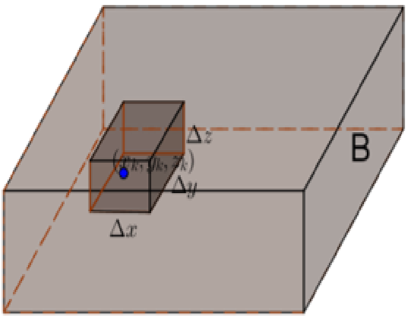
BAB 4. INTEGRAL LIPAT TIGA

- Integral Lipat Dua
- Mengubah Urutan Pengintegralan
- Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar
- **Integral Lipat Tiga**
- **Koordianat Silinder dan Koordinat Bola**
- **Aplikasi Integral Lipat**

4.1. Integral Lipat Tiga

Pada pembahasan sebelumnya, telah dipelajari integral lipat dua, yaitu bentuk fungsi dua variabel yang dintegralkan terhadap kedua variabelnya. Sifat integral tersebut dapat diperluas ke integral lipat tiga untuk fungsi tiga variabel. Kasus yang paling sederhana dari bentuk integral ini adalah kasus di mana fungsi $f(x,y,z)$ terdefinisi pada sebuah kotak segiempat $B = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\}$. Langkah pertama, kita membagi kotak B menjadi kotak-kotak bagian, dengan cara membagi selang $[a,b]$ menjadi l partisi, selang $[c,d]$ menjadi m partisi, dan selang $[r,s]$ menjadi n partisi, sehingga kita mendapatkan $l \times m \times n$ buah kotak bagian yang menyusun kotak B, ilustrasi kotak dengan sembarang subkotak didalamnya dapat dilihat pada gambar 6.1.



Gambar 6.1 Kotak B dengan salah satu kotak partisi sebesar $\boldsymbol{\Delta V}$

Definisi Integral Lipat Tiga. Misalkan sebuah fungsi f yang terdefinisi di B, jumlahan Riemann untuk kotak B ini dinyatakan sebagai

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$$

Jika partisi-partisi subkotak makin banyak, maka didefinisikan integral lipat tiga terhadap kotak B, yaitu

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$$

asalkan limitnya ada.
Volume B diberikan oleh:

$$\iiint_B dV$$

Integral lipat tiga ini mempertahankan sifat-sifat kelinieran, dapat dijumlahkan pada himpunan-himpunan yang beririsan, dan sifat perbandingan yang telah dipelajari pada materi integral dan integral lipat dua. Integral lipat tiga ini dapat dituliskan sebagai integral berulang tiga kali, sebagaimana terlihat pada contoh berikut ini.

Contoh

Hitung $\iiint_B xyz\ dV$, dengan B adalah kotak $B = \{(x,y,z)|1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Penyelesaian

$$\iiint_B xyz\ dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 xyz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2yz\right)_1^2 dy\, dz = \int_0^2 \int_0^1 \frac{3}{2}yz\, dy\, dz$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2z\right)_0^1 dz = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{2}z\, dz$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}z^2\right)_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Contoh

Berdasarkan contoh sebelumnya, hitung $\iiint_B xyz\ dV$, dengan $dV = dz\, dy\, dx$.

Penyelesaian

$$\iiint_B xyz\ dV = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^2 xyz\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xyz^2\right)_0^2 dy\, dx = \int_1^2 \int_0^1 2xy\, dy\, dz$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^2\right)_0^1 dx = \int_1^2 x\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)_1^2 = 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Sifat-sifat Integral Lipat Tiga:

$$a. \iiint\limits_B c\, f(x,y,z)dV = c \iiint\limits_B f(x,y,z)dV$$

$$b. \iiint\limits_{B} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \iiint\limits_{B} f(x,y,z)dV \pm \iiint\limits_{B} g(x,y,z)dV$$

$$b. \iiint\limits_{B} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{B_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{B_2} f(x,y,z)dV$$

Jadi integral lipat tiga mempertahankan sifat-sifat kelinieran, sebagaima telah dipelajari pada materi integral dan integral lipat dua. Integral lipat tiga ini dapat dituliskan sebagai integral berulang tiga kali. Contoh berikut ini memperlihatkan bagaimana menyelesaikan integral lipat tiga sebagai integral berulang

Contoh

Hitung $\iiint_B xyz\ \ dV$, dengan B adalah kotak:

$B = \{(x,y,z)|1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$.

