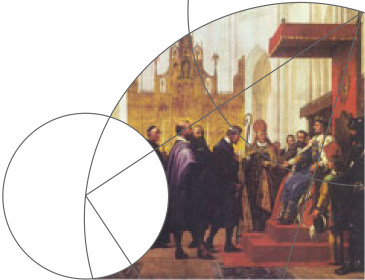
Normalfordelingen

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

- Hvad er normalfordelingen?
- Hvordan checker man om data er normalfordelte?
- Hvorfor normalfordelingen, og hvad skal den bruges til?
- Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder
- Summer og skalering af normalfordelte variable

Afsnit 4.2 (en stikprøve) og afsnit 4.4 (den centrale grænseværdisætning): først på onsdag

Hvad er normalfordelingen?

Histogram og relative hyppigheder

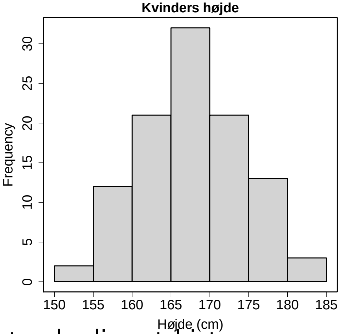
Et histogram er en velegnet metode til visualisering af en kvantitativ, kontinuert variabel.

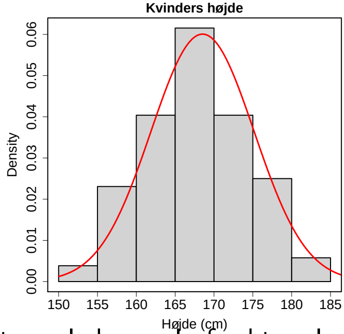
Konstruktion forgår i følgende trin

- inddel skalaen der måles på i grupper/intervaller
- optæl **antal/frekvens** i hver gruppe
- udregn **relativ frekvens** ved at dividere med totalt antal observationer
- divider relativ frekvens med *bredden af intervallet*
- tegn søjlediagram

Fortolkning:
Areal under søjle = andel (procent) obs. i gruppen

Højder af kvindelige studerende på SD1 (2017?)





I standardiseret histogram er det samlede areal af rektangler lig 1. Så er **relativ hyppighed lig areal af tihørende rektangler**, fx:

$$\frac{\text{antal højder i interval }]155\text{cm}, 160\text{cm}]}{104} = \frac{12}{104} \approx 0.115 = 11.5\%$$

Tætheden for normalfordelingen

Histogrammer for mange observationer begynder at ligne en glat kurve (fordi vi kan tillade inddeling i flere grupper).

Normalfordelingen er matematisk model (=forskrift) for en teoretisk funktion der kunne tænkes at approksimere et histogram med (uendelig) mange observationer.

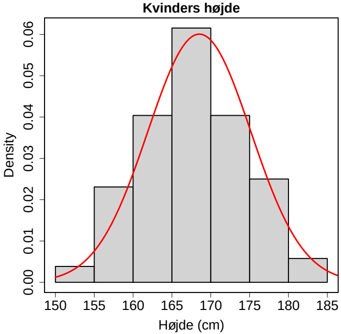
Standardnormalfordelingen er givet ved tæthed på formen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{1}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{1}^2}(y - \mathbf{0})^2\right),$$

men vi kan evt. ændre

- middelværdien $\mu = \mathbf{0}$ (her) til noget andet
- spredningen $\sigma = \mathbf{1}$ (her) til noget andet

Den klokkeformede kurve (The bell curve)



- Kurven er **tætheden** (density) for en normalfordeling
- **Kurven ligner histogrammet**. Vi kan bruge normalfordelingen som model til at beskrive fordelingen af højden

Tætheder og sandsynligheder

Tilsvarende for tætheden: **Sandsynligheden for at en obs. falder i intervallet fra a til b er lig arealet under kurven**, fx

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy = 0.079 = 7.9\%$$

Tætheder og sandsynligheder

Tilsvarende for tætheden: **Sandsynligheden for at en obs. falder i intervallet fra *a* til *b* er lig arealet under kurven**, fx

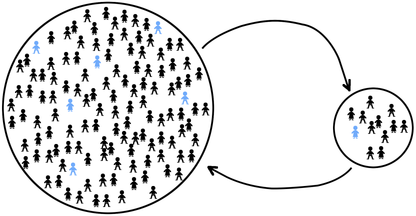
$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\,dy = 0.079 = 7.9\%$$

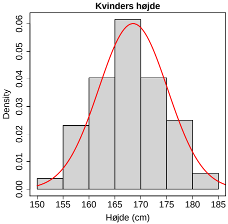
De to sandsynligheder er ikke ens. **Population vs stikprøve**.

