Tosidet variansanalyse og faktordiagrammer

Statistisk Dataanalyse 2

Anders Tolver

Uge 1, torsdag d. 7/9-2017

Dagens program

- Den tosidede variansanalysemodel
- Vekselvirkninger mellem to faktorer
- Den additive model i tosidet variansanalyse
- Flerfaktorforsøg
- Faktordiagrammer

Eksempel 3.2: beskrivelse af data

Datasættet fra lærebogens eksempel 3.2 består af målinger af indholdet af organisk stof (`organic`) i 36 forsøgsenheder (mesh bags).

Forsøgsenhederne stammer både fra behandlet kvæg (`Ivermectin`) og fra ubehandlet kvæg (`control`).

Forsøgsenhederne har ligget i jorden i `8, 12 eller 16 uger.`

`To faktorer:` `TREAT` og `TIME`

Eksempel 3.2: datasættet

```
##          TREAT TIME organic nr   TREAT TIME organic
## 1   Ivermectin    8  3028.7 19 Control    8  2425.0
## 2   Ivermectin    8  2805.7 20 Control    8  2630.1
## 3   Ivermectin    8  3061.3 21 Control    8  2557.0
## 4   Ivermectin    8  3113.4 22 Control    8  2763.4
## 5   Ivermectin    8  2938.1 23 Control    8  2701.0
## 6   Ivermectin    8  3063.4 24 Control    8  2544.2
## 7   Ivermectin   12  2765.0 25 Control   12  2530.6
## 8   Ivermectin   12  2713.7 26 Control   12  2301.2
## 9   Ivermectin   12  2945.7 27 Control   12  2389.8
## 10  Ivermectin   12  2869.3 28 Control   12  2445.2
## 11  Ivermectin   12  2902.0 29 Control   12  2218.5
## 12  Ivermectin   12  2836.6 30 Control   12  2348.1
## 13  Ivermectin   16  2413.3 31 Control   16  1995.0
## 14  Ivermectin   16  2592.6 32 Control   16  2165.2
## 15  Ivermectin   16  2804.7 33 Control   16  1940.9
## 16  Ivermectin   16  2546.5 34 Control   16  2271.8
## 17  Ivermectin   16  2823.7 35 Control   16  2493.8
## 18  Ivermectin   16  2845.2 36 Control   16  2452.8
```

Eksempel 3.2: formål med forsøget

Vi kunne være interesserede i flg. spørgsmål

- Har behandlingen indflydelse på indholdet af organisk stof?
- Hvilket niveau af `TREAT` giver størst indhold af organisk stof?
- Afhænger indholdet af organisk stof af, hvor længe forsøgsenhederne har ligget i jorden?
- Hvilket niveau af `TIME` giver størst indhold af organisk stof?
- Afhænger effekten af behandlingen af, hvor længe forsøgshederne har ligget i jorden?
- Hvilken komb. af `TREAT` og `TIME` giver det største indhold af organisk stof?

Faktorer

Forsøgsenheder: $1, 2, \ldots, N$.

En faktor inddeler forsøgsenhederne i et antal grupper.

Faktoren knytter en en værdi til hver forsøgsenhed, nemlig niveauet af faktoren for den pågældende forsøgsenhed. Vi skriver $\mathtt{F}_i$.

$n_j(\mathtt{F})$ er antal forsøgsenh. der er på niveau j af faktoren $\mathtt{F}$.

$\mathtt{F}$ kaldes balanceret hvis $n_j(\mathtt{F})$ er ens for alle j, dvs. hvis der er lige mange forsøgsenheder i alle grupper. Skriver så $n_{\mathtt{F}}$ for antallet af forsøgsenheder per niveau.

Der findes altid to trivielle inddelinger/faktorer:

Identiske faktor ($\mathtt{I}$): hver forsøgsenhed udgør sin egen gruppe.

Trivielle faktor ($\mathtt{0}$): alle observationer betragtes som een gruppe.

For to faktorer $\mathtt{F}$ og $\mathtt{G}$ har man produktfaktoren ($\mathtt{F} \times \mathtt{G}$):

Svarer til at observationerne grupperes efter både $\mathtt{F}$ og $\mathtt{G}$ samtidig.

Eksempel 3.2: oversigt over faktorer

Faktorerne `TREAT` og `TIME` er balancerede. Hvorfor?

Desuden har vi produktfaktoren `TREAT`×`TIME` med alle kombinationer af `TREAT` og `TIME`.

- Hvor mange forskellige niveauer har

$$\texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}?$$

- Er `TREAT`×`TIME` balanceret ?

Eksempel 3.2: 2-sidet ANOVA

Den (fulde) tosidede variansanalysemodel er givet ved

$$M: \quad Y_i = \gamma(\texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \ldots, e_{36}$ er uafhængige og $N(0, \sigma^2)-$fordelte.

- middelværdi afhænger af værdien af produktfaktoren TREAT×TIME
- samme σ^2 (varians) i alle grupper
- uafhængige og normalfordelte fejl

(Dette er blot den ensidede variansanalysemodel med TREAT×TIME som forklarende faktor!)

Eksempel 3.2: 2-sidet ANOVA

Middelværdiparametrene, $\gamma(Iver, 8), \ldots, \gamma(Ubeh, 12)$, estimeres ved gruppegennemsnit over relevante forsøgsenheder.