Penyelesaian

$$\iiint_B xyz\ \ dV \ = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 xyz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2yz\right)_1^2 dy\, dz = \int_0^2 \int_0^1 \frac{3}{2} yz\, dy\, dz$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2z\right)_0^1 dz = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{2} z\, dz$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}z^2\right)_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Tinjau suatu daerah S terbatas dan tertutup di ruang R^3 dan misalkan S_{xy} adalah proyeksi S pada bidang xy. Maka untuk sebuah fungsi f yang terdefinisi di S, bentuk integral lipat tiga mempunyai bentuk yang dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

$$\iiint_S f(x,y,z)\ \ dV = \iint_{S_{xy}} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dA.$$

Bentuk integral lipat dua ini dapat ditulis ulang sebagai integral berulang yang telah dipelajari sebelumnya, sehingga secara umum lipat tiga dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema. Misalkan S suatu daerah tertutup di ruang R^3 yang dibatasi oleh:

$$a \leq x \leq b; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x); \ \ \psi_1(x, y \leq z \leq \psi_2(x, y$$

dengan $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$kontinu, maka

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Urutan integrasi lain boleh jadi berbeda, tergantung bagaimana bentuk S. Limit integrasi pada integral yang paling dalam bergantung pada dua peubah lainnya dalam integrasi. Limit integrasi pada integral yang di tengah bergantung pada peubah terluar dari integrasi. Sedangkan limit integrasi terluar tidak boleh bergantung pada peubah manapun dari peubah integrasi.

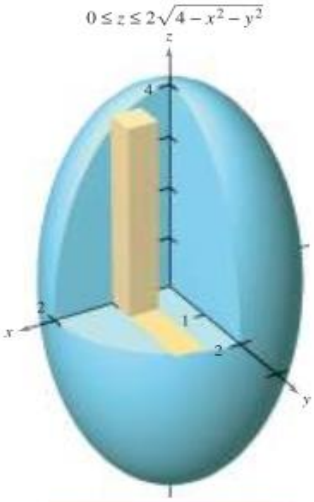
Contoh

Tentukan volume ellipsoida yang diberikan oleh persamaan

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$$

Penyelesaian

Jika pengintegralan dV akan kita nyatakan dalam $dzdydx$, maka batas-batas z (pengintegralan paling dalam) harus berbentuk fungsi dari x dan y, batas y merupakan fungsi dari x dan, batas x adalah konstanta atau interval.



Ellipsoid: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

Ellipsoida dengan persamaan tersebut di atas dapat dilihat pada Gambar di samping.

Karena

$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$

Maka

$$0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2}.$$

atau

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Proyeksi ellipsoida pada bidang-xy (atau $z = 0$) merupakan lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 16$, dan diperoleh batas untuk y dan x deiberikan sebagai berikut:

$$-2 \leq x \leq 2; \ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Jadi volume ellipsoida dapat dinyatakan ke dalam integral rangkap tiga sebagai berikut:

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}.}\int_{-2\sqrt{4-x^2-y^2}.}^{2\sqrt{4-x^2-y^2}.} dzdydx.$$

Integral di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan sifat simetri dari ellipsoida dan lingkaran, sehingga diperoleh bentuk integral yang similar, yaitu:

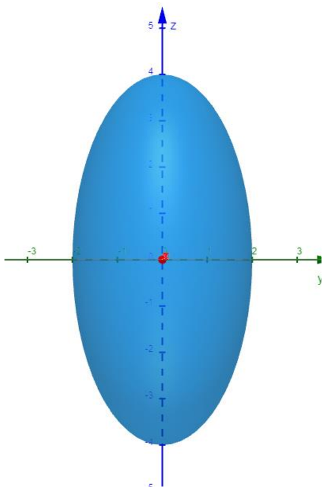
$$\boldsymbol{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

$$\begin{aligned}
V &= 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx\\
&= 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\Big]_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dydx\\
&= 16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2}\, dydx\\
&= 16\int_0^2 \frac{y}{2}\sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{4-x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\Bigg]_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx\\
&= 8\int_0^2 [0 + (4-x^2)\sin^{-1}(1) - 0 - 0]\, dx\\
&= 8\int_0^2 (4-x^2)\left(\frac{\pi}{2}\right) dx\\
&= \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Terdapat enam kemungkinan urutan pengintegralan pada contoh di atas. Tentu tentu saja kemungkinan urutan-urutan tersebut tidak semua dapat diselesaikan dengan mudah. Jika urutan pengintegralan adalah $dxdydz$, maka batas untuk x adalah fungsi dari y dan z, batas untuk y adah fungsi dari z, dan batas untuk z adalah konstan.

