Oversigtsforelæsning 1

Statistisk Dataanalyse 2

Anders Tolver

Uge 8, tirsdag d. 31/10-2017

Program

Ved dagens forelæsning repeteres følgende begreber:

- faktorer og faktordiagrammer
- flersidet variansanalyse
- lineære modeller
- kovariansanalyse
- modelkontrol

Konkret tages udgangspunkt i følgende eksempler:

- holdbarhed af afskårne roser
  (-fra forelæsning d. 12/9-2017)
- hydrolyse af aminosyrer - eksempel 4.2
  (-fra forelæsning d. 19/9-2017)

Detaljeringsgraden afhænger af jeres behov, så skyd bare løs ...

Afskårne roser: firfaktorforsøg

```
##   Obs gartner handler kunde flor middel art  tid
## 1   1       0       0     0    1      A GAR 10.1
## 2   2       0       0     0    2      A GAR  8.9
## 3   3       0       0     0    3      A GAR 11.4
## 4   4       1       0     0    1      A GAR 10.9
## 5   5       1       0     0    2      A GAR  6.9
## 6   6       1       0     0    3      A GAR 11.2
```

Vi interesserer os for følgende 4 faktorer

```
G=factor(gartner)
K=factor(kunde)
H=factor(handler)
F=factor(flor)
```

Vi er kun sekundært interesseret i faktoren `FLOR`.

Faktorer: begreber

Du skal bl.a. kunne forklare begreberne:

- niveauer for en faktor
- balanceret faktor
- produktfaktor
- grovere/finere faktor
- trivielle faktorer: I og 0
- opbygning af faktordiagram for et flerfaktorforsøg
  - hvornår skal der tegnes pile?
  - hvordan beregnes frihedsgrader?
  - hvordan markeres "tilfældige faktorer"?

Faktordiagrammet kan ses på forelæsningsslides fra 12/9-2017.

Afskårne roser: modelreduktion

Du bør bl.a. kunne svare på følgende:

- hvor mange niveauer har de forskellige faktorer?
- hvilke faktorer er balancerede?
- hvordan konstrueres faktordiagrammet - herunder antal frihedsgrader?
- i hvilken rækkefølge foretages reduktion i modellen?

Ved den skriftlige eksamen:

- opskriv løbende statistiske modeller svarende til de hypoteser du tester
- angiv teststørrelse og p-værdi for testet
- skriv konklusion i ord efter hvert udført test
- anfør tydeligt hvilken model, som er din slutmodel, og husk at spørgsmål vedr. estimater skal baseres på slutmodellen

Ekstra lir vedrørende eksemplet med afskårne roser

- Tegnefilm til bedre forståelse af modellerne i 3-sidet variansanalyse: `3way.pdf` fra ugeplan 2

Afskårne roser: slutmodel

Vores slutmodel bliver

$$Y_i = \alpha(\texttt{FLOR}_\texttt{i}) + \phi(\texttt{HANDLER} \times \texttt{KUNDE}_i) + e_i, e_i \text{ uafh. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Slutmodellen er blot en additiv model mellem faktorerne FLOR og HANDLER$\times$KUNDE.

Du bør kunne svare på følgende:

- Hvordan fortolkes parameterestimaterne fra R-udskriften for en additiv model?
- Hvordan bestemmes estimater for grupper og kontraster som ikke er anført i R-udskriften?
- Hvordan bestemmes konfidensintervaller for gruppeestimater og kontraster?
- Hvordan beregnes LSD-værdier i modellen?

