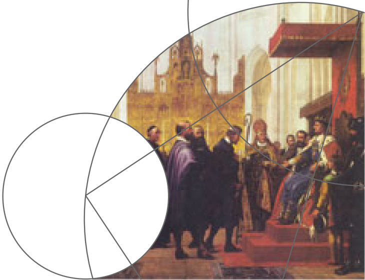
Statistisk Dataanalyse 1: Normalfordelingen

Anders Tolver
Institut for Matematiske Fag



Dagens program

- Hvad er normalfordelingen?
- Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder
- Hvordan checker man om data er normalfordelte?
- Hvad skal vi bruge normalfordelingen til?
- I dagens R-program:
  Summer og skalering af normalfordelte variable

Afsnit 4.2 (en stikprøve) og afsnit 4.4 (den centrale grænseværdisætning): først på onsdag

Motivation og formål med ugens undervisning

Problemstilling:

- Vi ønsker at udtale os om fordelingen af et (kontinuert) outcome i en (kæmpestor) population
- Vi har kun adgang til en lille stikprøve fra populationen

Dagens ide:

- Brug stikprøve til at gætte formen af fordelingen af hele populationen (statistisk model)
- Brug modellen til at regne på usikkerheden i stikprøven.

Hvad er normalfordelingen?

Histogram og relative hyppigheder

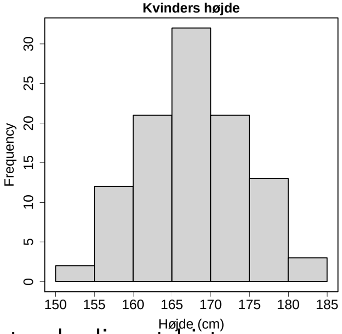
Et histogram er en velegnet metode til visualisering af en kvantitativ, kontinuert variabel.

Konstruktion forgår i følgende trin

- inddel skalaen der måles på i grupper/intervaller
- optæl **antal/frekvens** i hver gruppe
- udregn **relativ frekvens** ved at dividere med totalt antal observationer
- divider relativ frekvens med *bredden af intervallet*
- tegn søjlediagram

Fortolkning:
Areal under søjle = andel (procent) obs. i gruppen

Højder af kvindelige studerende på SD1 (2017?)



I standardiseret histogram er det samlede areal af rektangler lig 1. Så er **relativ hyppighed lig areal af tihørende rektangler**, fx:

$$\frac{\text{antal højder i interval }]155\text{cm}, 160\text{cm}]}{104} = \frac{12}{104} \approx 0.115 = 11.5\%$$

Tætheden for normalfordelingen

Histogrammer for mange observationer begynder at ligne en glat kurve (fordi vi kan tillade inddeling i flere grupper).

Normalfordelingen er matematisk model (=forskrift) for en teoretisk funktion der kunne tænkes at approksimere et histogram med (uendelig) mange observationer.

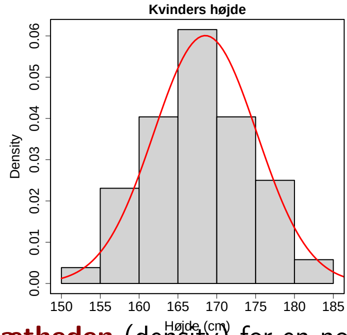
Standardnormalfordelingen er givet ved tæthed på formen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{1}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{1}^2}(y - \mathbf{0})^2\right),$$

men vi kan evt. ændre

- middelværdien $\mu = \mathbf{0}$ (her) til noget andet
- spredningen $\sigma = \mathbf{1}$ (her) til noget andet

Den klokkeformede kurve (The bell curve)



- Kurven er **tætheden** (density) for en normalfordeling med
  - middelværdi: $\mu = 168.52$ cm $= \overline{y}$ (gennemsnit)
  - spredning: $\sigma = 6.64$ cm $= s$ (stikprøvespredning)
- **Kurven ligner histogrammet**. Vi kan bruge normalfordelingen som model til at beskrive fordelingen af højden

Egenskaber ved normalfordelingen og beregning af sandsynligheder

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

Den generelle normalfordeling

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mathbf{6.64}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \mathbf{6.64}^2}(y - \mathbf{168.52})^2\right)$$

Udskift tallet 168.52 med μ og tallet 6.64 med σ:

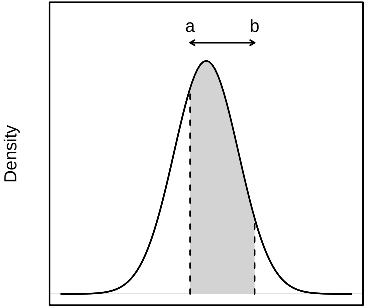
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right)$$

- Siger, at en variabel Y **er normalfordelt med middelværdi** μ **og spredning** σ hvis det for alle intervaller $[a, b]$ gælder at

