# Vejledende besvarelser til opgaver i kursusuge 7

## Opgave 7.1: BMS exercise 9.1

1. Der er 16 forsøgsenheder og tre faktorer: `harvest`, `nitrate` og `table`. Inden for hver blok, givet ved faktoren `table`, er alle de 8 kombinationer af `harvest` $\times$ `nitrate` afprøvet netop en gang. Der er således tale om et fuldstændigt randomiseret blokforsøg med behandlingsfaktor `harvest` $\times$ `nitrate` og blokfaktor `table`. I forbindelse med udarbejdelsen af forsøgsplanen, skal de 8 behandlinger randomiseres ud på de 8 forsøgsenheder inden for hver blok.

2. Udgangsmodellen er den tosidede variansanalysemodel med blokke:

$$Y_i = \gamma(\texttt{harvest} \times \texttt{nitrate}_i) + A(\texttt{table}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \dots, e_{16}$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma^2)$ og $A(1), A(2)$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma_A^2)$.

Først testes hypotesen

$$H_0 : \gamma(\texttt{harvest} \times \texttt{nitrate}_i) = \alpha(\texttt{harvest}_i) + \beta(\texttt{nitrate}_i)$$

svarende til den additive model. Vi godkender reduktionen af modellen ($LR = 2.162, p = 0.539$).

Dernæst testes om vi kan fjerne hovedeffekten af `harvest` svarende til hypotesen

$$H_0 : \alpha(\texttt{early}) = \alpha(\texttt{late}) = 0.$$

Vi godkender reduktionen af modellen ($LR = 1.307, p = 0.253$).

Endelig testes om vi kan fjerne hovedeffekten af `nitrate` svarende til modellen

$$Y_i = \mu + A(\texttt{table}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \dots, e_{16}$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma^2)$ og $A(1), A(2)$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma_A^2)$. Der viser sig at være en stærkt signifikant effekt af `nitrate` ($LR = 19.49, p < 0.001$).

3. Slutmodellen bliver

$$Y_i = \beta(\texttt{nitrate}_i) + A(\texttt{table}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \dots, e_{16}$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma^2)$ og $A(1), A(2)$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma_A^2)$. Vi genfitter modellen i `R` med `method='REML'` og fjerner interceptet, således at vi umiddelbart kan aflæse estimaterne for de forskellige niveauer af `nitrate`.

```
> finalmodel=lme(yield~N-1,random=~1|table,method="REML")
> intervals(finalmodel)
Approximate 95% confidence intervals
```

```
 Fixed effects:
        lower    est.    upper
N0.5 20.09070 24.4650 28.83930
N1   27.72570 32.1000 36.47430
N2   30.23320 34.6075 38.98180
N3   33.16320 37.5375 41.91180
attr(,"label")
[1] "Fixed effects:"

 Random Effects:
  Level: table
                    lower     est.    upper
sd((Intercept)) 0.1096514 1.365553 17.00604

 Within-group standard error:
   lower     est.    upper
2.287662 3.474197 5.276148
```

Estimaterne for varianskomponenterne aflæses til

$$\hat{\sigma} = 3.474197 \quad \hat{\sigma}_A = 1.365553.$$

Analysen kan evt. suppleres med, at du bruger `estimable` til at undersøge parvise forskellige mellem estimaterne for de 4 niveauer af `nitrate`.

### Opgave 7.2: BMS exercise 9.2 (Christian Ritz - 29/4 2003)

In a sensory experiment 10 different methods of producing egg powder were investigated with respect to the taste of the product. The experiment was conducted over 15 days and each day samples of 4 powders were given to 7 assessors who gave each sample a score between 0 and 10.

**1.** What kind of design is used here and how should the randomization have been done?

There are 60 observations. The response is an average of taste scores. There are two factors: `day` and `method` with 15 and 10 levels, respectively. View the days as blocks. Within each block only 4 out of 10 methods occur: not all treatments are represented in all blocks.
Use Definition 9.4 to see that the design is a balanced incomplete block design.

1) Is the number of experimental units the same for all treatments: YES, count the number units in each column in Table 9.12.
2) Is the number of experimental units the same in all blocks: YES, count the number of units in each row in Table 9.12.
3) Is the number of blocks in which a given pair of treatments is present the same for all pairs of treatments: YES, all pairs occur twice.

Randomisation is performed in two steps (p. 167): the 15 blocks are randomised on the 15 days, and the 4 units in each block are randomised on the 4 methods in the block.

