BAB 2. TURUNAN PARSIAL

- **Turunan Parsial Fungsi Dua atau Lebih Peubah**
- **Turunan Parsial Orde Tinggi**
- **Aturan Rantai Peubah Bnayak**
- **Difrensial Total dan Aproksimasi**
- **Turunan Berarah dan Gradien**
- **Deret Taylor untuk Fungsi Dua Peubah**

2.1. Turunan Parsial Fungsi Dua atau Lebih Peubah

Turunan fungsi satu peubah telah dibahas di Matematika Dasar I. Turunan fungsi banyak peubah merupakan pengembangan dari konsep turunan satu peubah, dimana turunan terhadap salah satu peubah dilakukan dengan mengasumsikan peubah yang lain sebagai konstanta.

Definisi 2.1. Misalkan f adalah fungsi dua peubah x dan y, D_f adalah doman dari f. Turunan parsial dari f terhadap x adalah suatu fungsi sedemikian sehingga untuk setiap $(x,y) \in D_f$ nilai dari fungsi tersebut dirumuskan dengan

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

asalkan nilai limit ini ada.

Notasi lain untuk f_x adalah $\frac{\partial f}{\partial x}$ atau $D_1 f(x,y)$.

Demikian pula, turunan parsial dari f terhadap y adalah suatu fungsi (yang diberi lambing $D_2 f$) sedemikian sehingga untuk setiap $(x,y) \in D_f$, nilai dari fungsi tersebut dirumuskan dengan

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Notasi lain untuk f_y adalah $\frac{\partial f}{\partial y}$ atau $D_2 f(x,y)$

asalkan nilai limit ini ada.

Definisi 2.1 menyatakan bahwa jika $f(x,y)$ adalah fungsi dengan peubah x dan y, maka f_x adalah turunan fungsi $f(x,y)$ terhadap peubah x dengan memandang peubah y sebagai konstan. Demikian juga sebaliknya, f_y adalah turunan fungsi $f(x,y)$ terhadap peubah y dengan memandang peubah x sebagai konstan.

Contoh

Tentukan turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ untuk fungsi-fungsi berikut:

$f(x,y) = 2xy^4 - 3y^2 \sin x + x$

Penyelesaian

- Pandang y sebagai konstan, maka f hanya fungsi dari x saja (perhatikan tulisan berwarna merah)
  $f(x,y) = 2xy^4 - 3y^2 \sin x + x^3$,
  sehingga turunan f terhadap x adalah:
  $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2.1.y^4 - 3y^2 \cos x + 3x^2$$
- Pandang x sebagai konstan, maka f hanya fungsi dari y saja (perhatikan tulisan merah)
  $f(x,y) = 2xy^4 - 3y^2 \sin x + x^3$,
  sehingga turunan f terhadap y adalah:
  $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x.4y^3 - 3.2y \cos x + 3x^2$$

Turunan parsial pertama pada titik (x_0, y_0) dinotasikan dengan
$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0)$$

Contoh

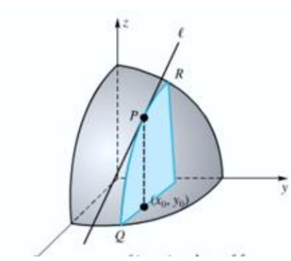
Tentukan turunan parsial f_x dan f_y untuk fungsi-fungsi berikut:
$$f(x,y) = \ln xy + xe^{2y}$$
di titik

Penyelesaian

Turunan parsial f terhadap x dan terhadap y masing-masing adalah:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + e^{2y}$$
dan
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 2xe^{2y}.$$
Untuk $(x_0, y_0) = (1, \ln 3)$ maka
$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,\ln 3)} = \frac{1}{1} + e^{2\ln 3} = 1 + 9 = 10$$
dan
$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,\ln 3)} = \frac{1}{\ln 3} + 2.1.e^{2\ln 3} = \frac{1}{\ln 3} + 2.1.9 = \frac{1}{\ln 3} + 18.$$

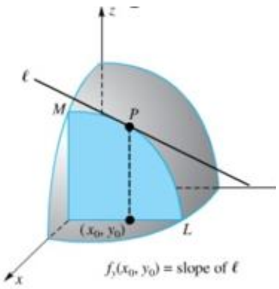
Interpretasi Geometri dari Turunan Parsial f_x dan f_y

Misalkan sebuah permukaan mempunyai persamaan $z = f(x,y)$. Garis $y = y_0$ merupakan bidang yang memotong permukaan z pada kurva QPR (Perhatikan Gambar 1). Misalkan koordinat titik P adalah $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Turunan parsial f terhadap x pada titik (x_0, y_0), merupakan gradien kemiringan garis singgung l pada titik P dalam arah sumbu x. Turunan parsial f terhadap x di titik (x_0, y_0) selanjutnya



Gambar 1. Gadien garis l

dinotasikan dengan $f_x(x_0, y_0)$, atau $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, atau $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ atau $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$ atau $D_1 f$.

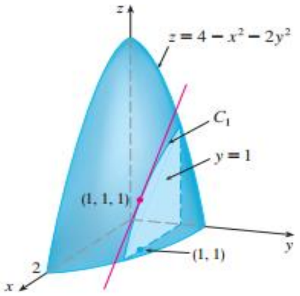


Gambar 2. Gradien garis l

Secara similar, $x = x_0$ merupakan bidang yang memotong permukaan z pada kurva LPM. (Perhatikan Gambar 2). Misalkan koordinat titik P adalah $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Turunan parsial f terhadap y pada titik (x_0, y_0) merupakan gradien kemiringan garis singgung l pada titik P dalam arah sumbu y.

Turunan parsial f terhadap x di titik (x_0, y_0) selanjutnya dinotasikan dengan $f_y(x_0, y_0)$, atau $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, atau $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ atau $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}$

Contoh



Gambar 3 Garis singgung paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$ di titik (1,1,1) searah sumbu X

Sebuah paraboloid dinyatakan dengan persamaan $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}$ dan interpretasikan nilai tersebut sebagai gradien kemiringan garis singgung.

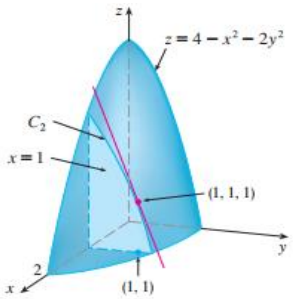
Penyelesaian

Turunan parsial dari f terhadap x dam y masing-masing adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x,$$

Sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)} = -2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)} = -4.$$



Gambar 4. Garis singgung paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$ di titik (1,1,1) searah sumbu Y

- Perhatikan Gambar 3. Perpotongan bidang $y = 1$ membentuk parabola C_1 dengan persamaan:
  $$z = 2 - x^2 .$$
  Kemiringan garis singgung parabola C_1 (dalam arah sumbu X) di titik (1,1,1) adalah $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)} = -2$.

- Perhatikan Gambar 4. Perpotongan bidang $x = 1$ membentuk parabola C_2 dengan persamaan:
  $$z = 3 - 2y^2 .$$
  Kemiringan garis singgung parabola C_2 (dalam arah sumbu Y) di titik (1,1,1) adalah $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)} = -4$.

