

BAB 4. INTEGRAL LIPAT DUA

- Integral Lipat Dua
- Mengubah Urutan Pengintegralan
- Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar
- Integral Lipat Tiga
- Koordianat Silinder dan Koordinat Bola
- Aplikasi Integral Lipat

4.1. Integral Lipat Dua

Pada Matematika Dasar I telah dipelajari integral tertentu $\int_a^b f(x) dx$ yang dapat didefinisikan, apabila $f(x)$ terdefinisi pada interval $[a,b]$. Demikian juga integral lipat dua: $\iint_R f(x,y) dx dy$ akan didefinisikan dengan terlebih dahulu menganggap $f(x,y)$ terdefinisi pada daerah tertutup dan terbatas R di bidang xy .

Untuk mempermudah pemahaman integral lipat dua, Pandanglah R daerah tertutup dan terbatas di bidang xy , dan misalkan $f(x,y)$ suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada daerah R , lihat gambar 5.1.

Daerah R dipartisi menjadi n sub daerah yaitu dengan menarik garis-garis lurus yang sejajar sumbu koordinat sehingga membentuk n buah poligon dengan sisi-sisi Δx_i dan Δy_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Luas sub daerah ke- i adalah $\Delta A_i = \Delta x_i \times \Delta y_i$ untuk $i=1,2, \dots, n$. Misalkan (x_i, y_i) suatu titik sebarang yang dipilih dalam sub daerah ke- i sehingga dengan ketinggian $f(x_i, y_i)$ terbentuk bangun berdimensi tinggi dengan volumenya adalah $f(x_i, y_i) \times \Delta A_i$, sebagaimana terlihat dalam gambar 5.1. Selanjutnya dibentuk jumlahan

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

Jika partisi dapat dibuat sebanyak mungkin ($n \rightarrow \infty$) sehingga luasan untuk setiap partisi makin kecil, atau $\Delta A_i \rightarrow 0$. Jika limit jumlahan di atas ada, maka bentuk integral lipat dua atas fungsi permukaan $f(x,y)$ pada luasan R di bidang xy dapat dinyatakan sebagai limit jumlahan tersebut.

Definisi Integral Lipat Dua. Misalkan R suatu daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy . Jika $f(x,y)$ adalah sebuah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada R , maka integral lipat dua f pada R dinyatakan

$$\iint_R f(x,y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

Perhatikan bahwa bentuk $\iint_R f(x, y) dA$ dapat ditulis pula dengan bentuk:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \text{ atau } \iint_R f(x, y) dy dx$$

Sifat-sifat Integral Lipat Dua:

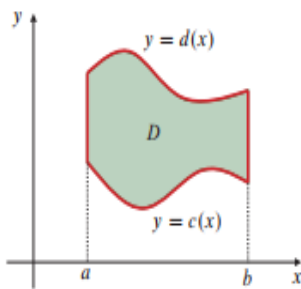
- $\iint_R C f(x, y) dx dy = C \iint_R f(x, y) dx dy$ dengan C adalah konstanta.
- $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy$ asalkan f dan g fungsi-fungsi yang terintegral pada R .
- Jika R dapat dipartisi menjadi R_1 dan R_2 maka:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$$

Pada umumnya menghitung integral Lipat Dua dengan menggunakan definisi di atas, biasanya sangat sukar menentukan nilainya. Teorema dasar kalkulus dapat membantu kita menghitung integral lipat dua dengan cara melakukan integral secara berulang sebagai berikut: suatu fungsi dua peubah diintegrasikan pertama kali terhadap salah satu peubahnya dengan menganggap peubah yang lain sebagai konstanta, kemudian hasilnya diintegrasikan terhadap peubah yang satunya lagi.

Dalam hal ini ada dua jenis daerah R yang biasa dijumpai :

(i). Daerah jenis I:



Gambar 4.1. Daerah Jenis I

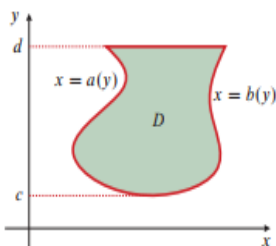
Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva-kurva mulus $y = c(x)$ dan $y = d(x)$, dengan $c(x) \leq d(x)$ untuk semua $x \in [a, b]$, atau $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$, perhatikan daerah yang diarsir pada gambar 4.1 yang dibatasi oleh dua kurva dan dua garis tegak.