**2.** Propose a statistical model for the experiment and analyse the data.

The initial model is a one-factor model with blocks (same form as in (9.1) p. 168):

$$\text{Model 1: score}_i = \alpha(\texttt{method}_i) + \beta(\texttt{day}_i) + e_i,$$

where

$$\beta(1), \ldots, \beta(15) \sim N(0, \sigma^2_{day}),$$
$$e_1, \ldots, e_{60} \sim N(0, \sigma^2),$$

and all random variables are assumed to be mutually independent.

Analysis in **R**: There is a significant effect of the method:

```
> library(nlme)
> model1=lme(taste~method,random=~1|day,method="ML")
> model2=lme(taste~1,random=~1|day,method="ML")
> anova(model2,model1)
       Model df      AIC      BIC     logLik   Test  L.Ratio p-value
model2     1  3 283.2185 289.5015 -138.60924
model1     2 12 161.8287 186.9608  -68.91432 1 vs 2 139.3898  <.0001
```

Thus, the model cannot be reduced, and the initial model is the final model, too.

**3.** Formulate the conclusions of the experiment.

There is a strongly significant effect of the factor `method`. For a more detailed view the parameter estimates are used:

```
> finalmodel=lme(taste~method-1,random=~1|day,method="REML")

> intervals(finalmodel)
Approximate 95% confidence intervals

 Fixed effects:
             lower     est.     upper
method1  9.105064 9.800023 10.494981
method2  8.944943 9.639902 10.334860
method3  8.278131 8.973089  9.668048
method4  7.080014 7.774972  8.469931
method5  6.984183 7.679141  8.374100
method6  5.076348 5.771307  6.466265
method7  4.480686 5.175644  5.870603
method8  3.500356 4.195315  4.890273
method9  2.888924 3.583882  4.278841
method10 1.978433 2.673391  3.368350
```

```
attr(,"label")
[1] "Fixed effects:"

 Random Effects:
  Level: day
                    lower      est.    upper
sd((Intercept)) 0.3452589 0.5915873 1.013661

 Within-group standard error:
    lower      est.     upper
0.5612325 0.7081006 0.8934023
```

Method 1 gives the best taste, whereas method 10 gives the poorest taste. Group the estimates to see which estimates are the same.

## Opgave 7.3: BMS exercise 9.3

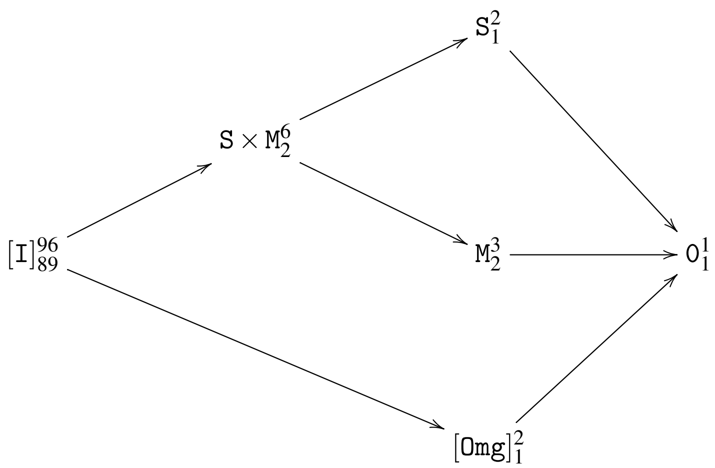
Vekselvirkning mellem A og C er konfunderet med blokkene, idet indexsummen for Aog C er ulige i den ene blok og lige i den anden.

## Opgave 7.4 (Ib Michael Skovgaard, marts 2006)

**(a)** Responsvariablen er $Y_i$ for $i = 1, \ldots 96$, og der er tre faktorer i forsøget

| | | |
|---|---|---|
| Stamme (S) | 2 niveauer | (A, B) |
| Medie (M) | 3 niveauer | (BHI, EtOH, iso) |
| Omgang (Omg) | 2 niveauer | (1, 2) |

Omgang betragtes som en blok-variabel med tilfældig virkning, hvis eventuelle vekselvirkning med øvrige faktorer ikke er inkluderet i modellen. Derimod er vekselvirkningen mellem stamme og medie inkluderet. Faktordiagrammet er




svarende til modellen (model 1)

$$Y_i = \gamma(\mathrm{S}_i, \mathrm{M}_i) + \delta(\mathrm{Omg}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \dots, e_{96}$ antages uafhængige og normalfordelt, $N(0,\sigma^2)$, og $\delta(1), \delta(2)$ antages uafhængige $N(0,\sigma_O^2)$.

