Ringkasan Materi UN Matematika SMA Program IPA
Per Indikator Kisi-Kisi UN 2012

By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

SKL 1. Memahami pernyataan dalam matematika dan ingkarannya, menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk *dan pernyataan berkuantor,* serta menggunakan prinsip logika matematika dalam pemecahan masalah.

1.1. Menentukan penarikan kesimpulan dari *beberapa* premis.

Pernyataan adalah kalimat yang memiliki nilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak kedua-duanya.

Ingkaran p dilambangkan dengan $\sim p$ dibaca tidak benar bahwa p.

Pernyataan majemuk:
1. Konjungsi ($p \wedge q$, dibaca: p dan q)
2. Disjungsi ($p \vee q$, dibaca: p atau q)
3. Implikasi ($p \Rightarrow q$, dibaca: jika p maka q)
4. Biimplikasi ($p \Leftrightarrow q$, dibaca: p jika dan hanya jika q)

Tabel kebenaran pernyataan majemuk:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$\sim p \vee q$ "bukan atau"
B	B	S	S	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S	S	S
S	B	B	S	S	B	B	S	S	B
S	S	B	B	S	S	B	B	B	B

senilai

senilai

Tabel kebenaran ingkaran pernyataan majemuk:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	S	B	S
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	S	B	B	S
S	S	B	B	S	B	S	B

ingkaran ingkaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$ "dan tidak"	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
B	B	S	S	B	S	B	S
B	S	S	B	S	B	S	B
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	S	B	S

ingkaran ingkaran

Tabel kebenaran implikasi:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$ implikasi	$q \Rightarrow p$ konvers	$\sim p \Rightarrow \sim q$ invers	$\sim q \Rightarrow \sim p$ kontraposisi
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

senilai

senilai

Pernyataan senilai dengan implikasi:
$(p \Rightarrow q) \cong (\sim p \vee q)$ "bukan atau"
$(p \Rightarrow q) \cong (\sim q \Rightarrow \sim p)$ "kontraposisi"

Pernyataan senilai dengan ingkaran implikasi:
$\sim (p \Rightarrow q) \cong (p \wedge \sim q)$ "dan tidak"

Cara penarikan kesimpulan dari dua premis:

1. **Modus Ponens**

   Premis 1 : $p \Rightarrow q$
   Premis 2 : p

   $\therefore$ **Kesimpulan** : q

2. **Modus Tollens**

   Premis 1 : $p \Rightarrow q$
   Premis 2 : $\sim q$

   $\therefore$ **Kesimpulan** : $\sim p$

3. **Silogisme**

   Premis 1 : $p \Rightarrow q$
   Premis 2 : $q \Rightarrow r$

   $\therefore$ **Kesimpulan** : $p \Rightarrow r$

Prediksi Soal UN 2012

Ani rajin belajar maka naik kelas.
Ani dapat hadiah atau tidak naik kelas.
Ani rajin belajar.
Kesimpulan yang sah adalah ....

A. Ani naik kelas
B. Ani dapat hadiah
C. Ani tidak dapat hadiah
D. Ani naik kelas dan dapat hadiah
E. Ani dapat hadiah atau naik kelas

1.2. Menentukan ingkaran atau kesetaraan dari pernyataan majemuk atau pernyataan *berkuantor.*

Jenis kuantor:

Kuantor	Penulisan	Cara Baca
Universal	$\forall x, P(x)$	Untuk semua x berlaku $P(x)$
Eksistensial	$\exists x, P(x)$	Ada beberapa x berlakulah $P(x)$

Ingkaran kuantor

Ingkaran Kuantor	Cara Baca
$\sim(\forall x, P(x)) \cong \exists x, \sim P(x)$	Ada beberapa x bukan $P(x)$
$\sim(\exists x, P(x)) \cong \forall x, \sim P(x)$	Semua x bukan $P(x)$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Ingkaran dari pernyataan "Apabila guru hadir maka semua murid bersuka ria" adalah ....

A. Guru hadir dan semua murid bersuka ria
B. Guru hadir dan ada beberapa murid tidak bersuka ria
C. Guru hadir dan semua murid bersuka ria
D. Guru tidak hadir dan ada beberapa murid tidak bersuka ria
E. Guru tidak hadir dan semua murid tidak bersuka ria

SKL 2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan pangkat, akar dan logaritma, fungsi aljabar sederhana, *fungsi kuadrat, fungsi eksponen dan grafiknya, fungsi komposisi dan fungsi invers,* sistem persamaan linear, persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, persamaan lingkaran dan persamaan garis singgungnya, suku banyak, *algoritma sisa dan teorema pembagian,* program linear, matriks *dan determinan*,vektor, transformasi geometri *dan komposisinya,* barisan dan deret, serta mampu menggunakannya dalam pemecahan masalah.

2.1. Menggunakan aturan pangkat, akar dan logaritma.

Bentuk pangkat:

1. Pangkat bulat positif
   $\mathrm{a^n} = \underbrace{\mathrm{a \times a \times \ldots \times a}}_{\text{sebanyak n faktor}}$
2. Pangkat nol $(\mathrm{a^0} = 1)$
3. Pangkat satu $(\mathrm{a^1} = \mathrm{a})$
4. Pangkat negatif $\left(a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\right)$

Sifat-sifat bilangan berpangkat:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$
3. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}; b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Pangkat pecahan dan bentuk akar:

Jika $a, b, c, m,$ dan $n \in \mathbb{R}$, dan $a, n > 0$, maka:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Sifat-sifat bentuk akar:

Untuk $a, b, c > 0$ berlaku:

1. $a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$
2. $a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}$
3. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$
6. $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
7. $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Merasionalkan penyebut pecahan bentuk akar:

1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{b}\sqrt{b}$
2. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Bentuk logaritma:

Untuk $a, x > 0$, dan $a \neq 1$, berlaku:

$a^n = x \Rightarrow {}^a\log x = n$

Sehingga,

$a^0 = 1 \Rightarrow {}^a\log 1 = 0$

$a^1 = a \Rightarrow {}^a\log a = 1$

$a^n = a^n \Rightarrow {}^a\log a^n = n$

Dalam logaritma bilangan pokok (a) harus positif dan tidak boleh sama dengan 1. Sementara numerus (x) harus positif. Untuk hasil logaritma (n) bebas.

Sifat-sifat logaritma:

Untuk $a, b, c > 0$ dan $m, n \in \mathbb{R}$ serta $a \neq 1$, berlaku:

1. ${}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$
2. ${}^a\log\left(\dfrac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$
3. ${}^a\log b^m = m \cdot {}^a\log b$
4. ${}^a\log b = \dfrac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$
5. ${}^a\log b = \dfrac{1}{{}^b\log a}$
6. ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$
7. ${}^{a^n}\log b^m = \dfrac{m}{n} \cdot {}^a\log b$
8. $a^{{}^a\log b} = b$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Diketahui ${}^3\log\sqrt{6\mathrm{x}-3} = 2$. Nilai $2\mathrm{x} = \ldots$.

A. 20
B. 22
C. 24
D. 26
E. 28

Nilai x yang memenuhi $({}^4\log x)^2 - {}^2\log\sqrt{x} - \frac{3}{4} = 0$ adalah ....

A. 16 atau 4
B. 16 atau $\frac{1}{4}$
C. 8 atau 2
D. 8 atau $\frac{1}{2}$
E. 8 atau 4

2.2. Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.

Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dan $a \neq 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2,
Dari rumus abc diperoleh:

$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$, dan $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$

maka:

1. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	3. $\lvert x_1 - x_2\rvert = \frac{\sqrt{D}}{a}$
2. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	

Menentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya x_1 dan x_2

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 + x_2) = 0$$

Rumus yang sering ditanyakan:

1.	$\frac{1}{x_1} \pm \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 \pm x_2}{x_1 x_2}$
2.	$x_1^2 \pm x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \mp 2x_1x_2$
3.	$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
4.	$x_1^3 \pm x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 \mp 3x_1x_2(x_1 \pm x_2)$
5.	$x_1^3 \pm x_2^3 = (x_1 + x_2)^4 \mp 2(x_1x_2)^2$
6.	$\frac{x_1}{x_2} \pm \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1 \pm x_2}{x_1 x_2}$
7.	$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$
8.	$x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Persamaan kuadrat $-2x^2 + 3x - 2 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2, nilai $x_1^3 + x_2^3 = ...$

A. $\frac{9}{8}$
B. $\frac{3}{8}$
C. $-\frac{1}{8}$
D. $-\frac{3}{8}$
E. $-\frac{9}{8}$

2.3. Menyelesaikan masalah persamaan atau fungsi kuadrat dengan menggunakan diskriminan.

Persamaan Kuadrat.

Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dan $a \neq 0$, maka nilai diskriminan (D) adalah:

$D = b^2 - 4ac$

Jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat:

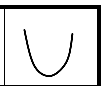
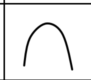
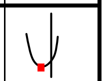
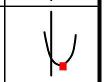
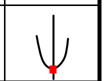
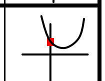
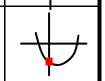
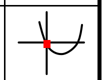
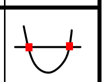
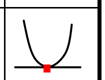
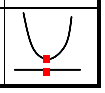
1. $D \geq 0$, kedua akar real/nyata.
   a. $D > 0$, kedua akar real berlainan.
   b. $D = 0$, kedua akar real kembar/sama.
2. $D < 0$, kedua akar tidak real/imajiner/khayal.
3. $D = r^2$, kedua akar rasional (cara menentukan akar lebih mudah menggunakan pemfaktoran.

Hubungan akar-akar persamaan kuadrat:

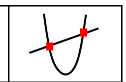
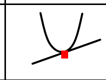
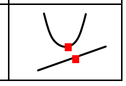
1. Dua akar positif.
   - $D \geq 0$
   - $x_1 + x_2 > 0$
   - $x_1 \cdot x_2 > 0$
2. Dua akar negatif.
   - $D \geq 0$
   - $x_1 + x_2 < 0$
   - $x_1 \cdot x_2 > 0$
3. Dua akar berbeda tanda.
   - $D > 0$
   - $x_1 \cdot x_2 < 0$
4. Dua akar saling berkebalikan.
   - $D \geq 0$
   - $x_1 \cdot x_2 = 1$

Fungsi Kuadrat.

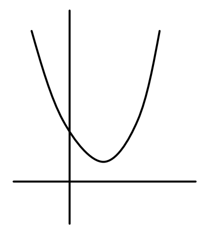
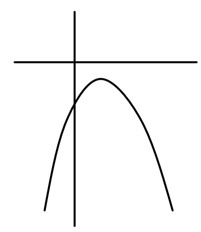
Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$, koordinat titik puncak $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ dan grafik berbentuk parabola:

a	$a > 0$	grafik terbuka ke atas	
	$a < 0$	grafik terbuka ke bawah	
b	$b > 0$, $a > 0$	puncak di sebelah kiri sumbu y	
	$b < 0$, $a > 0$	puncak di sebelah kanan sumbu y	
	$b = 0$	puncak tepat di sumbu y	
c	$c > 0$	grafik memotong sumbu y positif	
	$c < 0$	grafik memotong sumbu y negatif	
	$c = 0$	grafik melalui titik $(0, 0)$	
D	$D > 0$	grafik memotong sumbu x	
	$D = 0$	grafik menyinggung sumbu x	
	$D < 0$	grafik tidak memotong sumbu x	

Kedudukan garis $g: y = mx + c$ terhadap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$:
Substitusikan g ke $f(x)$, lalu cari nilai D.

$D > 0$	berpotongan di dua titik (memotong)	
$D = 0$	berpotongan di satu titik (menyinggung)	
$D < 0$	tidak berpotongan (terpisah)	

Fungsi kuadrat definit positif atau negatif:

Definit positif 	grafik fungsi kuadrat seluruhnya berada di atas sumbu x, artinya untuk setiap nilai x maka nilai y selalu positif. **Syarat:** $a > 0$ dan $D < 0$
Definit negatif 	grafik fungsi kuadrat seluruhnya berada di bawah sumbu x, artinya untuk setiap nilai x maka nilai y selalu negatif. **Syarat:** $a < 0$ dan $D < 0$

PREDIKSI SOAL UN 2012

$(m + 3)x^2 + 2(m - 7)x + m - 3 = 0$ akan mempunyai akar-akar positif jika ....

A. $-3 < m < 3$
B. $-3 < m < 4\frac{1}{7}$
C. $-3 < m < 7$
D. $-7 < m < 3$
E. $-4\frac{1}{7} < m < -3$

2.4. Menyelesaikan masalah *sehari-hari yang berkaitan dengan* sistem persamaan linear.

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Penyelesaian SPL dua variabel dapat dilakukan dengan metode:

1. Metode grafik, penyelesaian ditunjukkan dengan koordinat titik potong kedua garis.
2. Metode Substitusi, mengganti satu variabel dengan variabel lain yang telah didefinisikan.
3. Metode Eliminasi, menghilangkan salah satu variabel dengan menjumlahkan atau mengurangkan kedua persamaan linear.
4. Metode gabungan eliminasi dan substitusi.
5. Metode determinan matriks.

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Penyelesaian SPL tiga variabel adalah dengan mengubah bentuk SPL tiga variabel menjadi bentuk SPL dua variabel melalui eliminasi salah satu variabel lalu dilanjutkan dengan substitusi dua variabel pada SPL dua variabel yang dihasilkan ke salah satu persamaan linear tiga variabel.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Pak Ali bekerja selama 6 hari dengan 4 hari di antaranya lembur mendapat upah Rp74.000,00. Pak Bisri bekerja selama 5 hari dengan 2 hari di antaranya lembur mendapat upah Rp55.000,00. Pak Ali, Pak Bisri, dan Pak Catur bekerja dengan aturan upah yang sama. Jika Pak Catur bekerja 4 hari dengan terus menerus lembur, maka upah yang akan diperoleh adalah ....

A. Rp36.000,00
B. Rp46.000,00
C. Rp56.000,00
D. Rp60.000,00
E. Rp70.000,00

2.5. Menentukan *persamaan lingkaran* atau garis singgung lingkaran.

Persamaan lingkaran:

1. Persamaan lingkaran pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r:
   $x^2+y^2=r^2$
2. Persamaan lingkaran pusat $P(a,b)$ dan jari-jari r:
   $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
3. Persamaan lingkaran bentuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$,
   berarti pusat $P(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r=\sqrt{\frac{1}{4}A+\frac{1}{4}B-C}$

Persamaan garis singgung lingkaran:

1. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=r^2$ di titik $T(x_1,y_1)$:
   $x_1x+y_1y=r^2$
2. Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ di titik $T(x_1,y_1)$:
   $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$
3. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ titik $T(x_1,y_1)$:
   $x_1x+y_1y+\frac{A}{2}(x_1+x)+\frac{B}{2}(y_1+y)+C=0$
4. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=r^2$ dengan gradien m:
   $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$
5. Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dengan gradien m:
   $(y-b)=m(x-b)\pm r\sqrt{1+m^2}$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Lingkaran $x^2+y^2-16x-12y=0$ memotong sumbu y di p. Salah satu persamaan garis singgung pada lingkaran di titik p adalah ....

A. $y=\frac{4}{3}x+12$
B. $y=-\frac{4}{3}x+12$
C. $y=\frac{3}{4}x+9$
D. $y=\frac{3}{4}x+12$
E. $y=-\frac{3}{4}x+12$

2.6. Menyelesaikan *masalah yang berkaitan dengan* teorema sisa atau teorema faktor.

Bentuk umum suku banyak (polinomial):

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$,
dengan $a_n\neq 0$ dan n bilangan cacah disebut suku banyak dengan variabel x berderajat n.

dimana,
$a_n,a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1$ adalah koefisien suku banyak dari masing-masing $x^n,x^{n-1},x^{n-2},\ldots,x$.
a_0 disebut suku tetap.

Nilai suku banyak:

Nilai suku banyak $f(x)$ berderajat n pada saat $x = h$ adalah $f(h)$.

Cara menghitung nilai suku banyak:

1. Substitusi
2. Pembagian sintetis Horner

Pembagian suku banyak:

$f(x) = P(x) \cdot H(x) + S$

keterangan:

$f(x)$ = yang dibagi → berderajat n

$P(x)$ = pembagi → berderajat k

$H(x)$ = hasil bagi → berderajat $(n - k)$

S = sisa → berderajat $(k - 1)$

Teorema sisa:

1. Suatu suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x - a)$ maka sisanya = $f(a)$.
2. Suatu suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x + a)$ maka sisanya = $f(-a)$.
3. Suatu suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(ax - b)$ maka sisanya = $f(b/a)$.
4. Suatu suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(ax - b)$ maka sisanya = $f(-b/a)$.

