Algoritma dan Bilangan Bulat

Algoritma

- Apa itu Algoritma ?
- Algoritma adalah Urutan logis langkah-langkah penyelesaian masalah yang disusun secara sistematis.
- Menulis algoritma bisa dengan menggunakan kalimat deskriptif yang menjelaskan kejadian secara runtut, dengan flowchart atau dengan Pseudocode.

Pseudocode

- Ada 3 bagian struktur suatu algoritma, yaitu :

1. Bagian Judul (header)
2. Bagian Deklarasi
3. Bagian Algoritma

- Struktur teks Agoritma :

  PROGRAM nama_program
  {penjelasan tentang algoritma yg beisi uraian singkat mengenai masalah yg akan diselesaikan}
  DEKLARASI
  {Semua nama yg dipakai, nama tipe,konstanta,var,prosedur,dan fungsi diumumkan disini}
  ALGORITMA
  {Semua langkah/aksi algoritma dituliskan disini}

- procedure CariElemenTerbesar(input a_1, a_2, ..., a_n : integer,
- output maks : integer)
- *{ Mencari elemen terbesar di antara elemen a_1, a_2, ..., a_n. Elemen terbesar akan disimpan di dalam maks.*
- *Masukan: a_1, a_2, ..., a_n*
- *Keluaran: maks*
- *}*
- **Deklarasi**
- k : integer
- **Algoritma:**
- maks←a_1
- for k←2 to n do
- if a_k > maks then
- maks←a_k
- endif
- endfor

Bilangan Bulat

- Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0

- Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02.

Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

- Misalkan a dan b bilangan bulat, $a \neq 0$.

  a **habis membagi** b (a *divides* b) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$.

- Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$.

- **Contoh 1**: $4 \mid 12$ karena $12/4 = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$. Tetapi $4 \nmid 13$ karena $13/4 = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

Teorema Euclidean

Teorema 1 (Teorema Euclidean). Misalkan m dan n bilangan bulat, $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r \qquad (1)$$

dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 2.

(i) 1987/97 = 20, sisa 47:

$$1987 = 97 \cdot 20 + 47$$

(ii) –22/3 = –8, sisa 2:

$$-22 = 3(-8) + 2$$

tetapi $-22 = 3(-7) - 1$ salah

karena $r = -1$ (syarat $0 \leq r < n$)

Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

- Misalkan a dan b bilangan bulat tidak nol.

- Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau *gcd*) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian hingga $d \mid a$ dan $d \mid b$.

- Dalam hal ini kita nyatakan bahwa PBB(a, b) = d.

Contoh 3.

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;

Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

Faktor pembagi bersama 45 dan 36: 1, 3, 9

→ PBB(45, 36) = 9.

- **Teorema 2.** Misalkan m dan n bilangan bulat, dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga

$$m = nq + r \quad , 0 \le r < n$$

maka PBB(m, n) = PBB(n, r)

- **Contoh 4**: $m = 60$, $n = 18$,

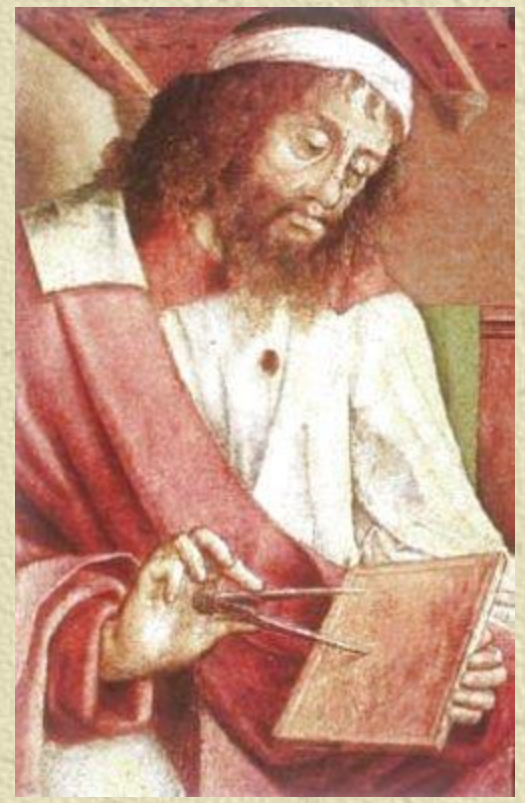
$$60 = 18 \cdot 3 + 12$$

maka PBB(60, 18) = PBB(18, 12) = 6

Algoritma Euclidean

- Tujuan: algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat.

- Penemu: Euclides, seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam buku, *Element*.



- Lukisan Euclides versi lain

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat tak negatif dengan $m \geq n$. Misalkan $r_0 = m$ dan $r_1 = n$.
Lakukan secara berturut-turut pembagian untuk memperoleh

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2 && 0 \leq r_2 \leq r_1, \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 && 0 \leq r_3 \leq r_2, \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}\, q_{n-1} + r_n && 0 \leq r_n \leq r_{n-1}, \\
r_{n-1} &= r_n q_n + 0
\end{aligned}
$$

Menurut Teorema 2,

$$\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(r_0, r_1) = \text{PBB}(r_1, r_2) = \ldots = \text{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{PBB}(r_{n-1}, r_n) = \text{PBB}(r_n, 0) = r_n$$

Jadi, PBB dari m dan n adalah sisa terakhir yang tidak nol dari runtunan pembagian tersebut

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n ($m \geq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

Algoritma Euclidean

1. Jika $n = 0$ maka
   m adalah PBB(m, n);
   stop.
   tetapi jika $n \neq 0$,
   lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.
3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r, lalu ulang kembali ke langkah 1.

```
procedure Euclidean(input m, n : integer,
                    output PBB : integer)
{ Mencari PBB(m, n) dengan syarat m dan n bilangan tak-
  negatif dan m ≥ n
  Masukan: m dan n, m ≥ n dan m, n ≥ 0
  Keluaran: PBB(m, n)
}
Kamus
   r : integer

Algoritma:
   while n ≠ 0 do
      r ← m mod n
      m ← n
      n ← r
   endwhile
   { n = 0, maka PBB(m,n) = m }
   PBB ← m
```

Contoh 4. $m = 80$, $n = 12$ dan dipenuhi syarat $m \geq n$

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka PBB(80, 12) = 4.

Kombinasi Lanjar

- PBB(a,b) dapat dinyatakan sebagai **kombinasi lanjar** (*linear combination*) a dan b dengan dengan koefisien-koefisennya.