Dalam hal ini integral memiliki bentuk:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dy dx = \int_a^b \left\{ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

Integral dalam kurung diselesaikan lebih dahulu terhadap y (dengan menganggap x konstan), kemudian hasilnya diintegrasikan terhadap x dari a ke b . Hal inilah yang dimaksud integral berulang.

(ii). Daerah jenis II:



Gambar 4.2. Daerah Jenis II

Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi garis-garis $y = c, y = d$ dan dibatasi kurva-kurva mulus $\phi_1(y)$ dan $\phi_2(y)$ dimana $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ untuk nilai-nilai $y \in [c, d]$. Daerah R dapat dinyatakan sebagai $R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$. Sebagai contoh ilustrasi daerah R dapat diperlihatkan oleh gambar 4.2.

Dengan cara serupa, mengintegralkan suatu fungsi f atas daerah jenis II seperti gambar 5.3 adalah mengintegralkan terlebih dahulu terhadap x , kemudian hasilnya diintegralkan lagi terhadap y . Bentuknya dapat dinyatakan seperti berikut:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x, y) dx \right\} dy.$$

Contoh

Hitung Integral lipat $\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_1^2 \left\{ \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_1^{x^2} dx \\ &= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_1^{x^2} dx \\ &= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_1^{x^2} dx \\ &= \int_1^2 \left(x^4 - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} - \frac{x}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{1006}{105}. \end{aligned}$$

Contoh

Hitung Integral lipat $\int_1^3 \int_{-y}^{2y} x e^{y^3} dx dy$.

Penyelesaian

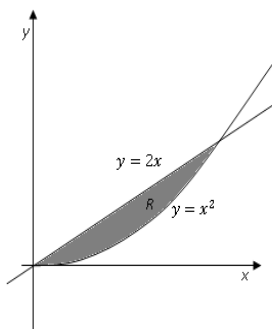
$$\begin{aligned} \int_1^3 \int_{-y}^{2y} x e^{y^3} dx dy &= \int_1^3 \left\{ \int_{-y}^{2y} x e^{y^3} dx \right\} dy \\ &= \int_1^3 \left[\frac{1}{2} x^2 e^{y^3} \right]_{-y}^{2y} dy = \int_1^3 \frac{3}{2} y^2 e^{y^3} dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{y^3} \right]_1^3 = \frac{(e^{27} - e)}{2}. \end{aligned}$$

Perhatikanlah bahwa integral lipat pada kedua contoh di atas dihitung sebagai integral berulang. pengintegralan pertama dilakukan terhadap

batas-batas fungsi yang sesuai dengan daerah jenis pengintegralannya dan integral yang terakhir memiliki batas-batas konstanta.

Ketika kita menghitung integral lipat seperti dalam contoh, sering kali membantu apabila kita dapat menggambarkan daerah pengintegralannya. Sehingga kita dapat memutuskan apakah kita akan mengerjakan integral lipat itu dengan menggunakan daerah jenis I ataukah jenis II.

Contoh



Gambar 4.3

Tentukan volume benda pejal yang terletak di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan di atas daerah R di bidang xy yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ serta parabola $y = x^2$.

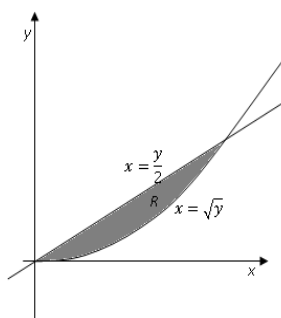
Sebelum kita menyelesaikan kita perhatikan bentuk daerah R di bidang xy seperti terlihat pada gambar 4.3

Penyelesaian

Dari gambar 5.3 kita dapat melihat bahwa R adalah daerah jenis I dan $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$. Volume di bawah $z = x^2 + y^2$ dan di atas R adalah

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx \\ &= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Big|_0^2 = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Daerah pengintegralan yang sama dapat pula dipandang sebagai daerah jenis II, dengan memandang fungsi sebagai batas daerah sebagaimana diperlihatkan pada gambar 5.4



