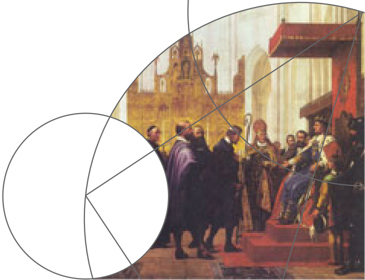
Opsummering på kursusuge 1-4: (Ch. 1-7 i lærebogen)

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

Vi repeterer de fleste ting fra kursusuge 1-4 (slides 1-17+R).

- **Lineær regression og ensidet ANOVA:**
  Eksempel delvist beskrevet i lærebogens afsnit 14.1 (s. 388)
- **R programmet:**
  fokus på fortolkning af output og kobling til generelle begreber

Øvrigt materiale (læses primært selv):

- Lidt om nogle **Generelle begreber:**
  Modelspecifikation, modelfit, eksperimentelle vs. observationelle data mm. (slides 18-26)
- **Mere om hypotestest** (slides 27-33)

Lineær regression og ensidet ANOVA: Ikke altid enten-eller

Elektrisk ål, lever i Syamerika

Lineær regression vs ensidet ANOVA

Vi har foreløbig skelnet ret skarpt mellem situationer hvor man kan bruger lineær regression og ensidet ANOVA. Men...

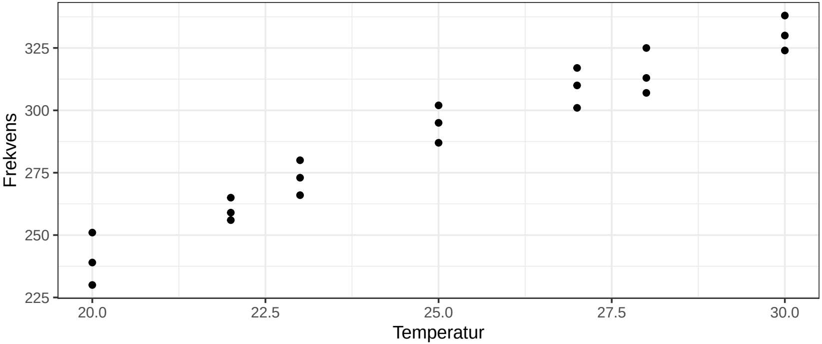
Afsnit 14.1 (side 388): Elektriske ål udsender elektriske signaler, men afhænger frekvensen af vandtemperaturen?

Data, ligger som **eels** i *isdals*:

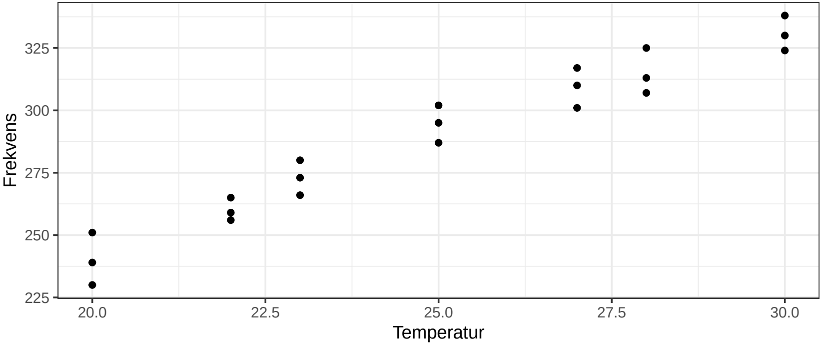
- Syv vandtemperaturer, tre elektriske ål for hver temperatur
- Signalfrekvensen målt for hver af de 21 ål
- To variable: `temp`, `freq`

Datatyper? Tegn data! Hvilke modeller byder sig til?

