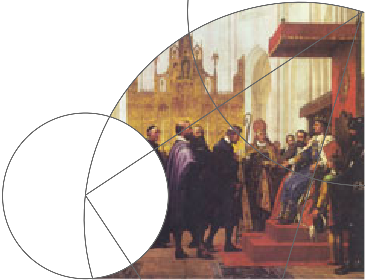
Ensidet variansanalyse (flere grupper) og lineær regression

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Opsummering og dagens program

Kursusuge 1 + 2:

- Datatyper og deskriptiv statistik
- Normalfordelingen
- Lineær regression og ensidet ANOVA: Figurer og estimater — men ikke mere
- Én stikprøve: Statistisk model, estimation og standard errors, konfidensintervaller

Opsummering og dagens program

Kursusuge 1 + 2:

- Datatyper og deskriptiv statistik
- Normalfordelingen
- Lineær regression og ensidet ANOVA: Figurer og estimater — men ikke mere
- Én stikprøve: Statistisk model, estimation og standard errors, konfidensintervaller

I dag:

Statistisk model, estimation og SE, konfidensintervaller for

- Ensidet ANOVA, dvs. flere stikprøver
- Lineær regression
- **Repeter selv**: en enkelt stikprøve (fra 13/9-2023)

Overblik

Vi skal have "‘udfyldt"’ følgende skema over modeller (rækker) og statistiske begreber (søjler):

	Intro	Model	Est.+SE	KI	Test	Kontrol	Præd.
En stikprøve	✓	✓	✓	✓		✓	
Ensidet ANOVA	✓	nu	nu	nu			
Lineær regr.	✓	nu	nu	nu			
To stikprøver							
Multipel regr.							
Tosidet ANOVA							

Statistiske begreber

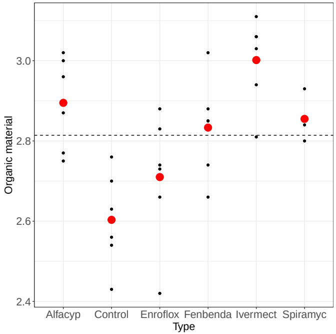
Statistiske grundbegreber indtil videre:

- Population og stikprøve
- Gennemsnit, stikprøvespredning, median, kvartiler
- Statistisk model og parametre
- Estimater og standard error (SE) for estimater
- Konfidensinterval

Ensidet ANOVA — flere stikprøver

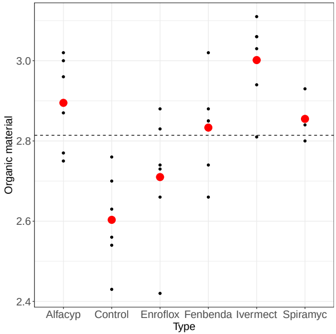
antibio-datasættet

```
library(isdals)
data(antibio)
head(antibio, n = 7)

##       type  org
## 1 Ivermect 3.03
## 2 Ivermect 2.81
## 3 Ivermect 3.06
## 4 Ivermect 3.11
## 5 Ivermect 2.94
## 6 Ivermect 3.06
## 7  Alfacyp 3.00
```