Turunan Parsial Fungsi Tiga atau Lebih Peubah

Konsep turuan parsial dapat diperluas pada fungsi lebih dari dua peubah. Sebagai contoh pada fungsi tiga peubah $w = f(x, y, z)$, terdapat tiga turunan parsial, yaitu $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, dan $\frac{\partial f}{\partial z}$. Masing-masing turunan parsial tersebut dibangun dengan menetapkan dua variabel lain sebagai konstanta. Misalkan untuk $\frac{\partial f}{\partial x}$ maka f dipandang sebagai fungsi dari x saja dan mengasumsikan peubah y dan z sebagai konstan. Demikian juga untuk $\frac{\partial f}{\partial y}$, f dipandang sebagai fungsi dari y saja dengan menganggap peubah x dan z sebagai konstan. Cara yang sama juga berlaku untuk $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Analogi dengan turunan parsial fungsi dua peubah, turunan-turunan parsial dari w terhadap x, y dan z didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y x, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta z}$$

Contoh

Tentukan turunan parsial

a. $f(x,y,z) = xz^3 - 2yz + xyz$ terhadap x.
b. $f(x,y,z) = z^2 + \cos(xy^2 - 2yz)$ terhadap y dan z.

Penyelesaian

a. Dengan menganggap y dan z sebagai konstanta maka:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z^3 + yz$$

b. Dengan menganggap x dan z sebagai konstanta maka:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(xy^2 - 2yz).(2xy - 2z)$$

Selanjutnya, dengan menganggap x dan y sebagai konstanta maka

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(xy^2 - 2yz).(-2y)$$

2.2. Turunan Parsial Orde Lebih Tinggi

Turunan parsial dari fungsi $f(x,y)$, yaitu f_x dan f_y, secara umum merupakan fungsi terhadap peubah x dan y. Demikian juga turunan parsial dari fungsi $f(x,y,z)$, yaitu f_x, f_x dan f_z juga merupakan fungsi dari $x, y,$ dan z. Oleh karena itu, turunan parsial dari fungsi f dapat diturunkan lagi terhadap peubah-peubahnya. Turunan parsial dari f_x , f_y dan f_z

disebut turunan parsial kedua dari f. Untuk fungsi dua peubah $f(x,y)$, turunan parsial kedua terhadap x dan terhadap y adalah:

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\qquad f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x};\qquad f_{yx}=\left(f_y\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

Notasi f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, atau f_{yy} dapat juga diganti dengan f_{11}, f_{12}, f_{21}, atau f_{22}. Sebagai penjelasan dari notasi tersebut, f_{21} misalnya, menyatakan bahwa f diturunkan terlebih dahulu terhadap peubah ke-1, kemudian hasilnya diturunkan lagi terhadap peubah yang ke-2. Hal yang sama berlaku juga untuk fungsi dengan banyak peubah.

Misalkan $w=f(x,y,z)$, maka

$$\frac{\partial^5 w}{\partial z\partial x\partial y\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}=f_{xyyxz}(x,y,z)=f_{12213}(x,y,z)$$

Contoh

Tentukan semua turunan parsial kedua dari $f(x,y)=2x^3y^2-x$.

Penyelesaian

Turunan parsial pertama dari f adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2.3x^2y^2-1=6x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3.2y-0=4x^3y\,.$$

Jadi turunan parsial kedua dari f adalah:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2-1)=12xy^2$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^2-1)=12x^2y$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y)=12x^2y$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y)=4x^3$$

Contoh

Tentukan $f_{123}(x,y,z)$ untuk fungsi

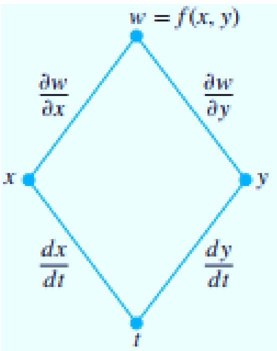
$$f(x,y,z)=xe^{y^3-z^3}$$

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
f_{123}(x,y,z) = f_{xyz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(1.\,e^{y^3-z^3}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(3y^2.\,e^{y^3-z^3}\right) \\
&= 3y^2.\,e^{y^3-z^3}(-3z^2) \\
&= -9y^2z^2.\,e^{y^3-z^3}.
\end{aligned}
$$

2.3. Aturan Rantai Fungsi Peubah Banyak

Kasus 1: Aturan Rantai untuk satu peubah bebas dengan dua atau lebih peubah perantara



Gambar 5.

Misalkan $w = f(x,y)$ terdifferensial terhadap x dan y dengan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ keduanya terdifferensial terhadap t, maka w terdifferensial terhadap t dan

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

(Perhatikan Gambar 5.)

Contoh

Jika $w = xy^2 - 5x^4y$, dengan $x = \cos 2t$ dan $y = \sin t$, tentukan $\frac{\partial w}{\partial t}$. Tentukan nilai $\frac{\partial w}{\partial t}$ untuk $t = 0$.

Penyelesaian

Karena $x = \cos 2t$ dan $y = \sin t$, maka

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -2\sin 2t \ \text{ dan } \ \frac{\partial y}{\partial t} = \cos t.$$

Selanjutnya dari $w = xy^2 - 5x^4y$ maka

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 - 20x^3y \ \text{ dan}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy - 5x^4.$$

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (y^2 - 20x^3y)(-2\sin 2t) + (2xy - 5x^4)(\cos t).$$

$$= (sin^2 t - 20\ cos^3 2t.\sin t)(-2\sin 2t) + (2\cos 2t\,.\sin t - 5\ cos^4 2t)(\cos t)$$

$$= -2sin^2 t.\sin 2t + 40\ cos^3 2t.\sin t\,.\sin 2t + 2\cos 2t\,.\sin t\,.\cos t - 5\ cos^4 2t.\cos t.$$

Turunan parsial $\frac{\partial w}{\partial x}$ dapat juga ditentukan dengan terlebih dahulu menyatakan w sebagai fungsi dari peubah t saja, kemudian menggunakan aturan turunan fungsi satu peubah pada fungsi:

$$w(t) = \cos 2t\,.(\sin t)^2 - 5(\cos 2t)^4.\sin t$$

$$= \cos 2t\,.sin^2 t - 5cos^4 2t.\sin t,$$

dan diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2\sin 2t\,.sin^2 t + \cos 2t\,.2\sin t\,.\cos t + 40\ cos^3 2t.\sin 2t\,.\sin t - \ 5cos^4 2t.\cos t$$

$$= -2sin^2 t.\sin 2t + 40\ cos^3 2t.\sin t\,.\sin 2t + 2\cos 2t\,.\sin t\,.\cos t - 5\ cos^4 2t.\cos t$$

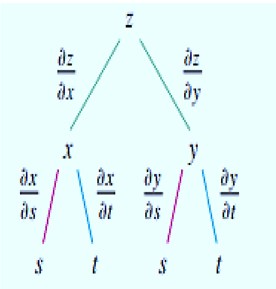
$$= -4sin^3 t.\cos t + 80\ cos^3 2t.\sin^2 t\,.\cos t + \cos 2t\,.\sin 2t - 5\ cos^4 2t.\cos t$$

$$= \cos t\,(-4sin^3 t + 80\ cos^3 2t.\sin^2 t - 5\ cos^4 2t) + \frac{1}{2}.\sin 4t.$$

Kasus 2: Aturan Rantai untuk dua peubah bebas dengan dua atau lebih peubah perantara

Misalkan $z = f(x, y)$ menyatakan fungsi dari dua peubah bebas s dan t, di mana x dan y merupakan peubah perantara yang menghubungkan fungsi z dengan peubah bebasnya yang dinyatakan dalam bentuk:

$$x = x(s,t) \qquad y = y(s,t) \qquad \text{.................................} \quad (2)$$



Gambar 5.