- Hvis populationsværdier er fordelt som tætheden beskriver, så vil histogram for stikprøve fra populationen ligne tætheden.
- Normalfordelingstæthed som **model** for histogrammet.

Viser senere hvordan vi faktisk fik beregnet integralet til 7.9%.

Populationer, tæthed vs stikprøve, histogram

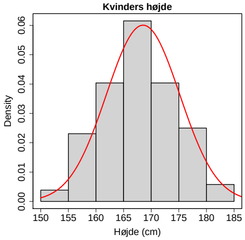


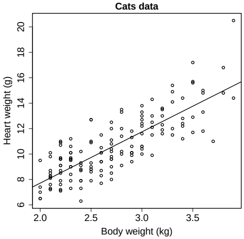


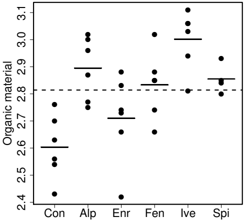
- Population: Normalfordelingstæthed
- Stikprøve: Histogram

Hvad skal vi bruge normalfordelingen til?

Til at beskrive variationen i data når reponsen er kontinuert:
En stikprøve, lineær regression, ensidet variansanalyse, ...

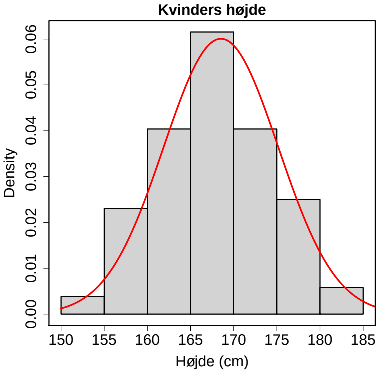


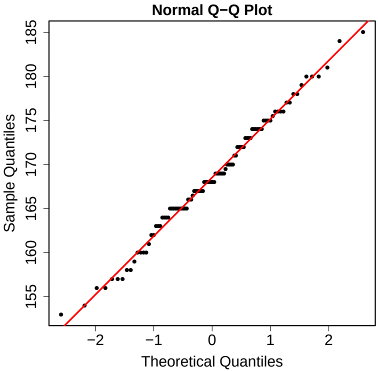




Er data normalfordelt?

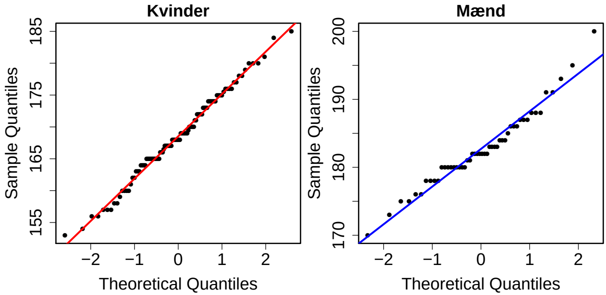
Hvordan checkes om data er normalfordelt?





- (For n stor:) Tegn histogram + tæthed for $N(\bar{y}, s^2)$.
  her: $\bar{y}$ = **gennemsnit**, s = **spredning**
- (Altid:) **QQ-plot:** Ligger punkterne omkring en ret linie?

QQ-plot



- **Quantile-quantile** (fraktil-fraktil) plot
- x-aksen tilpasset så normalfordelte data ligger på ret linie
- Sammenlign med **ret linie med skæring $\bar{y}$ og hældning s**
- R: QQ-plot med `qqnorm`, linie med `abline`

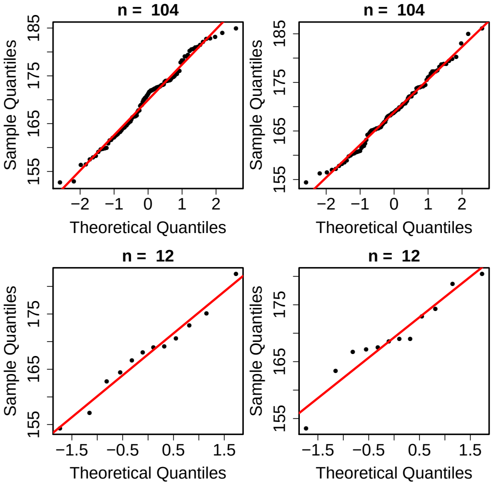
Vurdering af QQ-plot

Hvor store skal afvigelserne fra en ret linie være for at man kan konkludere at data **ikke** er normalfordelte?