Elektriske ål: Dataplot

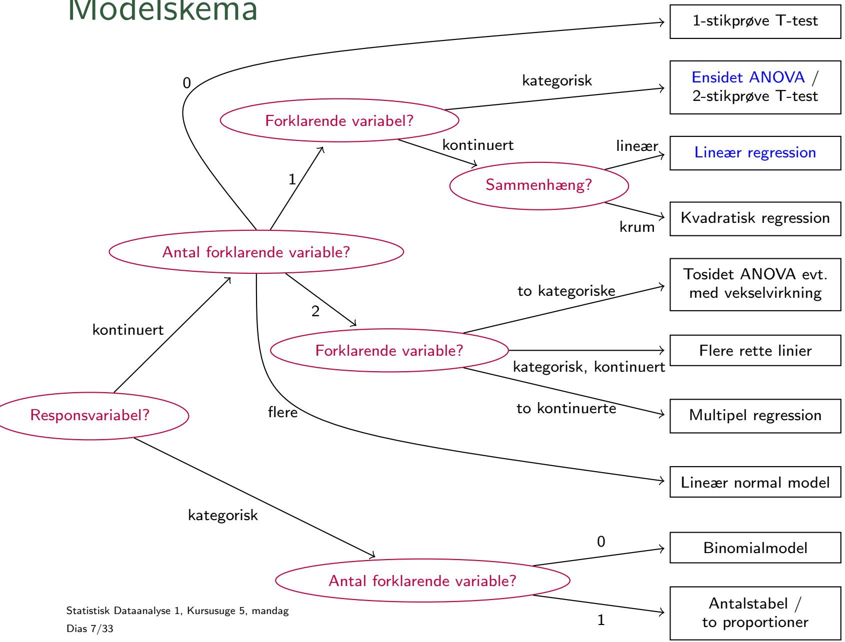


Elektriske ål: Dataplot



- Ser rimeligt lineært ud → **lineær regression** er en mulighed
- Kan også tænke på temperatur som en inddeling af obs. i syv grupper → **ensidet ANOVA** er en mulighed

Modelskema



Responsvariabel?
kontinuert
kategorisk
Antal forklarende variable?
0
1
2
flere
Forklarende variabel?
kategorisk
kontinuert
Sammenhæng?
lineær
krum
Forklarende variable?
to kategoriske
kategorisk, kontinuert
to kontinuerte
Antal forklarende variable?
0
1
1-stikprøve T-test
Ensidet ANOVA /
2-stikprøve T-test
Lineær regression
Kvadratisk regression
Tosidet ANOVA evt. med vekselvirkning
Flere rette linier
Multipel regression
Lineær normal model
Binomialmodel
Antalstabel /
to proportioner

Spørgsmål

Opskrive modellerne.

Kan vi estimere følgende størrelser vha. begge modeller?

- Forventet frekvens ved 22 grader
- Forventet frekvens ved 26 grader
- Forskel i forventet frekvens ved 20 og 30 grader
- Forskel i forventet frekvens ved temperaturstigning på 1 grad

Spørgsmål

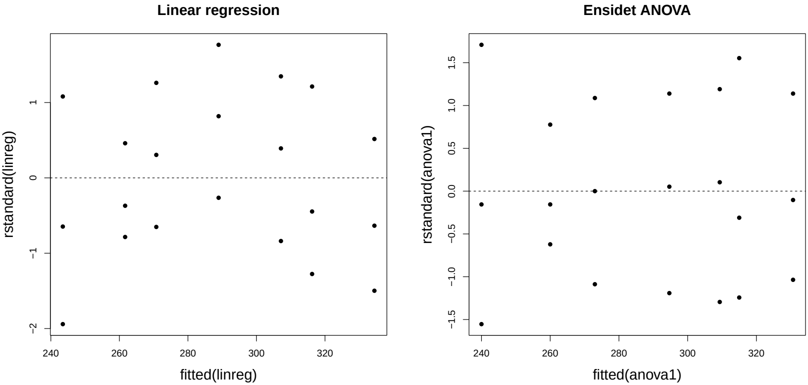
Opskrive modellerne.

Kan vi estimere følgende størrelser vha. begge modeller?

- Forventet frekvens ved 22 grader
- Forventet frekvens ved 26 grader
- Forskel i forventet frekvens ved 20 og 30 grader
- Forskel i forventet frekvens ved temperaturstigning på 1 grad

Dette taler umiddelbart for den lineære regression. Men hvis nu sammenhængen ikke havde været approksimativt lineær, så...

Residualplots for de to modeller



Kommentarer?

Modellerne er nestede

Antagelserne om uafhængighed, normalfordelte restled og ens spredninger for alle observationer er helt ens for de to modeller.