- **Contoh 6**: PBB(80, 12) = 4 ,

$$4 = (-1) \cdot 80 + 7 \cdot 12.$$

- **Teorema 3.** Misalkan a dan b bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga PBB(a, b) = $ma + nb$.

- **Contoh 7**: Nyatakan PBB(21, 45) sebagai kombinasi lanjar dari 21 dan 45.
- Solusi:

  45 = 2 (21) + 3

  21 = 7 (3) + 0

  Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 3, maka **PBB(45, 21) = 3**

  Substitusi dengan persamaan–persamaan di atas menghasilkan:

  3 = 45 – 2 (21)

  yang merupakan kombinasi lanjar dari 45 dan 21

Contoh 8: Nyatakan PBB(312, 70) sebagai kombinasi lanjar 312 dan 70.

Solusi: Terapkan algoritma Euclidean untuk memperoleh PBB(312, 70):

$312 = 4 \cdot 70 + 32$ (i)

$70 = 2 \cdot 32 + 6$ (ii)

$32 = 5 \cdot 6 + 2$ (iii)

$6 = 3 \cdot 2 + 0$ (iv)

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(312, 70) = 2**

Susun pembagian nomor (iii) dan (ii) masing-masing menjadi

$2 = 32 - 5 \cdot 6$ (iv)

$6 = 70 - 2 \cdot 32$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv) menjadi

$2 = 32 - 5 \cdot (70 - 2 \cdot 32) = 1 \cdot 32 - 5 \cdot 70 + 10 \cdot 32 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70$ (vi)

Susun pembagian nomor (i) menjadi

$32 = 312 - 4 \cdot 70$ (vii)

Sulihkan (vii) ke dalam (vi) menjadi

$2 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 = 11 \cdot (312 - 4 \cdot 70) - 5 \cdot 70 = 11 \,.\, 312 - 49 \cdot 70$

Jadi, PBB(312, 70) = $2 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$

Relatif Prima

- Dua buah bilangan bulat *a* dan *b* dikatakan *relatif prima* jika PBB(*a*, *b*) = 1.

- **Contoh 9.**

  (i) 20 dan 3 relatif prima sebab PBB(20, 3) = 1.

  (ii) 7 dan 11 relatif prima karena PBB(7, 11) = 1.

  (iii) 20 dan 5 tidak relatif prima sebab PBB(20, 5) = 5 ≠ 1.

- Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga

$$ma + nb = 1$$

- **Contoh 10.** Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena PBB(20, 3) =1, atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1 \quad (m = 2, n = -13)$$

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena PBB(20, 5) = 5 ≠ 1 sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$.

Aritmetika Modulo

- Misalkan a dan m bilangan bulat ($m > 0$). Operasi

  a **mod** m (dibaca "a modulo m")

  memberikan sisa jika a dibagi dengan m.

- Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga

  $a = mq + r$, dengan $0 \le r < m$.

- m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

- **Contoh 11.** Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod 5 = 3	(23 = 5 · 4 + 3)
(ii) 27 mod 3 = 0	(27 = 3 · 9 + 0)
(iii) 6 mod 8 = 6	(6 = 8 · 0 + 6)
(iv) 0 mod 12 = 0	(0 = 12 · 0 + 0)
(v) – 41 mod 9 = 4	(–41 = 9 (–5) + 4)
(vi) – 39 mod 13 = 0	(–39 = 13(–3) + 0)

- *Penjelasan untuk (v):* Karena *a* negatif, bagi |*a*| dengan *m* mendapatkan sisa *r*'. Maka *a* mod *m* = *m* – *r*' bila *r*' ≠ 0. Jadi |– 41| mod 9 = 5, sehingga –41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

Kongruen

- Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka dikatakan 38 ≡ 13 (mod 5)

  (baca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).

- Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat dan *m* adalah bilangan > 0, maka $\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ jika *m* habis membagi *a* – *b*.

- Jika *a* tidak kongruen dengan *b* dalam modulus *m*, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Contoh 12.

$17 \equiv 2 \pmod 3$ *(3 habis membagi 17 – 2 = 15)*

$-7 \equiv 15 \pmod{11}$

(11 habis membagi –7 – 15 = –22)

$12 \not\equiv 2 \pmod 7$

(7 tidak habis membagi 12 – 2 = 10)

$-7 \not\equiv 15 \pmod 3$

(3 tidak habis membagi –7 – 15 = –22)

- $a \equiv b \pmod{m}$ dalam bentuk "sama dengan" dapat dituliskan sebagai

  $a = b + km$ (k adalah bilangan bulat)

- **Contoh 13.**

  $17 \equiv 2 \pmod{3}$ ➔ $17 = 2 + 5 \cdot 3$

  $-7 \equiv 15 \pmod{11}$ ➔ $-7 = 15 + (-2)11$

- $a \bmod m = r$ dapat juga ditulis sebagai

  $a \equiv r \pmod{m}$

- **Contoh 14.**

  (i) $23 \bmod 5 = 3$ ➔ $23 \equiv 3 \pmod{5}$

  (ii) $27 \bmod 3 = 0$ ➔ $27 \equiv 0 \pmod{3}$

  (iii) $6 \bmod 8 = 6$ ➔ $6 \equiv 6 \pmod{8}$

  (iv) $0 \bmod 12 = 0$ ➔ $0 \equiv 0 \pmod{12}$

  (v) $-41 \bmod 9 = 4$ ➔ $-41 \equiv 4 \pmod{9}$

  (vi) $-39 \bmod 13 = 0$ ➔ $-39 \equiv 0 \pmod{13}$

Teorema 4. Misalkan m adalah bilangan bulat positif.

1) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka

   (i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

   (ii) $ac \equiv bc \pmod{m}$

   (iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$, p bilangan bulat tak-negatif

2) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

   (i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

   (ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti (hanya untuk 1(ii) dan 2(i) saja):

1(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti:

$\Leftrightarrow a = b + km$

$\Leftrightarrow a - b = km$

$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$

$\Leftrightarrow ac = bc + Km$

$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ ■

2(i) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow c = d + k_2 m +$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \quad (k = k_1 + k_2)$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) \pmod{m}$ ■

Contoh 15.

Misalkan $17 \equiv 2 \pmod 3$ dan $10 \equiv 4 \pmod 3$, maka menurut Teorema 4,

$17 + 5 = 2 + 5 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 22 = 7 \pmod 3$

$17 \,.\, 5 = 5 \cdot 2 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow 85 = 10 \pmod 3$

$17 + 10 = 2 + 4 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 27 = 6 \pmod 3$

$17 \,.\, 10 = 2 \cdot 4 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad 170 = 8 \pmod 3$

- Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

- **Contoh 16**:

  $10 \equiv 4 \pmod 3$ dapat dibagi dengan 2

  karena $10/2 = 5$ dan $4/2 = 2$, dan $5 \equiv 2 \pmod 3$

  $14 \equiv 8 \pmod 6$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14/2 = 7$ dan $8/2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4 \pmod 6$.