Dari persamaan ellipsoida tersebut, diperoleh batas-batas sebagai berikut:

$$x^2 = 16 - z^2 - 4y^2,$$



sehingga diperoleh batas x:

$$-\sqrt{16 - z^2 - 4y^2} \le x \le \sqrt{16 - z^2 - 4y^2}$$

Proyeksi ellipsoida pada bidang$-yz$ (yaitu untuk $x = 0$) merupakan ellips dengan persamaan :

$$4y^2 + z^2 = 4^2,$$

sehingga diperoleh batas y dan z sebagai berikut:

$-\frac{1}{2}\sqrt{16 - z^2} \le y \le -\frac{1}{2}\sqrt{16 - z^2};\ -4 \le z \le 4.$

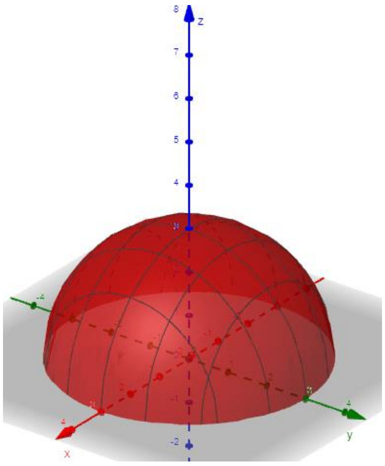
Dengan menggunakan sifat simetri dari ellipsoida dan ellips, pengintegralan dapat disederhanakan menjadi:

$$V = 8\int_0^4\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{16-z^2}}\int_0^{\sqrt{16-z^2-4y^2}} dxdydz$$

Contoh

Tuliskan batas-batas integral dari bentuk integral lipat tiga $\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz$, $\iiint_S f(x,y,z)\ dydxdz$, dan $\iiint_S f(x,y,z)\,dzdydx$ untuk S yang merupakan daerah setengah bola $x^2+y^2+z^2=9$ dan bidang $z=0$.

Penyelesaian



Untuk integral dengan urutan integrasi $dx\,dy\,dz$, maka batas untuk x adalah fungsi dua peubah y dan z, yaitu $x(y,z)=-\sqrt{9-y^2-z^2}$ dan $x(y,z)=\sqrt{9-y^2-z^2}$. Batas untuk y merupakan fungsi-fungsi terhadap z, $y(z)=-\sqrt{9-z^2}$ dan $y(z)=\sqrt{9-z^2}$. Sedangkan z adalah interval $0\le z\le 3$. Maka bentuk integralnya adalah

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV=\int_0^3\int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}}\int_{-\sqrt{9-y^2-z^2}}^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Dengan cara yang sama, untuk urutan integrasi $dy\,dx\,dz$ diperoleh

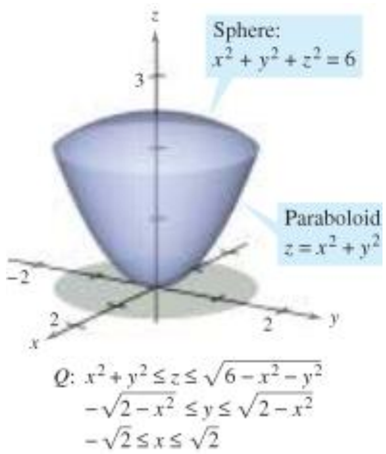
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV=\int_0^3\int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz.$$

Hal yang sedikit berbeda untuk urutan integrasi $dz\,dy\,dx$, diberikan oleh bentuk

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV=\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-y^2-x^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Contoh

Rumuskan sebuah integral lipat tiga yang merepresentasikan volume benda yang dibatasi dari bawah oleh $z=x^2+y^2$ dan dari atas dibatasi oleh $x^2+y^2+z^2=6$.



Penyelesaian

Batas untuk z adalah:

$$x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}.$$

Karena perpotongan kedua permukaan adalah $z=2$ maka proyeksi batas pengintegralan pada bidang -xy merupakan lingkaran dengan persamaan

$$x^2+y^2=2.$$

sehingga batas untuk x dan y adalah:

$$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2};\ -\sqrt{2-x^2}\le y\le\sqrt{2-x^2}.$$

Jadi volume

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-y^2-x^2}} dzdydx.$$

1. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z)\, dx\, dz\, dy$ 2. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2z^2\, dx\, dy\, dz$

3. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx$ 4. $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\, dz\, dx\, dy$

5. $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2}\, dy\, dx\, dz$ 6. $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln z\, dy\, dz\, dx$

LATIHAN

I. Hitung integral lipat tiga pada soal a-e

a. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c dxdydz$ b. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y ydzdydx$

b. $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x + 2z)dzdxdy$ d. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} \int_0^{xy} 4zdzdydx$

c. $\int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-x} x \cos y\, dzdydx$ $e.$ $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dydzdx$

II. Hitung integral lipat tiga pada soal a-d

5. $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2}\, dy\, dx\, dz$ 6. $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln z\, dy\, dz\, dx$

7. $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-x} x \cos y\, dz\, dy\, dx$ 8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \sin y\, dz\, dx\, dy$

Sumber buku:

1. James Stewart
2. Thomas Calculus