Gambar 4.4

Dari gambar 5, kita juga dapat menyatakan bahwa R dapat dituliskan sebagai daerah jenis II, yaitu $R = \{(x, y): 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Karena itu ekspresi yang lain untuk volume benda yang dimaksud pada soal adalah:

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\
&= \left[-\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \right]_0^4 \\
&= \frac{216}{35}
\end{aligned}$$

4.2. Mengubah Urutan Pengintegralan

Kadang-kadang dalam menghitung integral lipat dua, integral sebelah dalam tidak dapat dihitung sebagaimana adanya, hal ini dimungkinkan oleh fakta bahwa fungsi yang akan diintegrasikan tersebut tidak mempunyai anti turunan elementer. Jika hal ini terjadi, maka untuk menghitung integralnya terlebih dahulu harus diubah urutan pengintegralannya. Perlu juga diketahui bahwa pada saat urutan pengintegralan diubah, maka batas pengintegralan juga berubah tapi daerah pengintegralannya tetap, lihat contoh 5.3 dan contoh 5.4 yang daerah pengintegralan sama tapi urutan pengintegralannya berbeda. Jadi pada prinsipnya, mengubah urutan pengintegralan berarti mengubah daerah pengintegralan dari daerah jenis pertama menjadi daerah jenis II atau sebaliknya. Mengubah urutan integral juga diperlukan untuk menyederhanakan daerah pengintegralan.

Contoh

Hitung Integral lipat

$$\iint_D xy \, dA$$

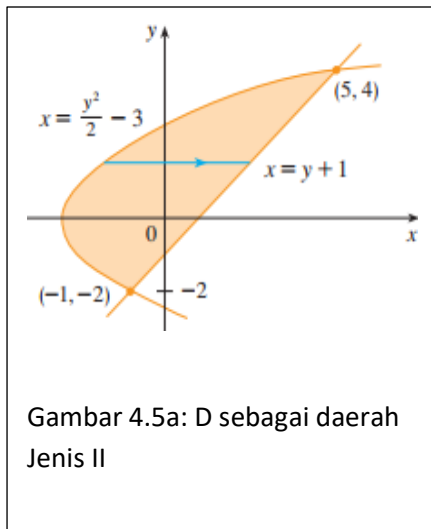
dengan D adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x - 1$ dan $y^2 = 2x + 6$.

Penyelesaian

Jika $dA = dydx$, maka daerah pengintegralan D sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.4a. bukan daerah jenis I maupun daerah jenis II. Dalam hal ini, daerah D harus dibagi menjadi beberapa daerah yang termasuk ke dalam daerah jenis I atau daerah jenis II. Tetapi jika $dA = dx dy$ maka daerah D merupakan daerah jenis II. Jadi penyelesaian integral tersebut lebih efisien dengan menukar urutan pengintegralan $dydx$ menjadi $dx dy$. Dalam hal ini,

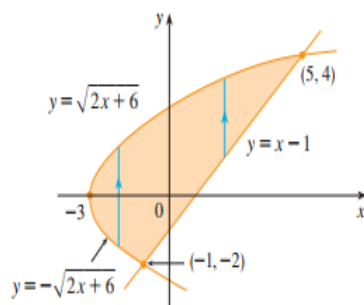
$$D = \left\{ (x, y) : -2 \leq y \leq 4, \quad \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1 \right\}$$

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_{x=-3}^5 \int_{y=x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy dx$$



$$\begin{aligned} &= \int_{y=-2}^4 \int_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} xy \, dx dy \\ &= \int_{y=-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + \frac{2}{3}y^3 - 4y^2 \right]_{-2}^4 \\ &= 36. \end{aligned}$$

Jika menggunakan urutan pengintegralan $dydx$ (daerah jenis I) maka pengintegralan menjadi:



Gambar 4.5a: D sebagai daerah jenis I

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_{x=-3}^{-1} \int_{y=x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy dx + \int_{x=-1}^5 \int_{y=x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy dx$$

Contoh

Hitung $\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dy dx$.