Latihan

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ adalah sembarang bilangan bulat maka buktikan bahwa

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

Solusi

$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m} \rightarrow c = d + k_2 m$

maka

$\Leftrightarrow ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m)$

$\Leftrightarrow ac = bd + bk_2 m + dk_1 m + k_1 k_2 m^2$

$\Leftrightarrow ac = bd + Km$ dengan $K = bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 m$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ac \equiv bd \pmod{m}}$ (terbukti)

Balikan Modulo (modulo invers)

- Di dalam aritmetika bilangan riil, inversi (*inverse*) dari perkalian adakah pembagian.

- Contoh: Inversi 4 adalah 1/4, sebab $4 \times 1/4 = 1$.

- Di dalam aritmetika modulo, masalah menghitung inversi modulo lebih sukar.

- Jika a dan m relatif prima dan $m > 1$, maka balikan (*invers*) dari a modulo m ada.

- Balikan dari a modulo m adalah bilangan bulat x sedemikian sehingga

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

- Dalam notasi lainnya, $a^{-1} \pmod{m} = x$

Bukti: *a* dan *m* relatif prima, jadi PBB(*a*, *m*) = 1, dan terdapat bilangan bulat *x* dan *y* sedemikian sehingga

$$xa + ym = 1$$

yang mengimplikasikan bahwa

$$xa + ym \equiv 1 \pmod{m}$$

Karena $ym \equiv 0 \pmod{m}$, maka

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa *x* adalah balikan dari *a* modulo *m*. ■

- Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari *a* modulo *m*, kita harus membuat kombinasi lanjar dari *a* dan *m* sama dengan 1.

- Koefisien *a* dari kombinasi lanjar tersebut merupakan balikan dari *a* modulo *m*.

- **Contoh 17.** Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

  Solusi:

- (a) Karena PBB(4, 9) = 1, maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Susun persamaan di atas menjadi

$$-2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 1$$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh –2 adalah balikan dari 4 modulo 9.

Periksa bahwa $-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9$

- Catatan: setiap bilangan yang kongruen dengan

  -2 (**mod** 9)

  juga adalah inversi dari 4, misalnya 7, –11, 16, dan seterusnya, karena

  $7 \equiv -2$ (**mod** 9) (9 habis membagi $7 - (-2) = 9$)

  $-11 \equiv -2$ (**mod** 9) (9 habis membagi $-11 - (-2) = -9$)

  $16 \equiv -2$ (**mod** 9) (9 habis membagi $16 - (-2) = 18$)

- (b) Karena PBB(17, 7) = 1, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$17 = 2 \cdot 7 + 3$ (i)

$7 = 2 \cdot 3 + 1$ (ii)

$3 = 3 \cdot 1 + 0$ (iii) (yang berarti: PBB(17, 7) = 1))

Susun (ii) menjadi:

$1 = 7 - 2 \cdot 3$ (iv)

Susun (i) menjadi

$3 = 17 - 2 \cdot 7$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv):

$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$

atau

$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1$

Dari persamaan terakhir diperoleh –2 adalah balikan dari 17 (mod 7)

- $-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod 7$ (7 habis membagi $-2 \cdot 17 - 1 = -35$)

(c) Karena PBB(18, 10) = 2 ≠ 1, maka balikan dari 18 (mod 10) tidak ada.

Cara lain menghitung balikan

- Ditanya: balikan dari a (mod m)
- Misalkan x adalah balikan dari a (mod m), maka

  $ax \equiv 1 \pmod{m}$ (definisi balikan modulo)

atau dalam noatsi 'sama dengan':

$ax = 1 + km$

atau

$x = (1 + km)/a$

Cobakan untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan $k = -1, -2, \ldots$

Solusinya adalah semua bilangan bulat yang memenuhi.

- **Contoh 18**: Balikan dari 4 (mod 9) adalah x sedemikian sehingga $4x \equiv 1 \pmod 9$

  $4x \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow 4x = 1 + 9k \rightarrow x = (1 + 9k)/4$

  Untuk $k = 0 \rightarrow x$ tidak bulat

  $k = 1 \rightarrow x$ tidak bulat

  $k = 2 \rightarrow x$ tidak bulat

  $k = 3 \rightarrow x = (1 + 9 \,.\, 3)/4 = 7$

  $k = -1 \rightarrow x = (1 + 9. -1)/4 = -2$

  Balikan dari 4 (mod 9) adalah 7 (mod 9),

  -2 (mod 9), dst

Latihan

- Tentukan semua balikan dari 9 (mod 11).

Solusi:

- Misalkan $9^{-1} \pmod{11} = x$
- Maka $9x \equiv 1 \pmod{11}$ atau $9x = 1 + 11k$ atau

  $x = (1 + 11k)/9$

  Dengan mencoba semua nilai k yang bulat (k = 0, -1, -2, ..., 1, 2, ...) maka
- diperoleh $x = 5$. Semua bilangan lain yang kongruen dengan 5 (mod 11) juga merupakan solusi, yaitu –6, 16, 27, ...

Kekongruenan Lanjar

- Kekongruenan lanjar berbentuk:

  $ax \equiv b \pmod{m}$

  ($m > 0$, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan bulat).

  Pemecahan: $ax = b + km \rightarrow x = \dfrac{b + km}{a}$

  (Cobakan untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan $k = -1, -2, \ldots$ yang menghasilkan x sebagai bilangan bulat)

Contoh 19.