Residualkvadratsum

$$SS_e^{TREAT \times TIME} = \sum_{i=1}^{36} (Y_i - \hat{\gamma}(TREAT \times TIME_i))^2$$

Mean square error el. residual mean square

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = MS_e^{TREAT \times TIME} = \frac{1}{36-6} SS_e^{TREAT \times TIME}$$

NB: Normeringen i udtrykket for s^2 skyldes, at der er 36 observationer og 6 grupper givet ved faktoren $\texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}$.

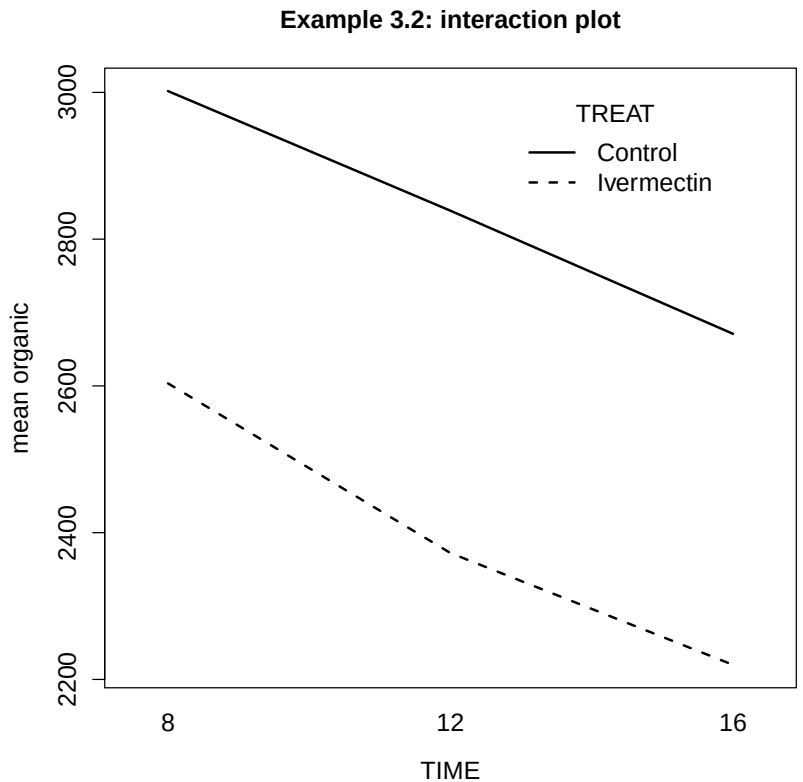
Interaction plots

Grafisk undersøgelse af vekselsvirkning

- For hver kombination af `TREAT`×`TIME` udregnes gruppegennemsnit.
- Gruppegennemsnit plottes op mod værdien af faktoren `TIME`
- Punkter hørende til samme værdi af `TREAT` forbindes med linjestykker
- Parallelle kurver taler for additiv model
- Systematiske afvigelser mellem kurver tyder på vekselvirkning
- Svært at eftervise vekselvirkning vha. interaction plot, men ...
- hvis et formelt statistisk test viser signifikant vekselvirkning, kan kommandoen `interaction.plot` bruges til at beskrive årsagen/retningen.

Interaction plots

Data fra eksempel 3.2: Vekselvirkning/additiv model ?



Eksempel 3.2: additiv model

Indledningsvis undersøges om vekselvirkingen kan fjernes så modellen reduceres til den additive model for tosidet variansanalyse

$$H_0: \quad Y_i = \alpha(\texttt{TREAT}_i) + \beta(\texttt{TIME}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \ldots, e_N$ er uafhængige og normalford. $N(0, \sigma^2)$.

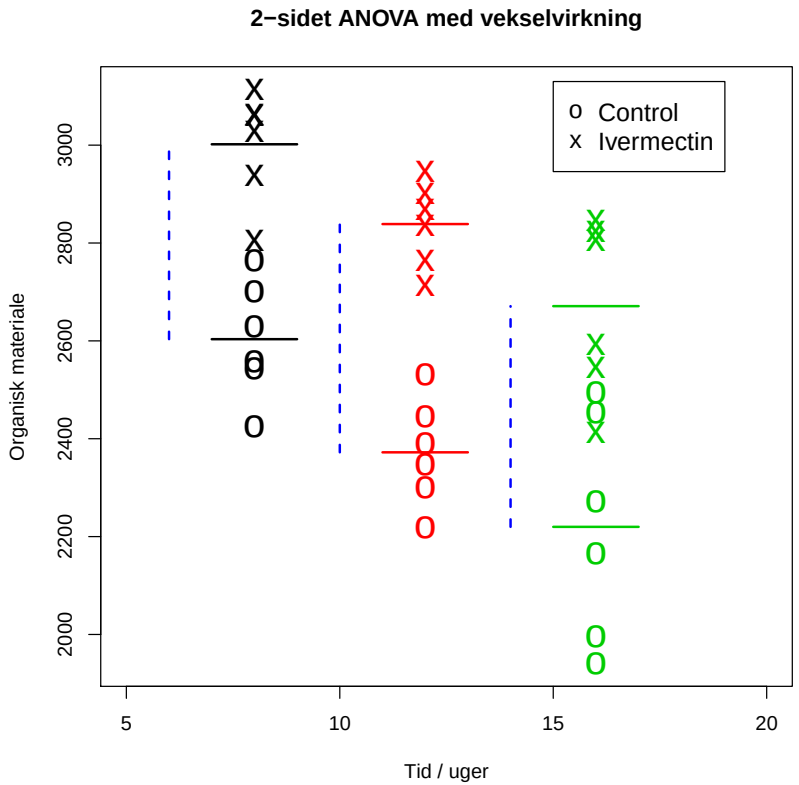
Middelværdien i gruppen givet ved $\texttt{TREAT}_i = \texttt{Ivermectin}$ og $\texttt{TIME}_i = 8$ er lig med summen