Teorema faktor:

1. Jika pada suku banyak $\mathrm{f(x)}$ berlaku $\mathrm{f(a) = 0, f(b) = 0,}$ dan $\mathrm{f(c) = 0}$, maka $\mathrm{f(x)}$ habis dibagi $\mathrm{(x - a), (x - b),}$ dan $\mathrm{(x - c)}$,
   sehingga $(x - a), (x - b),$ dan $(x - c)$ adalah faktor dari $f(x)$.
2. Jika $(x - a)$ adalah faktor dari $f(x)$ maka $x = a$ adalah akar dari $f(x)$.
3. Jika $f(x)$ dibagi oleh $(x - a)(x - b)$ maka sisanya adalah $S(x) = px + q$,
   dimana,
   $$p = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$
   $$q = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{a - b}$$

Akar-akar suku banyak:

Teorema Vieta.

Akar-akar rasional bulat suku banyak:

1. Jika jumlah koefisien suku banyak = 0, maka $x = 1$ adalah akar dari suku banyak tersebut.
2. Jika jumlah koefisien pangkat ganjil dan pangkat genap adalah sama, maka $x = -1$ adalah akar dari suku banyak tersebut.
3. Jika langkah (1) dan (2) tidak memenuhi, maka gunakan cara coba-coba yaitu dengan memilih faktor dari konstanta suku banyak.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Suatu suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x - 1)$ sisanya 6 dan dibagi $(x + 3)$ sisanya –2. Bila $f(x)$ dibagi $(x^2 + 2x - 3)$ sisanya adalah ....

A. $4x + 2$
B. $2x + 4$
C. $-2x + 8$
D. $\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$

Persamaan $3x^3 + (p + 2)x^2 - 16x - 12 = 0$ mempunyai akar $x = 2$.
Jumlah ketiga akar persamaan itu adalah ....

A. 4
B. 3
C. 1
D. $-1\frac{2}{3}$
E. 4

2.7. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan komposisi dua fungsi atau fungsi invers.

Fungsi komposisi

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Sifat fungsi komposisi

Tidak komutatif $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Assosiatif $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$

Identitas $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$

Penentuan fungsi pembentuk komposisi

Diketahui $(f \circ g)(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = 3x - 1$:
maka $g(x) = ?$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 3x + 2 \\
f(g(x)) &= 3x + 2 \\
3g(x) - 1 &= 3x + 2 \\
3g(x) &= 3x + 2 + 1 \\
3g(x) &= 3x + 3 \\
g(x) &= \frac{3x + 3}{3} \\
g(x) &= x + 1
\end{aligned}$$

Diketahui $(f \circ g)(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x + 1$:
Maka $f(x) = ?$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 3x + 2 \\
f(g(x)) &= 3x + 2 \\
f(x + 1) &= \underbrace{3x + 2}_{\substack{munculkan \\ bentuk\ (x+1)}} \\
f(x + 1) &= 3(x + 1) - 1 \\
f(x) &= 3x - 1
\end{aligned}$$

Fungsi invers

Invers dari fungsi f ditulis f^{-1}. Artinya kebalikan dari fungsi f.

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Contoh:

$$\begin{aligned}
y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x &= y + 2 \\
x &= \frac{y + 2}{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

Fungsi invers dari fungsi komposisi

$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$((f \circ g) \circ g^{-1})(x) = f(x)$

$(f^{-1} \circ (f \circ g))(x) = g(x)$

$(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Diketahui $f(x) = \sqrt{x} + 2,\ g(x) = x^2 + 2x,$ maka $(g \circ f)(x) = ...$

A. $x^2 + 4x + 8$
B. $x^2 + 4\sqrt{x} + 8$
C. $x^2 + 6\sqrt{x} + 8$
D. $x^2 + 4\sqrt{x} + 4$
E. $5x + 4$

Jika $f(x) = x^2 - 2x + 3$ maka $f^{-1}(x) = ...$

A. $\sqrt{x - 2} + 1$
B. $\sqrt{x + 2} + 1$
C. $\sqrt{x - 2} - 1$
D. $\sqrt{x + 2} - 1$
E. $\sqrt{x - 1} + 2$

2.8. Menyelesaikan masalah program linear.

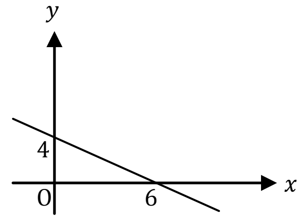
Program linear adalah suatu metode yang digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan optimasi linear (nilai maksimum dan nilai minimum)

Grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel

Contoh: gambarlah grafik $2x + 3y \geq 12$!

$2x + 3y = 12$

x	y	(x, y)
0	4	$(0, 4)$
6	0	$(6, 0)$



Titik uji $O(0,0)$

$$2x + 3y \geq 12$$
$$2(0) + 3(0) \geq 12$$
$$0 \geq 12 \text{ (salah)}$$

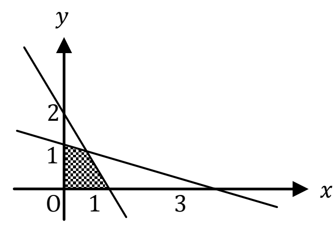
sehingga titik $O(0, 0)$ tidak termasuk dalam daerah himpunan penyelesaian, jadi daerah himpunan penyelesaian adalah sebelah atas garis $2x + 3y = 12$

Grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel

Contoh: gambarlah grafik $+3y \leq 3,\ 2x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$!

$x + 3y = 3$

x	y	(x, y)
0	1	$(0, 1)$
3	0	$(3, 0)$

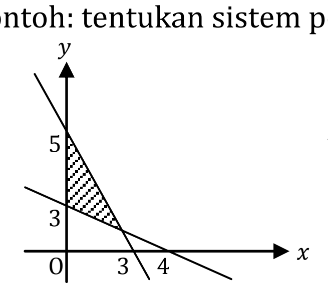


$2x + y = 2$

x	y	(x, y)
0	2	$(0, 2)$
1	0	$(1, 0)$

Sistem persamaan linear dua variabel yang diketahui grafiknya

Contoh: tentukan sistem persamaan linear yang memenuhi grafik di bawah ini !



$x \geq 0, y \geq 0$
$3x + 4y \geq 12$
$5x + 3y \leq 15$

Model matematika adalah bentuk penalaran manusia dalam menerjemahkan permasalahan menjadi bentuk matematika (dimisalkan dalam variabel x dan y) sehingga dapat diselesaikan.

Mengubah soal cerita menjadi model matematika

Contoh: Sebuah area parkir dengan luas 3.750 m^2, maksimal hanya dapat ditempati 300 kendaraan yang terdiri atas sedan dan bus. Jika luas sebuah sedan 5 m^2 dan bus 15 m^2, tentukanlah model matematikanya !

Misalkan:
$x =$ banyaknya sedan
$y =$ banyaknya bus

	Sedan (x)	Bus (y)	Total	Pertidaksamaan linear
Banyak kendaraan	1	1	300	$x + y \leq 300$
Luas kendaraan	5	15	3750	$5x + 15y \leq 3750$

Jadi berdasarkan pertidaksamaan tersebut, model matematikanya adalah:

$$\begin{cases} x + \ \ y \leq 300 \\ x + 3y \leq 750, \text{bentuk sederhana dari } 5x + 15y \leq 3750 \\ x \qquad \geq \quad 0, \text{karena jumlah sedan tidak mungkin negatif} \\ \qquad y \geq \quad 0, \text{karena jumlah bus tidak mungkin negatif} \end{cases}$$

Fungsi objektif dari soal cerita
$f(x, y) = ax + by$

Titik pojok daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah letak nilai maksimum atau minimum berada. Titik pojok ditentukan dengan menggambar grafik sistem pertidaksamaan linear.

Nilai maksimum atau nilai minimum masing-masing ditentukan oleh nilai terbesar atau terkecil fungsi objektif pada titik pojok daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Sebuah pesawat udara berkapasitas tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg dan kelas ekonomi hanya 20 kg. Pesawat hanya dapat menampung bagasi 1.440 kg. Jika harga tiket kelas utama Rp600.000,00 dan kelas ekonomi Rp400.000,00, pendapatan maksimum yang diperoleh adalah ....

A. Rp8.400.000,00
B. Rp14.400.000,00
C. Rp15.600.000,00
D. Rp19.200.000,00
E. Rp21.600.000,00

2.9. Menyelesaikan operasi matriks.

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.

Bentuk umum matriks

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elemen matriks adalah bilangan pada matriks
a_{mn} artinya elemen matriks pada baris ke-m dan kolom ke-n.

Ordo matriks adalah banyaknya baris dan kolom pada matriks

Macam-macam matriks
Antara lain matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks diagonal, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks identitas.

