Induksi Matematika

Matematika Diskrit

Outline

- Definisi
- Prinsip Induksi Sederhana
- Prinsip Induksi yang Dirampatkan
- Prinsip Induksi Kuat
- Bentuk Induksi Secara Umum

Definisi

- Induksi matematika adalah :

  Metode pembuktian untuk proposisi perihal bilangan bulat

- Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika
- Induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas

Contoh 1

Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah *n(n+1)/2*

<u>Bukti :</u>

Misalkan n = 6 → p(6) adalah "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai 6 adalah 6(6+1)/2" terlihat bahwa :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \rightarrow 6(7)/2 = 21$$

Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**

Contoh 2

Jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

<u>Bukti</u>

Misalkan n = 6 buah (n = 1,2,3,4,5,6) maka :

- n = 1 → 1 = 1 ➔ $(1)^2 = 1$
- n = 2 → 1+3 = 4 ➔ $(2)^2 = 4$
- n = 3 → 1+3+5 = 9 ➔ $(3)^2 = 9$
- n = 4 → 1+3+5+7 = 16 ➔ $(4)^2 = 16$
- n = 5 → 1+3+5+7+9 = 25 ➔ $(5)^2 = 25$
- n = 6 → 1+3+5+7+9+11 = 36 ➔ $(6)^2 = 36$

Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**

Contoh Lain

- Setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima
- Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3
- Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar
- Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$
- Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n.

Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan p(n) adalah proposisi bilangan bulat positif dan ingin dibuktikan bahwa p(n) adalah benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Maka langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :
  1. p(n) benar
  2. Jika p(n) benar, maka p(n+1) juga benar untuk setiap n $\geq$ 1
- Sehingga p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n

Prinsip Induksi Sederhana

- Basis induksi
  - Digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan benar bila *n* diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat positif terkecil
  - Buat implikasi untuk fungsi berikutnya benar untuk setiap bilangan bulat positif
- Langkah induksi
  - Berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa p(n) benar.
  - Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi.
- Bila kedua langkah tersebut benar maka pembuktian bahwa p(n) benar untuk semua bilangan positif *n*.

Contoh 3

- Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika

Solusi

i. Basis induksi

p(1) benar → n = 1 diperoleh dari :

$$1 = 1(1+1)/2$$
$$= 1(2)/2$$
$$= 2/2$$
$$= 1$$

ii. Langkah induksi

Misalkan p(n) benar → asumsi bahwa :

$$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$$

Adalah benar (hipotesis induksi). Perlihatkan bahwa p(n+1) juga benar yaitu :

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = (n+1)[(n+1)+1]/2$$

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\
&= [n(n+1)/2]+(n+1) \\
&= [(n^2+n)/2]+(n+1) \\
&= [(n^2+n)/2]+[(2n+2)/2] \\
&= (n^2+3n+2)/2 \\
&= (n+1)(n+2)/2 \\
&= (n+1)[(n+1)+1]/2
\end{aligned}
$$

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif *n*, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$

Contoh 4

- Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Solusi

i. Basis induksi

   p(1) benar → jumlah 1 buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$

ii. Langkah induksi

   Misalkan p(n) benar → asumsi bahwa :

   $$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

   Adalah benar (hipotesis induksi)

   Perlihatkan bahwa p(n+1) juga benar, yaitu :

   $$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$$

   Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

   $$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) &= [1+3+5+\ldots+(2n-1)]+(2n+1) \\ &= n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

   Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Prinsip induksi sederhana dapat dirampatkan (*generalized*)
- Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikannya perlu menunjukkan bahwa :
  1. $p(n_0)$ benar
  2. Jika p(n) benar, maka p(n+1) juga benar untuk setiap $n \geq n_0$

  sehingga p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh 5

- Untuk semua bilangan bulat tidak negatif *n*, buktikan dengan induksi matematika bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Solusi

Misalkan p(n) adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak negatif *n*, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

i. Basis induksi

p(0) benar → untuk n = 0 (bilangan bulat tidak negatif pertama) diperoleh dari :

$$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$
$$= 2^1 - 1$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

ii. Langkah induksi

Misalkan p(n) benar, yaitu proposisi :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Diasumsikan benar (hipotesis induksi). Perlihatkan bahwa p(n+1) juga benar, yaitu :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1} &= (2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n)+2^{(n+1)} \\
&= 2^{(n+1)}-1+2^{n+1} \quad \text{(dari hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1}+2^{n+1})-1 \\
&= (2 \,.\, 2^{n+1})-1 \\
&= 2^{n+2}-1 \\
&= 2^{(n+1)+1}-1
\end{aligned}
$$

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak negatif *n*, terbukti bahwa $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

Contoh 6

- Buktikan dengan induksi matematika bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6

Solusi

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6

i. Basis induksi

   $p(7)$ benar $\rightarrow 3^7 < 7! \leftrightarrow 2187 < 5040$

ii. Langkah induksi

   Misalkan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $3^n < n!$ adalah benar. Perlihatkan juga bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu $3^{n+1} < (n+1)!$

