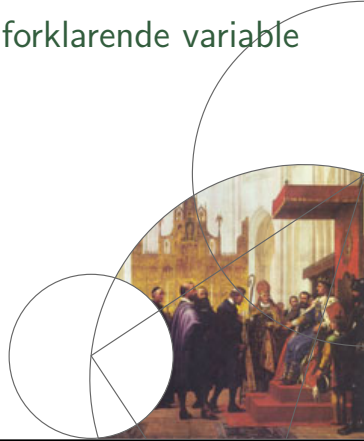




## Blandede modeller: - både kontinuerte og kategoriske forklarende variable

Anders Tolver  
Institut for Matematiske Fag



## Dagens program

### Dagens forelæsning:

- **Tosidet ANOVA:**
  - slides 25-38 fra 9/10-2023
  - supplerende kommentarer (slides 3-6 fra idag)
- **Blandede modeller:** (slides 7-15 + R-program)  
både kategoriske og kvantitative forklarende variable
  - Eksempel: løbetider på DHL-stafetten
- Perspektivering: (slides 16-24)  
Hvad dækker en lineær model over?

### Opsamlingsvideoer:

- Lineære modeller
  - Eksempel: lungefunktionsmålinger (FEV)
- Gennemgang af Quiz til Kursusuge 6

### Afleveringsopgave 3:

Lige på trapperne: på Absalon i løbet af dagen.



## Tosidet ANOVA (repetition)



## Hvornår og hvordan?

Kontinuert respons og to kategoriske forklarende variable.

Vekselvirkning: Effekten af den ene variabel afhænger af den anden variabel, og vice versa.

### Typisk work flow:

- Fit model med vekselvirkning — hvis det giver faglig mening og hvis der er gentagelser
- Modelkontrol (skal der fx transformeres?)
- Test for vekselvirkning
- Hvis vekselvirkning ikke er signifikant: Test for hovedeffekter
- Afrapportering af estimer og konfidensintervaller: Fra model med/uden vekselvirkning afhængig af konklusionen af testet.



## Samme model - forskellige parametriseringer

Tosidet ANOVA med vekselvirkning:

Der er forskellige måder at afrapportere estimerterne på ...

```
twoway.int <- lm(højde ~ studie + kon + studie*kon, data=useData2)
```

```
##               Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    167.7647     1.0921  153.6144  0.0000
## studieJordbrugsøkonomi    -0.4570     2.0766   -0.2201  0.8262
## studieNaturressourcer     1.6639     2.0222   0.8228  0.4125
## konMand          15.6353     1.9739   7.9211  0.0000
## studieJordbrugsøkonomi:konMand   -0.6489     3.0661  -0.2116  0.8328
## studieNaturressourcer:konMand   -3.0639     3.0296  -1.0113  0.3142
```

```
twoway.int2 <- lm(højde ~ studie:kon - 1, data=useData2)
```

```
##               Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## studieBiologi-Bioteknologi:konKvinde    167.7647     1.0921  153.6144  0
## studieJordbrugsøkonomi:konKvinde    167.3077     1.7662   94.7283  0
## studieNaturressourcer:konKvinde    169.4286     1.7019   99.5503  0
## studieBiologi-Bioteknologi:konMand    183.4000     1.6442  111.5416  0
## studieJordbrugsøkonomi:konMand    182.2941     1.5445  118.0291  0
## studieNaturressourcer:konMand    182.0000     1.5445  117.8387  0
```



## Den additive model

Test for vekselvirkning

```
twoway.add2 <- lm(højde ~ studie + kon, data = useData2)
anova(twoway.add2, twoway.int)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: højde ~ studie + kon
## Model 2: højde ~ studie + kon + studie * kon
##   Res.Df  RSS Df Sum of Sq  F Pr(>F)
## 1    106 4261.1      2    43.7 0.5388 0.5851
## 2    104 4217.4      2    43.7 0.5388 0.5851
```

Estimer fra den tosidede ANOVA uden vekselvirkning

```
##               Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    168.10511     0.98408  170.82536  0.00000
## studieJordbrugsøkonomi   -0.53498     1.50585   -0.35527  0.72309
## studieNaturressourcer     0.25308     1.48656   0.17024  0.86514
## konMand             14.52331     1.25674  11.55629  0.00000
```

Fortolkning af estimer? Hvorfor kun 4 parametre?



## Blandede modeller



## Overblik

Vi skal have "udfyldt" følgende skema over modeller (rækker) og statistiske begreber (søjler):

	Intro	Model	Est.+SE	KI	Test	Kontrol	Præd.
En stikprøve	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ensidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Lineær regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
To stikprøver	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Multipel regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tosidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Blandede modeller	nu	nu	nu	nu	nu	nu	nu



## Hvad er blandede modeller?

Modeller der både indeholder kategoriske og kvantitative forklarende variable; stadig kontinuert respons.