**(b)** Vi tester først hypotesen om additivitet mellem stamme og medie ved at teste om model 1 kan reduceres til modellen (model 2)

$$Y_i = \alpha(\mathrm{S}_i) + \beta(\mathrm{M}_i) + \delta(\mathrm{Omg}_i) + e_i,$$

med notation som i model 1. I R-udskriften ses testen for den hypotese at give $LR = 2.347$ og $p = 0.309$. Intet tyder altså på vekselvirkning, og model 2 passer således pænt til data. Dernæst testes, på basis af model 2, dels hypotesen om ingen forskel på stammerne ($LR = 2.974, p = 0.085$), og dels hypotesen om ingen effekt af medierne ($LR = 193.0, p < .0001$). (Prøv evt. at benytte `simulate.lme()` til at vise at forskellen på stammerne måske nok er troværdig, men næppe kan siges at være påvist med dette forsøg.

Estimater for effekten af de tre medier er

$$\hat{\beta}(\mathrm{BHI}) = 0.00, \quad \hat{\beta}(\mathrm{EtOH}) = 1.20, \quad \hat{\beta}(\mathrm{iso}) = 2.03,$$

idet BHI er referencen. Estimater og konfidensintervaller (95%) for forskelle mellem to af medierne ses sidst i R-udskriften, fx

$$\beta(\mathrm{EtOH}) - \beta(\mathrm{BHI}: \; 1.20 \; (1.04, 1.36).$$

Tabellen viser at alle tre medier klart adskiller sig parvist fra hinanden. Den estimerede forskel på BHI og EtOH viser i øvrigt fx om målingen $Z$, som er udtryk for biomasse, at

$$\frac{\hat{Z}((EtOH))}{\hat{Z}((BHI))} = \exp\{\hat{Y}(\mathrm{EtOH}) - \hat{Y}(\mathrm{BHI})\} = \exp(1.20) = 3.3,$$

svarende til at målinger med EtOH er ca. 3.3 så store som målinger med BHI. Estimat for forskellen mellme de to stammer er

$$\hat{\alpha}(\mathrm{A}) - \hat{\alpha}(\mathrm{B} = 0.11$$

med en standard error på 0.066.

**(c)** Ved at tage logaritmen på begge sider af lighedstegnet ser vi at i det tidligere forsøg var

$$\hat{Y}_{\mathrm{B,EtOH}} - \hat{Y}_{\mathrm{A,EtOH}} - \left(\hat{Y}_{\mathrm{B,BHI}} - \hat{Y}_{\mathrm{A,BHI}}\right) = \ln(1.15) = 0.14.$$

Denne størrelse ville være nul hvis der ikke var vekselvirkning og kan derfor kun estimeres i en model med vekselvirkning, altså model 1. I model 1 giver første `estimable()` i R-programmet netop estimat og konfidensinterval for denne størrelse. Resultatet var

$$0.24 \qquad (-0.08, 0.56).$$

Da 0.14 ligger pænt inde i intervallet er der ikke uoverensstemmelse mellem de to forsøg mht. dette resultat.

[Estimatet 0.24 kan også i dette tilfælde aflæses direkte som estimat for vekselvirkningen. En teknisk detalje, som der ikke forventes redegjort for i besvarelsen er at dobbeltdifferencen giver det samme uanset om den beregnes ud fra vekselvirkningsestimaterne eller ud fra de prædikterede værdier svarende til de fire kombinationer. Årsagen hertil er at såvel intercept som de to hovedvirkninger går ud ved beregningen af differencerne.]

## Opgave 7.5

**a)** Det er oplagt at udføre forsøget som et fuldstændigt blokforsøg, hvor hver af de fire kombinationer afprøves netop en gang på hver forsøgsdag. Inden for hver dag, bør det randomiseres i hvilken rækkefølge, der måles på de fire kombinationer. Betegnes faktorerne i forsøget med `dag` (`1,2,3,4`), `materiale` (`1,2`) og `stof` $(+,-)$ bør den statistiske analyse tage udgangspunkt i modellen

$$Y_i = \gamma(\texttt{materiale} \times \texttt{stof}_i) + A(\texttt{dag}_i) + e_i,$$

hvor $e_1,\ldots,e_{16}$ er uafhængige $\sim N(0,\sigma^2)$ og $A(1),\ldots,A(4)$ er uafhængige $\sim N(0,\sigma_A^2)$.