Kun middelværdierne er forskellige for de to modeller:

- **Ensidet ANOVA:** Forventet frekvens er ens indenfor grupper, men der er ingen restriktioner på de syv middelværdier
- **Lineær regression:** Forventet frekvens er en lineær funktion af temperaturen

Lineariteten er en ekstra restriktion $\rightarrow$ lineær regression er et specialtilfælde af ensidet ANOVA $\rightarrow$ de to modeller er **nestede.**

Test for linearitet: Mulighed 1

Vi kan teste den simple model mod den mere komplekse model.

I dette tilfælde svarer dette til at teste hypotesen om at middelværdien vokser lineært med temperaturen:

$$H_0 : \alpha_j = \gamma + \beta t_j$$

hvor α_j er middelværdien i temperaturgruppe j, og γ og β er skæring og hældning.

Test for linearitet: Mulighed 1

Vi kan teste den simple model mod den mere komplekse model.

I dette tilfælde svarer dette til at teste hypotesen om at middelværdien vokser lineært med temperaturen:

$$H_0 : \alpha_j = \gamma + \beta t_j$$

hvor α_j er middelværdien i temperaturgruppe j, og γ og β er skæring og hældning.

- Vi får $F_{\mathrm{obs}} = 0.70$ der skal vurderes i F-fordelingen $(5, 14)$ frihedsgrader. Dette giver p-værdiern 0.63.
- Vi afviser ikke hypotesen; data passer fint med linearitet.

Dette test dur kun fordi vi har **gentagelser** for hver temperatur.

Test for linearitet: Mulighed 2

Et andet test for linearitet: Sammenlign en lineær og en kvadratisk regression.

- Lineær regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i$
- Kvadratisk regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i + \delta \cdot t_i^2$

Den lineære regressionsmodel er et specialtilfælde af den kvadratiske regressionsmodel svarende til at $\delta = 0$.

Test for linearitet: Mulighed 2

Et andet test for linearitet: Sammenlign en lineær og en kvadratisk regression.

- Lineær regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i$
- Kvadratisk regression: $y_i = \gamma + \beta \cdot t_i + \delta \cdot t_i^2$

Den lineære regressionsmodel er et specialtilfælde af den kvadratiske regressionsmodel svarende til at $\delta = 0$.

To muligheder:

- Fit den kvadratiske regression og se på t-testet for hypotesen $H_0 : \delta = 0$ vha. `summary`.
- Fit begge modeller, sammenlign dem med F-test vha. `anova`

Vi får $p = 0.08$, så heller ikke her kan vi ikke afvise linearitet.

Opsummering

- Når der er gentagelser for hver værdi af x-variablen, kan vi både køre ensidet ANOVA og lineær regression
- Forskellen er om middelværdien antages at være lineær i x eller må være hvad som helst.
- Vi kan teste for linearitet ved at sammenligne de to modeller
- Man kan også teste for linearitet ved at sammenligne med kvadratisk regression—men kun hvis kvadratisk model er OK.

R: lineær regressionsmodel

```
library(isdals)
data(eels)
linreg <- lm(freq ~ temp, data = eels)
summary(linreg)

##
## Call:
## lm(formula = freq ~ temp, data = eels)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -13.492  -4.768  -1.952   6.048  13.048
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  61.6497    12.6431   4.876 0.000105 ***
## temp          9.0921     0.5014  18.134 1.87e-13 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.571 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9454,Adjusted R-squared:  0.9425
## F-statistic: 328.8 on 1 and 19 DF,  p-value: 1.875e-13
```

R: ensidet ANOVA

```
eels <- transform(eels, tempFac = factor(temp))
anova1 <- lm(freq ~ tempFac, data=eels)
summary(anova1)

##
## Call:
## lm(formula = freq ~ tempFac, data = eels)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -10.0000  -6.6667  -0.6667   7.0000  11.0000
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  240.000      4.551  52.732  < 2e-16 ***
## tempFac22     20.000      6.437   3.107 0.007720 **
## tempFac23     33.000      6.437   5.127 0.000154 ***
## tempFac25     54.667      6.437   8.493 6.78e-07 ***
## tempFac27     69.333      6.437  10.772 3.69e-08 ***
## tempFac28     75.000      6.437  11.652 1.36e-08 ***
## tempFac30     90.667      6.437  14.086 1.17e-09 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.883 on 14 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9564,Adjusted R-squared:  0.9377
## F-statistic: 51.14 on 6 and 14 DF,  p-value: 1.004e-08
```