Kesamaan dua matriks
Dua matriks dikatakan sama/setara, jika ordo kedua matriks tersebut sama dan elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama juga.

Transpose matriks

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Sifat matriks tanspose:
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(kA)^T = kA^T$

Operasi penjumlahan dua matriks

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Operasi pengurangan dua matriks

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

Perkalian skalar dengan matriks

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks dengan matriks

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Determinan matriks 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$$

Matriks yang tidak memiliki determinan disebut matriks singular.
Sifat determinan:
- $|A^T| = |A|$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$
- $|AB| = |A||B|$
- $|(AB)^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}\dfrac{1}{|A|}$

Invers matriks 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat matriks tanspose:
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Penyelesaian SPL dua variabel menggunakan invers matriks

$\begin{matrix} 5x + 2y = 9 \\ 3x - \ \ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-5-6)}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -11 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian SPL dua variabel menggunakan determinan matriks

$\begin{matrix} 5x + 2y = 9 \\ 3x - \ \ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9-2}{-5-6} = \frac{-11}{-11} = 1$$

$$y = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5-27}{-5-6} = \frac{-22}{-11} = 2$$

Pengayaan:

Determinan matriks 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Matriks minor

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ $|M_{12}| = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ $|M_{13}| = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$|M_{21}| = \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$ $|M_{22}| = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$ $|M_{23}| = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ $|M_{32}| = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ $|M_{33}| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

Matriks minor A adalah:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

Kofaktor suatu matriks

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Adjoin

$$Adj(A) = K^T$$

Invers matriks 3×3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Jika $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ -13 & -4 \end{pmatrix}$

Maka $x + y + z =$ .....

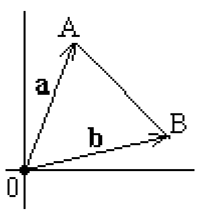
A. –3
B. –2
C. 2
D. 3
E. 4

2.10. *Menyelesaikan operasi aljabar beberapa vektor dengan syarat tertentu.*

Vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan arah.

Vektor AB dinyatakan:

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



Notasi vektor

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = b_x i + b_y j + b_z k$$

Panjang vektor

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

Penjumlahan vektor

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

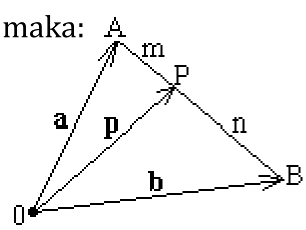
Pengurangan vektor

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Pembagian vektor

Bila $AP : PB = m : n$, maka:

$$P = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$



Perkalian skalar dengan vektor

$$k\vec{A} = k\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Perkalian vektor dengan vektor

Perkalian titik

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Perkalian silang

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

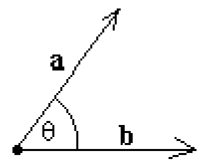
Diketahui $|a| = 3,\ |b| = 2,$ dan $|a+b| = \sqrt{7}$.
Panjang $\left|2a - \frac{1}{2}b\right| = ...$

A. $\sqrt{46}$
B. $\sqrt{43}$
C. $\sqrt{37}$
D. $\sqrt{35}$
E. $\sqrt{31}$

2.11. ***Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan besar sudut atau nilai perbandingan trigonometri*** **sudut antara dua vektor.**

Besar sudut antara dua vektor

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

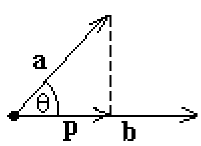


PREDIKSI SOAL UN 2012

Jika $\overline{OA} = (1,2), \overline{OB} = (4,2)$, dan $\theta = \angle(\overline{OA}, \overline{OB})$, maka $\tan\theta = ...$

A. $\frac{3}{5}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{4}{3}$
D. $\frac{9}{16}$
E. $\frac{16}{9}$

2.12. ***Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan*** **panjang proyeksi atau vektor proyeksi.**



Proyeksi vektor

Proyeksi skalar orthogonal
Panjang vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$|\vec{p}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Proyeksi vektor orthogonal
Vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$|\vec{p}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Diketahui vektor $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{j},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$.
Panjang proyeksi vektor $(2\vec{a} - \vec{b})$ pada vektor $\vec{c}$ adalah ....

A. $2\sqrt{2}$
B. $3\sqrt{2}$
C. $4\sqrt{2}$
D. $5\sqrt{2}$
E. $6\sqrt{2}$

2.13. Menentukan bayangan titik atau *kurva* karena dua transformasi *atau lebih.*

Tabel matriks transformasi

Transformasi geometri	Pemetaan	Matriks transformasi
1. Transformasi identitas	$(x,y)\xrightarrow{I}(x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
2. Translasi oleh $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	$(x,y)\xrightarrow{T=\binom{a}{b}}(x-a,y-b)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
3. Pencerminan terhadap sumbu x	$(x,y)\xrightarrow{M_{sbx}}(x,-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
4. Pencerminan terhadap sumbu y	$(x,y)\xrightarrow{M_{sby}}(-x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
5. Pencerminan terhadap titik asal $O(0,0)$	$(x,y)\xrightarrow{M_{O(0,0)}}(-x,-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
6. Pencerminan terhadap garis $x=a$	$(x,y)\xrightarrow{M_{x=a}}(2a-x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
7. Pencerminan terhadap garis $y=b$	$(x,y)\xrightarrow{M_{y=b}}(x,2b-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
8. Pencerminan terhadap titik asal $P(a,b)$	$(x,y)\xrightarrow{M_{P(a,b)}}(2a-x,2b-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
9. Pencerminan terhadap $y=x$	$(x,y)\xrightarrow{M_{y=x}}(y,x)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
10. Pencerminan terhadap garis $y=-x$	$(x,y)\xrightarrow{M_{y=-x}}(-y,-x)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
11. Pencerminan terhadap garis $y=mx$ dimana $m=\tan\theta$	$(x,y)\xrightarrow{M_{y=mx}}(x',y')$ $x'=x\cos 2\theta+y\sin 2\theta$ $y'=x\sin 2\theta-y\cos 2\theta$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
12. Pencerminan terhadap garis $y=mx+c$ dimana $m=\tan\theta$	$(x,y)\xrightarrow{M_{y=mx}}(x',y')$ $x'=x\cos 2\theta+(y-c)\sin 2\theta$ $y'=x\sin 2\theta-(y-c)\cos 2\theta+c$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$
13. Rotasi $+90°$ terhadap pusat $O(0,0)$	$(x,y)\xrightarrow{R[O,90°]}(-y,x)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
14. Rotasi $+180°$ terhadap pusat $O(0,0)$	$(x,y)\xrightarrow{R[O,180°]}(-x,-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
15. Rotasi $-90°$ terhadap pusat $O(0,0)$	$(x,y)\xrightarrow{R[O,-90°]}(y,-x)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
16. Rotasi $\theta°$ terhadap pusat $O(0,0)$	$(x,y)\xrightarrow{R[O,\theta]}(x',y')$ $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$ $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
17. Rotasi $\theta°$ terhadap pusat $P(a,b)$	$(x,y)\xrightarrow{R[P(a,b),\theta]}(x,y)$ $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$ $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
18. Dilatasi $[O,k]$	$(x,y)\xrightarrow{D[O,k]}(x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
19. Dilatasi $[P(a,b),k]$	$(x,y)\xrightarrow{D[P(a,b),k]}(x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Transformasi terhadap titik

Masukkan titik (x,y) ke matriks transformasi sehingga akan didapatkan titik baru hasil transformasi (x',y').

Transformasi terhadap kurva

Substitusikan masing-masing x dan y sehingga mendapatkan kurva baru hasil transformasi yang mengandung variabel x' dan y'.
Untuk mempermudah gunakan invers matriks:
$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow M^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Persamaan bayangan parabola $y = 2x^2 - 4x + 3$ jika dicerminkan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan rotasi pusat O sejauh 90° dan dilanjutkan dilatasi terhadap pusat O dan faktor skala 2 adalah ....