Penyelesaian

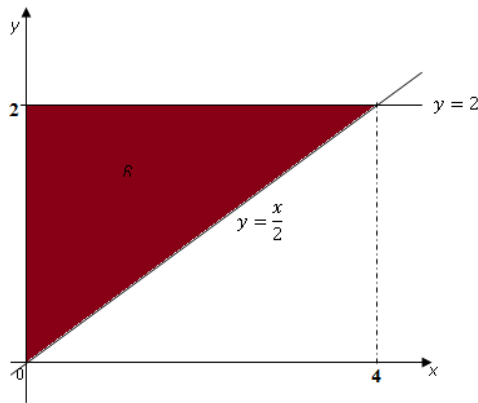
Integral bagian dalam, yaitu $\int e^{y^2} dy$ tidak dapat dihitung dengan cara-cara yang telah kita pelajari sebelumnya. Sehingga urutan pengintegralan $dydx$ perlu diubah menjadi $dx dy$, dengan daerah pengintegralan:

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4 \right\}$$

yang merupakan daerah jenis I (perhatikan Gambar 4.6)

Perubahan urutan pengintegralan, berarti orientasi pengintegralan, batas-batas konstan adalah di sumbu y , yaitu $0 \leq y \leq 2$. Sedangkan batas-batas fungsi x terhadap y adalah garis $x = 2y$ dan garis $x = 0$. Sehingga dengan perubahan urutan pengintegralannya diperoleh:

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dx dy = \int_0^2 x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=2y} dy = \int_0^2 2ye^{y^2} dy = e^4 - 1.$$



Gambar 4.6

Contoh

Tentukan batas-batas integral dari $\iint_A f(x,y) dx dy$ bila A adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$, sebagaimana gambar 4.7.

Penyelesaian

Tentu saja akan jauh lebih mudah permasalahan ini jika kita mencari batas-batas integral dengan menggunakan daerah jenis I. Namun operasi integral harus dilakukan terhadap x dahulu kemudian terhadap y , maka dari gambar 5.7 diperoleh daerah pengintegralan D sebagai berikut:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 4; -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}.$$

Jadi bentuk integralnya adalah

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy.$$

Contoh

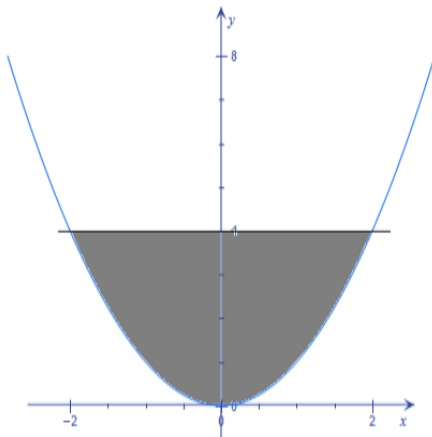
Dari Contoh terakhir, tentukan batas-batas integralnya bila integralnya menjadi $\iint_A f(x,y) dy dx$.

Penyelesaian

Karena operasi integral harus dilakukan terhadap y dahulu, kemudian terhadap x , maka diperoleh batas-batasnya daerah pengintegralan adalah $y = x^2$ sampai $y = 4$ dan batas x diperoleh dari perpotongan parabola $y = x^2$ dan garis $y = 4$, yaitu $x = -2$ sampai $x = 2$. Jadi daerah pengintegralan D yang bersesuaian adalah:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 2; -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\},$$

sehingga bentuk integralnya menjadi:



$$\iint_A f(x,y) dy dx = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 f(x,y) dy dx.$$

Contoh

Diberikan bentuk pengintegralan sebaga berikut:

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy$$

Selesaikan pertanyaam berikut:

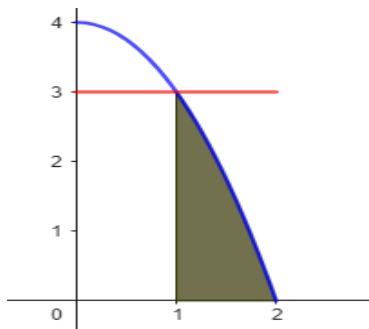
- Sketsa daerah integrasinya
- Ubahlah urutan integrasinya
- Hitung integralnya

Penyelesaian

- Berdasarkan bentuk pengintegralan yang diberikan, maka daerah pengintegralan D adalah:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < 3; 1 < x < \sqrt{4-y}\}$$

Perhatikan batas-batas integralnya, untuk y dibatasi oleh $y = 0$ dan $y = 3$, dan untuk x dibatasi oleh dua fungsi terhadap y , yaitu $x = 1$ dan $x = \sqrt{4-y}$. Sketsa daerah pengintegralannya ditunjukkan oleh Gambar 4.8.