- Respons  $y$
- Kontinuert variabel  $x$ , kategorisk variabel  $grp$

Statistisk model svarende til flere parallelle linier:

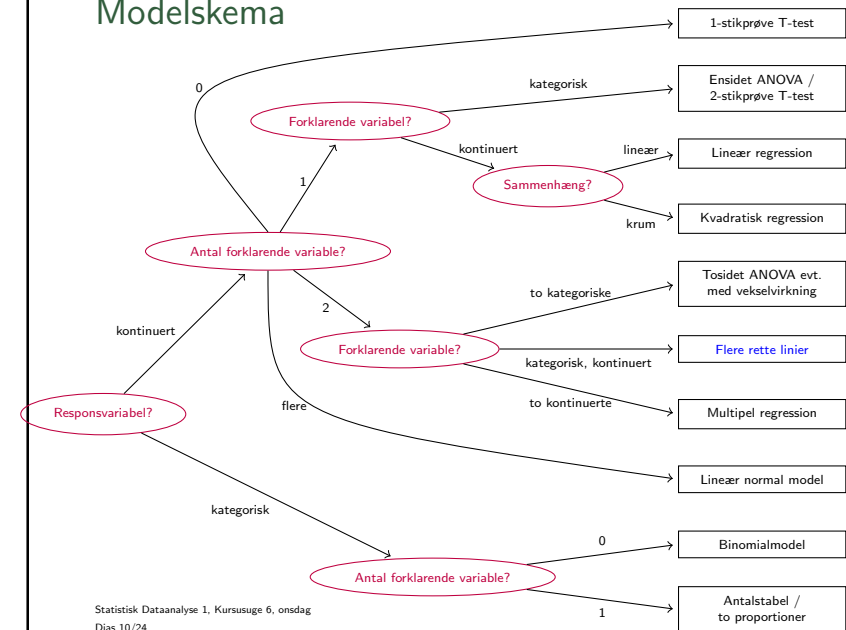
$$y_i = \alpha_{grp_i} + \beta \cdot x_i + e_i, \quad e_1, \dots, e_n \text{ iid. } N(0, \sigma^2)$$

Additiv model = model uden vekselvirkning.

Vekselvirkning, dvs. at effekten af  $x$  afhænger af  $grp$ , svarer til ikke-parallelle linier. Det ser vi kun en lille smule på.



## Modelskema



## Analyse

R-syntaks:

```
lm(y ~ x + grp, data=...)
```

Vi **kan allerede det hele**: Estimation, modelkontrol, hypotesetest, konfidens- og prædiktionsintervaller fra uge 3–4.



## Eksempel: DHL-stafet

Data fra DHL-stafetten i 2006:

- Der blev løbet mandag–torsdag, 5000 hold hver dag.
- Hvert hold består af fem personer, frit sammensat af mænd og kvinder. Der kan altså være 0–5 kvinder på et hold.
- Alle personer løber 5 km; altså 25 km for hvert hold

Data ligger som **dhl** i *isdals*. Variable: day, men, women, hours, minutes, seconds.

Spørgsmål: Hvor meget langsommere løber kvinder end mænd? Er der forskel på dagene?



## Analyse

De første overvejelser:

- Hvordan laver vi en fornuftig responsvariabel?
- Hvad skal vi bruge som forklarende variable? Hvilke typer?
- Hvilken figur kunne vi tænke os at lave?

Analyse:

- Statistisk model, modelkontrol
- Estimér hvor meget langsommere kvinder løber per km
- Hvilken dag var hurtigst/langsomst? Er der signifikant forskel på dagene?

Resultater:

- Kortfattede slides i dag - se i stedet dagens R program



## Flere sjove spørgsmål

1. Ruten blev ændret mellem tirsdag og onsdag pga. kraftig regn.
  - Undersøg om tiderne er ens mandag og tirsdag (en rute) og ens onsdag+torsdag (den anden rute)
  - Bestem ét estimat for forskellen i løbstid mellem de to ruter
2. Vi har antaget at den forventede løbstid vokser lineært med antal kvinder på holdet. Kan vi undersøge om det faktisk er OK?
3. Vi har antaget hældningerne er ens de fire dage. Kan vi undersøge om det faktisk er OK?



## DHL: Konklusion

Vi brugte tid som respons, antal kvinder (kvantitativ) og dag (kategorisk) som forklarende variable.

- Kvinders pace (kilometertid) estimeres til at være 0.81 minutter langsommere end mænds. 95% KI: (0.74, 0.88).
- Der var signifikant forskel på dagene ( $p = 0.000013$ ).  
Nærmere undersøgelser viste at der ikke var forskel mellem mandag og tirsdag, og mellem onsdag og torsdag ( $p = 0.62$ ).
- Undersøgelser viste desuden ingen tegn på ikke-parallelitet ( $p = 0.88$ ) ikke-linearitet ( $p = 0.07$ ).