Jika persamaan (2) disubstitusikan ke dala z maka z menjadi fungsi dari peubah s dan t atau $z = f(s,t)$.

Turunan parsial z terhadap s dan t, dapat dikerjakan secara langsung melalui fungsi $z = f(s,t)$, tetapi hal ini menjadi tidak praktis. Dengan menggunakan aturan turunan rantai, turunan parsial terhadap s dan t dapat dilakukan melalui fungsi awal $z = f(x,y)$; dengan x dan y memenuhi persamaan (2), dan diperoleh bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

.... (3)

(Perhatikan Gambar5)

Contoh

Diketahui $w = f(x, y)$ dengan

$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta$$

Tentukan turunan parsial $\frac{\partial w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial w}{\partial y}$ yang dinyatakan dalam $\frac{\partial w}{\partial r}$ dan $\frac{\partial w}{\partial \theta}$

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta$$

Untuk mengeliminasi $\frac{\partial w}{\partial x}$ di ruas kanan, persamaan pertama dikalikan dengan $r\sin\theta$ dan persamaan kedua dengan $\cos\theta$, kemudian kedua persaman dijumlahkan. Untuk mengeliminasi $\frac{\partial w}{\partial y}$ di ruas kanan, persamaan pertama dikalikan dengan $r\cos\theta$ dan persamaan kedua dengan $\sin\theta$, kemudian kedua persamaan diperkurangkan. Dengan menggunakan operasi aljabar sederhana diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \sin\theta\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

Contoh

Diketahui $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $x = re^s$ dan $y = re^{-s}$

Tentukan

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$$

Penyelesaian

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = e^s, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = re^s$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}.$$

Berdasarkan persamaan (3) maka

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}e^{s}+\frac{\partial w}{\partial y}e^{-s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}re^{s}-\frac{\partial w}{\partial y}re^{-s}$$

Kasus 2 dapat diperluas untuk fungsi dengan peubah bebas dan peubah perantara lebih dari dua.

Misalkan w adalah fungsi yang terturunkan dari n peubah, $x_1, x_2, \cdots, x_n$, dan untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, x_i adalah fungsi dari m peubah, $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Jika semua turunan parsial $\partial x_i/\partial y_j$ ada untuk $i = 1,2,\cdots,n$ dan $j = 1,2,\cdots,m$, maka w adalah fungsi peubah banyak dari $y_1, y_2, \cdots, y_m$ dan berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\ ;$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}.$$

Contoh

Bila $w = z\sin(y/x)$ dengan :

$$x = 3r^2 + 2s$$
$$y = 4r - 2s^3$$
$$z = 2r^2 - 3s^2$$

Tentukan $\frac{\partial w}{\partial r}$ dan $\frac{\partial w}{\partial s}$

Penyelesaian

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=(z\cos(\frac{y}{x}))(-\frac{y}{x^2}).6r+\frac{z}{x}(\cos\frac{y}{x}).4+(\sin\frac{y}{x}).4r$$

$$=(\frac{4z}{x}-\frac{6ryz}{x^2})\cos(\frac{y}{x})+4r\sin(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=-\frac{yz}{x^2}(cos(\frac{y}{x})).2+\frac{z}{x}(cos(\frac{y}{x}))(-6s^2)+(sin(\frac{y}{x}))(-6s)$$

$$=-(\frac{2yz}{x^2}+\frac{6s^2}{x})\,cos(\frac{y}{x})-6s\,sin(\frac{y}{s})$$

Contoh Aplikasi

Gunakan hukum gas ideal, $T = P\,V\,/k$ dengan $k = 10$ untuk mencari laju perubahan temperatur pada saat volume gas $V = 120\ cm^3$, tekanan gas $P = 8\ N/cm^2$, jika pada saat yang sama ketika volume gas naik dengan kelajuan $2\ cm^3$/menit , tekanan gas menurun dengan laju $0{,}1\ N$/menit.

Penyelesaian

Misalkan t adalah jangka waktu yang dibutuhkan pada saat volume gas mulai naik. Maka laju perubahan temperatur (dT/dt) diperoleh

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{V}{k}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{k}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{120}{10}\,(-0{,}1) + \frac{8}{10}\,(2) = 0{,}4.$$

Jadi temperature naik dengan laju dT/dt adalah 0,4 derajat/menit.

2.4. Turunan Fungsi Implisit

Pada Matematika dasar I, untuk menentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit $F(x,y) = 0$, karena ruas kiri dari bentuk ini semuanya merupakan fungsi dari x dan biasanya berbentuk fungsi komposisi, maka dengan aturan rantai kita bisa memperoleh $\frac{dy}{dx}$. Cara yang serupa dapat diterapkan pada fungsi dengan banyak peubah.

Misalnya diketahui suatu persamaan dalam bentuk:

$$F(x,y,z) = 0$$

dengan menganggap z sebagai fungsi dari peubah x dan y, atau $z = f(x,y)$ maka bentuk persamaan di atas menjadi:

$$F(x,y,f(x,y)) = 0.$$

Dalam bentuk demikian, turunan parsial $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ (yang biasa kita tulis dengan lambang $\frac{dy}{dx}$) misalnya, bisa diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan $\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,f(x,y))$, sehingga kita peroleh:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y),f(x,y)) = 0.$$

Dengan menguraikan bentuk persamaan ketiga ini, turunan parsial yang dicari, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cong \frac{\partial z}{\partial x}$ dapat ditentukan. Berikut adalah suatu contoh sederhana, bagaimana menentukan turunan parsial dari suatu fungsi peubah banyak yang dinyatakan dalam bentuk implisit.

Contoh

Diberikan $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ dengan $z = f(x,y)$.

Diskusikan bagaimana cara menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Penyelesaian

Dengan menganggap z sebagai fungsi dari peubah x dan y maka turunan parsial tehadap x, yaitu $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, dapat juga ditulis dengan notasi $\frac{\partial z}{\partial x}$. Turunan parsial tersebut pertama-tama ditulis dalam bentuk persamaan berikut:

$$(i).\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - z^2 + 1) = \frac{\partial}{\partial x}(0).$$

Pada ruas kiri, turunan parsial terhadap x untuk suku pertamax^2 adalah:

$$(ii).\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x,$$

turunan parsial terhadap x untuk suku kedua y^2 dan suku keempat 1 adalah:

$$(iii).\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 1) = 0 \qquad \text{....} \quad (\text{konstan terhadap } x)$$

Karena $z = f(x, y)$, maka dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\begin{aligned}(iv).\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial z}(z^2).\frac{\partial z}{\partial x}\\ &= 2z.\frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan $(i), (ii), (iii)$, dan (iv) diperoleh:

$$2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

atau

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$$

Barangkali timbul pertanyaan mengenai contoh di atas, apakah hasil tersebut konsisten dengan cara mengubah bentuk implisit

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

menjadi bentuk dua persamaan fungsi, yaitu :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \text{ dan } \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1},$$

kemudian ditemukan turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ langsung dari kedua persamaan fungsi tesebut? Selanjutnya mungkin muncul pertanyaan yang kedua, nilai z yang manakah yang harus disubtitusikan pada hasil $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$? Dengan mudah terlihat, bahwa apabila penentuan turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ langsung dari fungsi yang pertama ,yaitu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

Maka hasil ini persis sama dengan hasil sebelumnya apabila kita substitusikan persamaan fungsi yang pertama. Demikian pula apabila kita menentukan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

hasil ini juga sama dengan hasil $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, jika z disubstitusikan menggunakan persamaan dari fungsi yang kedua.