$$\alpha(\texttt{Ivermectin}) + \beta(8).$$

Modellen omtales også som den lineære model uden

vekselvirkning.

Eksempel 3.2: hvad udtrykker den additive model?



Ved test for reduktion til den additive model undersøges, om behandlingseffekten (-længden af de blå linjestykker) afhænger af tid!

Den additive model: Estimation

Residualkvadratsum

$$SS_e^{\texttt{TREAT+TIME}} = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - (\hat{\alpha}(\texttt{TREAT}_i) + \hat{\beta}(\texttt{TIME}_i)))^2$$

Mean square error eller residual mean square

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = MS_e^{\texttt{TREAT+TIME}} = \frac{1}{N-k-m+1} SS_e^{\texttt{TREAT+TIME}}$$

Angiver variansestimat under den additive model.

2-sidet ANOVA: reduktion

Vekselvirking: fremgangsmåde afhænger af om vi har flere forsøgsenheder (gentagelser) for hvert niveau af `TREAT`×`TIME`

gentagelser Test om modellen kan reduceres til den additive model.

ingen gentagelser Formelt test ikke muligt! Grafisk undersøgelse af vekselvirkning ved interaction plot.

Derefter: test for hovedeffekt af `TREAT` og `TIME`.

- Hvilke modeller skal fittes?
- Hvilken model, skal der testes mod?

Eksempel 3.2: R

I R udføres test for vekselvirkning som følger ...

```
model1<-lm(data$organic~data$TIME:data$TREAT)
modelad<-lm(data$organic~data$TIME+data$TREAT)
anova(modelad,model1)
```

```
Analysis of Variance Table

Model 1: data$organic ~ data$TIME + data$TREAT
Model 2: data$organic ~ data$TIME:data$TREAT
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     32 664410
2     30 656742  2      7668 0.1751 0.8402
```

Testet godkendes → ingen vekselvirkning

Tilsvarende analyser viser, at TREAT og TIME har marginal effekt!

Eksempel 3.2: variansanalyseskema

Ved brug af R udskrifter udfyldes skemaerne

Model	Fakt.	Mv.	SS_e	df_e
1	TREAT×TIME	$\gamma(\texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}_i)$	656742	30
2	TREAT+TIME	$\alpha(\texttt{TREAT}_i) + \beta(\texttt{TIME}_i)$	664410	32
3a	TIME	$\beta(\texttt{TIME}_i)$	2395959	33
3b	TREAT	$\alpha(\texttt{TREAT}_i)$	1432502	34
Test	Faktor	F	df	p
2 vs 1	TREAT×TIME	0.1751	2	0.84
3a vs 2	TREAT	83.397	1	0
3b vs 2	TIME	18.497	2	0

NB: Input til skema findes f.x. ved at køre `summary` og `deviance`

```
> summary(modelad)
   [ ... part of output ...]
Residual standard error: 144.1 on 32 degrees of freedom
> deviance(modelad)
[1] 664410
```

Additive model: konklusioner I

Slutmodel (additiv model for 2-sidet ANOVA)

$$Y_i = \alpha(\texttt{TREAT}_i) + \beta(\texttt{TIME}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \ldots, e_{36} \sim N(0, \sigma^2)$ er uafhængige.

Parameterestimater (kan) angives således

$$\hat{\alpha}(\texttt{Ubeh}) + \hat{\beta}(8) = 2583.29 \qquad \hat{\alpha}(\texttt{Iver}) - \hat{\alpha}(\texttt{Ubeh}) = 438.63$$
$$\hat{\beta}(12) - \hat{\beta}(8) = -197.13 \qquad \hat{\beta}(16) - \hat{\beta}(8) = -357.15$$