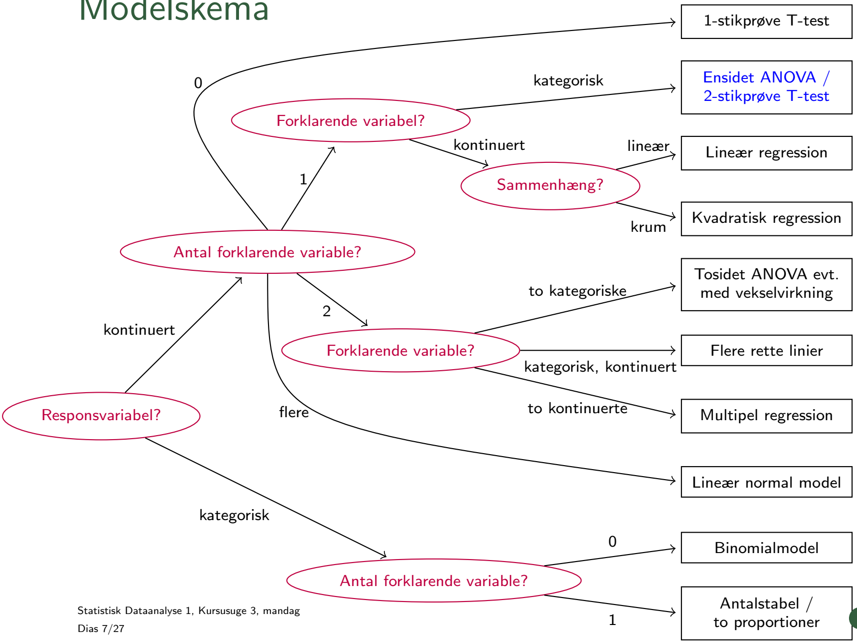
antibio-datasættet

```
library(isdals)
data(antibio)
head(antibio, n = 7)

##          type  org
## 1 Ivermect 3.03
## 2 Ivermect 2.81
## 3 Ivermect 3.06
## 4 Ivermect 3.11
## 5 Ivermect 2.94
## 6 Ivermect 3.06
## 7  Alfacyp 3.00
```



- Respons: Mængden af organisk materiale efter otte uger
- Modelskema: Kont. respons, én kategor. forklarende var.
- Ensidet ANOVA, flere stikprøver

Modelskema


Responsvariabel?
kontinuert
Antal forklarende variable?
0
1-stikprøve T-test
1
Forklarende variabel?
kategorisk
Ensidet ANOVA / 2-stikprøve T-test
kontinuert
Sammenhæng?
lineær
Lineær regression
krum
Kvadratisk regression
2
Forklarende variable?
to kategoriske
Tosidet ANOVA evt. med vekselvirkning
kategorisk, kontinuert
Flere rette linier
to kontinuerte
Multipel regression
flere
Lineær normal model
kategorisk
Antal forklarende variable?
0
Binomialmodel
1
Antalstabel / to proportioner

Problemformulering og gruppegennemsnit

Kan vi generalisere ud fra data og sige, at det forventede indhold af organisk stof afhænger af den anvendte type antibiotika?

```
library(tidyverse)
summarize(group_by(antibio, type), n = n()
          , mean_org = mean(org), sd_org = sd(org))

## # A tibble: 6 x 4
##   type         n mean_org sd_org
##   <fct>    <int>    <dbl>  <dbl>
## 1 Alfacyp      6     2.90 0.117
## 2 Control      6     2.60 0.119
## 3 Enroflox     6     2.71 0.162
## 4 Fenbenda     6     2.83 0.124
## 5 Ivermect     6     3.00 0.109
## 6 Spiramyc     4     2.86 0.0545
```

Vi har brug for at kende usikkerheden på gruppegennemsnit!

Statistisk model

Data:

- $y_1, \ldots, y_n$ kvantitative, kontinuerte obs. fra k grupper
- $g(i)$ er gruppen hørende til måling i

Statistisk model:

- $y_1, \ldots, y_n$ er uafhængige
- y_i er normalfordelt $\sim N(\mu_i, \sigma^2)$
- middelværdien $\mu_i = \alpha_{g(i)}$ afhænger af gruppen $g(i)$

(Ukendte) populationsparametre:

- Hver gruppe antages at have sin egen middelværdi (forventede værdi): $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
- Spredning σ ens for alle grupper

Middelværdierne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ og spredningen σ er **parametre** i modellen, som vi vil udtale os om udfra de givne data.