- Afhænger af antal observationer
- Kan være nyttigt at se på simulerede N-data: Hvordan ser QQ-plots ud når vi **ved** at data er N-fordelte.

QQ-plots fra simulerede data

Her **er** data normalfordelte:



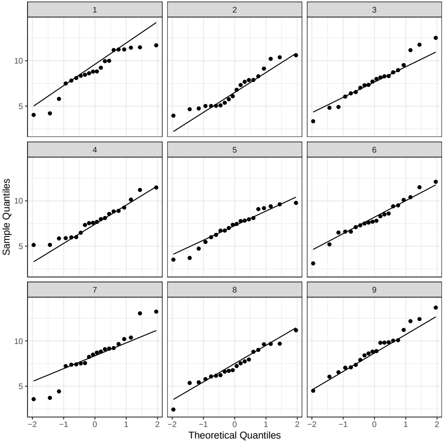
Er det normalt, at data er normalfordelte?

Ved forelæsningen d. 8/9-2021 blev alle udstyret med en farvet seddel og bedt om - uden brug af lineal - at tegne to punkter med en afstand på 8 cm.

- 151 studerende afleverede deres farvede seddel (population)
- På sigt vil vi interessere os for gennemsnittet i populationen
- Grundet manglende ressourcer, så skal analysen baseret på en tilfældig stikprøve af 20 sedler
- Kan vi bruge normalfordelingen som model for fordelingen af jeres svar/gæt/afstande?

På næste side findes 8 QQ-plot med simulerede (=rigtige) normalfordelte data samt QQ-plot for jeres gæt.

Hvilken figur er baseret på stikprøve fra SD1?



Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

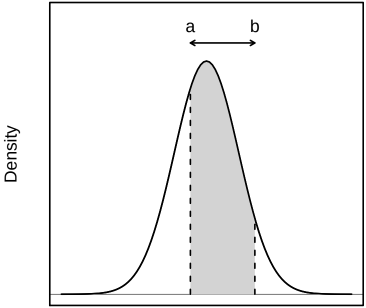
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

- Siger, at en variabel Y **er normalfordelt med middelværdi** μ **og spredning** σ hvis det for alle intervaller $[a, b]$ gælder at

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy.$$

- Vi skriver $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

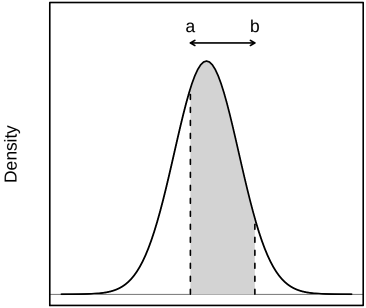
Tæthed og sandsynligheder



$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

Tæthed og sandsynligheder



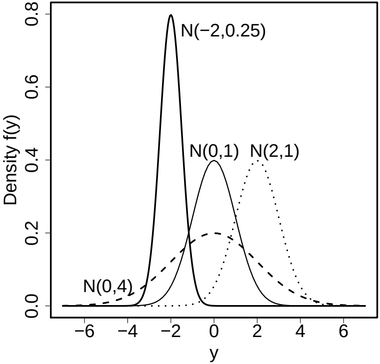
$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$$

- $f(y_1) > f(y_2)$: mere sandsynligt at havne omkring y_1 end y_2.
- $P(a < Y < b) = P(a < Y \leq b) = P(a \leq Y < b) = P(a \leq Y \leq b)$

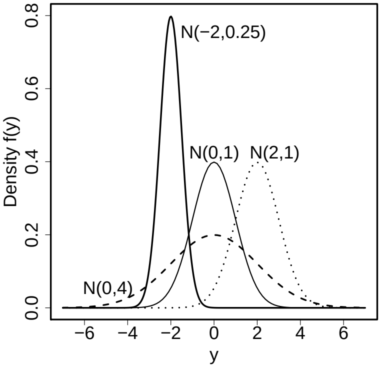
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$