Afskårne roser: R-stuff - hvad foregår her?

```
model=lm(tid~H*K+F)
confint(model)
```

```
##                  2.5 %       97.5 %
## (Intercept)  8.6807103 10.735956318
## H1          -0.4532635  1.919930147
## K1          -0.1032635  2.269930147
## F2          -2.0651230 -0.009877016
## F3           0.5848770  2.640122984
## H1:K1        0.4552320  3.811434640
```

```
diff32<-c(0,0,0,-1,1,0)
est210<-c(1,1,0,1,0,0)
est<-rbind(diff32,est210)
```

```
estimable(model,est,conf.int=0.95)
```

```
##        Estimate Std. Error   t value DF     Pr(>|t|) Lower.CI  Upper.CI
## diff32 2.650000  0.4891295  5.417788 18 3.793089e-05 1.622377  3.677623
## est210 9.404167  0.4891295 19.226332 18 1.900702e-13 8.376544 10.431790
```

Lidt mere om LSD-værdier

Jeg kunne godt finde på at bede jer udregne LSD-værdier for

- den ensidede variansanalyse model: kompendiet s. 27
- det tosidede variansanalyse model med vekselvirkning: kompendiet s. 33 (-i princippet den samme formel som ovenfor!)
- den additive model for tosidet variansanalyse: kompendiet s. 34 (-NB: kun gyldig hvis $\mathtt{F} \times \mathtt{G}$ er balanceret!)

Øvrige LSD-værdier i kompendiet betragter jeg som nyttige formler, der dog kun er kursorisk pensum og ikke vil være nødvendige for en fuldstændig besvarelse af eksamenssættet.

Definition af lineær model

Observationer $Y_1, \dots, Y_N$.

En statistisk model for $Y_1, \dots, Y_N$ kaldes lineær hvis

- $Y_1, \dots, Y_N$ er uafh. og normalford. med samme spredning, σ
- Middelværdien af Y_i er en lineær funktion af parametrene:

$$\mathbb{E}Y_i = c_{i,1}\beta_1 + c_{i,2}\beta_2 + \cdots + c_{i,p}\beta_p$$

Her er

- $\beta_1, \dots, \beta_p$ parametre, dvs. ukendte tal (som vi vil estimere)
- c'erne kendte tal som afhænger af designet

Skriver også:

$$Y_i = c_{i,1}\beta_1 + c_{i,2}\beta_2 + \cdots + c_{i,p}\beta_p + e_i, \quad e_i \ iid \ N(0, \sigma^2)$$

Kovariansanalyse: hydrolyse

```
data = read.table("../data/hydrolysis.txt",header=T)
data$logserine = log(data$serine)
data$hourfac = factor(data$hour)
attach(data)
```

```
head(data)
```

```
##     feed hour serine logserine hourfac
## 1 barley    8   4.47  1.497388       8
## 2 barley   16   4.34  1.467874      16
## 3 barley   24   4.22  1.439835      24
## 4 barley   32   4.10  1.410987      32
## 5 barley   72   3.48  1.247032      72
## 6 barley    8   4.46  1.495149       8
```

- Hvilke forklarende variable er der, og er de faktorer eller kovariater?
- Hvis en variabel kan opfattes som både faktor og kovariat, skal du være ekstra omhyggelig ved specifikation af modellerne.

Kovariansanalyse: modeloversigt

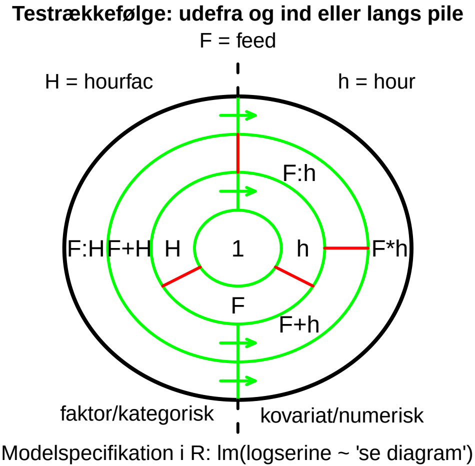
NB: Der er 5 forskellige modeller, som både indeholder `feed` og `hour` som forklarende variabel.