   Hal ini dapat ditunjukkan sbb :

$$3^{n+1} < (n+1)!$$

$$3 \cdot 3^n < (n+1) \cdot n!$$

$$3^n \cdot 3 / (n+1) < n!$$

   Menurut hipotesis induksi, $3^n < n!$, sedangkan untuk $n > 6$, nilai $3/(n+1) < 1$, sehingga $3/(n+1)$ akan memperkecil nilai di ruas kiri persamaan. Efek nettonya, $3^n \cdot 3/(n+1) < n!$ jelas benar

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $3^n < n!$ untuk *n* bilangan bulat positif lebih besar dari 6

Prinsip Induksi Kuat

- Prinsip induksi yang lebih kuat adalah sbb :
  1. $p(n_0)$ benar
  2. Jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$

  sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$
- Versi induksi yang lebih kuat mirip dengan induksi sederhana, perbedaannya adalah pada langkah (ii) :
  - hipotesis induksi yang lebih kuat
    - bahwa semua pernyataan $p(1)$, $p(2)$, …, $p(n)$ adalah benar
  - Hipotesis induksi sederhana
    - bahwa $p(n)$ benar
- Prinsip induksi kuat memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan andaian yang lebih banyak

Contoh 7

- Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Buktikan dengan induksi matematika (prinsip induksi kuat) bahwa setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima

Solusi

- Misalkan p(n) adalah proposisi setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima
- Basis induksi

  p(2) benar → 2 sendiri adalah bilangan prima dan 2 dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri
- Langkah induksi

  Misalkan p(n) benar, asumsikan bahwa bilangan 2, 3, ..., n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima (hipotesis induksi). Perlihatkan juga bahwa p(n+1) benar, yaitu $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.

Hal ini dapat ditunjukkan sbb :

- Jika n + 1 bilangan prima → perkalian satu atau lebih bilangan prima
- Jika n + 1 bukan bilangan prima → terdapaat bilangan bulat positif a yang membagi habis *n + 1* tanpa sisa

  (n+1)/a = b <u>atau</u> (n+1) = ab

  dimana $2 \leq a \leq b \leq n$.

Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Ini berarti bahwa n+1 jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena n+1 = ab

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima

Bentuk Induksi Secara Umum

- Membuat bentuk umum metode induksi sehingga dapat diterapkan tidak hanya untuk pembuktian proposisi yang menyangkut himpunan bilangan bulat positif tetapi juga pembuktian yang menyangkut himpunan obyek yang lebih umum.
- Syaratnya himpunan obyek tersebut harus mempunyai :
  1. Keterurutan
  2. Elemen terkecil

- Relasi biner "<" pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan "<") bila memiliki properti berikut :
  (i) Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$
  (ii) Diberikan $x, y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar : $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$
  (iii) Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil"

- Misalkan X terurut baik oleh "<" dan $p(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Pembuktian bahwa $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$. Untuk pembuktiannya hanya perlu menunjukkan bahwa :
  (i) $p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X
  (ii) Jika $p(y)$ benar untuk $y < x$, maka $p(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ di dalam X

  Sehingga $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$

Contoh 8

- Tinjau barisan bilangan yang didefinisikan sbb :

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,\, n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,\, n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

- Sebagai contoh :

$S_{0,0} = 0$ $\quad$ $S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$

$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1$ $\quad$ $S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$

$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2$ $\quad$ $S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 2 + 1 = 3, \ldots$

- Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif *m* dan *n*, $S_{m,n} = m+n$

Solusi

- Basis induksi

  (0,0) elemen terkecil di dalam X, maka $S_{m,n} = 0 + 0 = 0$

- Langkah induksi

  Buktikan semua (m,n) > (0,0) di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua (m',n') < (m,n) maka $S_{m,n} = m+n$ juga benar.

  Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua (m',n') → hipotesis induksi

  Tunjukkan juga bahwa $S_{m,n} = m + n$ baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

  <u>Kasus 1 :</u>

  Jika n = 0 maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$

  Karena (m-1, n) < (m, n) maka dari hipotesis induksi

  $S_{m-1,n} = (m-1) + n$ sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1)+n+1=m+n$

Kasus 2 :

Jika $n \neq 0$ maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$

Karena (m, n-1) < (m, n) maka dari hipotesis induksi

$S_{m,n-1} = m + (n-1)$ sehingga $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m+(n-1)+1=m+n$

- Langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa untuk pasangan tidak negatif *m* dan *n*, $S_{m,n} = m+n$

Latihan Soal

1. Temukan rumus untuk menghitung ½ + ¼ + 1/8 + … + $½^n$ dengan memeriksa nilai-nilai ekspresi untuk n yang kecil, lalu gunakan induksi matematik untuk membuktikan rumus tersebut.
2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 – n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.
3. Buktikan melalui induksi matematik bahwa 1(2)+2(3)+…+n(n+1) = [n(n+1)(n+2)]3 untuk semua $n \geq 1$
4. Sebuah kios penukaran uang hanya mempunyai pecahan uang senilai Rp 2.000,- dan Rp. 5.000,- Untuk uang senilai berapa saja yang dapat ditukar dengan kedua pecahan tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik

5. Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebaga berikut :

$S_{1,1} = 5$

Untuk semua pasang bilangan bulat positif (m,n) kecuali (1,1) didefinisikan sebagai berikut :

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2 & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m,n) :

$S_{m,n} = 2(m+n) + 1$