R: test for linearitet mod ensidet ANOVA

```
anova(linreg, anova1)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: freq ~ temp
## Model 2: freq ~ tempFac
##   Res.Df  RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1     19 1089
## 2     14  870  5    219.02 0.7049 0.6292
```

R: test for linearitet mod kvadratisk model

```
kvreg <- lm(freq ~ temp + I(temp^2), data=eels)
summary(kvreg)$coefficients

##                 Estimate  Std. Error   t value    Pr(>|t|)
## (Intercept) -126.2885503 102.3259298 -1.234179 0.233007469
## temp          24.3929671   8.2876571  2.943289 0.008692145
## I(temp^2)     -0.3060172   0.1654839 -1.849227 0.080916950

anova(linreg, kvreg)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: freq ~ temp
## Model 2: freq ~ temp + I(temp^2)
##   Res.Df     RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
## 1     19 1089.02
## 2     18  915.16  1    173.86 3.4196 0.08092 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Modelspecifikation, modelfit, eksperimentelle/observationelle data

Hvad betyder det at angive/specificere en model?

Flere muligheder men **fortæl altid hvad de indgående variable dækker over.**

1. Opskriv en ligning for observation i og angiv antagelserne for restleddene:

   $$y_i = \text{middelværdi}_i + e_i$$

   hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.

   Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!

Hvad betyder det at angive/specificere en model?

Flere muligheder men **fortæl altid hvad de indgående variable dækker over.**

1. Opskriv en ligning for observation i og angiv antagelserne for restleddene:

   $$y_i = \text{middelværdi}_i + e_i$$

   hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.

   Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!

2. Skriv at y_i'er er uafhængige og at y_i er normalfordelt med middelværdi *** og spredning σ.

   Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!

Hvad betyder det at angive/specificere en model?

Flere muligheder men **fortæl altid hvad de indgående variable dækker over.**

1. Opskriv en ligning for observation i og angiv antagelserne for restleddene:
$$y_i = \text{middelværdi}_i + e_i$$
hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.
Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!
2. Skriv at y_i'er er uafhængige og at y_i er normalfordelt med middelværdi *** og spredning σ.
Det relevante udtryk for middelværdien skal indsættes!
3. Fortæl hvilken slags analyse der er tale om, hvilken variabel der bruges som responsvariabel og hvilken/hvilke variable der bruges som forklarende variabel/variable.

Eksempel: Lineær regression - elektriske ål

1. Hvis freq_i og temp_i er frekvens og vandtemperatur for målinger på ål i, så antager vi at

$$\text{freq}_i = \alpha + \beta \cdot \text{temp}_i + e_i$$

   hvor $e_1, \ldots, e_n$ er iid. $N(0, \sigma^2)$.
2. Frekvensen (freq) for ålene er uafhængige og frekvensen for ål i er normalfordelt med middelværdi $\alpha + \beta \cdot \text{temp}_i$ og spredning σ. Her angiver temp vandtemperaturen.
3. Vi bruger en lineær regressionsmodel med frekvens som responsvariabel og vandtemp. som forklarende variabel.

Hvad betyder det at angive/specificere en model?

- Det skal, på den ene eller den anden måde, være klart hvad du bruger som responsvariabel og forklarende variabel/variable.
- Hvis du bliver bedt eksplicit om at redegøre for forudsætningerne i modellen, så er mulighed 3 ikke godt nok.
- Hvis du senere refererer til parametre, fx μ, α, β, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