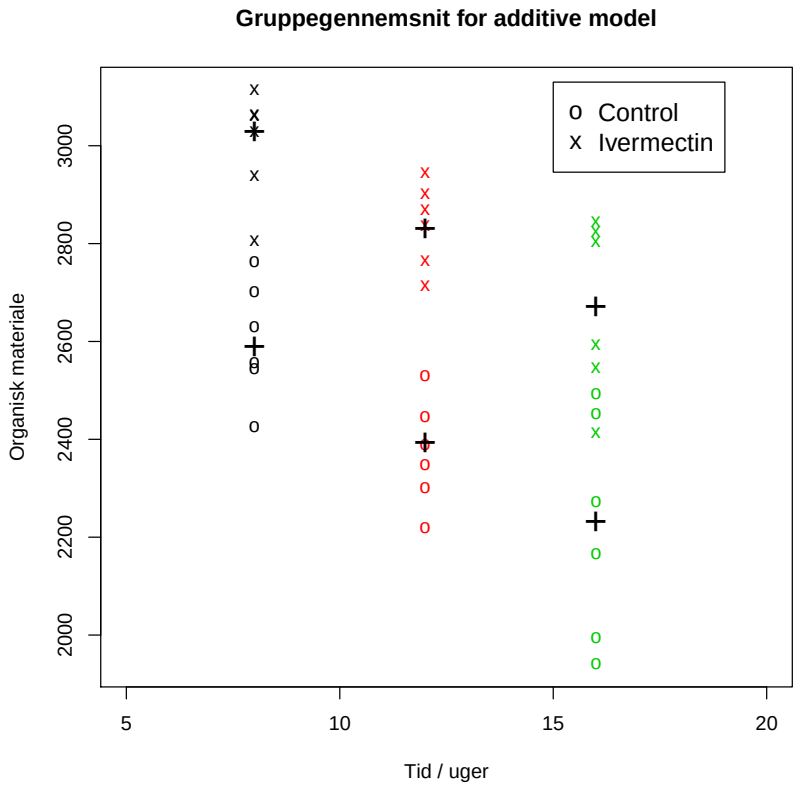
NB: For additiv model angives parameterestimater ofte ved angivelse af estimat for en referencegruppe (-her bruges $(\texttt{TREAT}, \texttt{TIME}) = (\texttt{Ubeh}, 8)$) samt forskellene til referencegruppen.

Variansestimat $s^2 = \hat{\sigma}^2 = 144.1^2$.

Additive model: parametrisering

Struktur: gennemsnit givet ved `TREAT` × `TIME` ligger på parallelle kurver.

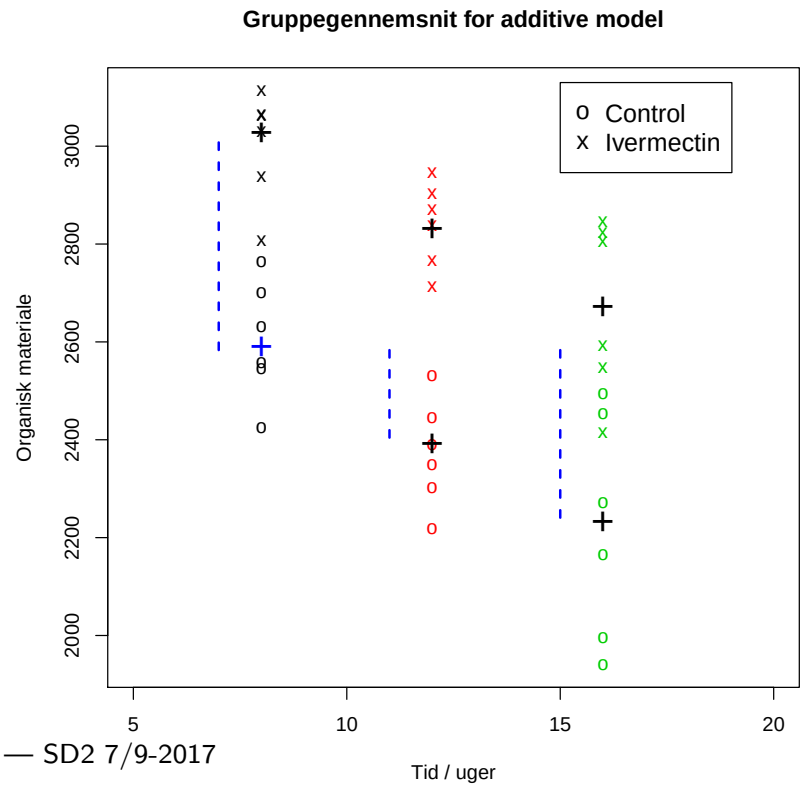
Punkternes beliggenhed kan beskrives ved kun 4 parametre, men parametriseringen afhænger af, hvordan modellen fittes i R.



Additive model: parametrisering 1

```
modelad<-lm(data$organic~data$TREAT+data$TIME)
summary(modelad)
```

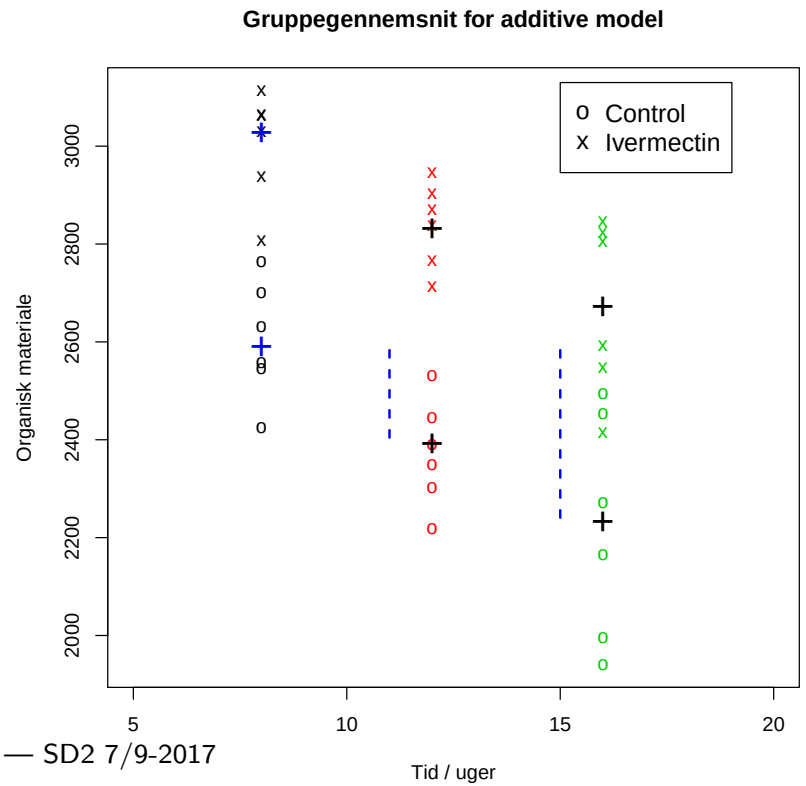
```
##                          Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)             2583.2944   48.03102 53.783871 5.933454e-33
## data$TREATIvermectin     438.6278   48.03102  9.132176 1.990792e-10
## data$TIME12             -197.1333   58.82575 -3.351140 2.076990e-03
## data$TIME16             -357.1500   58.82575 -6.071321 8.831140e-07
```