A. $x = y^2 + 4y - 6$
B. $x = y^2 - 4y - 6$
C. $x = y^2 + 4y + 6$
D. $x = y^2 - 4y + 6$
E. $x = y^2 + 2y - 6$

2.14. Menentukan *penyelesaian pertidaksamaan* eksponen atau logaritma.

Pertidaksamaan eksponen

Untuk $a > 1$

$$\left.\begin{array}{l} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{maka } f(x) > g(x) \\ a^{f(x)} < a^{g(x)}, \text{maka } f(x) < g(x) \end{array}\right\} \text{tanda tetap}$$

Untuk $0 < a < 1$

$$\left.\begin{array}{l} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \text{maka } f(x) < g(x) \\ a^{f(x)} < a^{g(x)}, \text{maka } f(x) > g(x) \end{array}\right\} \text{tanda berubah}$$

Pertidaksamaan logaritma

Untuk $a > 1$

$$\left.\begin{array}{l} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x), \text{maka } f(x) > g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x), \text{maka } f(x) < g(x) \end{array}\right\} \text{tanda tetap}$$

Untuk $0 < a < 1$

$$\left.\begin{array}{l} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x), \text{maka } f(x) < g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x), \text{maka } f(x) > g(x) \end{array}\right\} \text{tanda berubah}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Nilai x yang memenuhi $b^{2x} + 10 < 7b^x$ dengan $b > 1$ adalah ....

A. $x < {}^b\log 2$
B. $x > {}^b\log 5$
C. $x < {}^b\log 2$ atau $x > {}^b\log 5$
D. ${}^b\log 2 < x < {}^b\log 5$
E. $x > {}^b\log 2$

2.15. *Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan* fungsi eksponen atau fungsi logaritma.

Aplikasi fungsi eksponen

Pertumbuhan

Sebuah modal sebesar M dibungakan dengan bunga majemuk $p\%$ pertahun. Besar modal setelah n tahun adalah:

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Peluruhan

Sebuah modal sebesar M dibungakan dengan bunga majemuk $p\%$ pertahun. Besar modal setelah n tahun adalah:

$$M_n = M_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Aplikasi fungsi logaritma

Taraf intensitas bunyi

$$TI = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Sebuah mobil dengan harga Rp80.000.000,00. Jika setiap tahun menyusut 10% dari nilai tahun sebelumnya, maka harga mobil tersebut setelah 4 tahun adalah ....

A. Rp46.324.800,00
B. Rp47.239.200,00
C. Rp48.000.000,00
D. Rp49.534.000,00
E. Rp52.488.000,00

2.16. Menyelesaikan masalah deret aritmetika.

Barisan aritmatika

U_1	U_2	U_3	U_4	...	U_n
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$
a	$a+b$	$a+2b$	$a+3b$		$a+(n-1)b$

Jadi rumus umum barisan aritmatika adalah:
$U_n = a + (n-1)b$

Deret aritmatika

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$
$$= \frac{n}{2}(a + U_n)$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Pada suatu barisan aritmatika, diketahui $U_3 = 6$ dan $U_8 = 26$. Jika $U_n =$ suku ke-n maka suku ke-5 adalah ....

A. 10
B. 12
C. 14
D. 16
E. 18

2.17. Menyelesaikan masalah deret geometri.

Barisan geometri

U_1	U_2	U_3	U_4	...	U_n
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$
a	ar	ar^2	ar^3		ar^{n-1}

Jadi rumus umum barisan geometri:
$U_n = ar^{(n-1)}$

Deret geometri

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \text{untuk } r > 1$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1-r}, \text{untuk } r < 1$$

Deret geometri tak hingga $(n \to \infty)$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 4 meter. Setiap bola itu memantul ia mencapai ketinggian ¾ dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Panjang lintasan bola tersebut hingga bola berhenti adalah ... meter

A. 34
B. 28
C. 16
D. 12
E. 8

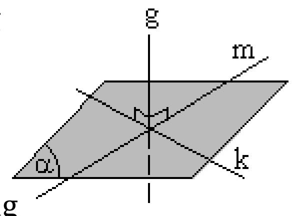
SKL 3. Memahami sifat atau geometri dalam menentukan kedudukan titik, garis, dan bidang, jarak dan sudut.

3.1. Menghitung jarak dan sudut antara dua objek (titik, garis dan bidang) di ruang.

Jarak dua objek di ruang

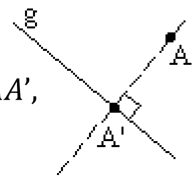
Garis tegak lurus bidang

Sebuah garis tegak lurus pada sebuah bidang jika garis itu tegak lurus pada setiap garis di bidang itu.



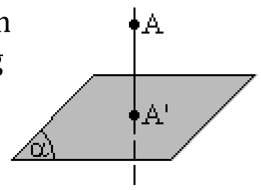
Jarak titik dan garis

Jarak titik A dan garis g adalah panjang ruas garis AA', dengan titik A' merupakan proyeksi A pada g.



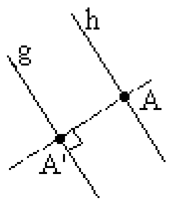
Jarak titik dan bidang

Jarak antara titik A dan bidang adalah panjang ruas garis AA' dengan titik A' merupakan proyeksi titik A pada bidang.



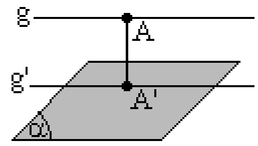
Jarak antara dua garis sejajar

Menentukan jarak dua garis sejajar adalah dengan membuat garis yang tegak lurus dengan keduanya. Jarak kedua titik potong merupakan jarak kedua garis tersebut.

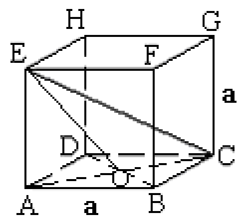


Jarak garis dan bidang yang sejajar

Menentukan jarak garis dan bidang adalah dengan memproyeksikan garis pada bidang. Jarak antara garis dan bayangannya merupakan jarak garis terhadap bidang.



Jarak antar titik sudut pada kubus



Diagonal sisi $AC = a\sqrt{2}$

Diagonal ruang $CE = a\sqrt{3}$

Ruas garis $EO = \frac{a}{2}\sqrt{6}$

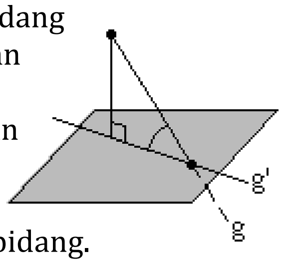
Catatan:

Pada saat menentukan jarak, hal pertama yang harus dilakukan adalah membuat garis–garis bantu sehingga terbentuk sebuah segitiga sehingga jarak yang ditanyakan akan dapat dengan mudah dicari.

Sudut dua objek di ruang

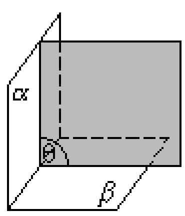
Sudut antara garis dan bidang

Sudut antara garis dan bidang merupakan sudut antara garis dan bayangannya bila garis tersebut diproyeksikan pada bidang.



Sudut antara dua bidang

Sudut antara dua bidang adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis yang tegak lurus garis potong pada bidang α dan β



Catatan:

Pada saat menentukan sudut, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan titik potong antara dua obyek yang akan dicari sudutnya, kemudian buat garis-garis bantu sehingga terbentuk sebuah segitiga.

Kubus ABCD.EFGH dengan AB = 4 cm. Jika titik P adalah perpotongan AC dan BD, maka panjang EP adalah ....

A. $2\sqrt{6}$
B. $3\sqrt{6}$
C. $4\sqrt{6}$
D. $5\sqrt{6}$
E. $6\sqrt{6}$

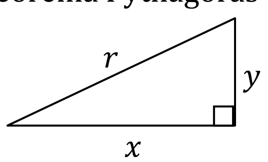
Kubus ABCD.EFGH dengan rusuk a cm. Jika α sudut antara CE dan bidang BDE, maka $\cos\alpha =$ ....

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
B. $\frac{2}{5}\sqrt{2}$
C. $\frac{2}{7}\sqrt{2}$
D. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
E. $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

SKL 4. Memahami konsep perbandingan fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri, melakukan manipulasi aljabar untuk menyusun bukti serta mampu menggunakannya dalam pemecahan masalah.