  Det skal være klart fra modelopskrivning eller anden tekst hvad parameteren dækker over.
- Ensidet ANOVA: $y_i = \alpha_{g(i)} + e_i$. Her er g den funktion som tager obs.nummer og fortæller hvilken gruppe obs. kommer fra.

Hvad betyder det at fitte en model?

- At **fitte en model** betyder bare at køre den relevante `lm`-kommando
- Kig altid på et **summary** af modellen og check at det ser ud som du forventer, fx at antal parametre er korrekt.
- Bagefter kan du lave modelkontrol og overveje hvad der er relevant at kigge nærmere på

Hvad betyder det at udføre en ensidet ANOVA?

At lave/udføre en ensidet ANOVA dækker over hele analysen:

- Overvejelser om model (hvilke variable)
- Modelfit + modelkontrol
- Typisk en overall sammenligning af alle grupperne
- Angivelse af relevante estimater, SE'er, konfidensintervaller
- Evt. relevante parvise sammenligninger

Hvad betyder det at udføre en ensidet ANOVA?

At lave/udføre en ensidet ANOVA dækker over hele analysen:

- Overvejelser om model (hvilke variable)
- Modelfit + modelkontrol
- Typisk en overall sammenligning af alle grupperne
- Angivelse af relevante estimater, SE'er, konfidensintervaller
- Evt. relevante parvise sammenligninger

Har indtil videre været lidt sløset med terminologien og brugt *ensidet ANOVA* til også at dække data-setup, modellen og andre enkeltdele.

Ved eksamen: Jeg kunne i princippet fortsætte og blot sige *Analyser data* — men det gør jeg ikke. I skal svare på specifikke spørgsmål.

Eksperimentielle data

Vi har mest snakket om **data fra eksperimenter** eller på anden måde kontrolleret dataindsamling:

- (Nogenlunde) veldefinerede populationer
- Randomisering for at undgå utilsigtet sammenblanding af effekter (konfundering)
- Vi kan lave kausale konklusioner, altså konklusioner om årsagssammenhænge: y ændrer sig **fordi** vi har ændret på ...

Observationelle data

Vi har ikke kigget på **observationelle data:**

- Ingen kontrol over den forklarende variabel
- Registerdata og andre situationer hvor vi ikke kan, eller det ikke er etisk OK at lave interventioner (fx effekt af rygning)
- Data vedr. økonomi er oftest observationelle(!)
- Vi kan snakke om associationer mellem variable og lave prædiktioner, men **ikke** umiddelbart lave kausale konklusioner

Det er et hot emne i statistiskforskning, hvilke konklusioner man faktisk kan komme med når man har observationelle data (og hvordan man bør gøre det)

Grænselandet

Vi har bevæget os lidt på grænsen mellem de to i lineær regression, fx i eksemplet med kattes krops- og hjertevægt.

- Vi har målt begge dele på kattene, uden kontrol over kropsvægten. Variable indgår symmetrisk i dataindsamlingen.
- Vi kan ikke sige at hjertevægten stiger **fordi** kropsvægten stiger.
- Sagen er snarere at der er en ikke-målbar variabel, *størrelse*, der påvirker begge dele. **Confounder**.
- Vi kan dog godt tale om sammenhæng/association, lave prædiktioner, og estimere forskelle i Hwt ved forskelle i Bwt.

Hjemmeopgave:
Hvordan kunne man lave et (uetisk?) eksperiment for at undersøge, om hjertevægten stiger som en konskevens af øget kropsvægt?

Mere om hypotesetest

Hypotesetest

Ingredienser i et hypotesetest:

- **Signifikansniveau**, som regel 0.05
- **Nylhypotesen**, H_0
- **Teststørrelse:** T eller F (der findes andre...)
- ***p*-værdi**: Sandsynligheden for at få data der passer lige så dårligt eller dårligere med H_0 hvis H_0 faktisk er sand
- **Konklusion:** Forkaster H_0 hvis $p <$ signikansniveau, ellers ikke

Den alternative hypotese, H_A

Faktisk er der en ingrediens mere, **den alternative hypotese H_A.**

H_A angiver det der er sandt hvis H_0 er falsk, altså det vi konkluderer hvis vi afviser hypotesen.