Additive model: parametrisering 2

```
modelad2<-lm(data$organic~data$TREAT+data$TIME-1)
summary(modelad2)
```

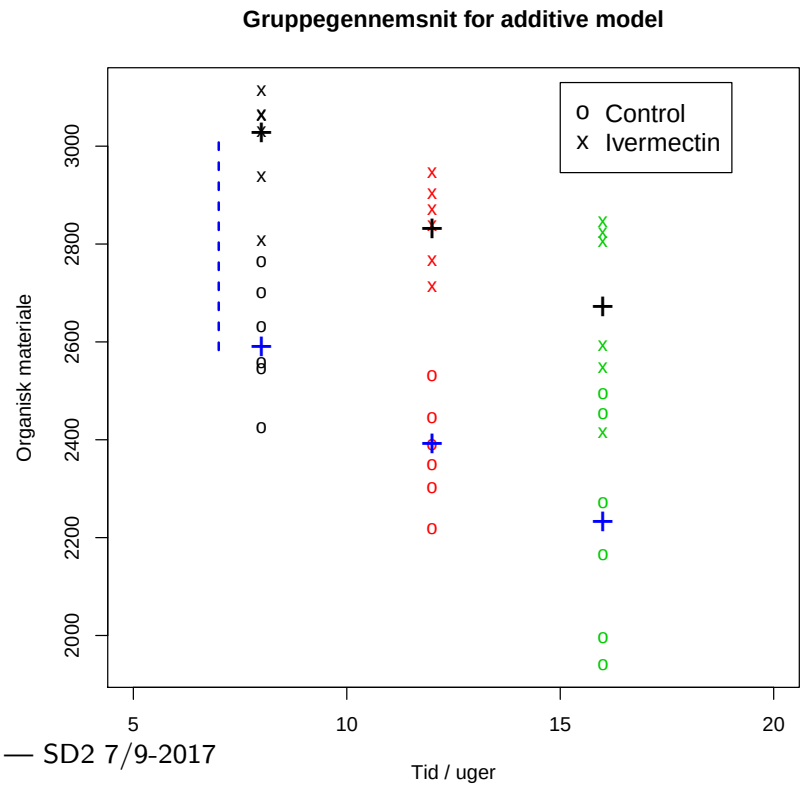
```
##                          Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## data$TREATControl     2583.2944   48.03102 53.783871 5.933454e-33
## data$TREATIvermectin 3021.9222   48.03102 62.916047 4.108697e-35
## data$TIME12           -197.1333   58.82575 -3.351140 2.076990e-03
## data$TIME16           -357.1500   58.82575 -6.071321 8.831140e-07
```



Additive model: parametrisering 3

```
modelad3<-lm(data$organic~data$TIME+data$TREAT-1)
summary(modelad3)
```

```
##                          Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## data$TIME8             2583.2944   48.03102 53.783871 5.933454e-33
## data$TIME12            2386.1611   48.03102 49.679579 7.307952e-32
## data$TIME16            2226.1444   48.03102 46.348052 6.540890e-31
## data$TREATIvermectin    438.6278   48.03102  9.132176 1.990792e-10
```



Additive model: konf.interval / LSD

Udregn fraktil i t-fordeling: $t = t_{0.975, N-m-k+1}$, hvor
$k = |\texttt{TREAT}| = 2, m = |\texttt{TIME}| = 3, N = k \cdot m \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 6$ (antal forsøg).

Et 95 %-konf. int. for $\alpha(a) + \beta(b)$ er

$$\hat{\alpha}(a) + \hat{\beta}(b) \pm t \cdot s \sqrt{\frac{k+m-1}{N}}$$

Least significant difference (LSD) for

Faktor	Kontrast	LSD
A	$\alpha(a_j) - \alpha(a_{j'})$	$t \cdot s \sqrt{\frac{2k}{N}}$
B	$\beta(b_j) - \beta(b_{j'})$	$t \cdot s \sqrt{\frac{2m}{N}}$

Additive model: konklusioner II

Variansestimat og relevant $t-$fraktil

$$t = t_{0.975,32} = 2.0369 \quad s = \hat{\sigma} = 144.1$$

Estimater for enkeltgrupper

	TIME		
TREAT	8	12	16
Ivermectin	3022	2825	2665
Control	2583	2386	2226

Konf.interval gruppeestimat: $\pm t \cdot s\sqrt{\frac{k+m-1}{N}} = \pm 97.8$

$LSD-$værdier: $LSD_{\texttt{TREAT}} = 97.8 \quad LSD_{\texttt{TIME}} = 119.8$

Eksempel 3.2: resultater af forsøget

Hvordan skal vi besvare vores spørgsmål?