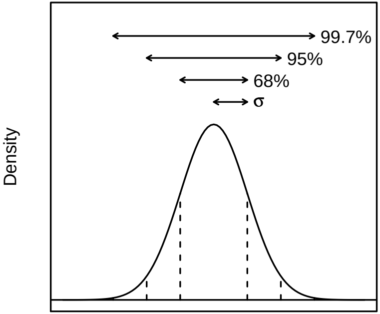
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$

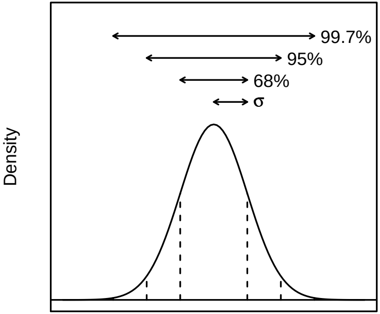


Bemærk: Vi skriver $N(\mu, \sigma^2)$ — ikke $N(\mu, \sigma)$. Hvis $Y \sim N(0, 4)$ har Y altså spredning 2.

Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$



Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$



- 68% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm \sigma$
- 95% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 2 \cdot \sigma$
- 99.7% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 3 \cdot \sigma$

Gælder for **alle** normalfordelinger — uanset værdierne af μ og σ.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\,dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Hvad så?

- Via omskrivninger til $N(0,1)$. Sådan står det i bogen.
- Nemmere: Brug funktionen `pnorm` i R med angivelse af `mean` og `sd`. Beregner sandsynligheder $P(Y \leq b)$.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Antag at Y er normalfordelt med middelværdi 168.52 og spredning 6.64, altså $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$.

Hvad er $P(155 < Y \leq 160)$?

```
> pnorm(160, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.09972282
> pnorm(155, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.02086792
> pnorm(160,mean=168.52,sd=6.64)-pnorm(155,mean=168.52,sd=6.
[1] 0.0788549
```

Altså:

- $P(Y \leq 160) = 0.0997$ og $P(Y \leq 155) = 0.0209$
- $P(155 < Y \leq 160) = 0.0997 - 0.0209 = 0.0789$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

```
> qnorm(0.90, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 177.0295
```

Tallet 177.03 kaldes **90% fraktilen** i $N(168.52, 6.64^2)$.

Beregning af sandsynligheder og fraktiler i N

Beregning af sandsynligheder og fraktiler i R

- Givet b, bestem sandsynlighed $P(Y \leq b)$: Brug `pnorm`
- Givet ssh. p, bestem b så $P(Y \leq b) = p$: Brug `qnorm`

I begge tilfælde skal både middelværdi og spredning også angives.

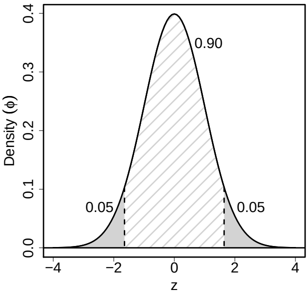
Standardnormalfordelingen

En N-fordelt variabel kan standardiseres:

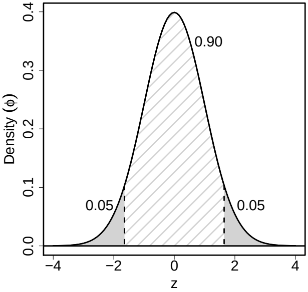
$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Vi kalder $N(0, 1)$ for **standardnormalfordelingen**: $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Standardnormalfordelingen

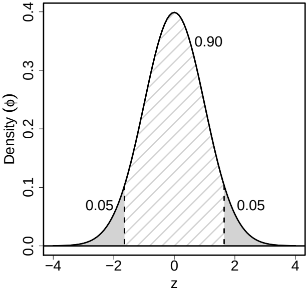


Standardnormalfordelingen



- **95%-fraktilen** er 1.6449: $P(Z \leq 1.6449) = 0.95$ ... og dermed er $P(-1.6449 < Z < 1.6449) = 0.9$

Standardnormalfordelingen



- **95%-fraktilen** er 1.6449: $P(Z \leq 1.6449) = 0.95$ ... og dermed er $P(-1.6449 < Z < 1.6449) = 0.9$
- **97.5%-fraktilen** er 1.960: $P(Z \leq 1.960) = 0.975$
  ... og dermed er $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

Summer og skalering af normalfordelte variable mm

Skalering og flytning af normalfordelt variabel

Infobox 4.2(b) Hvis $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ og a og b er kendte tal, så er

$$a + b \cdot Y \sim N(a + b \cdot \mu, b^2 \cdot \sigma^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(a + b \cdot Y) = |b| \cdot \mathrm{sd}(Y)$

Skalering og flytning af normalfordelt variabel

Infobox 4.2(b) Hvis $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ og a og b er kendte tal, så er

$$a + b \cdot Y \sim N(a + b \cdot \mu, b^2 \cdot \sigma^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(a + b \cdot Y) = |b| \cdot \mathrm{sd}(Y)$

Nyttigt ved omregning mellem enheder.