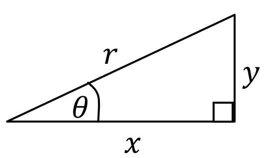
Konsep dasar Trigonometri

Teorema Pythagoras



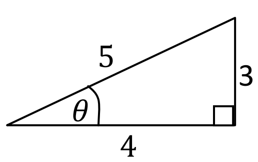
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Perbandingan trigonometri



$$\sin\theta = \frac{x}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Menentukan besar sudut



$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$
$$\theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$$

dibaca: antisin dari $\frac{3}{5}$

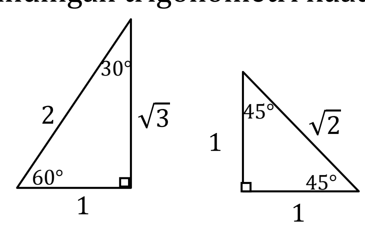
Berdasarkan tabel trigonometri diperoleh:
$\theta = 36{,}87° = 36°52' \approx 37°$

Identitas trigonometri

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\csc^2\theta + 1 = \cot^2\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Perbandingan trigonometri kuadran I



$\theta°$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

Perbandingan trigonometri sudut berelasi

Fungsi Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

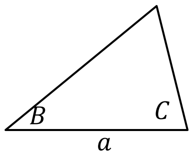
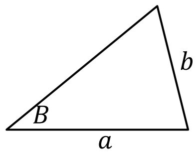
II	$\sin(180-\theta) = \sin\theta$ $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$ $\tan(180-\theta) = -\tan\theta$	$\sin(90+\theta) = \cos\theta$ $\cos(90+\theta) = -\sin\theta$ $\tan(90+\theta) = -\cot\theta$
III	$\sin(180+\theta) = -\sin\theta$ $\cos(180+\theta) = -\cos\theta$ $\tan(180+\theta) = \tan\theta$	$\sin(270-\theta) = -\cos\theta$ $\cos(270-\theta) = -\sin\theta$ $\tan(270-\theta) = \cot\theta$
IV	$\sin(360-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(360-\theta) = \cos\theta$ $\tan(360-\theta) = -\tan\theta$	$\sin(270+\theta) = -\cos\theta$ $\cos(270+\theta) = \sin\theta$ $\tan(270+\theta) = -\cot\theta$

4.1. <u>*Menyelesaikan masalah geometri*</u> dengan menggunakan aturan sinus atau kosinus.

Aturan sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

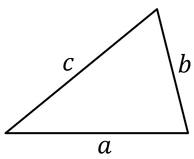
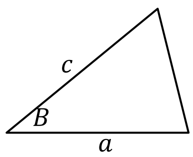
Aturan sinus dipakai jika diketahui:

 satu sisi dan dua sudut	 dua sisi dan satu sudut di depannya

Aturan kosinus

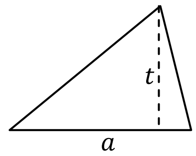
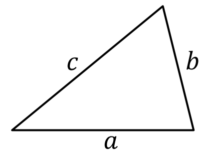
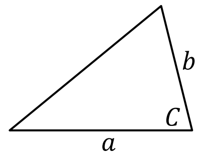
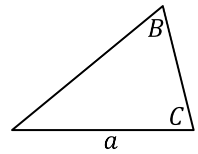
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Aturan kosinus dipakai jika diketahui:

 sisi – sisi – sisi	 sisi – sudut – sisi

Luas segitiga

Luas segitiga jika diketahui:

 alas – tinggi $L = \frac{1}{2}(a \times t)$	 sisi – sisi – sisi $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dimana $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$
 sisi – sudut – sisi $L = \frac{1}{2}ab\sin C$	 satu sisi dan dua sudut $L = \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Pada prisma segitiga tegak ABC.DEF, AB = 4 cm, AC = 6 cm, BC = 8 cm. Tinggi prisma 10 cm. Volume prisma tersebut adalah ....

A. $2\sqrt{15}$
B. $5\sqrt{15}$
C. $10\sqrt{15}$
D. $15\sqrt{15}$
E. $30\sqrt{15}$

4.2. Menyelesaikan persamaan trigonometri.

Persamaan trigonometri

Jika $\sin x = \sin\theta$, maka:
$x_1 = \theta + k \cdot 360°$
$x_2 = (180 - \theta) + k \cdot 360°$

Jika $\sin x = \sin\theta$, maka:
$x_1 = \theta + k \cdot 360°$
$x_2 = -\theta + k \cdot 360°$

Jika $\sin x = \sin\theta$, maka:
$x_1 = \theta + k \cdot 360°$
$x_2 = (180 + \theta) + k \cdot 360°$

Bentuk $A\ trigo^2 + B\ trigo + C = 0$ diselesaikan menurut aturan persamaan kuadrat.

Catatan:

Jika diperlukan, gunakan sifat identitas trigonometri untuk menyelesaikan persamaan trigonometri.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Himpunan penyelesaian dari persamaan $2\cos^2 x + 7\sqrt{1-\cos^2 x} = 5; 0° \leq x \leq 360°$ adalah ....

A. $\{30°, 150°\}$
B. $\{60°, 120°\}$
C. $\{120°, 240°\}$
D. $\{210°, 330°\}$
E. $\{240°, 300°\}$

4.3. ***Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan*** **nilai perbandingan trigonometri yang menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus, kosinus dan tangen serta jumlah dan selisih dua sudut.**

Jumlah dan selisih dua sudut trigonometri

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

Sudut rangkap

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

Sudut setengah

$\sin A = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2A}{2}}$

$\cos A = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2A}{2}}$

$\tan A = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}} = \dfrac{\sin A}{1 + \cos 2A} = \dfrac{1 - \cos 2A}{\sin A}$

Jumlah dan selisih dua trigonometri

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

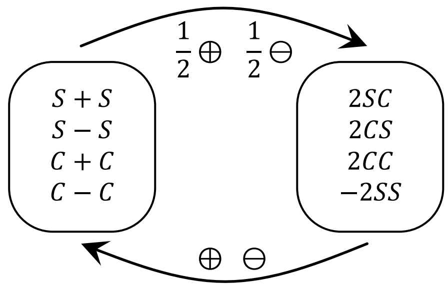
Perkalian dua trigonometri

$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$2 \sin A \sin B = -\{\cos(A + B) - \cos(A - B)\}$



PREDIKSI SOAL UN 2012

Diketahui $0° < B < 90° < A < 180°$. Jika $\sin A = \frac{5}{13}$ dan $\cos B = \frac{3}{5}$ maka $\cos(A - B) = ...$

A. $\dfrac{56}{65}$

B. $\dfrac{16}{65}$

C. $\dfrac{12}{65}$

D. $-\dfrac{16}{65}$

E. $-\dfrac{56}{65}$

Nilai dari $\dfrac{\sin 150° + \sin 120°}{\cos 120° - \cos 300°} = ...$

A. $-2 - \sqrt{3}$

B. -1

C. $2 - \sqrt{3}$

D. 1

E. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

SKL 5. Memahami konsep limit, turunan dan integral dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri, serta mampu menerapkannya dalam pemecahan masalah.

5.1. Menghitung nilai limit fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Limit fungsi aljabar

Limit fungsi aljabar bentuk tertentu $\left(\text{bentuk } \frac{a}{b}, \frac{0}{k} = 0, \frac{k}{0} = \infty\right)$

Jika diketahui $f(x)$ dan$f(a)$terdefinisi , maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

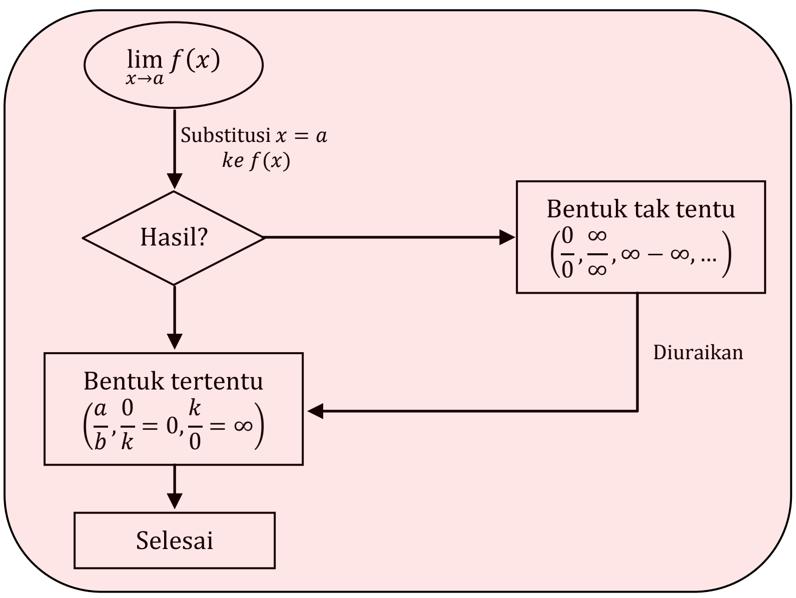
Limit fungsi aljabar bentuk tak tentu $\left(\text{bentuk } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty\right)$

Jika diketahui $f(x)$ dan $f(a)$ tidak terdefinisi , maka harus diuraikan sehingga didapatkan bentuk tertentu, antara lain dengan cara:

1. Limit bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$
   Disederhanakan melalui pemfaktoran masing-masing pembilang dan penyebut, lalu coret faktor yang sama, lalu substitusikan nilai $x \to a$.
   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$
   Jika bentuk limit memuat bentuk akar, maka kalikan dengan bentuk sekawan akar dulu, lalu difaktorkan.