- Har behandlingen indflydelse på indholdet af organisk stof?
- Hvilket niveau af `TREAT` giver størst indhold af organisk stof?
- Afhænger indholdet af organisk stof af, hvor længe forsøgsenhederne har ligget i jorden?
- Hvilket niveau af `TIME` giver størst indhold af organisk stof?
- Afhænger effekten af behandlingen af, hvor længe forsøgshederne har ligget i jorden?
- Hvilken komb. af `TREAT` og `TIME` giver det største indhold af organisk stof?

Flerfaktorforsøg: faktordiagrammer

Faktordiagrammer benyttes til at skabe sig overblik over strukturen i et forsøgsdesign.

Dagens gennemgående eksempel indholder 3 egentlige faktorer

$$\texttt{TREAT}, \texttt{TIME}, \texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}$$

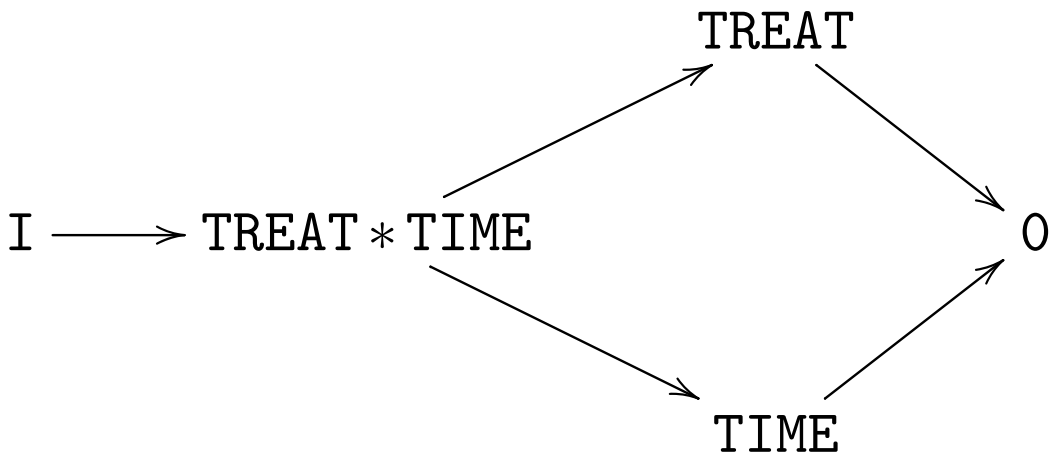
samt de trivielle faktorer

$$\texttt{I}, \texttt{0}$$

Bemærk, at $\texttt{TREAT} \times \texttt{TIME}$ er finere end både TREAT og TIME.

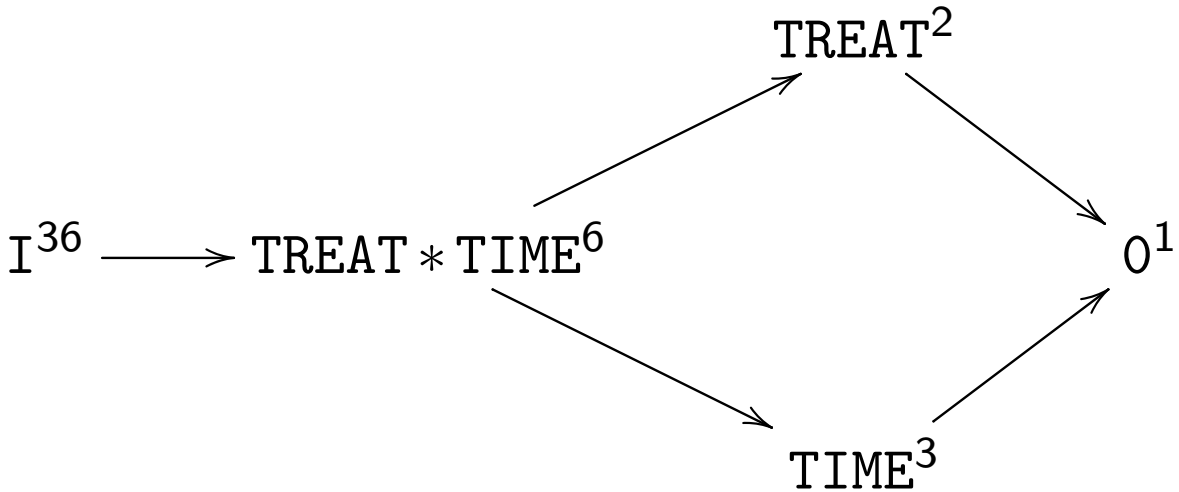
Eksempel: balanceret tofaktorforsøg

Der tegnes pile fra finere faktorer til grovere. Fineste faktor (-enhedsfaktoren `I`) placeres til venstre på tegningen.