R-output fra ensidet ANOVA

Lad os se på `summary()` fra en ensidet variansanalysemodel:

```
model1 <- lm(org ~ type - 1, data = antibio)
summary(model1)

##
## Call:
## lm(formula = org ~ type - 1, data = antibio)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.29000 -0.06000  0.01833  0.07250  0.18667
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## typeAlfacyp   2.89500    0.04970   58.25   <2e-16 ***
## typeControl   2.60333    0.04970   52.38   <2e-16 ***
## typeEnroflox  2.71000    0.04970   54.53   <2e-16 ***
## typeFenbenda  2.83333    0.04970   57.01   <2e-16 ***
## typeIvermect  3.00167    0.04970   60.39   <2e-16 ***
## typeSpiramyc  2.85500    0.06087   46.90   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1217 on 28 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9985,Adjusted R-squared:  0.9981
## F-statistic:  3034 on 6 and 28 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Estimation

Estimater:

- For middelværdier: $\hat{\alpha}_j = \bar{y}_j$ — gruppegennemsnit
- Den fælles spredning: $\hat{\sigma} = s$ — sammenvejet spredning. Hvordan beregnes denne fælles spredning?

Interesseparameter er ofte **forskelle mellem grupperne**, fx $\alpha_2 - \alpha_1$. Estimeres med $\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$.

Estimation

Estimater:

- For middelværdier: $\hat{\alpha}_j = \bar{y}_j$ — gruppegennemsnit
- Den fælles spredning: $\hat{\sigma} = s$ — sammenvejet spredning. Hvordan beregnes denne fælles spredning?

Interesseparameter er ofte **forskelle mellem grupperne**, fx $\alpha_2 - \alpha_1$. Estimeres med $\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$.

Men hvor meget kan vi stole på estimaterne?

- Standard error for $\hat{\alpha}_j$? For $\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1$?
- Konfidensinterval for α_j? For $\alpha_2 - \alpha_1$?

Repetition (fra onsdag i kursusuge 2):

- Hvad mener vi med **standard error for estimat**?
- Hvordan fandt vi standard error for estimatet for middelværdien i situationen med en enkelt stikprøve?

Standard errors for estimater

Standard error for estimat = (estimeret) spredning for estimatet

Husk at $\hat{\alpha}_j = \bar{y}_j$ er gennemsnit af n_j observationer. Derfor:

$$\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_j) = \frac{s}{\sqrt{n_j}}$$

Standard errors for estimater

Standard error for estimat = (estimeret) spredning for estimatet

Husk at $\hat{\alpha}_j = \bar{y}_j$ er gennemsnit af n_j observationer. Derfor:

$$\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_j) = \frac{s}{\sqrt{n_j}}$$

Desuden: $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1)^2 = \mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2)^2 + \mathrm{SE}(\hat{\alpha}_1)^2$, så

$$\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Standard errors for estimater

Standard error for estimat = (estimeret) spredning for estimatet

Husk at $\hat{\alpha}_j = \bar{y}_j$ er gennemsnit af n_j observationer. Derfor:

$$\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_j) = \frac{s}{\sqrt{n_j}}$$

Desuden: $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1)^2 = \mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2)^2 + \mathrm{SE}(\hat{\alpha}_1)^2$, så

$$\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Igen vigtigt at skelne mellem s og $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_j)$:

- s: spredning på **enkeltobs.** Residual standard error.
- $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_j)$ og $\mathrm{SE}(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1)$: spredning på **estimater**

Konfidensintervaller

Vil gerne have **konfidensintervaller** for middelværdier og deres forskelle. Har ingredienserne!

$$95\%\ \text{KI}: \quad \text{estimat} \pm t_{0.975,\mathrm{df}} \cdot \mathrm{SE}(\text{estimat})$$

Konfidensintervaller

Vil gerne have **konfidensintervaller** for middelværdier og deres forskelle. Har ingredienserne!

$$95\%\ \text{KI}: \quad \text{estimat} \pm t_{0.975,\mathrm{df}} \cdot \mathrm{SE}(\text{estimat})$$

Hvor mange **frihedsgrader?**

- $\mathrm{df} = n - k =$ antal obs. minus antal middelværdiparametre

I **R-programmet** bør du have fokus på:

- Hvordan benyttes `qt()`-funktionen til beregning af $t_{0.975,\mathrm{df}}$?
- Hvor (og hvornår) kan man aflæse SE(estimat) direkte i R-output?
- Hvordan (og hvornår) kan man bruge `confint()`-funktionen til beregning af konfidensintervaller?

Quiz: R-output fra ensidet ANOVA

Lad os se lidt mere på output fra `model1`:

```
summary(model1)$coefficients

##               Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
## typeAlfacyp   2.895000 0.04970149 58.24775 9.090203e-31
## typeControl   2.603333 0.04970149 52.37938 1.731916e-29
## typeEnroflox 2.710000 0.04970149 54.52553 5.685971e-30
## typeFenbenda 2.833333 0.04970149 57.00701 1.653035e-30
## typeIvermect 3.001667 0.04970149 60.39390 3.326166e-31
## typeSpiramyc 2.855000 0.06087164 46.90197 3.689834e-28
```

- Hvordan er tallene 2.895 og 2.710 i søjlen `Estimate` udregnet fra datasættet?
- Hvad er fortolkningen af tallet 0.0497 i søjlen `Std.Error`?
- Hvorfor er `Std.Error` for `Spiramyc` større end for andre grupper?
- Find et 95 % - konfidensinterval for det forventede indhold af organisk stof i en prøve hørende til type =

Samme model kan fittes på flere måder i R

Med gruppemiddelvaerdierne som parametre:

```
model1 <- lm(org ~ type - 1, data=antibio)
```

Med en referencegruppe valgt af R:

```
model2 <- lm(org ~ type, data=antibio)
```

Med en selvvalgt referencegruppe:

```
antibio$myType <- relevel(antibio$type, ref="Control")
model3 <- lm(org ~ myType, data=antibio)
```

Selvvalgt ref-gruppe, hvis data er indlaest med `read_excel`:

```
antibio$myType <- relevel(factor(antibio$type)
                               , ref="Control")
model3 <- lm(org ~ myType, data=antibio)
```

Version med referencegruppe

Hvilke forskelle ses i forhold til `summary(model1)`?

```
model2 <- lm(org ~ type, data = antibio)
summary(model2)

##
## Call:
## lm(formula = org ~ type, data = antibio)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.29000 -0.06000  0.01833  0.07250  0.18667
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  2.89500    0.04970  58.248  < 2e-16 ***
## typeControl -0.29167    0.07029  -4.150 0.000281 ***
## typeEnroflox -0.18500    0.07029  -2.632 0.013653 *
## typeFenbenda -0.06167    0.07029  -0.877 0.387770
## typeIvermect  0.10667    0.07029   1.518 0.140338
## typeSpiramyc -0.04000    0.07858  -0.509 0.614738
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1217 on 28 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5874,Adjusted R-squared:  0.5137
## F-statistic: 7.973 on 5 and 28 DF,  p-value: 8.953e-05
```

Version med referencegruppe

Hvordan skal vi fortolke konfidensintervallerne her?

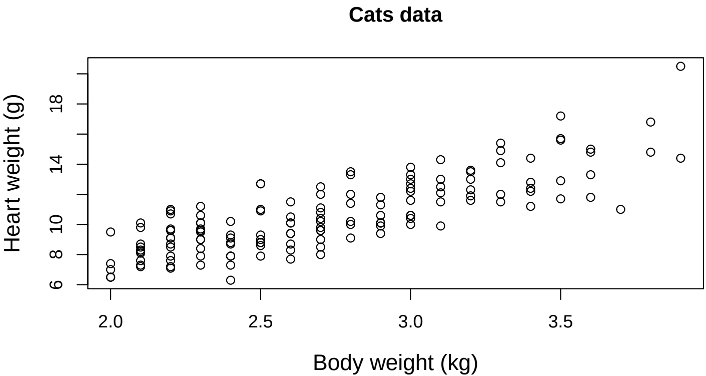
```
confint(model2)

##                     2.5 %      97.5 %
## (Intercept)   2.79319111  2.99680889
## typeControl  -0.43564618 -0.14768716
## typeEnroflox -0.32897951 -0.04102049
## typeFenbenda -0.20564618  0.08231284
## typeIvermect -0.03731284  0.25064618
## typeSpiramyc -0.20097398  0.12097398
```

Manuel beregning af konfidensintervaller (eksempler):