Tentukan solusi: $4x \equiv 3 \pmod 9$ dan $2x \equiv 3 \pmod 4$

Penyelesaian:

(i) $4x \equiv 3 \pmod 9$

$$x = \frac{3 + k \cdot 9}{4}$$

$k = 0 \rightarrow x = (3 + 0 \cdot 9)/4 = 3/4$ (bukan solusi)

$k = 1 \rightarrow x = (3 + 1 \cdot 9)/4 = 3$

$k = 2 \rightarrow x = (3 + 2 \cdot 9)/4 = 21/4$ (bukan solusi)

$k = 3$, $k = 4$ tidak menghasilkan solusi

$k = 5 \rightarrow x = (3 + 5 \cdot 9)/4 = 12$

…

$k = -1 \rightarrow x = (3 - 1 \cdot 9)/4 = -6/4$ (bukan solusi)

$k = -2 \rightarrow x = (3 - 2 \cdot 9)/4 = -15/4$ (bukan solusi)

$k = -3 \rightarrow x = (3 - 3 \cdot 9)/4 = -6$

…

$k = -6 \rightarrow x = (3 - 6 \cdot 9)/4 = -15$

…

Nilai-nilai x yang memenuhi: 3, 12, … dan –6, –15, …

Cara lain menghitung solusi $ax \equiv b \pmod{m}$

- Seperti dalam persamaan biasa,

  $4x = 12$ → kalikan setiap ruas dengan 1/4 (yaitu invers 4), maka $1/4 \cdot 4x = 12 \cdot 1/4$ → $x = 3$

- $4x \equiv 3 \pmod 9$ → kalikan setiap ruas dengan balikan dari 4 (mod 9) (dalam hal ini sudah kita hitung, yaitu –2)

  $(-2) \cdot 4x \equiv (-2) \cdot 3 \pmod 9 \Leftrightarrow -8x \equiv -6 \pmod 9$

Karena $-8 \equiv 1 \pmod 9$, maka $x \equiv -6 \pmod 9$. Semua blangan bulat yang kongruen dengan –6 (mod 9) adalah solusinya, yitu 3, 12, …, dan –6, -15, …

(ii) $2x \equiv 3 \pmod 4$

$$x = \frac{3 + k \cdot 4}{2}$$

Karena $4k$ genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi $2x \equiv 3 \pmod 5$.

Latihan

- Sebuah bilangan bulat jika dibagi dengan 3 bersisa 2 dan jika ia dibagi dengan 5 bersisa 3. Berapakah bilangan bulat tersebut

Solusi

Misal : bilangan bulat = x

$x \bmod 3 = 2 \rightarrow x \equiv 2 \pmod 3$

$x \bmod 5 = 3 \rightarrow x \equiv 3 \pmod 5$

Jadi, terdapat sistem kekongruenan:

$x \equiv 2 \pmod 3$ (i)

$x \equiv 3 \pmod 5$ (ii)

Untuk kongruen pertama:

$x = 2 + 3k_1$ (iii)

Substitusikan (iii) ke dalam (ii):

$2 + 3k_1 \equiv 3 \pmod 5 \rightarrow 3k_1 \equiv 1 \pmod 5$

diperoleh

$k_1 \equiv 2 \pmod 5$ atau $k_1 = 2 + 5k_2$

$x = 2 + 3k_1$

$= 2 + 3\,(2 + 5k_2)$

$= 2 + 6 + 15k_2$

$= 8 + 15k_2$

atau

$x \equiv 8 \pmod{15}$

Semua nilai x yang kongruen dengan 8 (mod 15) adalah solusinya, yaitu

$x = 8$, $x = 23$, $x = 38$, …, $x = -7$, dst

Chinese Remainder Problem

- Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

  Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

- Misakan bilangan bulat tersebut = x. Formulasikan kedalam sistem kongruen lanjar:

  $x \equiv 3 \pmod 5$

  $x \equiv 5 \pmod 7$

  $x \equiv 7 \pmod{11}$

Teorema 5. (*Chinese Remainder Theorem*) Misalkan m_1, m_2, …, m_n adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga PBB(m_i, m_j) = 1 untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruen lanjar

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

mempunyai sebuah solusi unik dalam modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Contoh 15.
Tentukan solusi dari pertanyaan Sun Tse di atas.

Penyelesaian:

$x \equiv 3 \pmod 5 \rightarrow x = 3 + 5k_1$ (i)

Sulihkan (i) ke dalam kongruen kedua menjadi:

$3 + 5k_1 \equiv 5 \pmod 7 \rightarrow k_1 \equiv 6 \pmod 7$, atau $k_1 = 6 + 7k_2$ (ii)

Sulihkan (ii) ke dalam (i):

$x = 3 + 5k_1 = 3 + 5(6 + 7k_2) = 33 + 35k_2$ (iii)

Sulihkan (iii) ke dalam kongruen ketiga menjadi:

$33 + 35k_2 \equiv 7 \pmod{11} \rightarrow k_2 \equiv 9 \pmod{11}$ atau $k_2 = 9 + 11k_3$.

Sulihkan k_2 ini ke dalam (iii) menghasilkan:

$x = 33 + 35(9 + 11k_3) = 348 + 385k_3$

atau $x \equiv 348 \pmod{385}$. Ini adalah solusinya.

348 adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan solusi sistem kekongruenan di atas. Perhatikan bahwa 348 mod 5 = 3, 348 mod 7 = 5, dan 348 mod 11 = 7. Catatlah bahwa $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

- Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut. Solusi tersebut dalam modulo:

  $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 5 \cdot 77 = 11 \cdot 35.$

  Karena $77 \,.\, 3 \equiv 1 \pmod 5$,

  $55 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7$,

  $35 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11}$,

  maka solusi unik dari sistem kongruen tersebut adalah

  $x \equiv 3 \cdot 77 \cdot 3 + 5 \cdot 55 \cdot 6 + 7 \cdot 35 \cdot 6 \pmod{385}$

  $\equiv 3813 \pmod{385}$

  $\equiv 348 \pmod{385}$

Bilangan Prima

- Bilangan bulat positif p ($p > 1$) disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan p.

- Contoh: 23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 23.

- Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, ….

- Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.

- Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*). Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri.

Teorema 6. (*The Fundamental Theorem of Arithmetic*). Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh 16.

$9 = 3 \times 3$

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$13 = 13$ (atau 1×13)

- Tes bilangan prima:

(i) bagi n dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, … , bilangan prima $\leq \sqrt{n}$.

(ii) Jika n habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan komposit,

(ii) tetapi jika n tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

- **Contoh 17.** Tes apakah (i) 171 dan (ii) 199 merupakan bilangan prima atau komposit.

  Penyelesaian:

  (i) $\sqrt{171} = 13.077$. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13.

  Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

  (ii) $\sqrt{199} = 14.107$. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13.

  Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

- **Teorema 6** (**Teorema Fermat**). Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p, yaitu PBB(a, p) = 1, maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Contoh 18. Tes apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan dengan Teorema Fermat

Ambil $a = 2$, karena PBB(17, 2) = 1 dan PBB(21, 2) = 1.

(i) $2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$

karena 17 habis membagi 65536 – 1 = 65535

Jadi, 17 prima.