Derfor vigtigt at være præcis ved opskrivning af modeller:

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \gamma(\texttt{feed} \times \texttt{hour}_i) + e_i \\
Y_i &= \alpha(\texttt{feed}_i) + \beta(\texttt{hour}_i) + e_i \\
Y_i &= \alpha(\texttt{feed}_i) + \beta(\texttt{feed}_i) \cdot \texttt{hour}_i + e_i \\
Y_i &= \alpha(\texttt{feed}_i) + \beta \cdot \texttt{hour}_i + e_i \\
Y_i &= \alpha + \beta(\texttt{feed}_i) \cdot \texttt{hour}_i + e_i
\end{aligned}
$$

- Sørg for at have styr på, hvad de modellerne udtrykker
- Sørg for at have styr på, hvilke modeller, som kan testes mod hinanden

Kovariansanalyse: modeloversigt og reduktion



Hydrolyseeksempel: lineær model

Her nåede vi frem til flg. slutmodel

$$Y_i = \alpha(\mathtt{F_i}) + \beta \cdot \mathtt{T_i} + \mathtt{e_i}, \quad \mathtt{e_i} \sim \mathtt{N}(0, \sigma^2).$$

Bemærk, at dette er en lineær model!

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y_1 &= 1 \cdot \alpha(\mathtt{barley}) + 0 \cdot \alpha(\mathtt{fish}) + \ldots + 0 \cdot \alpha(\mathtt{soy}) + 8 \cdot \beta \\
\mathbb{E}Y_2 &= 1 \cdot \alpha(\mathtt{barley}) + 0 \cdot \alpha(\mathtt{fish}) + \ldots + 0 \cdot \alpha(\mathtt{soy}) + 16 \cdot \beta \\
&\vdots \\
\mathbb{E}Y_{50} &= 0 \cdot \alpha(\mathtt{barley}) + 0 \cdot \alpha(\mathtt{fish}) + \ldots + 1 \cdot \alpha(\mathtt{soy}) + 72 \cdot \beta
\end{aligned}$$

Middelværdien er en (kendt) lineær funktion af modellens parametre.

Kovariansanalyse: estimater

```
summary(model)
```

```
##                  Estimate   Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.535482640 0.0036425549 421.540016 5.476254e-81
## feedfish    -0.066317372 0.0043976224 -15.080279 5.374849e-19
## feedmais     0.157997696 0.0043976224  35.927981 3.029453e-34
## feedmeat    -0.018536984 0.0043976224  -4.215229 1.220410e-04
## feedsoy      0.229227446 0.0043976224  52.125313 3.415175e-41
## hour        -0.004071875 0.0000624018 -65.252521 1.973932e-45
```

Typiske spørgsmål ved eksamen samt nogle gode råd:

- Hvilken (slut-) model har vi fat i?
- Estimater (husk at anføre variansestimat)
- Stemmer antal og fortolkning af parametre med hvad du tror?
- Konfidensintervaller for (systematiske) parametre i slutmodel

Kovariansanalyse: eksempler på tillægsspørgsmål

Overvej, om du ved, hvordan du skal svare på følgende:

- Forventede ændring i log-serin indhold for `feed=mais` når hydrolysetiden ændres med 10 timer?
- Forventede forskel i log-serin indhold mellem `meat` og `barley` for hydrolysetid `hour=24` timer?
- Forventede log-serin indhold for `barley` ved hydrolysetid `hour=16` timer?

Gode råd i forbindelse med eksamen:

- Husk at svar skal baseres på estimater fra slutmodel
- Du er ofte nødt til at bruge `estimable` til beregning af konfidensintervaller for estimatet
- Forsøg dog at beregne selve estimatet ved håndkraft som kontrol af, at du benytter `estimable` korrekt

Modelkontrol: oversigt

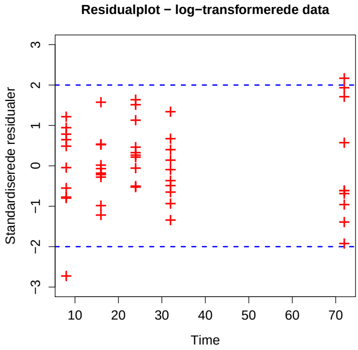
Det er vigtigt at kontrollere antagelserne bag en statistisk model