Dengan cara yang analog, kita bisa mencari turunan parsial $\frac{\partial w}{\partial x}$ dari persamaan fungsi implisit $F(x, y, z, w) = 0$; dst.
Jika z suatu fungsi dari x dan y yang didefinisikan dalam bentuk fungsi implisit $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 0$, maka turunan terhadap x diperoleh berdasarkan persamaan:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Karena $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, atau

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.0 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

Maka

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$

Hal yang sama berlaku untuk turunan parsial z terhadap y, maka diperoleh hubungan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Contoh

Misalkan $F(x, y, z) = x^3 e^{y+z} - y \sin(x - z) = 0$ adalah fungsi implisit dengan z adalah fungsi terhadap x dan y. Tentukan $\partial z/\partial x$.

Penyelesaian

Karena

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 e^{y+z} - y\cos(x - z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x^3 e^{y+z} + y\cos(x - z)$$

dan menggunakan hubungan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

maka

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 e^{y+z} - y\cos(x - z)}{x^3 e^{y+z} + y\cos(x - z)}.$$

2.5. Turunan Total

Definisi. Jika f adalah fungsi dari dua peubah x dan y, maka yang disebut dengan increment (perubahan nilai) f di titik (x_0, y_0), yang diberi lambang $\Delta f(x_0, y_0)$; dinyatakan melalui persamaan

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Contoh

Diberikan fungsi f yang didefinisikan melalui persamaan $f(x,y) = 3x - xy^2$.
Carilah Increment dari f di titik (x_0, y_0) !

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &= 3(x_0+\Delta x) - (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)^2 - (3x_0 - x_0{y_0}^2)\\ &= 3\Delta x - {y_0}^2\Delta x - 2x_0y_0\Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2\end{aligned}$$

Contoh

Misalkan $z = xy^2 + x^3 + x^2y^2 + y$, tentukan besar perubahan nilai z dari titik (1,1) ke (3,5).

Penyelesaian

Berdasarkan Definisi , maka perubahan nilai z adalah

$$\Delta z = z(3,5) - z(1,1) = 332 - 4 = 328.$$

> Definisi. Misalkan $z = f(x,y)$ adalah fungsi dari dua peubah x dan y, f mempunyai turunan parsial dan misalkan dx dan dy adalah perubahan nilai dari x dan y yang sangat kecil. Turunan total dari f dinyatakan sebagai
> $$df = f_x\,dx + f_y dy.$$

Jika $dx = \Delta x$ dan $dy = \Delta y$, masing-masing menyatakan perubahan kecil dalam x dan y, maka dz akan berupa suatu hampiran yang baik terhadap Δz yang merupakan perubahan padanannya dalam z.

Contoh

Misalkan fungsi $z = xy^2 + x^3 + x^2y^2 + y$ seperti yang tertulis pada contoh sebelumnya. Tentukan perubahan nilai z dari titik (1,1) ke (1.02,0.99), dengan ketelitian dua decimal.
Dari Definisi .. diperoleh $\Delta z = z(1.02,0.99) - z(1,1) = 4.1118 - 4 = 0.11$.
Dengan menggunakan Definisi .., kita akan menggunakan turunan total dz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 3x^2 + 2xy^2 \ \text{ dan } \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2x^2y + 2y$$

Karena

$$dx = 1.02 - 1 = 0.02 \quad \text{dan} \quad dy = 0.99 - 1 = -0.01$$

maka

$$dz(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)dz + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)dy$$

$$dz = (6 \times 0.02) + \big(6 \times (-0.01)\big) = 0.06.$$

Contoh

Misalkan $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik (2,1) ke (2.03, 0.98).

$$\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2,1) = 17.779062 - 17 = 0.779062.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y \quad \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 25, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

maka

$$dz = 25 \times 0.03 + 1 \times (-0.02) = 0.73.$$

Contoh

Misalkan $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik (2,1) ke (2.03, 0.98).

Penyelesaian

$$\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2,1) = 17.779062 - 17 = 0.779062.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y \quad \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 25, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

maka

$$dz = 25 \times 0.03 + 1 \times (-0.02) = 0.73.$$

Contoh

Suatu bejana antik yang terbuat dari logam berbentuk silinder tegak mempunyai tutupan yang tingginya 6 cm dengan alasnya berupa lingkaran dengan jari-jari lingkaran dalamnya 2 cm dan ketebalan logam adalah 0.1 cm. Jika nilai logam dari bejana itu ditentukan oleh volumenya dan dinilai Rp 100000/cm^3. Carilah nilai pendekatan untuk nilai logam bejana tersebut?

Penyelesaian

Persamaan volume silinder adalah $V = \pi r^2 h$. Volume logam bejana adalah selisih volume silinder tegak yang jari-jarinya $r_l = 2.1\, cm$ dan tingginya $h_l = 6.2\, cm$ dengan silinder tegak yang jari-jarinya $r_d = 2\, cm$ dan tingginya $h_d = 6\, cm$.

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial h}\, dh$$

$$dV = 2\pi r h\, dr + \pi r^2 dh$$

Jadi dengan ukuran-ukuran yang telah disebutkan di atas, diperoleh nilai pendekatan volume logam adalah

$$dV = 24\,\pi\;\; 0.1 + 4\,\pi\;\; 0.2 = 3.2\,\pi \approx 10.0531\, cm^3,$$

sehingga nilai bejana adalah Rp 1005310.

Definisi. Misalkan fungsi $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adalah fungsi peubah banyak dan mempunyai turunan-turunan parsial di sebuah titik $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, maka turunan total dari w dinyatakan

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Contoh 3.

Sebuah kotak kayu dipesan ke pengrajin kayu dengan ukuran panjang 10 cm, lebar 12 cm, dan tinggi 15 cm. Setelah dibuat diketahui telah terjadi kesalahan pengukuran sampai 0.002 cm. Tentukan persentase nilai pendekatan kesalahan pengukuran terbesar dari volume kotak?

Penyelesaian

Misalkan kesalahan pengukuran itu terjadi adalah masing-masing ukuran panjang (p), lebar (l), dan tinggi (t) menjadi bertambah masing-masing $dp = dl = dt = 0.002$ cm, maka kesalahan pengukuran volume adalah

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p}\, dp + \frac{\partial V}{\partial l}\, dl + \frac{\partial V}{\partial t}\, dt$$

$$= (l\,t + p\,t + p\,l)dp$$

$$= (12 \times 15 + 10 \times 15 + 10 \times 12) \times 0.002$$

$$= 0.9$$

Jadi persentase kesalahan $\frac{0.9}{1800} = 0.05\%$.

