $x$-variablen, kan vi både køre ensidet ANOVA og lineær regression
- Forskellen er om middelværdien antages at være lineær i $x$ eller må være hvad som helst.
- Vi kan teste for linearitet ved at sammenligne de to modeller
- Man kan også teste for linearitet ved at sammenligne med kvadratisk regression—men kun hvis kvadratisk model er OK.





# R: lineær regressionsmodel

```
library(isdals)
data(eels)
linreg <- lm(freq ~ temp, data = eels)
summary(linreg)

##
## Call:
## lm(formula = freq ~ temp, data = eels)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -13.492  -4.768  -1.952   6.048  13.048
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  61.6497    12.6431   4.876 0.000105 ***
## temp          9.0921     0.5014  18.134 1.87e-13 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.571 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9454,Adjusted R-squared:  0.9425
## F-statistic: 328.8 on 1 and 19 DF,  p-value: 1.875e-13
```





# R: ensidet ANOVA

```
eels <- transform(eels, tempFac = factor(temp))
anova1 <- lm(freq ~ tempFac, data=eels)
summary(anova1)

##
## Call:
## lm(formula = freq ~ tempFac, data = eels)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -10.0000  -6.6667  -0.6667   7.0000  11.0000
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  240.000      4.551  52.732  < 2e-16 ***
## tempFac22     20.000      6.437   3.107 0.007720 **
## tempFac23     33.000      6.437   5.127 0.000154 ***
## tempFac25     54.667      6.437   8.493 6.78e-07 ***
## tempFac27     69.333      6.437  10.772 3.69e-08 ***
## tempFac28     75.000      6.437  11.652 1.36e-08 ***
## tempFac30     90.667      6.437  14.086 1.17e-09 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.883 on 14 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9564,Adjusted R-squared:  0.9377
## F-statistic: 51.14 on 6 and 14 DF,  p-value: 1.004e-08
```





# R: test for linearitet mod ensidet ANOVA

```
anova(linreg, anova1)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: freq ~ temp
## Model 2: freq ~ tempFac
##   Res.Df  RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1     19 1089
## 2     14  870  5    219.02 0.7049 0.6292
```

## R: test for linearitet mod kvadratisk model

```
kvreg <- lm(freq ~ temp + I(temp^2), data=eels)
summary(kvreg)$coefficients

##                Estimate  Std. Error   t value    Pr(>|t|)
## (Intercept) -126.2885503 102.3259298 -1.234179 0.233007469
## temp          24.3929671   8.2876571  2.943289 0.008692145
## I(temp^2)     -0.3060172   0.1654839 -1.849227 0.080916950

anova(linreg, kvreg)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: freq ~ temp
## Model 2: freq ~ temp + I(temp^2)
##   Res.Df     RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
## 1     19 1089.02
## 2     18  915.16  1    173.86 3.4196 0.08092 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```





# Modelspecifikation, modelfit, eksperimentelle/observationelle data





## Hvad betyder det at angive/specificere en model?

Flere muligheder men **fortæl altid hvad de indgående variable dækker over.**

1. Opskriv en ligning for observation $i$ og angiv antagelserne for restleddene:

   $$y_i = \text{middelværdi}_i + e_i$$

   hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.

   Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!
2. Skriv at $y_i$'er er uafhængige og at $y_i$ er normalfordelt med middelværdi *** og spredning $\sigma$.

   Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!
3. Fortæl hvilken slags analyse der er tale om, hvilken variabel der bruges som responsvariabel og hvilken/hvilke variable der bruges som forklarende variabel/variable.





## Eksempel: Lineær regression - elektriske ål

1. Hvis $\text{freq}_i$ og $\text{temp}_i$ er frekvens og vandtemperatur for målinger på ål $i$, så antager vi at

   $$\text{freq}_i = \alpha + \beta \cdot \text{temp}_i + e_i$$

   hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.
2. Frekvensen (freq) for ålene er uafhængige og frekvensen for ål $i$ er normalfordelt med middelværdi $\alpha + \beta \cdot \text{temp}_i$ og spredning $\sigma$. Her angiver temp vandtemperaturen.