Gambar 4.8

- Pertama, mengambil x konstan dan y fungsi terhadap x . Dari sketsa daerah integrasi Gambar 4.8, menunjukkan batas untuk x adalah $x = 1$ dan $x = 2$. Sedangkan batas y adalah kurva $y = 4 - x^2$ dan $y = 0$.

Jadi diperoleh bentuk integralnya adalah:

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy = \int_1^2 \int_0^{4-x^2} (x+y) dy dx.$$

- Perhitungan integralnya adalah:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy &= \int_1^2 \int_0^{4-x^2} (x+y) dy dx \\ &= \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_1^2 4x - x^3 + 8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4 dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \right]_1^2 \\ &= \frac{241}{60}. \end{aligned}$$

Contoh

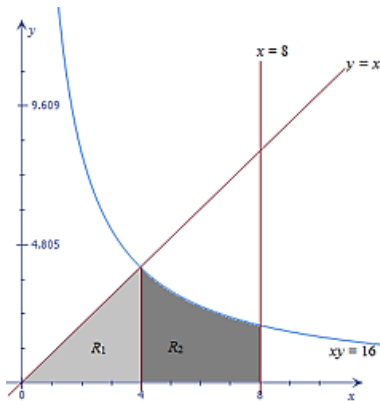
Hitung $\iint_R x^2 dA$ di mana R adalah daerah yang dibatasi oleh hiperbola $xy = 16$, garis $y = x$, garis $y = 0$ dan $x = 8$

Penyelesaian

Daerah R dapat dilihat pada daerah yang diarsir di Gambar 4.9. Untuk menghitung integralnya, R dibagi oleh garis $x = 4$ menjadi dua daerah R_1 dan R_2 .

Jadi menurut Sifat Integral Lipat (c) dan daerah jenis I, diperoleh:

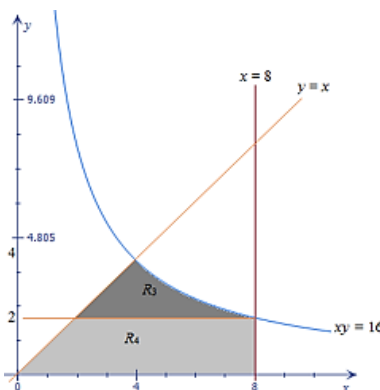
$$\begin{aligned}\iint_R x^2 dA &= \iint_{R_1} x^2 dA + \iint_{R_2} x^2 dA \\ &= \int_0^4 \int_0^x x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{\frac{16}{x}} x^2 dy dx \\ &= \int_0^4 x^3 dx + \int_4^8 16x dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^4 + \left[8x^2 \right]_4^8 = 64 + 384 = 448.\end{aligned}$$



Gambar 4.9a

Daerah R dapat juga dibagi menjadi daerah R_3 dan R_4 oleh garis $y = 2$ seperti pada gambar 5.9b, sehingga kita dapat menghitung integralnya sesuai pengintegralan daerah jenis II.