(ii) $2^{21-1} = 1048576 \equiv\backslash\ 1 \pmod{21}$

karena 21 tidak habis membagi 1048576 – 1 = 1048575.

Jadi, 21 bukan prima

- Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan **prima semu** (*pseudoprimes*).

- Contoh: 341 adalah komposit (karena $341 = 11 \cdot 31$) sekaligus bilangan prima semu, karena menurut teorema Fermat,

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

- Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat.

- Untuk bilangan bulat yang lebih kecil dari 10^{10} terdapat 455.052.512 bilangan prima, tapi hanya 14.884 buah yang merupakan bilangan prima semu terhadap basis 2.

Aplikasi Teori Bilangan

- *ISBN* (*International Book Serial Number*)
- Fungsi *hash*
- Kriptografi
- Pembangkit bilangan acak-semu
- dll

ISBN

- Kode ISBN terdiri dari 10 karakter, biasanya dikelompokkan dengan spasi atau garis, misalnya 0–3015–4561–9.

- ISBN terdiri atas empat bagian kode:

- kode yang mengidentifikasikan bahasa,
- kode penerbit,
- kode unik untuk buku tersebut,
    - karakter uji (angka atau huruf X (=10)).

- Karakter uji dipilih sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\sum_{i=1}^{9} ix_i \bmod 11 = \text{karakter uji}$$

- Contoh: ISBN 0–3015–4561–8

  0 : kode kelompok negara berbahasa Inggris,

  3015 : kode penerbit

  4561 : kode unik buku yang diterbitkan

  8 : karakter uji.

  Karakter uji ini didapatkan sebagai berikut:

  $1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 +$

  $7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 151$

- Jadi, karakter ujinya adalah 151 mod 11 = 8.

Catatlah bahwa untuk kode ISBN ini,

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i = \sum_{i=1}^{9} ix_i + 10x_{10} = 151 + 10 \cdot 8 = 231$$

dan 231 mod 11 = 0 atau $231 \equiv 0 \pmod{11}$.

Fungsi *Hash*

- Tujuan: pengalamatan di memori

- Bentuk: $h(k) = k \bmod m$

  - m : jumlah lokasi memori yang tersedia
  - k : kunci (*integer*)
  - $h(k)$: lokasi memori untuk *record* dengan kunci k

Contoh: m = 11 mempunyai sel-sel memori yang diberi indeks 0 sampai 10. Akan disimpan data *record* yang masing-masing mempunyai kunci 15, 558, 32, 132, 102, dan 5.

$h(15) = 15 \bmod 11 = 4$
$h(558) = 558 \bmod 11 = 8$
$h(32) = 32 \bmod 11 = 10$
$h(132) = 132 \bmod 11 = 0$
$h(102) = 102 \bmod 11 = 3$
$h(5) = 5 \bmod 11 = 5$

132			102	15	5			558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Kolisi (*collision*) terjadi jika fungsi *hash* menghasilkan nilai h yang sama untuk k yang berbeda.
- Jika terjadi kolisi, cek elemen berikutnya yang kosong.
- Fungsi *hash* juga digunakan untuk me-*locate* elemen yang dicari.

Kriptografi

- **Pesan**: data atau informasi yang dapat dibaca dan dimengerti maknanya.

  Nama lain: **plainteks** (*plaintext*)

- Pesan dapat berupa: teks, gambar, audio, video.
- Pesan ada yang dikirim atau disimpan di dalam media penyimpanan.

- **Cipherteks** (*ciphertext*): pesan yang telah disandikan sehingga tidak memiliki makna lagi.

  Tujuan: agar pesan tidak dapat dimengerti maknanya oleh pihak lain.

- Cipherteks harus dapat diubah kembali ke plainteks semula

Contoh:

Plainteks:

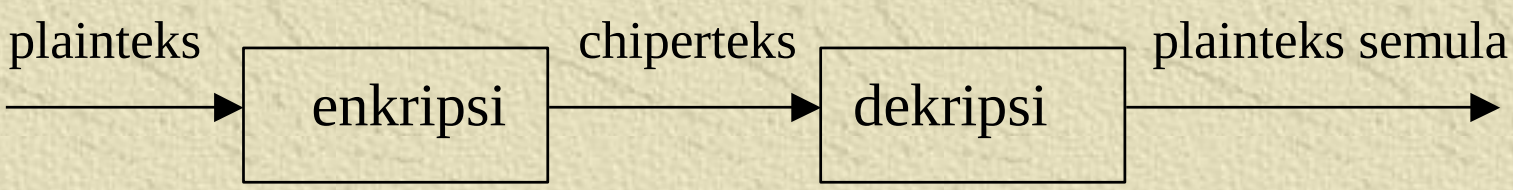
```
culik anak itu jam 11 siang
```

Cipherteks:

```
t^$gfUi89rewoFpfdWqL:p[uTcxZ
```

- **Enkripsi** (*encryption*): proses menyandikan plainteks menjadi ciphertek.

- **Dekripsi** (*decryption*): Proses mengembalikan cipherteks menjadi plainteksnya.



Gambar 1.1 Enkripsi dan dekripsi

- **Kriptografi (*cryptography*)**
- Dari Bahasa Yunani yang artinya "*secret writing*"
- Definisi: kriptografi adalah ilmu dan seni untuk menjaga keamanan pesan.

- **Algoritma kriptografi (*cipher*)**

  - aturan untuk enkripsi dan dekripsi
  - fungsi matematika yang digunakan untuk enkripsi dan dekripsi.

- **Kunci**: parameter yang digunakan untuk transformasi *enciphering* dan *dechipering*

- Kunci bersifat rahasia, sedangkan algoritma kriptografi tidak rahasia

Sejarah Kriptografi

- Sudah digunakan di Yunani 400 BC
- Alat yang digunakan: *scytale*

Gambar 1.2 *Scytale*

Aplikasi Kriptografi

1. Pengiriman data melalui saluran komunikasi

   (*data encryption on motion*).

2. Penyimpanan data di dalam *disk storage*

   (*data encryption at rest*)

- Data ditransmisikan dalam bentuk chiperteks. Di tempat penerima chiperteks dikembalikan lagi menjadi plainteks.

- Data di dalam media penyimpanan komputer (seperti *hard disk*) disimpan dalam bentuk chiperteks. Untuk membacanya, hanya orang yang berhak yang dapat mengembalikan chiperteks menjadi plainteks.