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy.$$

- Vi skriver $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

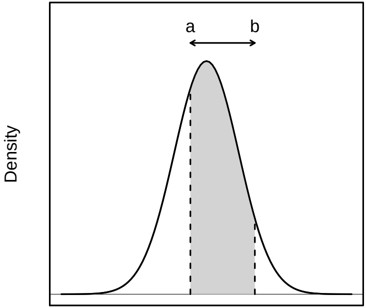
Tæthed og sandsynligheder



$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\, dy$$

Tæthed og sandsynligheder



$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ hvis ssh. for at Y lander mellem a og b er lig areal fra a til b under tætheden:

$$P(a < Y \leq b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

- $f(y_1) > f(y_2)$: mere sandsynligt at havne omkring y_1 end y_2.
- $P(a < Y < b) = P(a < Y \leq b) = P(a \leq Y < b) = P(a \leq Y \leq b)$

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Som arealer under tæthedsfunktionen, dvs. ved integration, fx.

$$P(155 < Y \leq 160) = \int_{155}^{160} f(y)\, dy$$

Problem (teoretisk): Man kan ikke finde noget mere eksplicit udtryk end ovenstående.

Hvad så?

- Via omskrivninger til $N(0, 1)$. Sådan står det i bogen.
- Nemmere: Brug funktionen `pnorm` i R med angivelse af `mean` og `sd`. Beregner sandsynligheder $P(Y \leq b)$.

Beregning af sandsynligheder i normalfordelingen

Antag at Y er normalfordelt med middelværdi 168.52 og spredning 6.64, altså $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$.

Hvad er $P(155 < Y \leq 160)$?

```
> pnorm(160, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.09972282
> pnorm(155, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 0.02086792
> pnorm(160,mean=168.52,sd=6.64)-pnorm(155,mean=168.52,sd=6.
[1] 0.0788549
```

Altså:

- $P(Y \leq 160) = 0.0997$ og $P(Y \leq 155) = 0.0209$
- $P(155 < Y \leq 160) = 0.0997 - 0.0209 = 0.0789$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

Fraktiler

Find en højde som opfylder, at 90% af kvinder i populationen er lavere end denne højde?

Altså: Antag $Y \sim N(168.52, 6.64^2)$, og find b så

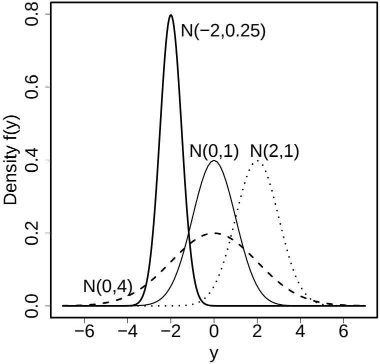
$$P(Y < b) = P(Y \leq b) = 0.90$$

```
> qnorm(0.90, mean=168.52, sd=6.64)
[1] 177.0295
```

Tallet 177.03 kaldes **90% fraktilen** i $N(168.52, 6.64^2)$.

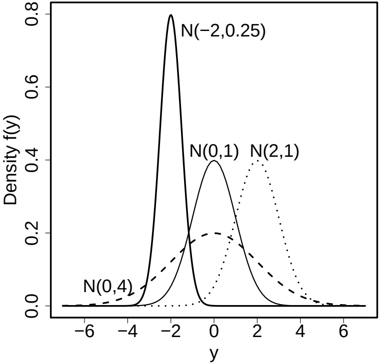
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$



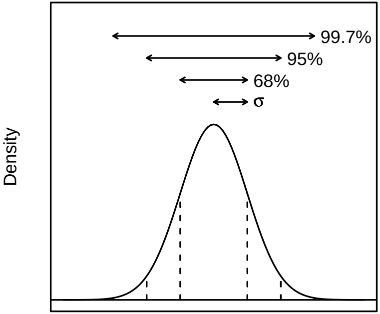
Symmetri — centrum — spredning

Tæthed for $N(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)$

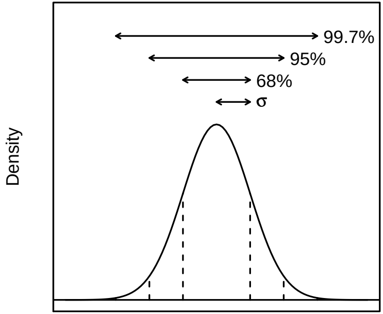


Bemærk: Vi skriver $N(\mu, \sigma^2)$ — ikke $N(\mu, \sigma)$. Hvis $Y \sim N(0, 4)$ har Y altså spredning 2.

Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$



Sandsynligheder for $\mu \pm k \cdot \sigma$

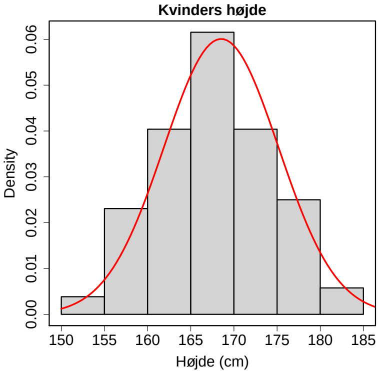


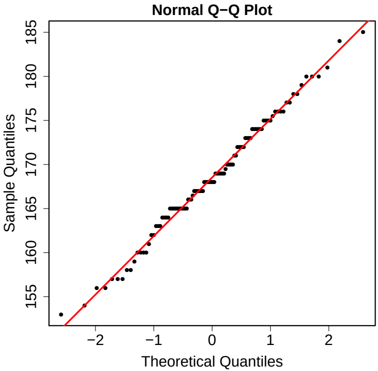
- 68% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm \sigma$
- 95% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 2 \cdot \sigma$
- 99.7% mest centrale obs. ligger i intervallet $\mu \pm 3 \cdot \sigma$

Gælder for **alle** normalfordelinger — uanset værdierne af μ og σ.