2.6. Turunan Berarah

Sebelumnya telah dibahas tentang fungsi dua peubah $f(x, y)$ beserta turunan parsial $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ untuk mengukur laju perubahan pada arah sejajar sumbu x dan sumbu y. Bagaimana untuk turunan yang bergerak dalam arah lainnya? Untuk menjawab pertanyaan tersebut pada sub bab ini akan membahas laju perubahan $f(x, y)$ pada sebarang arah yang dikaitkan dengan konsep turunan berarah, kemudian akan dihubungkan dengan gradien (kemiringan garis singgung).

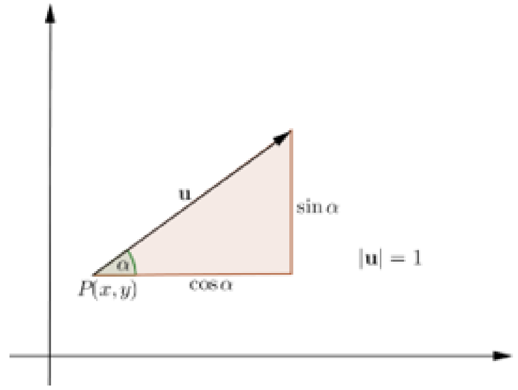
Turunan Berarah

Turunan berarah mengukur laju perubahan yang arahnya tidak sejajar dengan sumbu x dan sumbu y atau arah sebarang. Misalkan f

fungsi dengan peubah x dan y, dan titik $P(x, y)$ adalah titik pada bidang xy. Misalkan pula $\boldsymbol{u}$ adalah vektor satuan dengan titik pangkal P dan membentu sudut α dengan sumbu X, maka

$$\boldsymbol{u} = \cos\alpha\ \boldsymbol{i} + \sin\alpha\ \boldsymbol{j}$$

dan panjang vektor $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$



Gambar. Vektor satuan $\boldsymbol{u}$

Definisi 2.2.1. Misalkan f adalah fungsi dengan peubah x dan y, dan $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\ \boldsymbol{j}$ vektor satuan. **Turunan berarah** dari f dalam arah $\boldsymbol{u}$ ditulis $D_{\boldsymbol{u}}f$ dan didefinisikan:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\alpha\,, y + h\sin\alpha) - f(x,y)}{h}$$

asalkan limit pada ruas kanan ada.

Jika vektor satuan $\boldsymbol{u}$ dituliskan dalam bentuk $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ maka turunan berarah f dalam arah $\boldsymbol{u}$ pada titik $P(x_o, y_o)$ dinyatakan sebagai berikut

Definisi 2.2.2. Misalkan f adalah fungsi dengan peubah x dan y, dan $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ vektor satuan. **Turunan berarah** dari f dalam arah $\boldsymbol{u}$ pada titik $P(x_o, y_o)$ didefinisikan:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_o + hu_1, y_o + hu_2\right) - f(x_o, y_o)}{h}$$

asalkan limit pada ruas kanan ada.

Turunan berarah merupakan laju perubahan nilai fungsi $f(x, y)$ terhadap arah vektor satuan **u**.

Contoh 1. Tentukan turunan berarah $D_{\boldsymbol{u}}f$ dari fungsi

$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ dengan $u = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) i + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) j$

Penyelesaian

Sebelum mulai mengerjakan turunan berarah $D_{\boldsymbol{u}}f$, diketahui bahwa nilai dari $\cos x$ untuk $x = \frac{\pi}{6}$ adalah:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{180°}{6}\right) = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

dan

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{180°}{3}\right) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

Dari definisi 2.2.1 diperoleh

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h, y + \frac{1}{2}\,h\right) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[3\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\,h\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right)\right]}{h} - \frac{[3x^2 - y^2 + 4x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}xh + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - yh - \frac{1}{4}h^2}{h} + \frac{4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\sqrt{3}xh + \frac{9}{4}h^2 - yh - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - h + 2\sqrt{3}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - h + 2\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}$$

Cara **lain yang lebih singkat untuk menentukan turunan berarah $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}$:**

Misalkan g adalah fungsi dengan peubah t yang dapat diturunkan dan anggap peubah x, y dan sudut α tetap, dengan mendefinisikan fungsi g sebagai berikut:

$$g(t) = f(x + t\cos\alpha\,, y + t\sin\alpha)$$

Turunan terhadap t, dinyatakan

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x + (t+h)\cos\alpha\,, y + (t+h)\sin\alpha)]}{h} - [\frac{f(x + t\cos\alpha\,, y + t\sin\alpha]}{h}.$$

Untuk $t = 0$

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x + h\cos\alpha\,, y + h\sin\alpha)] - [f(x,y)]}{h}$$

Jadi $g'(0) = D_{\boldsymbol{u}}f$

Dari $g(t) = f(x + t\cos\alpha\,, y + t\sin\alpha)$;

$$\frac{\partial(x + t\cos\alpha)}{\partial x} = 1 \text{ dan } \frac{\partial(y + t\sin\alpha)}{\partial y} = 1$$

Maka diperoleh $\partial(x + t\cos\alpha) = \partial x$ dan $\partial(y + t\sin\alpha) = \partial y$

Sehingga bentuk aturan rantai juga dapat digunakan untuk mendapatkan turunan g terhadap t, yaitu

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(x + t\cos\alpha)}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(y + t\sin\alpha)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha \end{aligned}$$

Untuk $t = 0$ diperoleh

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

Sehingga turunan berarah dari f adalah:

$$\boldsymbol{D_u f = D_x f \cos\alpha + D_y f \sin\alpha}.$$

Contoh 2

Tentukan turunan berarah fungsi $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ dalam arah vektor

$$u = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)i + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)j$$

Penyelesaian

Turunan-turunan parsial f adalah

$$D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4 \text{ dan } D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

sehingga

$$\begin{aligned} D_u f &= D_x f\cos\alpha + D_y f\sin\alpha \\ &= (6x + 4)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + (-2y)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (6x + 4)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + (-2y)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - y \end{aligned}$$

Contoh 2.

Tentukan turunan berarah $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$.

Jika diketahui $f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$ dan $\boldsymbol{u} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

Berapakah $D_{\boldsymbol{u}}f(2,-1)$?

Penyelesaian

Cara 1: dengan cara limit

Berdasarkan arah vektor $\boldsymbol{u} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, diketahui nilai $\cos\alpha = 4$ dan $\sin\alpha = 3$.