2. Limit bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
   Membagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi.
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ \dots}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \ \dots} = \begin{cases} \infty, \text{jika } m > n \\ \frac{a_1}{b_1}, \text{jika } m = n \\ 0, \text{jika } m < n \end{cases}$$

3. Limit bentuk $(\infty - \infty)$
   Mengalikan dengan bentuk sekawan akar, sehingga didapatkan bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, lalu diselesaikan menggunakan sifat limit bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
   $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$
   Secara umum:
   $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} -\infty, \text{jika } a > p \\ \frac{b-q}{2a}, \text{jika } a = p \\ +\infty, \text{jika } a < p \end{cases}$$



Limit fungsi trigonometri

Teorema limit fungsi trigonometri

Limit fungsi trigonometri bentuk tertentu

Jika diketahui $f(x)$ dan $f(a)$ terdefinisi, maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ | $\lim\limits_{x\to c} \sin x = \sin c$

$\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$ | $\lim\limits_{x\to c} \tan x = \tan c$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ | $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$

Limit fungsi trigonometri bentuk tak tentu $\left(\text{bentuk } \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty\right)$

Jika diketahui $f(x)$ dan $f(a)$ tidak terdefinisi , maka harus diuraikan sehingga didapatkan bentuk tertentu, antara lain dengan cara:

1. Limit bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$
   Disederhanakan menggunakan perluasan konsep limit trigonometri:
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$
   Jika bentuk limit memuat bentuk $(1-\cos ax)$, $(\cos ax - 1)$, $(\cos ax - \cos bx)$, maka gunakan sifat identitas trigonometri:
   $$1 - \cos ax = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}ax\right)$$
   $$\cos ax - 1 = -2\sin^2\left(\frac{1}{2}ax\right)$$
   $$\cos ax - \cos bx = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}bx\right) - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}ax\right) = -2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$$
2. Limit bentuk $(\infty - \infty)$
   Mengubahnya menjadi bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$, lalu diselesaikan menggunakan sifat identitas trigonometri.
3. Limit bentuk $(0 \cdot \infty)$
   Mengubahnya menjadi bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$, lalu diselesaikan menggunakan sifat identitas trigonometri.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Nilai $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2} = \ldots.$

A. $-\frac{1}{2}$
B. $-\frac{2}{3}$
C. $-\frac{3}{4}$
D. $-\frac{4}{5}$
E. $-\frac{5}{6}$

Nilai $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos^2 6x - 1)}{\sin 3x \cdot \tan^2 2x} = \ldots.$

A. -3
B. -2
C. -1
D. 2
E. 3

5.2. *Menyelesaikan* soal aplikasi turunan fungsi.

Konsep turunan

Turunan fungsi $f(x)$ didefinisikan

$$f'(x) = \lim_{x \to h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dengan syarat nilai limitnya ada.

Turunan fungsi aljabar

$f(x) = ax^n \to f'(x) = anx^{n-1}$

Turunan fungsi trigonometri

$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$

Sifat-sifat turunan fungsi

$f(x) = u \pm v \to f'(x) = u' \pm v'$

$f(x) = uv \to f'(x) = u'v + uv'$

$f(x) = \frac{u}{v} \to f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f(x) = f(u) \to f'(x) = f'(u) \cdot u'$

Turunan suatu fungsi dapat digunakan dalam penafsiran geometris dari suatu fungsi, diantaranya:

1. Gradien garis singgung kurva $f(x)$ di titik $x = a$, yaitu $m = f'(a)$
2. Persamaan garis singgung kurva yang melalui titik (a, b) dan bergradien m adalah:
   $y - b = m(x - a)$
3. Fungsi $f(x)$ naik, jika $f'(x) > 0$, dan turun, jika $f'(x) < 0$
4. Fungsi $f(x)$ stasioner jika $f'(x) = 0$
5. Nilai stasioner $f(x)$ maksimum jika $f''(x) < 0$, dan minimum jika $f''(x) > 0$

$$f(x) \begin{cases} f'(x) > 0, \text{fungsi naik} \\ f'(x) = 0, \text{stasioner (ekstrem)} \\ f'(x) < 0, \text{fungsi turun} \end{cases} \to \begin{cases} f''(x) > 0, \text{ekstrim minimum} \\ f''(x) = 0, \text{titik belok} \\ f''(x) < 0, \text{ekstrim maksimum} \end{cases}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Jika suatu proyek ddiselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek untuk setiap harinya sebesar $\left(x^2 + \frac{50.000}{x} - 1875\right)$ juta rupiah, maka biaya proyek minimum adalah .... juta rupiah.

A. 1855
B. 1865
C. 1875
D. 1885
E. 1995

5.3. *Menentukan* integral tak tentu dan integral tentu fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Integral merupakan lawan dari turunan, yaitu cara untuk menemukan fungsi asal $F(x)$ jika diketahui fungsi turunannya $f(x)$.

$F'(x) = f(x) \to \int f(x)\, dx = F(x) + c$

Integral tak tentu fungsi aljabar

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

Integral tak tentu fungsi trigonometri

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

$\int \text{cosec}^2\, x\, dx = -\cot x + c$

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

Sifat-sifat integral

$\int k\, f(x) dx = k \int f(x)\, dx$

$\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Metode integral substitusi aljabar

$$\int u'(x) \left(u(x)\right)^n dx = \int \left(u(x)\right)^n d\left(u(x)\right) = \frac{1}{n+1} \left(u(x)\right)^{n+1} + c$$

Metode integral substitusi trigonometri

Jika pada soal memuat bentuk berikut:

$\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a \sin \theta$

$\sqrt{a^2 + x^2} \to x = a \tan \theta$

$\sqrt{x^2 - a^2} \to x = a \sec \theta$

Metode integral parsial

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Integral tertentu fungsi aljabar dan fungsi trigonometri

Jika $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, maka:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Metode penyelesaian integral tak tentu:

1. Langsung, bila sesuai dengan konsep dasar integral dan bukan bentuk perkalian atau pembagian, jika bentuk integral tidak bisa diselesaikan secara langsung maka:
2. Substitusi, bila integran dx bisa diubah menjadi $d(u(x))$, artinya turunan fungsi substitusi adalah kelipatan dari fungsi yang lain, jika bentuk integral tetap tidak bisa diselesaikan dengan metode substitusi, maka:
3. Parsial, dengan memisahkan bentuk integral menjadi bentuk $\int u\, dv$, dengan syarat: u adalah fungsi yang mudah diturunkan sampai menghasilkan bentuk nol(0). Pangkat u menentukan banyak langkah integral parsial yang akan dilakukan.

PREDIKSI SOAL UN 2012

Hasil $\int (18x+27)\sqrt{x^2+3x+10}\, dx =$ ....

A. $-6(x^2+3x+10)\sqrt{x^2+3x+1}+C$

B. $2(x^2+3x+1)\sqrt{x^2+3x+1}+C$

C. $6(x^2+3x+1)\sqrt{x^2+3x+1}+C$

D. $9(x^2+3x+1)\sqrt{x^2+3x+1}+C$

E. $6(x^2+3x+1)^2\sqrt{x^2+3x+1}+C$

Hasil $\int 8\sin 7x \cos 3x\ dx =$ ....

A. $-\frac{2}{5}\cos 10x+\frac{1}{2}\cos 4x+C$

B. $-\frac{2}{5}\cos 10x+\frac{1}{4}\cos 4x+C$

C. $-\frac{2}{5}\cos 10x-\frac{1}{4}\cos 4x+C$

D. $-\frac{2}{5}\cos 10x-\frac{1}{2}\cos 4x+C$

E. $-\frac{2}{5}\cos 10x-\cos 4x+C$

Jika $\int_1^2 (6x^2-2px+8)\, dx = -5$, maka nilai p adalah ....

A. 7

B. 9

C. 11

D. 13

E. 15

$\int_{-\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right) dx =$ ....

A. $-\frac{1}{6}\sqrt{3}$

B. $-\frac{1}{4}\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

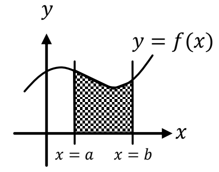
D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

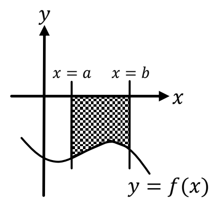
5.4. Menghitung luas daerah dan volume benda putar dengan menggunakan integral.