3. Vi bruger en lineær regressionsmodel med frekvens som responsvariabel og vandtemp. som forklarende variabel.

## Hvad betyder det at angive/specificere en model?

- Det skal, på den ene eller den anden måde, være klart hvad du bruger som responsvariabel og forklarende variabel/variable.
- Hvis du bliver bedt eksplicit om at redegøre for forudsætningerne i modellen, så er mulighed 3 ikke godt nok.
- Hvis du senere refererer til parametre, fx $\mu$, $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:
  Det skal være klart fra modelopskrivning eller anden tekst hvad parameteren dækker over.
- Ensidet ANOVA: $y_i = \alpha_{g(i)} + e_i$. Her er $g$ den funktion som tager obs.nummer og fortæller hvilken gruppe obs. kommer fra.





## Hvad betyder det at fitte en model?

- At **fitte en model** betyder bare at køre den relevante `lm`-kommando
- Kig altid på et **summary** af modellen og check at det ser ud som du forventer, fx at antal parametre er korrekt.
- Bagefter kan du lave modelkontrol og overveje hvad der er relevant at kigge nærmere på





## Hvad betyder det at udføre en ensidet ANOVA?

*At lave/udføre en ensidet ANOVA* dækker over hele analysen:

- Overvejelser om model (hvilke variable)
- Modelfit + modelkontrol
- Typisk en overall sammenligning af alle grupperne
- Angivelse af relevante estimater, SE'er, konfidensintervaller
- Evt. relevante parvise sammenligninger

Har indtil videre været lidt sløset med terminologien og brugt *ensidet ANOVA* til også at dække data-setup, modellen og andre enkeltdele.

Ved eksamen: Jeg kunne i princippet fortsætte og blot sige *Analyser data* — men det gør jeg ikke. I skal svare på specifikke spørgsmål.





## Eksperimentielle data

Vi har mest snakket om **data fra eksperimenter** eller på anden måde kontrolleret dataindsamling:

- (Nogenlunde) veldefinerede populationer
- Randomisering for at undgå utilsigtet sammenblanding af effekter (konfundering)
- Vi kan lave kausale konklusioner, altså konklusioner om årsagssammenhænge: $y$ ændrer sig **fordi** vi har ændret på ...

## Observationelle data

Vi har ikke kigget på **observationelle data:**

- Ingen kontrol over den forklarende variabel
- Registerdata og andre situationer hvor vi ikke kan, eller det ikke er etisk OK at lave interventioner (fx effekt af rygning)
- Data vedr. økonomi er oftest observationelle(!)
- Vi kan snakke om associationer mellem variable og lave prædiktioner, men **ikke** umiddelbart lave kausale konklusioner

Det er et hot emne i statistiskforskning, hvilke konklusioner man faktisk kan komme med når man har observationelle data (og hvordan man bør gøre det)





## Grænselandet

Vi har bevæget os lidt på grænsen mellem de to i lineær regression, fx i eksemplet med kattes krops- og hjertevægt.

- Vi har målt begge dele på kattene, uden kontrol over kropsvægten. Variable indgår symmetrisk i dataindsamlingen.
- Vi kan ikke sige at hjertevægten stiger **fordi** kropsvægten stiger.
- Sagen er snarere at der er en ikke-målbar variabel, *størrelse*, der påvirker begge dele. **Confounder**.
- Vi kan dog godt tale om sammenhæng/association, lave prædiktioner, og estimere forskelle i Hwt ved forskelle i Bwt.

Hjemmeopgave:
Hvordan kunne man lave et (uetisk?) eksperiment for at undersøge, om hjertevægten stiger som en konskevens af øget kropsvægt?





# Mere om hypotesetest





## Hypotesetest

Ingredienser i et hypotesetest:

- **Signifikansniveau**, som regel 0.05
- **Nylhypotesen**, $H_0$
- **Teststørrelse:** $T$ eller $F$ (der findes andre...)
- $p$**-værdi**: Sandsynligheden for at få data der passer lige så dårligt eller dårligere med $H_0$ hvis $H_0$ faktisk er sand
- **Konklusion:** Forkaster $H_0$ hvis $p <$ signikansniveau, ellers ikke

## Den alternative hypotese, $H_A$

Faktisk er der en ingrediens mere, **den alternative hypotese $H_A$.**

$H_A$ angiver det der er sandt hvis $H_0$ er falsk, altså det vi konkluderer hvis vi afviser hypotesen.