Eksempel: balanceret tofaktorforsøg

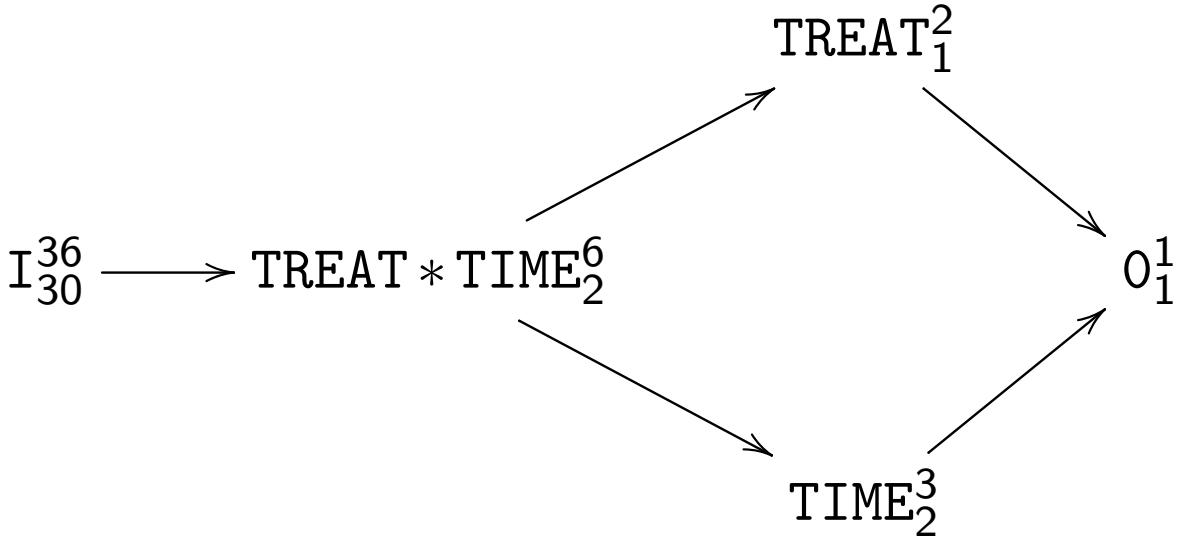
Der tegnes pile fra finere faktorer til grovere. Fineste faktor (-enhedsfaktoren I) placeres til venstre på tegningen.



Antallet af niveauer skrives i øverste højre hjørne.

Eksempel: balanceret tofaktorforsøg

Der tegnes pile fra finere faktorer til grovere. Fineste faktor (-enhedsfaktoren I) placeres til venstre på tegningen.

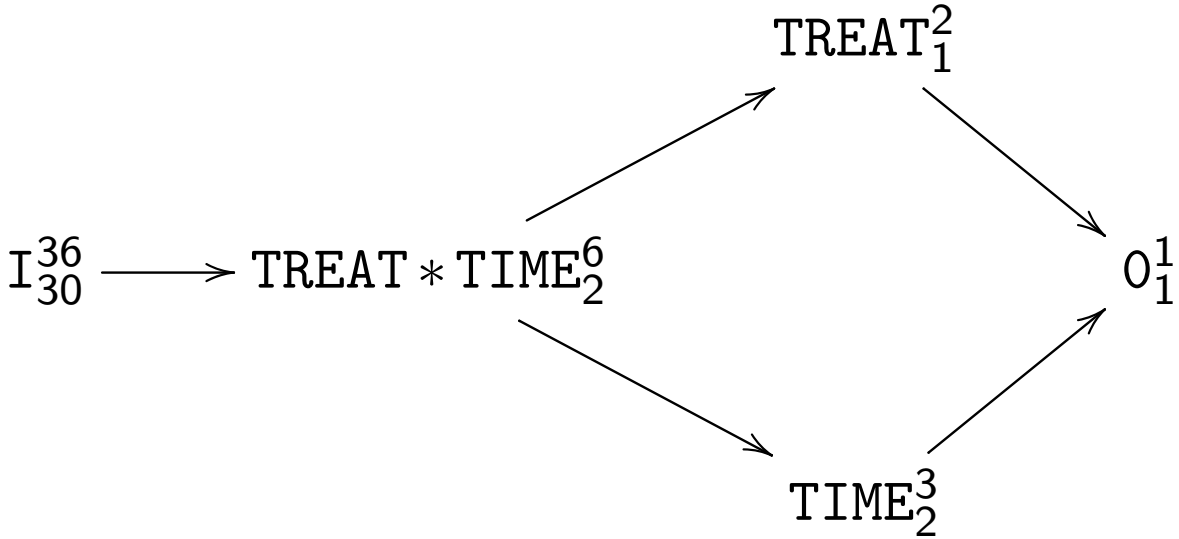


Antallet af niveauer skrives i øverste højre hjørne.

Antallet af df tilføjes i nederste højre hjørne, ved fra antallet af niveauer at fratrække df for grovere faktorer.

Eksempel: balanceret tofaktorforsøg

Der tegnes pile fra finere faktorer til grovere. Fineste faktor (-enhedsfaktoren I) placeres til venstre på tegningen.



Antallet af niveauer skrives i øverste højre hjørne.

Antallet af df tilføjes i nederste højre hjørne, ved fra antallet af niveauer at fratrække df for grovere faktorer.