Luas daerah

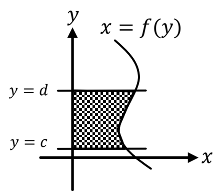
Luas daerah dibatasi kurva



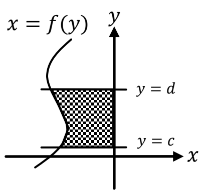
$$L = \int_a^b f(x)\ dx$$



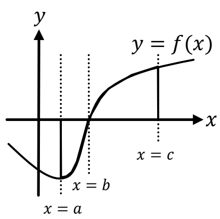
$$L = -\int_a^b f(x)\ dx$$



$$L = \int_c^d f(y)\ dy$$

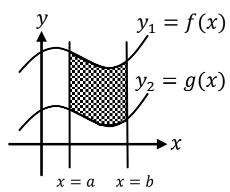


$$L = -\int_c^d f(y)\ dy$$

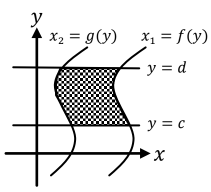


$$L = -\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Luas daerah antara dua kurva



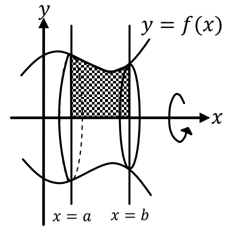
$$L = \int_a^b f(x) - g(x)\ dx$$



$$L = \int_b^d f(y) - g(y)\ dy$$

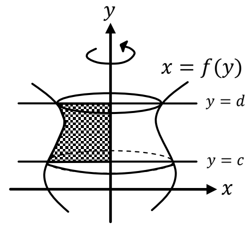
Volume benda putar

Volume benda putar mengelilingi sumbu x



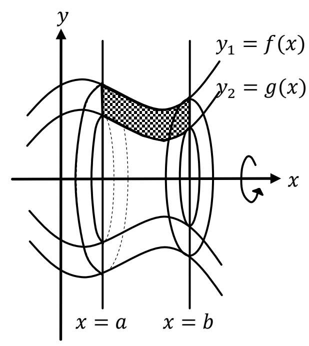
$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2\ dx$$

Volume benda putar mengelilingi sumbu y

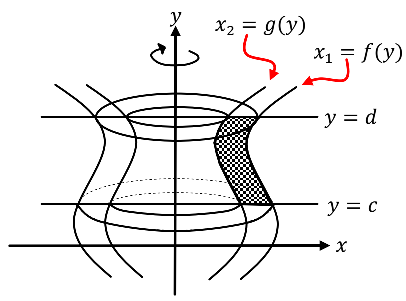


$$V = \pi \int_c^d \left(f(y)\right)^2\ dy$$

Volume benda antara dua kurva

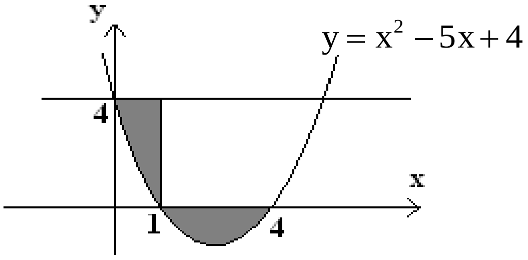


$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]\ dx$$



$$V = \pi \int_c^d \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]\ dx$$

Bentuk integral yang menyatakan luas yang diarsir pada gambar adalah ....



A. $\int_0^1 (8 + 5x - x^2)\, dx + \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx$

B. $\int_0^1 (5x - x^2)\, dx + \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx$

C. $\int_0^1 (5x - x^2)\, dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx$

D. $\int_0^1 (8 + 5x - x^2)\, dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx$

E. $\int_0^1 (4 + 5x - x^2)\, dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx$

Volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, sumbu x dan $0 \le x \le 5$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° adalah .... satuan volume.

A. $\frac{17\pi}{2}$

B. $\frac{19\pi}{2}$

C. $\frac{23\pi}{2}$

D. $\frac{25\pi}{2}$

E. $\frac{27\pi}{2}$

SKL 6. Mengolah, menyajikan dan menafsirkan data, mampu memahami kaidah pencacahan, permutasi, kombinasi dan peluang kajadian serta mampu menerapkannya dalam pemecahan masalah.

6.1. Menghitung ukuran pemusatan dari data dalam bentuk tabel, diagram atau grafik.

Mean (Nilai rata-rata)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

Menghitung nilai mean menggunakan rataan sementara/rataan dugaan ($\overline{x_s}$):

$$\bar{x} = \overline{x_s} + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}, \text{dimana } d_i = \overline{x_s} - x_i$$

$$\bar{x} = \overline{x_s} + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} c, \text{dimana } u_i = \frac{\overline{x_s} - x_i}{c}$$

Median (Nilai tengah)

$$Me = Tb + \left(\frac{\frac{1}{2}n - f_k}{f_{Me}}\right) c$$

Modus (Nilai sering muncul)

$$Mo = Tb + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) c$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Median dari data berikut ini:

Data	Frekuensi
145 – 149	4
150 – 154	9
155 – 159	21
160 – 164	40
165 – 169	18
170 – 174	8

adalah ....

A. 160,25
B. 160,5
C. 161,5
D. 162
E. 162,5

6.2. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan kaidah pencacahan, permutasi atau kombinasi.

Kaidah pencacahan

Jika suatu peristiwa dapat terjadi dengan n tahap yang berurutan, dimana tahap pertama terdapat a_1 cara yang berbeda dan seterusnya sampai dengan tahap ke-n dapat terjadi dalam a_n cara yang berbeda, maka total banyaknya cara peristiwa tersebut dapat terjadi adalah:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$$

Faktorial

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Permutasi adalah pola pengambilan yang memperhatikan urutan ($AB \neq BA$)

1. Permutasi r unsur diambil dari n unsur yang tersedia
$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$
2. Permutasi n unsur diambil dari n unsur
$$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$
3. Permutasi dari n unsur jika terdapat k unsur yang sama, l unsur yang sama, dan k unsur yang sama
$$_nP_{k,l,m} = \frac{n!}{k!\,l!\,m!}$$
4. Permutasi siklis (permutasi yang urutannya melingkar) dari n unsur berbeda
$$P_{siklis} = (n-1)!$$

Kombinasi adalah pola pengambilan yang tidak memperhatikan urutan ($AB = BA$)

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Seorang siswa harus mengerjakan 5 soal dari 10 soal yang tersedia, tetapi soal nomor 3 dan 5 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil siswa adalah ....

A. 28
B. 56
C. 112
D. 224
E. 336

6.3. *Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan* **peluang suatu kejadian.**

Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari sebuah percobaan

$n(S) =$ banyaknya anggota ruang sampel

Peluang suatu kejadian, jika $n(A) =$ banyak kejadian A, maka peluang kejadian A adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, A \subset S$$

Peluang komplemen suatu kejadian

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Frekuensi harapan suatu kejadian

$$F_h = P(A) \times n$$

Peluang kejadian majemuk

Peluang dua kejadian tidak saling lepas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Peluang dua kejadian saling lepas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Peluang dua kejadian saling bebas

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Peluang dua kejadian tidak saling bebas (disebut juga peluang bersyarat)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

PREDIKSI SOAL UN 2012

Suatu kotak berisi 5 bola merah dan 3 bola putih. Apabila dari kotak tersebut diambil 2 bola satu demi satu tanpa pengembalian, maka peluang terambil keduanya bola merah adalah ....

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{3}{10}$

D. $\frac{5}{14}$

E. $\frac{9}{14}$

Ringkasan materi UN Matematika SMA ini disusun sesuai dengan prediksi yang Pak Anang tulis di http://pak-anang.blogspot.com/2011/12/prediksi-soal-un-matematika-sma-2012.html.

Jika adik-adik butuh 'bocoran' soal Ujian Nasional bisa adik-adik lihat di http://pak-anang.blogspot.com/2011/12/bocoran-soal-ujian-nasional-matematika.html dan untuk bocoran soal pelajaran Fisika ada di http://pak-anang.blogspot.com/2011/12/bocoran-soal-ujian-nasional-fisika-2012.html. Semua soal tersebut disusun sesuai kisi-kisi SKL UN tahun 2012 yang dikeluarkan secara resmi oleh BSNP tanggal 15 Desember 2011 yang lalu.

Kisi-kisi SKL UN SMA tahun 2012 untuk versi lengkap semua mata pelajaran bisa adik-adik lihat di http://pak-anang.blogspot.com/2011/12/kisi-kisi-skl-un-2012_19.html.

Terimakasih,

Pak Anang.