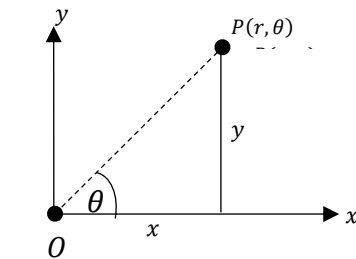
$$\begin{aligned}\iint_R x^2 dA &= \iint_{R_3} x^2 dA + \iint_{R_4} x^2 dA \\ &= \int_2^4 \int_y^{\frac{16}{y}} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx dy \\ &= \int_2^4 \frac{1}{3} \left(\left(\frac{16}{y} \right)^3 - y^3 \right) dy + \int_0^2 \frac{1}{3} (8^3 - y^3) dy \\ &= \left[-\frac{16^3}{6y^2} - \frac{y^4}{12} \right]_2^4 + \left[\frac{8^3}{3} y - \frac{y^4}{12} \right]_0^2 \\ &= 128 - 20 + 340 = 448.\end{aligned}$$



Gambar 4.9b

4.3. Integral Rangkap Dua Dalam Koordinat Polar

Bagian ini berisi uraian tentang integral lipat dua pada koordinat polar. Setelah mempelajari materi integral lipat dua mahasiswa diharapkan mampu mengubah dan mengitung integral lipat dua dalam koordinat polar.



Gambar 5.2.1 Koordinat Polar

Sistem koordinat polar terdiri dari sumbu polar, yaitu berupa setengah garis yang berimpit dengan sumbu- x positif pada bidang R^2 dan titik asal O (lihat gambar 5.2.1). Setiap jarak antara titik O dan P pada bidang dinyatakan r dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dengan sumbu polar (dihitung berlawanan arah jarum jam).

Jika $P = P(r, \theta)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat kartesius sebagai $P = P(x, y)$ dimana

$$x = r \cos \theta \text{ dan } y = r \sin \theta.$$

Sebaliknya jika $P = P(x, y)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat polar $P = P(r, \theta)$ dengan

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ dan } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Beberapa jenis kurva pada bidang lebih mudah diuraikan dalam bentuk koordinat polar (kutub) daripada dalam koordinat kartesian seperti lingkaran, ellips dan kardioid. Sehingga integral lipat dua atas kurva demikian akan lebih mudah dihitung dengan menggunakan koordinat polar.

Pada integral satu peubah seringkali perubahan variabel membuat integral menjadi lebih mudah dikerjakan. Misalkan $\int x e^{x^2} dx$ ditulis dalam variable $u = x^2$. Hal yang sama dapat dilakukan dalam integral lipat. Misalkan kita memiliki bentuk integral lipat dua

$$V = \iint_R f(x, y) \, dx dy,$$

yang akan dihitung dengan menggunakan variable u dan v yang dinyatakan dalam persamaan $x = m(u, v)$ dan $y = n(u, v)$. Didefinisikan suatu fungsi $J(u, v)$ yang disebut determinan Jacobi,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

Maka intergral lipat dua dalam koordinat baru tersebut adalah

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(m(u, v), n(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Misalkan sebuah titik (x, y) dalam koordinat kartesian dinyatakan dalam polar (r, θ) dengan transformasinya $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$ dimana $r \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dengan demikian

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

Sehingga determinan Jacobinya adalah

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Maka integral lipat $\iint_R f(x, y) dx dy$ dapat ditulis menjadi

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Elemen luas dalam koordinat kartesius dinyatakan dengan $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$, sedangkan elemen luas dalam koordinat polar dinyatakan dengan $\Delta A = r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta$ (lihat gambar 5.2.2).

Berikut definisi integral lipat dua dalam koordinat polar

Catatan:

Daerah seperti setengah lingkaran atau cincin dalam koordinat polar setara dengan “persegi Panjang”.

Definisi Integral Lipat Dua Koordinat Polar. Misalkan sebuah titik (x, y) dalam koordinat kartesian dinyatakan dalam koordinat polar (r, θ) dengan transformasi $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$ dimana $r \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$, maka

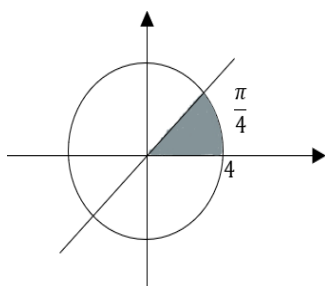
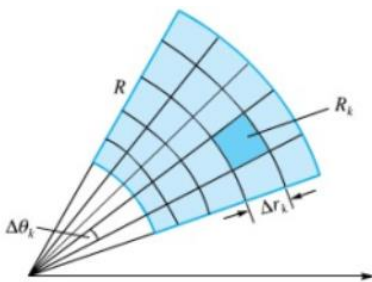
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Contoh Koordinat polar pada lingkaran dan garis lurus

Hitunglah $\iint_R 8xy dy dx$ yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 16$, $y = x$ dan sumbu- X di kuadran pertama!