Ex: Ud for $\mathtt{TREAT} \times \mathtt{TIME}$ skrives 6-1-2-1=2!

Øvelse (hjemme eller senere!)

Der indgår ofte flere faktorer i et eksperiment...

Vækstforsøg med 16 planter i fire vækstkamre under forskellige gødnings- og lysforhold. Planternes vækst er målt.

	Lys 1				Lys 2			
	Kammer 1		Kammer 2		Kammer 3		Kammer 4	
Gødning	4.70	5.14	4.49	4.42	4.42	4.80	4.81	4.95
Ingen gødning	5.28	4.28	4.50	4.30	4.61	4.68	4.77	5.11

- Hvad er forsøgsenhederne og hvor mange er der?
- Hvad er de relevante faktorer, og hvad er deres niveauer?
- Er faktorerne balancerede? Angiv n_F for de balancerede faktorer.

Flere faktorer

Er der noget "særligt" ved faktorerne `kammer` og `lys`?

To faktorer `F` og `G`.

`F` er finere end `G` — eller `F` er "nested indenfor" G — hvis

- `G`-grupperne kan fås ved at slå `F`-grupper sammen
- "hvis vi kender `F`, så kender vi også `G`"

De to udsagn siger det samme!

Vi siger også `G` er grovere end `F`, og vi skriver $\texttt{G} \leq \texttt{F}$ eller $\texttt{F} \geq \texttt{G}$.

Trefaktorforsøg

Fra noternes eksempel 2.2.

	Lys1				Lys2			
	Kammer 1		Kammer 2		Kammer 3		Kammer 4	
Gødning	*	*	*	*	*	*	*	*
Ingen gødning	*	*	*	*	*	*	*	*

Faktorer: $\mathtt{G}$ (Gødning), $\mathtt{K}$ (Kammer) og $\mathtt{L}$ (Lys)

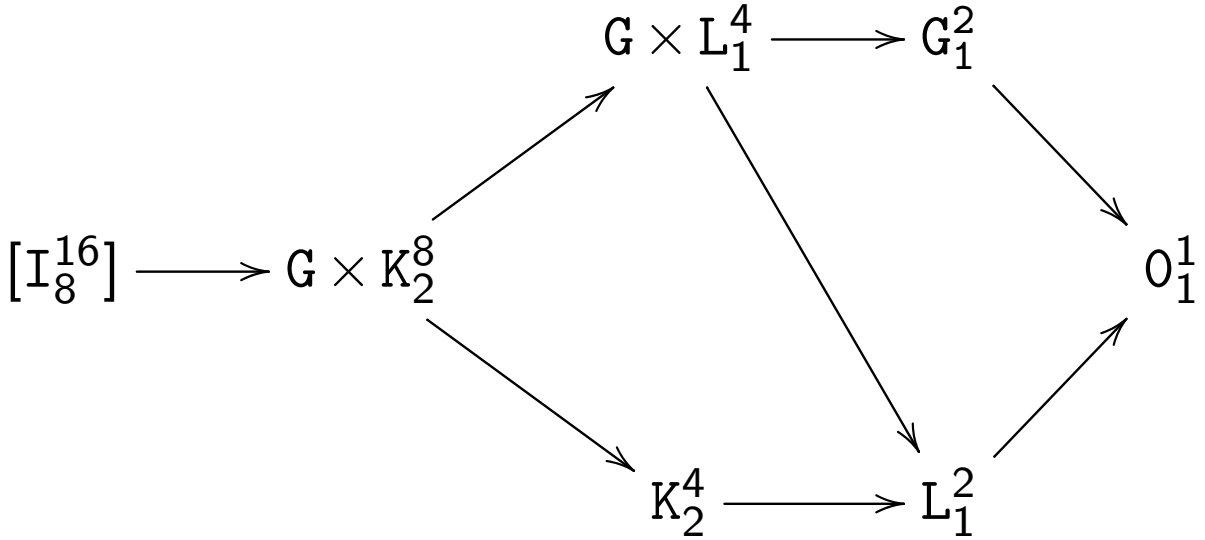
Bemærk: $\mathtt{K}$ er finere end $\mathtt{L}$!

Vekselvirkninger: $\mathtt{G} \times \mathtt{K}$, $\mathtt{G} \times \mathtt{L}$, $(\mathtt{K} \times \mathtt{L} = \mathtt{K})$

Trivielle faktorer: $\mathtt{I}$, 0

Lad os forsøge at tegne det tilhørende faktordiagram.

Trefaktorforsøg



Tilhørende statistiske model:

$$Y_i = \gamma(\mathtt{G} \times \mathtt{K}_i) + e_i, \quad e_i \sim N(0, \sigma^2).$$

G: Gødning

K: Kammer

L: Lys

NB: Vi sætter [..] omkring faktorer som ikke indgår i den systematiske del af modellen!

Spørgsmål: overvejes hjemme!

- Opskriv alle interessante hypoteser ved et tofaktorforsøg
- I hvilken rækkefølge skal modellen reduceres ved et tofaktorforsøg?
- Hvornår kan man teste for vekselvirkning i et tofaktorforsøg?
- Hvordan skal man fortolke parameterestimaterne fra R-udskriften ved den additive model?
- Hvordan beregnes frihedsgradsantallet (DF) for et faktordiagram?