## Lineære modeller



## Modeller

Vi har diskuteret dataanalyser med følgende karakteristika:

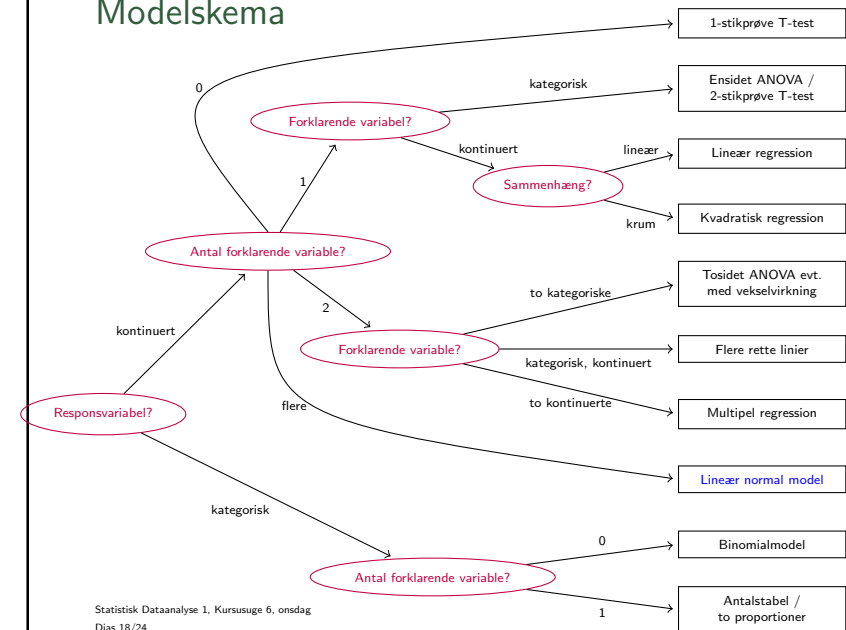
- 0/1/2 forklarende variable. Kategoriske/kontinuerte, med/uden vekselvirkning
- Kontinuert responsvariabel der antages at være normalfordelt givet den/de forklarende variable
- Uafhængige

Klassen af modeller kan udvides til flere forklarende variable og evt. vekselvirkninger mellem  $\geq 2$  variable.

Uafhængighed + normalfordeling + visse antagelser om middelværdierne  
→ **lineær normal model**



## Modelskema



## Eksempel: Case 7 side 440

Data fra 654 børn.

- Respons: Lungefunktionsmåling (FEV)
- Forklarende variable: Alder (Age), Højde i tommer (Ht), Køn (Gender), rygning i hjemmet (0/1, Smoke)

Særligt interesseret i hvordan rygning i hjemmet påvirker lungefunktionen.



## Modelovervejelser

Er de forklarende variable kategoriske eller kvantitative?

Lægefaglige overvejelser:

- Det er tænkeligt at rygning i hjemmet påvirker FEV forskelligt for drenge og piger.
- Man mener at FEV vokser med alderen, men at effekten muligvis aftager med alderen
- Man mener at barnets fysiske størrelse muligvis har en effekt på FEV, også selvom man tager alderen i betragtning

Hvordan kan/bør/skal de forklarende variable indgå i modellen?



## Forslag til model

Forslag til modelformel:

$$\text{FEV} \sim \text{Age} + \text{I}(\text{Age}^2) + \text{Ht} + \text{GenderFac} + \text{SmokeFac} + \text{SmokeFac} * \text{GenderFac}$$

- Modelkontrol
- Estimerer for effekt af rygning i hjemmet, hvert køn for sig
- Fælles estimat for effekt af rygning i hjemmet
- Er der signifikant effekt af rygning (sammenlign analyserne)

Kortfattede slides i dag - se i stedet dagens R program!



## Hvad kan vi (ikke)?



## Hvad kan vi?

	Intro	Model	Est.+SE	KI	Test	Kontrol	Præd.
En stikprøve	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ensidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Lineær regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
To stikprøver	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Multipel regr.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tosidet ANOVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Blandede modeller	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



## Hvad kan vi, og hvad kan vi ikke?

Hvad har vi gjort:

- Har kun beskæftiget os med kontinuerte responsvariable, og kun modeller baseret på normalfordelingen
- Har kun beskæftiget os med uafhængige data
- De statistiske begreber er de samme uanset datatyperne

**Sidste uge af kurset:** Lidt om kategoriske responsvariable, men slet ikke så avancerede modeller som for kontinuerte data.

Snakker slet ikke om data med afhængighed; fx blokforsøg, tidsrækker og gentagne målinger → **kommer på StatData2**