Sehingga berdasarkan definisi 2.2.1, persamaan $D_{\boldsymbol{u}}f$ menjadi

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h, y+3h) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[(x+4h)^2 - (x+4h)(y+3h) + 3(y+3h)^2] -}{h}$$

$$\frac{[4x^2 - xy + 3y^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[32xh + 64h^2 - 4hy - 3xh - 12h^2]}{h}$$

$$\frac{[18yh + 27h^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[32x + 64h - 4y - 3x - 12h + 18y + 27h]}{h}$$

$$= 32x - 4y - 3x + 18y$$

$$= 29x + 14y$$

Jadi, $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = 29x + 14y$

Oleh karena itu, $D_{\boldsymbol{u}}f(2,-1) = 29(2) + 14(-1) = 44.$

Cara 2 : menggunakan turunan rantai

Sebelumnya diketahui turunan-turunan parsial dari

$$f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$$

adalah

$$D_xf = \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y \quad \text{dan} \quad D_yf = \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 6y = 6y - x$$

sehingga:

$$D_uf = D_xf\cos\alpha + D_yf\sin\alpha$$

$$= (8x - y)4 + (6y - x)3$$

$$= 32x - 4y + 18y - 3x$$

$$= 29x + 14y.$$

Jadi $D_uf(2,-1) = 29(2) + 14(-1) = 44.$

3.4.2 Gradien Vektor

Turunan arah dari fungsi yang dapat diturunkan dapat ditulis sebagai hasil kali titik dari dua vektor

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= f_x(x,y)\,\boldsymbol{a} + f_y(x,y)\,\boldsymbol{b} \\ &= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \\ &= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Definisi 3.4.2. Jika f adalah fungsi dua peubah dengan turunan-turunan parsialnya ada, maka gradient f, ditulis $\Delta\boldsymbol{f}$ (baca "del-f") adalah

$$\Delta\boldsymbol{f}(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

Merupakan sebuah bentuk vektor yang komponen-komponenya adalah turunan-turunan parsial dari $f(x,y)$

Contoh 4

Jika $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$, maka tentukan $\Delta f(0,1)$.

Penyelesaian:

$$\Delta f(x,y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy}\rangle$$

dan

$$\Delta f(0,1) = \langle 2,0\rangle$$

Definisi 3.4.3. (Definisi hasil kali titik untuk dua peubah)

Jika $\boldsymbol{a} = a_1\ \boldsymbol{i} + a_2\ \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{b} = b_1\ \boldsymbol{i} + b_2\ \boldsymbol{j}$ adalah dua vektor di $\boldsymbol{R}^2$, maka hasil kali titiknya dinyatakan sebagai $\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$.

Dari bentuk turunan berarah $D_{\boldsymbol{u}}\, f = D_x\, f co\,s\,\alpha + D_y\, f\sin\alpha$, dan definisi 3.4.2 dan 3.4.3, maka turunan berarah tidak lain adalah hasil kali titik antara gradien f dengan vektor satuan **u**. Jadi

$$D_{\boldsymbol{u}}\, f(x,y) = \Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{u} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \qquad (\boldsymbol{i})$$

Contoh 5

Tentukan gradien dari $f(x,y) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{9}y^2$, kemudian hitung turunan berarah dari f dalam arau vektor $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\ \boldsymbol{i} + \sin\alpha\ \boldsymbol{j}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}\,x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{9}\,y.$$

Penyelesaian:

Karena

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}\,x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{9}\,y.$$

maka gradien f adalah

$$\Delta \boldsymbol{f} = \frac{1}{5}\,x\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}\,y\,\boldsymbol{j}.$$

Dengan menggunakan persamaan (i), turunan berarah dari f dalam arah $\boldsymbol{u}$ adalah:

$$D_{\boldsymbol{u}}\, f = (\frac{1}{5}\,x\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}\,y\,\boldsymbol{j}) \cdot (\cos\alpha\;\; \boldsymbol{i} + \sin\alpha\;\boldsymbol{j}) = \frac{x}{5}\cos\alpha + \frac{2y}{9}\sin\alpha.$$

Definisi. Misalkan $a = |\boldsymbol{a}|$ dan $b = |\boldsymbol{b}|$ adalah panjang vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$, dan θ adalah sudut yang terbentuk dari dua vektor tersebut, maka hasil kali titiknya dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a\,b\cos\theta.$$

Dengan menggunakan definisi 3.4.3 turunan berarah f terhadap vektor satuan $\mathbf{u}$ adalah

$$D_{\boldsymbol{u}} f = |\Delta \boldsymbol{f}|\,|\boldsymbol{u}|\;\cos\theta,$$

θ: adalah sudut antara $\boldsymbol{\Delta f}$ dan $\boldsymbol{u}$.

Turunan berarah f akan mencapai maksimum jika $\cos\theta = 1$, atau jika vektor gradient f searah dengan vektor satuan $\boldsymbol{u}$. Dalam hal ini $D_{\boldsymbol{u}} f = |\Delta \boldsymbol{f}|$.

Contoh 6.

Misalkan $f(x,y) = x^2 + y^2$, tentukan arahnya sehingga $D_{\mathbf{u}} f$ maksimum di titik (1,1).

Penyelesaian:

Turunan parsial dari fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Sehingga gradiennya adalah $\Delta \boldsymbol{f} = 2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j}$.

Gradien di titik (1,1) adalah $\Delta \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 2(1)\boldsymbol{i} + 2(1)\boldsymbol{j} = 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}.$

Agar $D_{\boldsymbol{u}} f$ maksimum, maka arah vektor $\boldsymbol{u}$ harus sama dengan arah vektor $\Delta \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$, dengan panjang vektor $\boldsymbol{u}$ adalah $\boldsymbol{u} = 1$. Panjang vektor gradient adalah

$$|\Delta \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Maka vektor satuannya adalah $\boldsymbol{u} = \frac{\Delta \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})}{|\Delta \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})|} = \frac{2\,\boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{j}$

Jadi

$$D_{\boldsymbol{u}} f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\sin\alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

adalah turunan berarah yang maksimum dalam arah $\boldsymbol{u}$ di titik (1,1). Nilai $\cos\alpha$ dan $\sin\alpha$ diperoleh dari persamaan $\boldsymbol{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{j}$ yang berasal dari bentuk umum $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\, i + \sin\alpha\ j$.

Contoh 7.

Tentukan turunan berarah dari fungsi $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ pada titik $(1,-2)$ dalam arah vektor $\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j}$.

Penyelesaian:

Sebelumnya perlu dihitung gradien di titik $(1,-2)$,

$$\Delta \boldsymbol{f}(x,y) = 2xy^3\,\boldsymbol{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\boldsymbol{j}$$

Maka

$$\Delta \boldsymbol{f}(1,-2) = 2(1)(-2)^3\boldsymbol{i} + [3(1)^2(-2)^2 - 4]\boldsymbol{j} = -16\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{j}$$

Dengan panjang vektor $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Maka vektor satuannya dalam arah vektor adalah

$$u = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{j}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan $D_{\boldsymbol{u}}\, f(x,y) = \Delta f(x,y) \cdot \boldsymbol{u}$

diperoleh

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{u}}\, f(1,-2) &= \Delta f(1,-2) \cdot \boldsymbol{u} \\ &= (-16\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\boldsymbol{j}\right) \\ &= \frac{(-16 \cdot 2 + 12 \cdot 5)}{\sqrt{29}} = \frac{28}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

2.7. Turunan Berarah

Pada mata kuliah Matematika Dasar 1, deret Taylor untuk fungsi satu peubah telah diperkenalkan. Subbab ini akan diperkenalkan mengenai deret Taylor untuk fungsi dua peubah. Selanjutnya, dibahas polinomial Taylor yang digunakan untuk menghampiri fungsi dua peubah

Sebelumnya, perhatikan deret Taylor untuk satu peubah berikut: Misalkan f suatu fungsi yang turunannya ada di setiap orde di $x \in I$

dengan I merupakan interval terbuka yang memuat a. Deret Taylor fungsi f di titik $x = a$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \cdots$$

Untuk kasus $a = 0$, deret Taylor fungsi f disebut dengan deret McLaurin.