Eksempler:

- $H_0 : \mu = 0$ og $H_A : \mu \neq 0$
- $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_k$ og $H_A$ : mindst to $\alpha_j$'er er forskellige

Sommetider bruges mere **specifikke alternativer**, fx $H_A : \mu > 0$.

Så taler negative værdier af $\hat{\mu}$ for hypotesen, ikke imod hypotesen, uanset hvor langt væk fra 0 den ligger.

Hvis man ikke specificerer $H_A$ eksplicit, mener man blot „det modsatte af $H_0$, sådan som vi har gjort indtil nu.





## Hypoteser er restriktioner på modellen

En hypotese består af en eller flere restriktioner på den statistiske model. Eksempler:

- En parameter har en specifik, præspecificeret værdi
- Flere parametre er ens (uden at den fælles værdi angives)

I normalfordelingsmodellerne kan alle sådanne hypoteser testes med $F$-test.

Hvis hyotesen kan beskrives med en et enkelt lighestegn, fx $\mu = 0$ eller $\alpha_3 = \alpha_4$, så kan man også benytte et $t$-test.

I tilfælde, hvor man kan begge begge dele gælder at

**$p$-værdien er altid den samme for $t$-testet of $F$-testet.**

Se eksempel om elektriske ål!





## Nestede modeller

Den statistiske model + hypotesen beskriver en ny statistisk model. Denne model kaldes nulmodellen (null model).

Nulmodellen er altså et specialtilfælde af den oprindelige model, eller en undermodel (sub model). Modellerne er **nestede**.

Vi kan **teste den simple model mod den mere komplekse:**

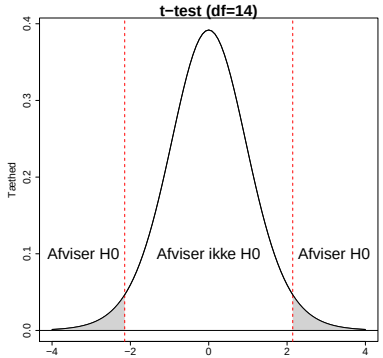
- Udgangspunktet er at den oprindelige model er OK
- Hypotesen er at den simple model kan beskriver data lige så godt som den mere komplekse
- Hvis hypotesen forkastes, konkluderer vi at den komplekse model faktisk beskriver data bedre end den simple

Hvordan? Fit begge modeller med `lm`, og udfør testet med `anova`. Se eksempel med elektriske ål.



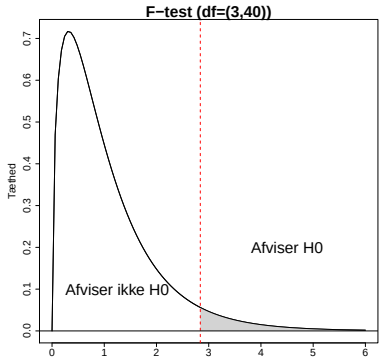


## Hvornår afviser vi hypotesen ved et $t$-test?




- Store og små værdier **kritiske** (fører til afvisning af $H_0$)
- Streger: 2.5% og 97.5% fraktilen i den relevante $t$-fordeling
- Afviser $H_0$ hvis $T_{\text{obs}}$ er længere fra 0 end disse værdier

# Hvornår afviser vi hypotesen ved et $F$-test?




- Store værdier **kritiske** (fører til afvisning af $H_0$)
- Streg: 95% fraktilen i den relevante $F$-fordeling
- Afviser $H_0$ hvis $F_{\text{obs}}$ er større end denne værdi





# Shiny apps

Prøv evt. to **shiny apps** der giver en fornemmelse for hvilke datasæt der fører til afvisning/accept af hypotese:

- $t$-test i en enkelt stikprøve:
  `http://shiny.science.ku.dk/HS/ttest/`
- $F$-test for sammenligning af 4 grupper:
  `http://shiny.science.ku.dk/HS/ftest/`

Leg med stikprøvestørrelser, parameterværdier, hypotesen, og se hvad der sker nåt hypotesen er sand hhv. falsk.