(Tænkt) Eksempel:

- Antag at daglig max temperatur (Y) i grader Celsius er $\sim N(23.5, 3.5^2)$
- Temperatur i grader Fahrenheit (Z)

$$Z = 9/5 \cdot Y + 32 \sim N(74.5, 6.3^2)$$

Skalering og flytning af normalfordelt variabel

Hvad siger **Infobox 4.2(b)** egentlig:

> *Hvis normalfordelingen* $\sim N(\mu, \sigma^2)$ *er en god model for variablen* Y*, så vil en deterministisk (lineær) funktion/omregning til* $Z = a + b \cdot Y$ *være godt beskrevet ved normalfordelingen* $\sim N(a + b \cdot \mu, b^2\sigma^2)$.

Infobox 4.2(c):
Hivs Y er normalfordelt $\sim N(\mu, \sigma^2)$ så vil specielt $(Y - \mu)/\sigma$ være normalfordelt $\sim N(0, 1)$ (**Standardnormalfordelingen**).

Sum af uafhængige normalfordelte variable

Infobox 4.2(a): Hvis Y_1 og Y_2 er **uafhængige**, $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, så er **summen**

$$Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(Y_1 + Y_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Sum af uafhængige normalfordelte variable

Infobox 4.2(a): Hvis Y_1 og Y_2 er **uafhængige**, $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, så er **summen**

$$Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(Y_1 + Y_2) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Eksempel (næppe praktisk relevant):

- Antag at kvinders højde er $N(168.52, 6.64^2)$ fordelt
- Antag at mænds højde er $N(182.70, 5.54^2)$ fordelt
- Vælg mand og kvinde tilfældigt fra populationerne. Deres **samlede højde** er $N(351.22, 74.78)$. Spredning 8.65.

Gennemsnit af normalfordelte variable

Infobox 4.3 Hvis $Y_1, \ldots, Y_n$ er uafhængige og alle $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, så er gennemsnittet $\bar{Y}$ også normalfordelt:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(\bar{Y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gennemsnit af normalfordelte variable

Infobox 4.3 Hvis $Y_1, \ldots, Y_n$ er uafhængige og alle $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, så er gennemsnittet $\bar{Y}$ også normalfordelt:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Specielt gælder: $\mathrm{sd}(\bar{Y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Eksempel (afstand ml. punkter på farvet seddel):

- Antag at jeres gæt er $N(8.07, 2.10^2)$
- Udvælg tilfældigt 20 sedler og udregn gennemsnit af anstand ml. punkter. Gennemsnittet er $N(8.07, 0.105^2)$

Infoboxene 4.* spiller en stor (teoretisk) rolle, for de metoder vi bruger til at lave statistik (fra på onsdag).

Nyttige R-kommandoer

```
pnorm(160, mean=168.52, sd=6.64)   ## Beregn sandsynlighed
qnorm(0.90, mean=168.52, sd=6.64)  ## Beregn fraktil

qqnorm(hojde)                      ## Lav QQ-plot
abline(168.52, 6.64)               ## Indlæg linie

hist(hojde, prob=TRUE)             ## Histogram
f1 <- function(y) dnorm(y, 168.52, 6.64) ## Tætheden smom funktion
plot(f1, 145, 190, add=TRUE)       ## Indtegn tæthed
```

Husk: Beregn gerne sandsynligheder og fraktiler som ovenfor i stedet for at regne tilbage til $N(0, 1)$.

Opsummering — til eget brug

- Hvad vil det sige at Y er normalfordelt?
- Hvor mange procent af en normalfordeling ligger i intervallet "middelværdi ± 2 gange spredning"?
- Hvordan beregner man sandsynligheder i normalford. i R?
- Hvordan checker man om data kommer fra en normalfordeling?
- Hvad er fordelingen af $X + Y$ hvis både X og Y er normalfordelte?
- Hvad er fordelingen af gennemsnittet af ens fordelte normalfordelte variable?