Eksempler:

- $H_0 : \mu = 0$ og $H_A : \mu \neq 0$
- $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_k$ og H_A : mindst to α_j'er er forskellige

Den alternative hypotese, H_A

Faktisk er der en ingrediens mere, **den alternative hypotese H_A.**

H_A angiver det der er sandt hvis H_0 er falsk, altså det vi konkluderer hvis vi afviser hypotesen.

Eksempler:

- $H_0 : \mu = 0$ og $H_A : \mu \neq 0$
- $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_k$ og H_A : mindst to α_j'er er forskellige

Sommetider bruges mere **specifikke alternativer**, fx $H_A : \mu > 0$.

Så taler negative værdier af $\hat{\mu}$ for hypotesen, ikke imod hypotesen, uanset hvor langt væk fra 0 den ligger.

Hvis man ikke specificerer H_A eksplicit, mener man blot „det modsatte af H_0, sådan som vi har gjort indtil nu.

Hypoteser er restriktioner på modellen

En hypotese består af en eller flere restriktioner på den statistiske model. Eksempler:

- En parameter har en specifik, præspecificeret værdi
- Flere parametre er ens (uden at den fælles værdi angives)

Hypoteser er restriktioner på modellen

En hypotese består af en eller flere restriktioner på den statistiske model. Eksempler:

- En parameter har en specifik, præspecificeret værdi
- Flere parametre er ens (uden at den fælles værdi angives)

I normalfordelingsmodellerne kan alle sådanne hypoteser testes med F-test.

Hvis hyotesen kan beskrives med en et enkelt lighestegn, fx $\mu = 0$ eller $\alpha_3 = \alpha_4$, så kan man også benytte et t-test.

Hypoteser er restriktioner på modellen

En hypotese består af en eller flere restriktioner på den statistiske model. Eksempler:

- En parameter har en specifik, præspecificeret værdi
- Flere parametre er ens (uden at den fælles værdi angives)

I normalfordelingsmodellerne kan alle sådanne hypoteser testes med F-test.

Hvis hyotesen kan beskrives med en et enkelt lighestegn, fx $\mu = 0$ eller $\alpha_3 = \alpha_4$, så kan man også benytte et t-test.

I tilfælde, hvor man kan begge begge dele gælder at

***p*-værdien er altid den samme for *t*-testet of *F*-testet.**

Se eksempel om elektriske ål!

Nestede modeller

Den statistiske model + hypotesen beskriver en ny statistisk model. Denne model kaldes nulmodellen (null model).

Nulmodellen er altså et specialtilfælde af den oprindelige model, eller en undermodel (sub model). Modellerne er **nestede**.

Nestede modeller

Den statistiske model + hypotesen beskriver en ny statistisk model. Denne model kaldes nulmodellen (null model).

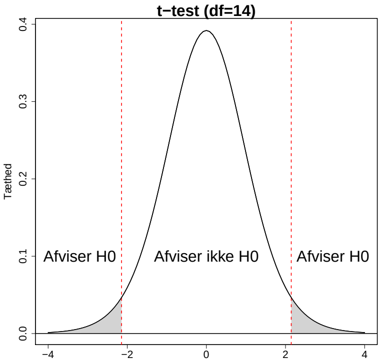
Nulmodellen er altså et specialtilfælde af den oprindelige model, eller en undermodel (sub model). Modellerne er **nestede**.

Vi kan **teste den simple model mod den mere komplekse:**

- Udgangspunktet er at den oprindelige model er OK
- Hypotesen er at den simple model kan beskriver data lige så godt som den mere komplekse
- Hvis hypotesen forkastes, konkluderer vi at den komplekse model faktisk beskriver data bedre end den simple

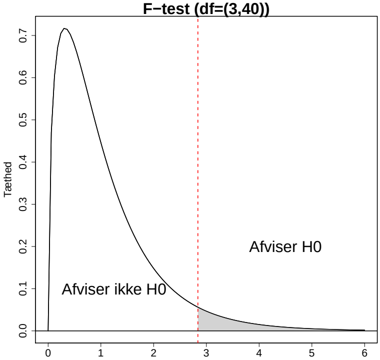
Hvordan? Fit begge modeller med `lm`, og udfør testet med `anova`. Se eksempel med elektriske ål.

Hvornår afviser vi hypotesen ved et *t*-test?



- Store og små værdier **kritiske** (fører til afvisning af H_0)
- Streger: 2.5% og 97.5% fraktilen i den relevante *t*-fordeling
- Afviser H_0 hvis T_{obs} er længere fra 0 end disse værdier

Hvornår afviser vi hypotesen ved et F-test?



- Store værdier **kritiske** (fører til afvisning af H_0)
- Streg: 95% fraktilen i den relevante F-fordeling
- Afviser H_0 hvis F_{obs} er større end denne værdi