**b)** Vi inddrager nu yderligere en faktor (`substrat`) med to niveauer i forsøget. Dette giver anledning til i alt $2^3 = 8$ kombinationer, så da vi kun kan foretage 4 målinger om dagen, bliver der uanset forsøgsplanen tale om et ufuldstændigt blokforsøg.

Vi ved fra teorien om $2^n$-te forsøg i theorem 9.11 i kompendiets kapitel 9.3, at det er muligt at afprøve de 8 kombinationer over 2 dage, hvor en hoved- eller vekselvirkning efter eget valg konfunderes med `dag`. Da vi råder over 8 forsøgsdage kan vi planlægge eksperimentet som fire $2^3$-forsøg over to dage hver, hvor man i hvert $2^3$-forsøg konfunderer netop en hoved- eller vekselvirkning med `dag`. Det vil være en god ide at benytte sig af partiel konfundering, således at det er forskellige effekter som konfunderes med `dag` ved de fire $2^3$-forsøg. Da man typisk er mest interesseret i hovedeffekter, vil det være nærliggende at konfundere trefaktorvekselvirkningen samt de tre parvise vekselvirkninger.

Udviklingen af forsøgsplanen laves i flere trin.

1) I første omgang opskrives hvilke kombinationer, som skal optræde sammen, i de forskellige $2^3$-forsøg.

| konfunderet faktor | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\texttt{mat} \times \texttt{stof} \times \texttt{sub}$ | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub1 |
| | mat1,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof2,sub2 |
| $\texttt{mat} \times \texttt{stof}$ | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub1 | mat2,stof2,sub2 |
| | mat1,stof2,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof1,sub2 |
| $\texttt{mat} \times \texttt{sub}$ | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub2 |
| | mat1,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof2,sub1 |
| $\texttt{stof} \times \texttt{sub}$ | mat1,stof1,sub1 | mat2,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof2,sub2 |
| | mat1,stof1,sub2 | mat2,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof2,sub1 |

2) Randomiser dernæst rækkerne i skemaet ud på de forskellige dage

| `dag` | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | mat1,stof2,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof1,sub2 |
| 2 | mat1,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof2,sub2 |
| 3 | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub2 |
| 4 | mat1,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub1 | mat2,stof2,sub1 |
| 5 | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub1 | mat2,stof2,sub2 |
| 6 | mat1,stof1,sub2 | mat2,stof1,sub2 | mat1,stof2,sub1 | mat2,stof2,sub1 |
| 7 | mat1,stof1,sub1 | mat2,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof2,sub2 |
| 8 | mat1,stof1,sub1 | mat1,stof2,sub2 | mat2,stof1,sub2 | mat2,stof2,sub1 |

3) Randomiser dernæst de 4 kombinationer inden for hver af de 8 forsøgsdage.

Ved den statistiske analyse tages udgangspunkt i en tresidet variansanalysemodel med blokke

$$Y_i = \delta(\texttt{materiale} \times \texttt{stof} \times \texttt{substrat}_i) + A(\texttt{dag}_i) + e_i,$$

hvor $e_1, \ldots, e_{16}$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma^2)$ og $A(1), \ldots, A(4)$ er uafhængige $\sim N(0, \sigma_A^2)$.

**c)** I forsøget indgår $\nu_T = 8$ behandlinger og der kan afprøves $r_B = 4$ behandlinger per dag. Ifølge theorem 9.6 i kompendiet skal følgende krav være opfyldt for et BIBD

$$\begin{aligned} r_T \cdot 8 = 4 \cdot \nu_B &\quad \Rightarrow \quad \nu_B = 2r_T \\ \lambda \cdot (8-1) = r_T \cdot (4-1) &\quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{7} \cdot r_T \\ \nu_B &\geq 8 \end{aligned}$$

Tallet $\lambda$ beskriver her antallet af gange hver af de 8 behandlingskombinationer optræder på samme blok (`dag`). For at $\lambda$ kan være et heltal må vi mindst have $r_T = 7$. Det viser sig, at alle kravene fra theorem 9.6 er opfyldt med $r_T = 7$ og $\nu_B = 14$ blokke. Der skal med andre ord mindst bruges 14 forsøgsdage til at lave et balanceret ufuldstændigt blokforsøg.

Det er vigtigt at huske på, at theorem 9.6 ikke siger noget om, hvorvidt man faktisk kan realisere et BIBD med 14 blokke. Hvis man vil *bevise* at det kan lade sig gøre at lave et BIBD med 8 behandlinger på 14 blokke af størrelse 4, så er der ingen anden vej, end at sætte sig ned og konstruere forsøgsplanen selv.