```
# (Intercept) / Alfacyp
2.895 + c(-1, 1) * qt(0.975, df = 28) * 0.04970
## [1] 2.793194 2.996806
# typeControl / forskel: Control - Alfacyp
-0.29167 + c(-1, 1) * qt(0.975, 28) * 0.07029
## [1] -0.4356525 -0.1476875
```

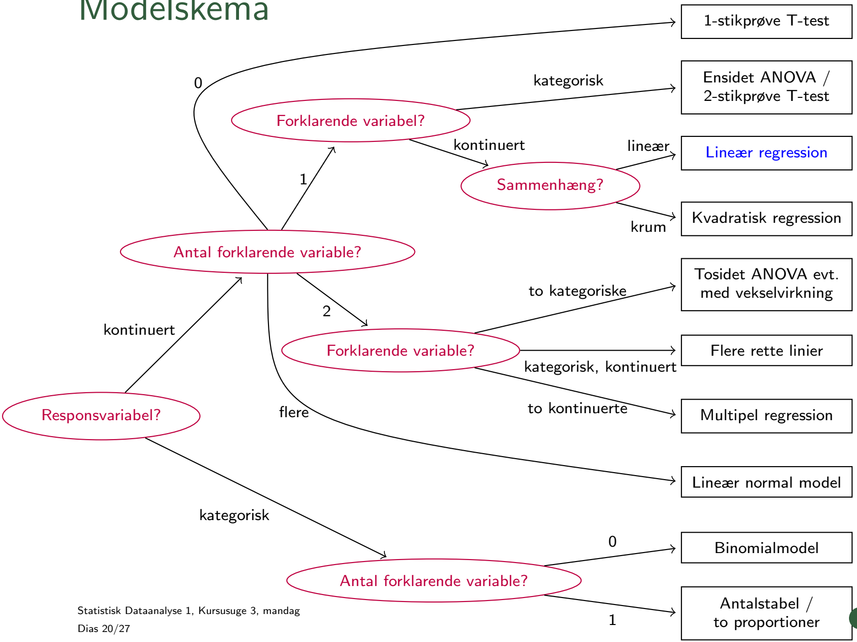
Lineær regression

Data: Kattes hjerte- og kropsvægt



Tilnærmelsesvis lineær sammenhæng, pånær tilfældig variation.

Modelskema


1-stikprøve T-test
0
kategorisk
Ensidet ANOVA / 2-stikprøve T-test
Forklarende variabel?
kontinuert
lineær
Lineær regression
1
Sammenhæng?
Kvadratisk regression
krum
Antal forklarende variable?
Tosidet ANOVA evt. med vekselvirkning
to kategoriske
2
kontinuert
Forklarende variable?
Flere rette linier
kategorisk, kontinuert
Responsvariabel?
flere
to kontinuerte
Multipel regression
Lineær normal model
kategorisk
0
Binomialmodel
Antal forklarende variable?
1
Antalstabel / to proportioner

Statistisk model

Data: Par $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, kvantitativ, kontinuert

Statistisk model: Uafhængighed + alle obs. normalfordelt med middelværdi givet ved ret linie og samme spredning omkring linie

Statistisk model

Data: Par $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, kvantitativ, kontinuert

Statistisk model: Uafhængighed + alle obs. normalfordelt med middelværdi givet ved ret linie og samme spredning omkring linie

Formelt:

- Tænker på x_i'erne som givne
- $y_1, \ldots, y_n$ uafhængige
- y_i normalfordelt med middelværdi $\mu_i = \alpha + \beta x_i$ og spredning σ.

(Ukendte) **populationsparametre**:

- Skæring/intercept α, hældning β
- Spredningen σ

Parametrene i modellen er α, β og spredningen σ, som vi vil udtale os udfra de givne data.

Quiz: R-output fra lineær regression

Lad os se på `summary()` fra en lineær regressionsmodel:

```
linreg <- lm(Hwt ~ Bwt, data = cats)
summary(linreg)

##
## Call:
## lm(formula = Hwt ~ Bwt, data = cats)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -3.5694 -0.9634 -0.0921  1.0426  5.1238
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -0.3567     0.6923  -0.515    0.607
## Bwt           4.0341     0.2503  16.119   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.452 on 142 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6466,Adjusted R-squared:  0.6441
## F-statistic: 259.8 on 1 and 142 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Angiv estimater for regressionslinjens hældning og skæring?
- Hvad er fortolkningen af `Residual standard error`
- Angiv et 95 % - konfidensinterval for parameteren β?