Contoh enkripsi pada dokumen

Plainteks (`plain.txt`):

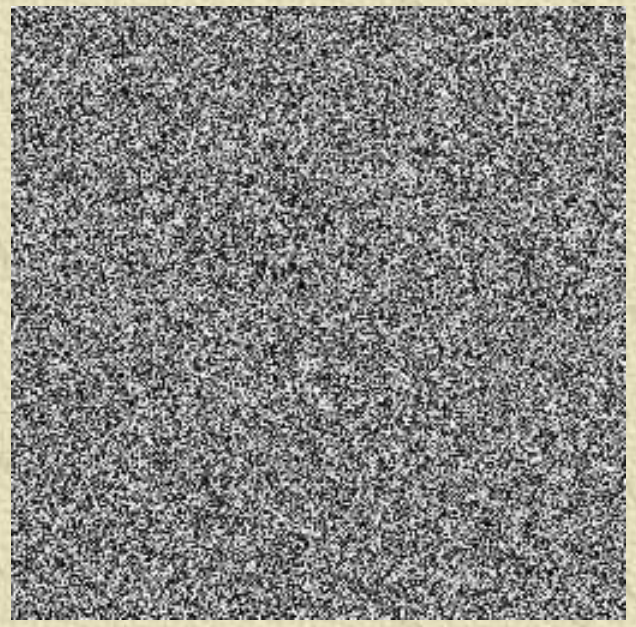
```
Ketika saya berjalan-jalan di pantai,
saya menemukan banyak sekali kepiting
yang merangkak menuju laut. Mereka
adalah anak-anak kepiting yang baru
menetas dari dalam pasir. Naluri
mereka mengatakan bahwa laut adalah
tempat kehidupan mereka.
```

Cipherteks (`cipher.txt`):

```
Ztâxzp/épêp/qtüyp{p}<yp{p}/sx/□p}âpx;
  épêp/|t}t|äzp}/qp}êpz/étzp{x/zt□xâx
}v  êp}v/|tüp}vzpz/|t}äyä/{päâ=/\tütz
p  psp{pw/p}pz<p}pz/zt□xâx}v/êp}
v/qpüä  |t}tâpé/spüx/sp{p|/□péxü=/]
p{äüx  |ttüzp/|t}vpâpzp}/qpwåp/{päâ
/psp{pw  ât|□pâ/ztwxsä□p}/|tützp=
```

Plainteks (`lena.bmp`):

Cipherteks (`lena2.bmp`):



Plainteks (`siswa.dbf`):

NIM	Nama	Tinggi	Berat
000001	Elin Jamilah	160	50
000002	Fariz RM	157	49
000003	Taufik Hidayat	176	65
000004	Siti Nurhaliza	172	67
000005	Oma Irama	171	60
000006	Aziz Burhan	181	54
000007	Santi Nursanti	167	59
000008	Cut Yanti	169	61
000009	Ina Sabarina	171	62

Cipherteks (`siswa2.dbf`):

NIM	Nama	Tinggi	Berat
000001	tüp}vzpz/|t}äyä/{ää	|äzp}	épêp
000002	|t}tâpé/spüx/sp	péxü=	ztwxsä□
000003	ât|□pâ/ztwxsä□p}/|	}/|tü	spüx/
000004	épêp/|t}t|äzp}/qpêpz	qp}êpz	wxsä
000005	étzp{x/zt□xâx}v êp}	päâ/psp	étzp{
000006	spüx/sp{p|/□péxü=/]	xâx}v	ttüzp/|
000007	Ztâxzp/épêp/qtüypp}<	äzp}	}äyä/{
000008	qpwåp/{päâ/psp{pw	Ztwxs	xâx}v
000009	}t|äzp}/qp}êpz/ép{	qp}êp	äzp}/qp

Keterangan: hanya *field* Nama, Berat, dan Tinggi yang dienkripsi.

Notasi Matematis

Misalkan:

C = chiperteks

P = plainteks dilambangkan

Fungsi enkripsi E memetakan P ke C,

$$E(P) = C$$

Fungsi dekripsi D memetakan C ke P,

$$D(C) = P$$

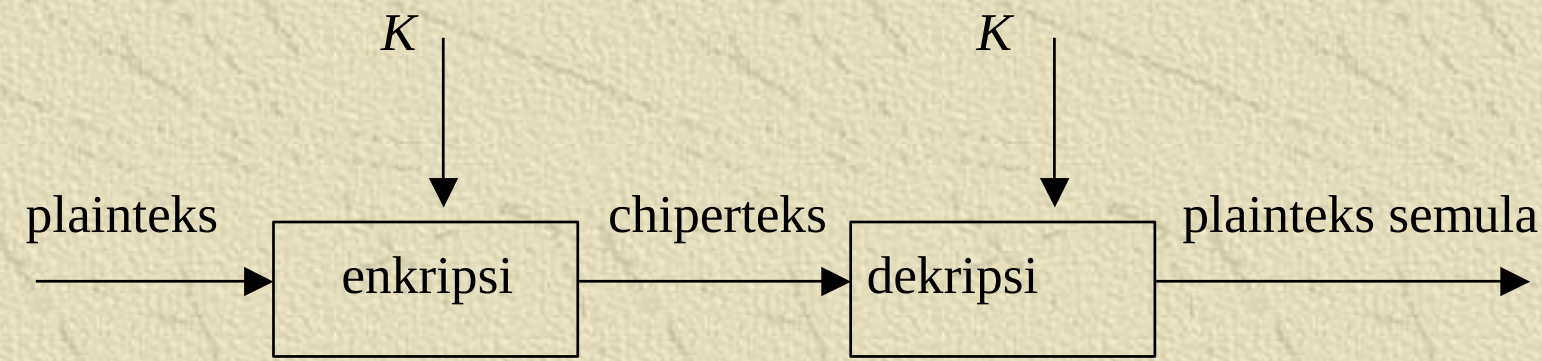
Dengan menggunakan kunci K, maka fungsi enkripsi dan dekripsi menjadi