Deret Taylor untuk fungsi dua peubah dapat diperoleh dengan menggunakan konsep pada deret Taylor fungsi dua peubah. Misalkan fungsi $f(x, y)$ kontinu dan setiap turunan parsial di setiap orde ada pada daerah terbuka D yang memuat (a, b). Misalkan $x = a + ht$ dan $y = b + kt$ dengan h dan k merupakan perpidahan yang cukup kecil serta $t \in [0,1]$. Selanjutnya, diperoleh fungsi satu peubah

$$g(t) = f(a + ht, b + kt).$$

Dengan menggunakan deret McLaurin untuk satu peubah diperoleh,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)t^2}{2!} + \cdots + \frac{g^n(0)t^n}{n!} + \cdots$$

Pada subbab sebelumnya telah dibahas mengenai turunan rantai, sehingga dapat diperoleh

$$g'(t) = \frac{\partial f(a + ht, b + kt)}{\partial t} = hf_x + kf_y = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

Untuk turunan kedua diperoleh,

$$g''(t) = h\left(\frac{\partial g'(t)}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial g'(t)}{\partial y}\right) = h\big(hf_{xx} + kf_{yx}\big) + k\big(hf_{xy} + kf_{yy}\big)$$

$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

Dengan memperumum metode di atas, diperoleh,

$$g^n(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

Selanjutnya karena $g(0) = f(a, b)$, diperoleh,

$$g(t) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)t + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)t^2}{2!} + \cdots + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)t^n}{n!} + \cdots$$

Substitusi $t = 1$, diperoleh,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b) + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)}{2!} + \cdots + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)}{n!} + \cdots$$

Karena $x = a + h$ dan $y = b + k$ untuk $t = 1$, sehingga dapat disubstitusi $h = x - a$ dan $k = y - b$. Jadi diperoleh deret Taylor,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b) \\ &\quad + \frac{\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)}{2!} + \cdots \\ &\quad + \frac{\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(a,b)}{k!} \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh di atas, maka dapat dituliskan deret Taylor untuk fungsi dua peubah sebagai berikut:

Deret Taylor Fungsi Dua Peubah. Misalkan fungsi $f(x,y)$ kontinu dan setiap turunan parsial di setiap orde ada pada daerah persegi panjangan terbuka D yang terpusat di (a,b). Deret Taylor fungsi f di sekitar (a,b) adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(a,b)}{k!}$$

Deret Taylor dapat digunakan untuk memperoleh fungsi polinomial yang menghampiri suatu fungsi. Polinomial tersebut dinamakan polinomial Taylor.

Polinomial Taylor Fungsi Dua Peubah. Misalkan fungsi $f(x,y)$ kontinu dan setiap turunan parsial di orde ke-n ada pada daerah persegi panjangan terbuka D yang terpusat di (a,b). Fungsi $f(x,y)$ dapat kita hampiri dengan polinomial Taylor sebagai berikut,

$$f(x,y) \approx P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^k \frac{f(a,b)}{k!}$$

Contoh 8.

Cari polinomial Taylor orde satu dan dua dari fungsi $f(x,y) = 1 - e^{x^2+2y^2}$ di titik $(0,0)$, kemudian gunakan untuk hampiran untuk nilai $f(0.06,-0.05)$.

Penyelesaian

Pertama temukan turunan parsial dari $f(x,y)$,

$f_x = -2xe^{x^2+2y^2}$

$f_y = -4ye^{x^2+2y^2}$

$f_{xx} = -2e^{x^2+2y^2} - 4x^2e^{x^2+2y^2}$

$f_{yy} = -4e^{x^2+2y^2} - 8y^2e^{x^2+2y^2}$

$f_{xy} = -8xye^{x^2+2y^2}$,

sehingga, polimoial Taylor orde satu diperoleh

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) \\ &= 1 + x(0) + y(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya, polinomial Taylor orde dua di titik $(0,0)$ diperoleh

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2f_{yy}(0,0)\right) \\ &= 1 + x(0) + y(0) + \frac{1}{2}\left(x^2(-2) + 2xy(0) + y^2(-4)\right) \\ &= 1 + (-2x^2 - 4y^2) \end{aligned}$$

Berdasarkan polinomial Taylor di atas, diperoleh hampiran nilai dari $f(0.06,-0.05)$, yaitu untuk orde satu :

$$f(0.06,-0.05) \approx P_1(0.06,-0.05) = 1$$

Kemudian untuk hampiran untuk orde dua :

$$\begin{aligned} f(0.06,-0.05) \approx P_2(0.06,-0.05) &= 1 + (-2(0.06)^2 - 4(0.05)^2) \\ &= 1 + (-0.0072 - 0.01) = 1 - 0.0172 = 0.9828. \end{aligned}$$

Contoh 9.

Tentukan deret Taylor pada fungsi $f(x,y) = \sin x + \cos y$ di titik $(0,0)$.

Penyelesaian

Pertama diamati turunan parsial dari fungsi $f(x,y)$,

$$\begin{aligned} f_x &= \cos x \\ f_y &= -\sin y \\ f_{xy} &= 0 \\ f_{xx} &= -\sin x \\ f_{yy} &= -\cos y \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk turunan parsial orde $n \geq 2$ yang memuat dua variabel akan menghasilkan turunan parsial berupa fungsi nol yaitu $f_{xy} = f_{xxy} = f_{xyy} = \cdots = 0$. Sehingga diperoleh deret Taylor di titik $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(0,0)}{k!} \\ &= f(0,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \frac{f(0,0)}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(0,0)}{k!} \\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &+ \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned}$$

Contoh 3.

Tentukan polinomial Taylor orde tiga pada fungsi

$f(x,y) = e^{x-1}\ln(y+1)$ di titik $(1,0)$.

Penyelesaian

Mula-mula cari turunan berarah pada orde dua dan tiga pada fungsi $f(x,y)$,

$$\begin{aligned} f_x &= e^{x-1}\ln(y+1) \\ f_y &= \frac{e^{x-1}}{y+1} \\ f_{xx} &= e^{x-1}\ln(y+1) \end{aligned}$$

$$f_{yy} = -\frac{e^{x-1}}{(y+1)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{e^{x-1}}{y+1}$$

$$f_{xxx} = e^{x-1}\ln(y+1)$$

$$f_{yyy} = \frac{2e^{x-1}}{(y+1)^3}$$

$$f_{xxy} = \frac{e^{x-1}}{y+1}$$

$$f_{xyy} = -\frac{e^{x-1}}{(y+1)^2}$$

Selanjutnya, dikerjakan terlebih dahulu

$$\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(a,b)}{k!}$$

Untuk $k = 0,1,2$ di titik $(1,0)$

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^0 \frac{f(1,0)}{0!} = f(1,0)$$

$$= e^0\ln(1) = 0$$

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 \frac{f(1,0)}{1!} = (x-1)f_x(1,0) + yf_y(1,0)$$

$$= (x-1)0 + y(1) = y$$

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \frac{f(1,0)}{2!} = \frac{1}{2}((x-1)^2 f_{xx}(1,0)\ ) +$$

$$\frac{1}{2}\left(2(x-1)yf_{xy}(1,0) + y^2 f_{yy}(1,0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((x-1)^2 0 + 2(x-1)y(1) + y^2(-1)\right)$$