Hvordan udregnes estimater?

Estimater for α og β via mindste kvadraters metode: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

Estimeret regressionslinie:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$$

Estimat for σ:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2}$$

Hvordan udregnes estimater?

Estimater for α og β via mindste kvadraters metode: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

Estimeret regressionslinie:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$$

Estimat for σ:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2}$$

Men hvor meget kan vi stole på estimaterne?

- Standard error for $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{y}$
- Konfidensinterval for α, β, $\alpha + \beta x$

Standard errors for estimator

Formler:

$$\mathrm{SE}(\hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\mathrm{SS}_x}}, \quad \mathrm{SE}(\hat{\alpha}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\mathrm{SS}_x}},$$

$$\mathrm{SE}(\hat{y}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\mathrm{SS}_x}}$$

hvor $\mathrm{SS}_x = \sum(x_i - \bar{x})^2$.

Standard errors for estimator

Formler:

$$\mathrm{SE}(\hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\mathrm{SS}_x}}, \quad \mathrm{SE}(\hat{\alpha}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\mathrm{SS}_x}},$$

$$\mathrm{SE}(\hat{y}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\mathrm{SS}_x}}$$

hvor $\mathrm{SS}_x = \sum(x_i - \bar{x})^2$.

Formlerne er stort set uinteressante, men:

- Husk at SE er udtryk for præcisionen af estimaterne
- Er det bedst at samle x'erne eller at sprede dem?
- For hvilken værdi er $\hat{y}$ mest præcist estimeret (mindst SE)?

Konfidensintervaller

Vil gerne have **konfidensintervaller** for parametre og estimeret regressionslinie:

$$95\%\ \text{KI}: \quad \text{estimat} \pm t_{0.975,\mathrm{df}} \cdot \mathrm{SE}(\text{estimat})$$

Hvor mange frihedsgrader?

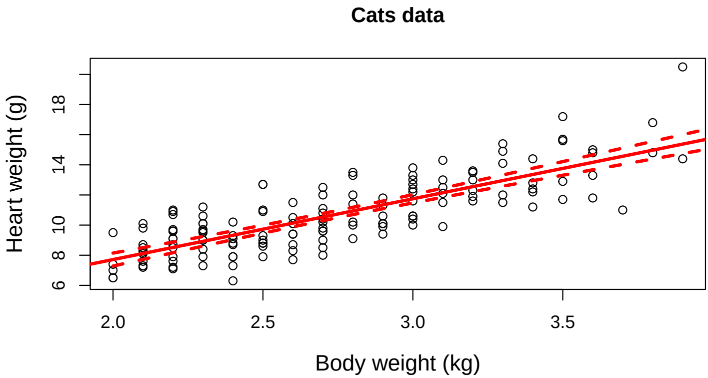
- $\mathrm{df} = n - 2 =$ antal obs. minus antal middelværdiparametre

Eksempler på beregning af konfidensintervaller findes i dagens R-program.

I **R-programmet** bør du have fokus på:

- Hvordan man finder konfidensintervaller for α og β ved brug af `confint()`.
- Hvordan man finder konfidensintervallet for et punkt $\hat{y}\hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ på linjen.

Estimeret linje med 95 % - konfidensinterval



R-kode til at lave figuren kan ses i dagens R-program.

Opsummering — til eget brug

- Hvad er fortolkningen af standard error (SE)?
- Hvilke 'ingredienser' skal bruges for at lavet et konfidensinterval?
- Hvordan skal værdierne i et konfidensinterval fortolkes?
- Hvad mener vi med at R bruger en referencegruppe i ensidet ANOVA?