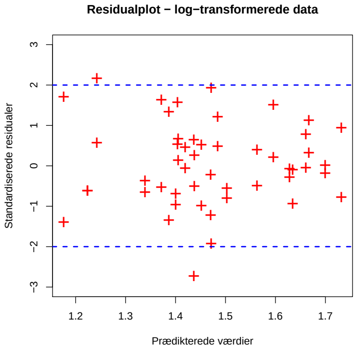
- systematisk del: indgår de rigtige faktorer og kovariater i beskrivelsen af middelværdi-strukturen?
- tilfældig del: er obs. uafhængige og normalfordelte med samme varians (varianshomogenitet)?

Værktøjer til modelkontrol:

- residualplot: prædikterede værdier mod standardiserede residualer
  -manglende varianshomogenitet $\Rightarrow$ prøv transformation af respons
- residualplot: kovariater mod standardiserede residualer
  manglende varianshomogenitet $\Rightarrow$
  kovariat skal ikke indgå lineært, prøv fx. at tilføje kvadratisk led
- QQ-plot: når varianshomogenitet er opnået benyttes QQ-plot til at checke normalfordelingsantagelse (-ligger punkter omkring ret linje?)

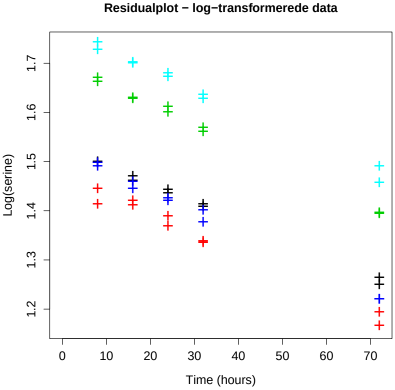
Modelkontrol: hydrolyse-eksempel





Modelkontrol: visuel kontrol af lineær sammenhæng

Man kan altid få noget ud af at optegne responsen med kovariaten og evt lave punkternes farve/form afhænge af øvrige faktorer



Lineær sammenhæng mellem log(`serine`) og hydrolysetid virker OK.

Modelkontrol: test af lineær sammenhæng

I hydrolyse-eksemplet er hydrolyse-tiden en del af forsøgsdesignet, hvorfor vi kan teste om hydrolyse-tiden skal indgå lineært

- Hvilke test svarer til test af en linearitetshypotese? (-forklar på modelhjulet)

Alternativ metode til test af linearitet:

- Fit model med kvadratisk led

$$Y_i = \alpha(\texttt{feed}_i) + \beta \cdot \texttt{hour}_i + \delta \cdot \texttt{hour}_i^2 + e_i$$

- Test hypotesen, $H_0 : \delta = 0$ svarende til modellen

$$Y_i = \alpha(\texttt{feed}_i) + \beta \cdot \texttt{hour}_i + e_i$$

Er der andre måder at lave et test for linearitet, hvor man udnytter samme trick med at tilføje et kvadratisk led? (-se modelhjulet)

Modelkontrol: test af linearitet

```
model3kvad<-lm(logserine~feed+hour+I(hour^2))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = logserine ~ feed + hour + I(hour^2))
##
## Coefficients:
## (Intercept)     feedfish     feedmais     feedmeat      feedsoy
##   1.534e+00   -6.632e-02    1.580e-01   -1.854e-02    2.292e-01
##        hour    I(hour^2)
##  -3.959e-03   -1.348e-06
```

```
model3<-lm(logserine~feed+hour)
```

```
anova(model3,model3kvad)
```

```
  Res.Df        RSS Df   Sum of Sq      F Pr(>F)
1     43 0.00079998
2     44 0.00080247 -1 -2.4889e-06 0.1338 0.7163
```