Er data normalfordelt?

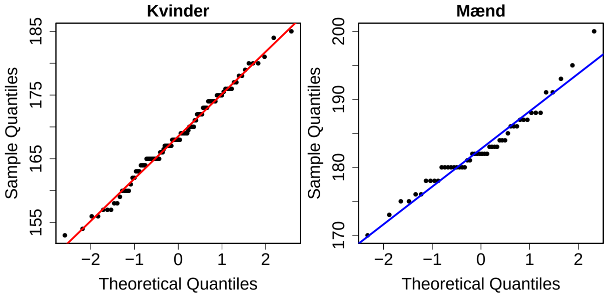
Hvordan checkes om data er normalfordelt?





- (For n stor:) Tegn histogram + tæthed for $N(\bar{y}, s^2)$.
  her: $\bar{y}$ = **gennemsnit**, s = **spredning**
- (Altid:) **QQ-plot:** Ligger punkterne omkring en ret linie?

QQ-plot



- **Quantile-quantile** (fraktil-fraktil) plot
- x-aksen tilpasset så normalfordelte data ligger på ret linie
- Sammenlign med **ret linie med skæring $\bar{y}$ og hældning s**
- R: QQ-plot med `qqnorm`, linie med `abline`

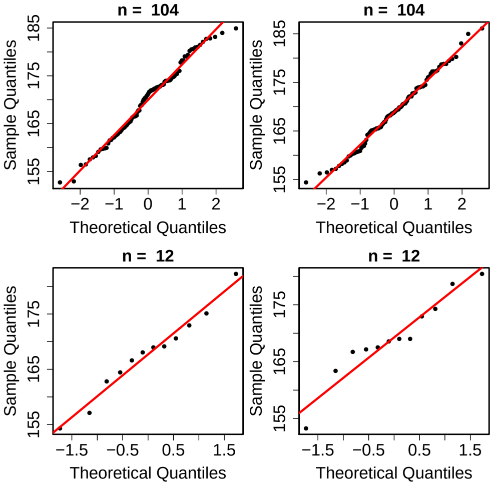
Vurdering af QQ-plot

Hvor store skal afvigelserne fra en ret linie være for at man kan konkludere at data **ikke** er normalfordelte?

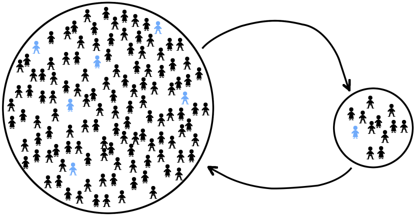
- Afhænger af antal observationer
- Kan være nyttigt at se på simulerede N-data: Hvordan ser QQ-plots ud når vi **ved** at data er N-fordelte.

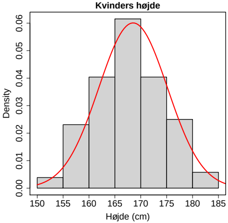
QQ-plots fra simulerede data

Her **er** data normalfordelte:



Populationer, tæthed vs stikprøve, histogram





- Population: Normalfordelingstæthed
- Stikprøve: Histogram

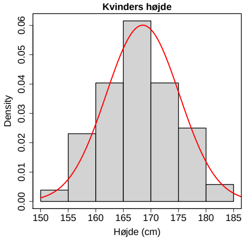
Vi bruger normalfordelingen som (matematisk) **model** for hvordan variationen i hele populationen ville have set ud.

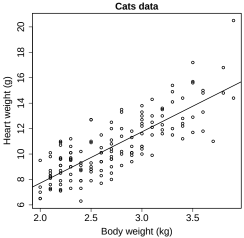
Modellen beskriver også hvilken variation der vil være i en stikprøve.

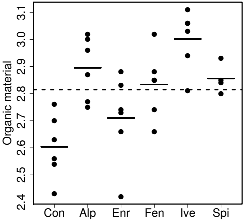
Hvad skal vi bruge normalfordelingen til?

Til at beskrive variationen i data når reponsen er kontinuert:

En stikprøve, lineær regression, ensidet variansanalyse, ...







Opsummering — til eget brug

- Hvad vil det sige at Y er normalfordelt?
- Hvor mange procent af en normalfordeling ligger i intervallet "middelværdi ± 2 gange spredning"?
- Hvordan beregner man sandsynligheder i normalford. i R?
- Hvordan checker man om data kommer fra en normalfordeling?
- Hvad er fordelingen af $X + Y$ hvis både X og Y er normalfordelte?
- Hvad er fordelingen af gennemsnittet af ens fordelte normalfordelte variable?