$$E_K(P) = C$$

$$D_K(C) = P$$

dan kedua fungsi ini memenuhi

$$D_K(E_K(P)) = P$$

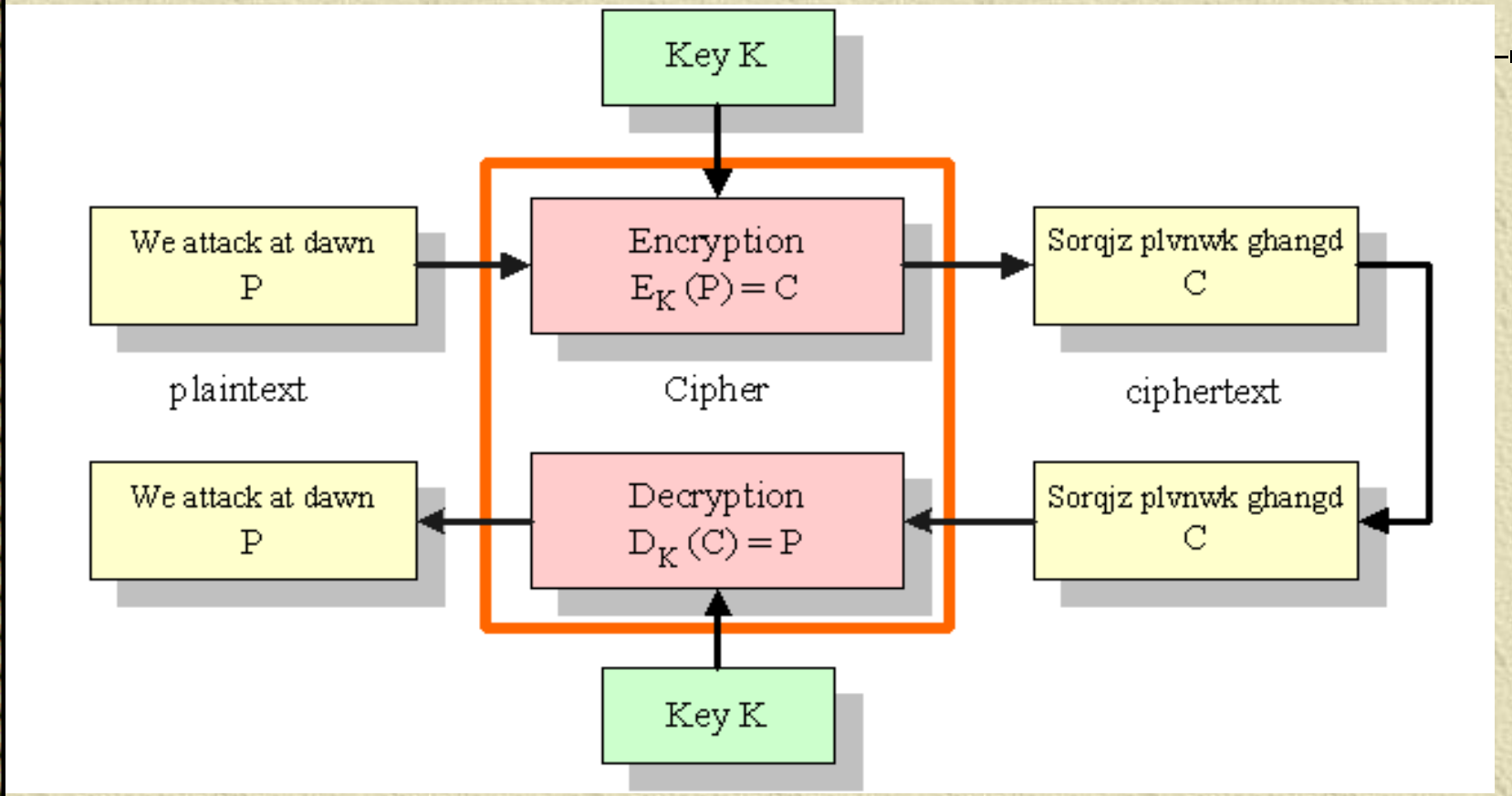


Gambar 1.3 Enkripsi dan dekripsi dengan kunci

- Jika kunci enkripsi sama dengan kunci dekripsi, maka sistem kriptografinya disebut **sistem simetri** atau **sistem konvensional**.

- Algoritma kriptografinya disebut algoritma simetri atau algoritma konvensional .

- Contoh algoritma simetri:
  - *DES* (*Data Encyption Standard*)
  - Rijndael



Skema algoritma simetri

- Jika kunci enkripsi tidak sama dengan kunci dekripsi, maka sistem kriptografinya disebut **sistem nirsimetri** (*asymmetric system*)

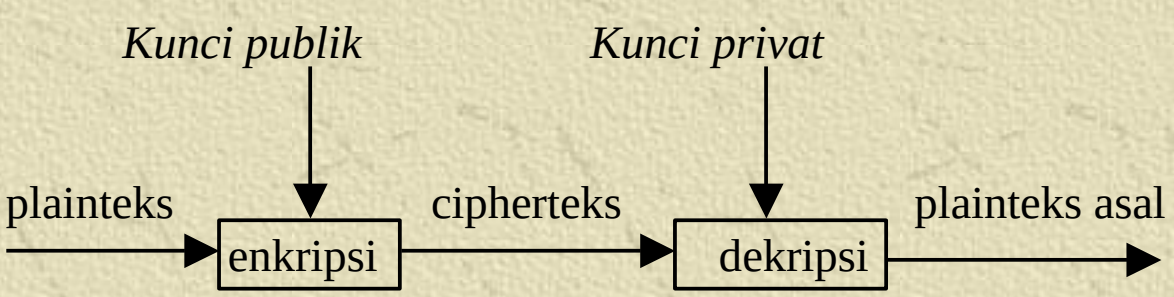
- Nama lain: **sistem kriptografi kunci-publik**

  karena, kunci enkripsi bersifat publik (*public key*) sedangkan kunci dekripsi bersifat rahasia (*private key*).

- Pengirim pesan menggunakan kunci publik si penerima pesan untuk mengenkripsi pesan

- Penerima pesan mendekripsi pesan dengan kunci privatnya sendiri.

- Contoh algoritmai: *RSA*


Kunci publik
Kunci privat
plainteks
enkripsi
cipherteks
dekripsi
plainteks asal

Caesar Cipher

- Tiap huruf alfabet digeser 3 huruf ke kanan

p_i : A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
c_i : **D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C**

Contoh:

Plainteks: AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

Cipherteks: **DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA**

- Misalkan $A = 0$, $B = 1$, …, $Z = 25$, maka secara matematis caesar *cipher* dirumuskan sebagai berikut:

  Enkripsi: $c_i = E(p_i) = (p_i + 3) \bmod 26$

  Dekripsi: $p_i = D(c_i) = (c_i - 3) \bmod 26$

p_1 = ‘A’ = 0 → $c_1 = E(0) = (0 + 3) \bmod 26 = 3$ = ‘D’

p_2 = ‘W’ = 22 → $c_2 = E(22) = (22 + 3) \bmod 26 = 25$ = ‘Z’

p_3 = ‘A’ = 0 → $c_3 = E(0) = (0 + 3) \bmod 26 = 3$ = ‘D’

p_4 = ‘S’ = 18 → $c_4 = E(18) = (18 + 3) \bmod 26 = 21$ = ‘V’

dst…

- Alternatif lain: gunakan tabel substitusi

- Jika pergeseran huruf sejauh k, maka:

Enkripsi: $c_i = E(p_i) = (p_i + k) \bmod 26$

Dekripsi: $p_i = D(c_i) = (c_i - k) \bmod 26$

k = kunci rahasia

```
program enkripsi;
{ Mengenkripsi berkas 'plain.txt'
  menjadi 'cipher.txt' dengan
  metode caesar cipher }
uses
  crt;
var
   F1, F2 : text;
   p : char;
   c : integer;
   k : integer;

begin
   assign(F1, 'plain.txt');
   reset(F1);

   assign(F2, 'cipher.txt');
   rewrite(F2);

   write('k = ?'); readln(k);
   while not EOF(F1) do
    begin
      while not EOLN(F1) do
       begin
         read(F1, p);
         c := (ord(p) + k) mod 256;
         write(F2, chr(c));
       end;
      readln(F1);
      writeln(F2);
   end;
   close(F1);
   close(F2);
end.
```

```
program dekripsi;
{ Mendekripsi berkas 'cipher.txt'
  menjadi 'plain2.txt' dengan
  metode caesar cipher }
uses
  crt;
var
   F1, F2 : text;
   p : char;
   c : integer;
   k : integer;

begin
   assign(F1, 'cipher.txt');
   reset(F1);

   assign(F2, 'plain2.txt');
   rewrite(F2);

   write('k = ?'); readln(k);
   while not EOF(F1) do
    begin
      while not EOLN(F1) do
       begin
         read(F1, p);
         c := (ord(p) - k) mod 256;
         write(F2, chr(c));
       end;
      readln(F1);
      writeln(F2);
   end;
   close(F1);
   close(F2)
end.
```

Algoritma RSA

- Ditemukan oleh tiga peneliti dari *MIT* (*Massachussets Institute of Technology*), yaitu Ron Rivest, Adi Shamir, dan Len Adleman, pada tahun 1976.

- Termasuk algoritma kriptografi nirsimetri.

- Setiap pengguna mempunya sepasan kunci:
  1. Kunci publik: untuk enkripsi
  2. Kunci privat: untuk dekripsi

- Kunci publik tidak rahasia (diktehui semua orang), kunci privat rahasia (hanya diketahui pemilik kunci saja)

Pembangkitan pasangan kunci

1. Pilih dua bilangan prima, a dan b (rahasia)
2. Hitung $n = a\ b$. Besaran n tidak perlu dirahasiakan.
3. Hitung $m = (a - 1)(b - 1)$.
4. Pilih sebuah bilangan bulat untuk kunci publik, sebut namanya e, yang relatif prima terhadap m.
5. Hitung kunci dekripsi, d, melalui $d \equiv 1$ (**mod** m).

Enkripsi

1. Nyatakan pesan menjadi blok-blok plainteks: p_1, p_2, p_3, … (harus dipenuhi persyaratan bahwa nilai p_i harus terletak dalam himpunan nilai 0, 1, 2, …, $n - 1$ untuk menjamin hasil perhitungan tidak berada di luar himpunan)
2. Hitung blok cipherteks c_i untuk blok plainteks p_i dengan persamaan

$$c_i = p_i^e \textbf{ mod } n$$

yang dalam hal ini, e adalah kunci publik.

Dekripsi

Proses dekripsi dilakukan dengan menggunakan persamaan

$$p_i = c_i^d \textbf{ mod } n,$$

yang dalam hal ini, d adalah kunci privat.

- **Contoh 21.** Misalkan $a = 47$ dan $b = 71$ (keduanya prima), maka dapat dihitung

  $n = a \times b = 3337$

  $m = (a - 1)\times(b - 1) = 3220$.

- Pilih kunci publik $e = 79$ (yang relatif prima dengan 3220 karena pembagi bersama terbesarnya adalah 1).

- Nilai e dan n dapat dipublikasikan ke umum.

- Selanjutnya akan dihitung kunci dekripsi *d* dengan kekongruenan:

$$e \times d \equiv 1 \pmod{m}$$

$$d = \frac{1 + (k \times 3220)}{79}$$

Dengan mencoba nilai-nilai *k* = 1, 2, 3, …, diperoleh nilai *d* yang bulat adalah 1019. Ini adalah kunci dekripsi.

- Misalkan plainteks P = HARI INI

  atau dalam desimal ASCII: 726582733273873

  Pecah P menjadi blok yang lebih kecil (misal 3 digit):

  $p_1 = 726$ $p_4 = 273$

  $p_2 = 582$ $p_5 = 787$

  $p_3 = 733$ $p_6 = 003$

- *Enkripsi setiap blok:*

  $c_1 = 726^{79} \bmod 3337 = 215$

  $c_2 = 582^{79} \bmod 3337 = 776$

  dst untuk sisa blok lainnya

  Keluaran: chiperteks C = 215 776 1743 933 1731 158.

- *Dekripsi (menggunakan kunci privat d = 1019)*

  $p_1 = 215^{1019} \bmod 3337 = 726$

  $p_2 = 776^{1019} \bmod 3337 = 582$

  dst untuk sisi blok lainnya

  Keluaran: plainteks P = 726582733273873

  yang dalam ASCII karakternya adalah HARI INI.

Kekuatan dan Keamanan RSA

- Kekuatan algoritma *RSA* terletak pada tingkat kesulitan dalam memfaktorkan bilangan non prima menjadi faktor primanya, yang dalam hal ini $n = a \times b$.

- Sekali n berhasil difaktorkan menjadi a dan b, maka $m = (a - 1)\times(b - 1)$ dapat dihitung. Selanjutnya, karena kunci enkripsi e diumumkan (tidak rahasia), maka kunci dekripsi d dapat dihitung dari persamaan $e \times d \equiv 1 \pmod{m}$. Ini berarti proses dekripsi dapat dilakukan oleh orang yang tidak berhak.

- Penemu algoritma *RSA* menyarankan nilai a dan b panjangnya lebih dari 100 digit. Dengan demikian hasil kali $n = a \times b$ akan berukuran lebih dari 200 digit.

- Menurut Rivest dan kawan-kawan, uasaha untuk mencari faktor bilangan 200 digit membutuhkan waktu komputasi selama 4 milyar tahun! (dengan asumsi bahwa algoritma pemfaktoran yang digunakan adalah algoritma yang tercepat saat ini dan komputer yang dipakai mempunyai kecepatan 1 milidetik).