Penyelesaian

Daerah R dapat dideskripsikan sebagai $R = \{(x, y): y \geq 0, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Daerah R dapat dilihat pada gambar 5.2.3, dan dalam koordinat polar diberikan $0 \leq r \leq 4$ dan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Maka

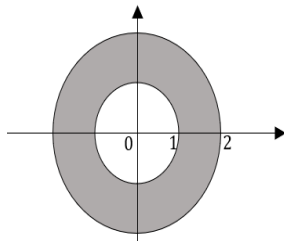


Gambar 5.2.3 Daerah R yang dibatasi lingkaran dan garis lurus

$$\begin{aligned}
\iint_R 8xy \, dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 8(r \cos \theta)(r \sin \theta)r \, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 8r^3 \cos \theta \sin \theta \, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2r^4 \cos \theta \sin \theta]_0^4 \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r^4 \sin 2\theta]_0^4 \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 256 \sin 2\theta \, d\theta \\
&= 256 \left[\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 128
\end{aligned}$$

Contoh. Koordinat pada cincin

Apabila R adalah daerah cincin yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$. Hitunglah



Gambar 5.2.4 Daerah R yang dibatasi cincin

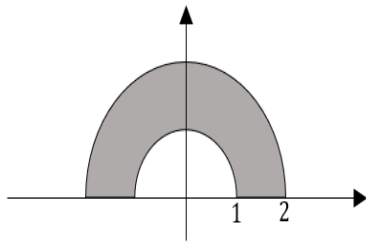
$$R = \iint_R x^2 \, dA$$

Penyelesaian:

Daerah R adalah satu cincin yang diperlihatkan pada gambar 5.2.4 dan dalam koordinat polar diberikan oleh $1 \leq r \leq 2$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Maka

$$\begin{aligned}
R &= \iint_R x^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \cos^2 \theta)r \, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 \cos^2 \theta \, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{15}{4} \right) \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= \left(\frac{15}{4} \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{15}{4}\right) \left(\frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta\right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{15\pi}{4}
\end{aligned}$$



Gambar 5.2.5 Daerah R yang dibatasi setengah cincin

Contoh. Koordinat polar pada setengah cincin

Hitunglah $\iint_R (3x + 4y) \, dA$, dengan R adalah daerah di setengah bidang atas yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.

Penyelesaian:

Daerah R dapat dideskripsikan sebagai $R = \{(x, y) : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Daerah ini adalah setengah cincin yang diperlihatkan pada gambar 5.2.5, dan dalam koordinat polar diberikan $1 \leq r \leq 2$ dan $0 \leq \theta \leq \pi$. Maka

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y) \, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r \sin \theta) r \, dr d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^2 \sin \theta) \, dr d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[r^3 \cos \theta + \frac{4}{3} r^3 \sin \theta \right]_1^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi 7 \cos \theta + \frac{28}{3} \sin \theta \, d\theta \\
&= \left[7 \sin \theta - \frac{28}{3} \cos \theta \right]_0^\pi \\
&= \frac{56}{3}.
\end{aligned}$$

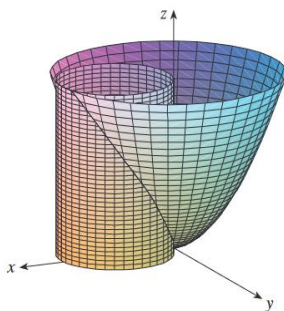
Contoh. Koordinat polar pada cakram

Hitunglah $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ dalam koordinat R merupakan cakram berjari-jari a !

Penyelesaian

Cakram berjari-jari a memberikan daerah pengintegralan berupa lingkaran yang dibuat oleh sebuah garis dari pusat koordinat $r = 0$ sampai $r = a$, kemudian garis tersebut diputar berlawanan jarum jam sebesar 2π ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Dengan transformasi koordinat polar $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, maka $x^2 + y^2 = r^2$. Sehingga dalam koordinat polar, integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_R e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right) \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$



Gambar 4.2.6 Daerah R benda pejal

Contoh 5.2.5. Koordinat polar pada benda pejal

Tentukan volume benda pejal yang terletak pada kuadran pertama yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$ dan bidang-bidang koordinat.