$$= \frac{2xy - 2y - y^2}{2}$$

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 \frac{f(1,0)}{3!}$$

$$= \frac{1}{6}\left((x-1)^3 f_{xxx}(1,0) + 3(x-1)^2 y f_{xxy}(1,0) + 3(x-1)y^2 f_{xyy}(1,0) + y^3 f_{yyy}(1,0)\right)$$

$$= \frac{1}{6}((x-1)^3 0 + 3(x-1)^2 y(1) + 3(x-1)y^2(-1) + 2y^3)$$

$$= \frac{1}{6}(3y(x-1)^2 + 3y^2(x-1) + 2y^3)$$

Jadi, diperoleh polinomial Taylor

$$P_3(x,y) = \sum_{k=0}^{3}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{f(a,b)}{k!}$$

$$= 0 + y + \frac{2xy - 2y - y^2}{2}$$

$$+ \frac{1}{6}(3y(x-1)^2 + 3y^2(x-1) + 2y^3)$$

$$= \frac{1}{6}(6xy - 3y^2 + 3y(x-1)^2 + 3y^2(x-1) + 2y^3)$$

Latihan 2.

I. Turunan Parsial

1. Tentukan $\frac{\partial F}{\partial x}$ dan $\frac{\partial F}{\partial y}$ dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $F(u,v) = 2u^3 + uv - 3v^2; u = x^2 + y; v = 5xy - y^2$
   b. $F(x,y) = u\, e^v - v\, e^u; u = xy; v = x^2 - y^2$
   c. $F(x,y) = (2u + v)/(v - 2u); u = 2x - 3y; v = x + 2y$
   d. $F(u,v) = \ln(u+v) - \ln(u-v); u = y\, e^x; v = y/x$
   e. $F(u,v) = u^2v^3; u = x + y; v = 2y$

II. Aturan Rantai

1. Tentukan $\frac{\partial f}{\partial r}$ dan $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x,y) = 3x^2 - 5y^2; x = r\sin 2\theta; y = r\cos\theta$
   b. $f(x,y) = 4x^2 + 7y^2; x = \sin(r - \theta); y = \cos(\theta - r)$
2. Bila $F(x,y) = x^3y; x^5 + y = t;\ x^2 + y^2 = t^2$ tentukanlah $\frac{\partial F}{\partial t}$
3. Tentukan nilai dF/dt di titik $t = \pi/2$, jika $F(x,y) = e^{xy^2}; x = t\cos t; y = 1/t$.
4. Jika $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, tunjukkan bahwa $x\, f_x + y\, f_y = f$.
5. Jika $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, tunjukkan bahwa $x\, z_x + y\, z_y = 1$

III. Turunan Fungsi Implisit

1. Misalkan $z = z(x,y)$, tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dari fungsi implisit berikut
   a. $y\, e^x + 15x - 17z = 0$
   b. $z\, sin\, x + z\, cos\, y + xyz = 0$
   c. $x^2\, cos\, yz - y^2 \sin xz = 2$

2. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari fungsi implisit berikut
   a. $ye^{-x} + 5x - 17 = 0$
   b. $x. \sin y + y \cos x = 0$
   c. $x^2 \cos y - y^2 \sin x = 0$

IV. Turunan Total

1. Gravitasi dari sebuah benda dinyatakan dengan rumus $g_b = A/(A - w)$, dengan A menyatakan berat benda di udara dan w menyatakan berat benda di dalam air. Hasil pengukuran memberikan $A = 20$ dengan kemungkinan kesalahan terbesar adalah 0.01. Hasil pengukuran di air, memberikan $w = 12$ dengan kesalahan pengukuran 0.12. Carilah pendekatan dari kesalahan terbesar yang mungkin terjadi dalam perhitungan gravitasi benda.
2. Misalkan $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik (2,1) ke (2.0013, 0.997).
3. Misalkan $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y^2}$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik (2,1) ke (2.0013, 0.997).

V. Turunan Berarah

1. Tentukan turunan berarah dari fungsi dan vektor satuan di bawah ini dengan menggunakan cara limit.
   a. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$, $\quad u = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) i + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) j$
   b. $g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $\quad u = \frac{3}{4} i - \frac{4}{5} j$
   c. $h(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad u = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i + \frac{1}{2} j$
2. Tentukan nilai turunan berarah u di titik P_0 untuk fungsi:
   a. $f(x, y) = y^2 x$, $\quad u = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\, i + \frac{1}{2} j$, $\quad P_0 = \left(\frac{7}{3}, 2\right)$
   b. $f(x, y) = xe^{2y}$, $\quad u = \frac{1}{2} i + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, j$, $\quad P_0 = (2,0)$
3. Carilah Gradien dan laju perubahan nilai fungsi dalam arah u di titik P dari fungsi:
   a. $f(x, y) = x^2 - 4y$, $\quad u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) i + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) j$, $P = (-2,2)$
   b. $f(x, y) = e^{2xy}$ $\quad u = \frac{4}{5} i - \frac{3}{5} j$, $P = (2,1)$
4. Tentukan arah fungsi $f(x, y)$ sehingga $D_{\mathbf{u}} f$ maksimum pada titik yang ditentukan berikut:
   a. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $P = (4,1)$

b. $f(x, y) = x^2 + 2y^2, P = (2, -1)$

5. Carilah $D_u f$ pada titik P ke arah titik Q dan tentukan $D_u f$ yang maksimum di titik P untuk:

$$f(x, y) = e^x Cosy + e^y Sinx, P(1,0) dan Q(-3,3)$$

VI. Deret Taylor

1. Cari polinomial Taylor orde satu dan dua dari fungsi
   a. $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$ di titik (0,0), kemudian gunakan untuk hampiran untuk nilai $f(-0.01, 0.05)$.
   b. $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$ di titik (0,0), kemudian gunakan untuk hampiran untuk nilai $f(-0.02, -0.03)$.
2. Tentukan polinomial Taylor orde tiga pada fungsi $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ di titik (0,0).
3. Tentukan deret Taylor pada fungsi $f(x, y) = e^{x+y}$ di titik (0,0).
4. Selidiki bentuk dari deret Taylor untuk fungsi tiga variabel.
5. Misalkan $f(x, y) = \tan(x^2 + (y-1)^2)$. Tentukan polinomial Taylor orde duanya selanjutnya cari hampuran untuk nilai $f(0.2,0.7)$.
6. Cari polinomial Taylor orde satu dan dua dari fungsi
   a. $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$ di titik (0,0), kemudian gunakan untuk hampiran untuk nilai $f(-0.01, 0.05)$.
   b. $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$ di titik (0,0), kemudian gunakan untuk hampiran untuk nilai $f(-0.02, -0.03)$.
7. Tentukan polinomial Taylor orde tiga pada fungsi $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ di titik (0,0).
8. Tentukan deret Taylor pada fungsi $f(x, y) = e^{x+y}$ di titik (0,0).
9. Selidiki bentuk dari deret Taylor untuk fungsi tiga variabel.
10. Misalkan $f(x, y) = \tan(x^2 + (y-1)^2)$. Tentukan polinomial Taylor orde duanya selanjutnya cari hampuran untuk nilai $f(0.2,0.7)$.