Penyelesaian

Daerah pengintegralan R yang dibatasi oleh paraboloida dan tabung dapat dilihat pada gambar 4.2.6. Dalam koordinat polar diberikan $0 \leq r \leq 2$ dan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, maka

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dy dx &= \iint_R r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 dr d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 d\theta = 2\pi.$$

LATIHAN 4

I. Soal 1 – 5 Hitung integral berulangnya.

1. $\int_1^3 \int_0^1 dy dx$
2. $\int_1^2 \int_y^2 xy dx dy$
3. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$
4. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} dudv$

II. Soal 6 – 10 Gambarkan daerah R dan hitung integral lipat dua atas daerah R yang diberikan.

5. $\iint_R x^3 y^2 dA, R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$
6. $\iint_R x \cos y dA, R$ dibatasi oleh $y = 0, y = x^2$ dan $x = 1$
7. $\iint_R y^3 dA, R$ adalah daerah segitiga dengan titik-titik $(0,2), (1,1)$, dan $(3,2)$
8. $\iint_R xy^2 dA, R$ daerah yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = \sqrt{1-y^2}$

III. Soal 11 – 15 Tentukan volume benda pejal.

9. Volume benda dibawah permukaan $z = 2x + y^2$ dan di atas daerah yang dibatasi oleh $x = y^2$ dan $x = y^3$
10. Volume benda di bawah permukaan $z = xy$ dan di atas segitiga dengan titik-titik sudutnya $(1,1), (4,1)$ dan $(1,2)$
11. Volume yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + 3y^2$ dan bidang $x = 0, y = 1, y = x$, dan $z = 0$
12. Volume benda yang dibatasi oleh bidang-bidang $z = x, y = x, x + y = 2$ dan $z = 0$

IV. Soal 16 – 20 Gambarlah daerah pengintegralannya dan ubahlah urutan integralnya

13. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$
14. $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y) dy dx$
15. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y) dx dy$
16. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$

V. Soal 21 – 25 Hitung integralnya dengan terlebih dahulu mengubah urutan integralnya.

17. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

18. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx dy$
19. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) \, dx dy$
20. Dalam penghitungan integral lipat dua pada daerah R , salah satu jumlah integral berulangnya diperoleh sebagai berikut:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) \, dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) \, dx dy$$

Sketsakan daerah R dan ekspresikan integral lipat duanya sebagai integral berulang dengan urutan pengintegralan terbalik.

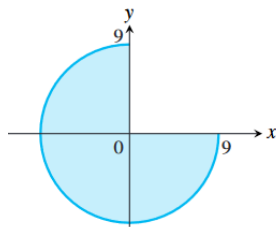
VI. Integral Rangkap Dua dalam Koordinat Polar

21. Hitunglah nilai integral berikut dan sketsa grafiknya

- a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 r \, dr d\theta$
- b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr d\theta$

22. Deskripsikan daerah integral R pada koordinat polar berikut

a.



- b. Daerah integral yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 2x$
- c. Daerah integral yang dibatasi oleh setengah lingkaran $x^2 + y^2 = 2y$.

23. Hitunglah integral yang diberikan dengan mengubah ke koordinat polar

- a. $\iint_R 2x - y \, dA$ dengan R adalah daerah dikuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, garis $y = x$ dan $x = 0$.
- b. $\iint_R y \, dA$ dengan R adalah daerah dikuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan garis-garis $y = x$ dan $y = 0$.
- c. $\iint_R x \, dA$ dengan R adalah daerah dikuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 = 25$
- d. $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dA$ dengan R adalah daerah setengah lingkaran $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y .
- e. $\iint_R (x^2 + y^2) \, dA$ dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh spiral $r = \theta$ dan $r = 2\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- f. Tentukan volume benda pejal yang terletak dibawah paraboloida $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ dan bidang- xy !

Sumber buku:

1. James Stewart
2. Thomas Calculus