Intan Sari Areni

intan@unhas.ac.id

Matematika Diskrit

Teknik Informatika
Semester Genap

Sasaran Belajar

- Mahasiswa mampu menerapkan prinsip-prinsip matematika diskrit sebagai dasar dalam ilmu komputer.

Silabus

- Dasar-dasar logika
- Himpunan
- Matriks, Relasi dan Fungsi
- Kombinatorial dan Peluang Diskrit
- Induksi Matematika
- Teori Graph

Referensi

- **http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/matdis13-14.htm**
- Epp, Susanna S.; Discrete Mathematics with Applications, Edisi ke 4, Brooks/Cole Cengage Learning, 2010
- Lovasz, L.; Vesztergombi, K.; Discrete Mathematics (e-lecture notes), Yale University, Spring 1999
- Rossen, Kenneth H.; Discrete Mathematics and Its Applications, Edisi ke 6, McGraw-Hill, 2007

Referensi

- Jong Jek Siang, 2009, *Matematika Diskri dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer* , Edisi Ketiga , Andi Yogyakarta
- M.A. Salam, 1998, *Discrete Mathematics for Computing*, Prentice Hall-Sprint Print
- Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* Seventh Edition, Mc Graw Hill.
- Rinaldi Munir, 2009, *Matematika Diskrit* , Edisi Ketiga , Informatika Bandung
- Skvarcius, Robinson, 1986, *Discrete Mathematics with Computer Science Applications*, The Benjamin Publishing Company, Inc.
- Susanna S.Epp, 1995, *Discrete Mathematics with Applications*, Second Edtion, Brooks Publishing Company.

Kontrak Kuliah

- Kuliah tiap Selasa, 07:50 - 10:20
- HP Silent
- Toleransi : 15 menit
- Kriteria Penilaian
  - Tugas : 20%
  - Quiz : 30%
  - Midtest : 50%

Pengantar Matematika Diskrit

Source: http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/matdis.htm

Apakah Matematika Diskrit itu?

- Matematika Diskrit: cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit.

- Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)?

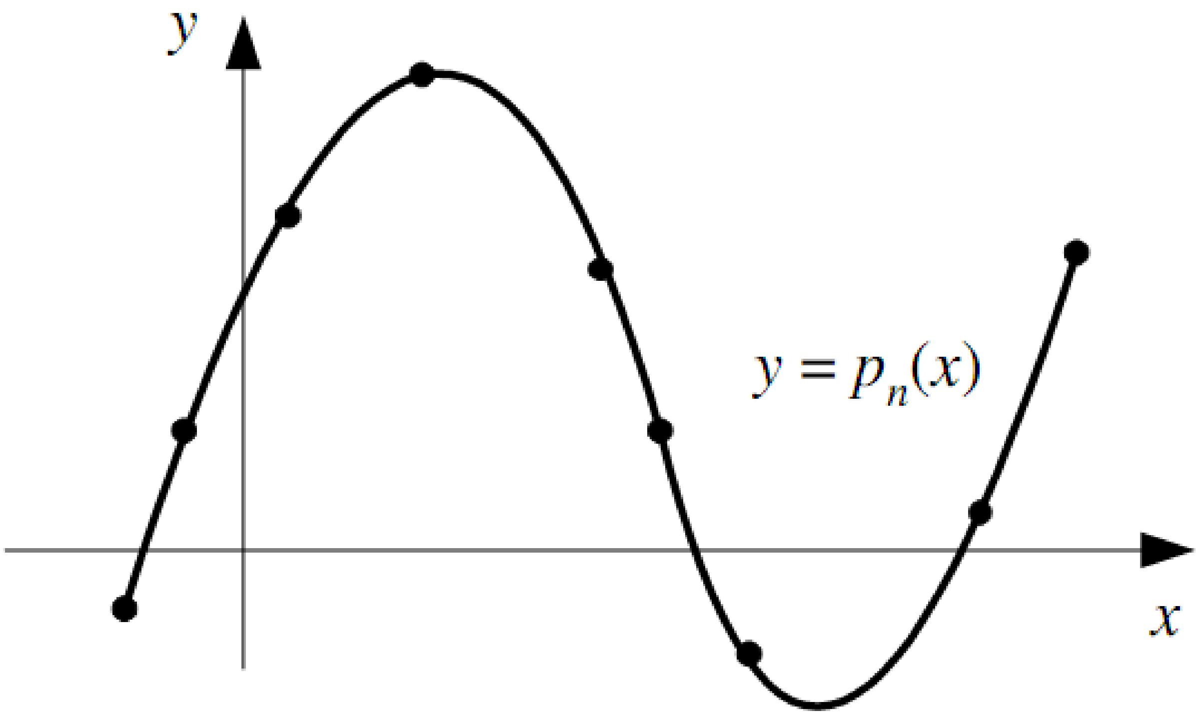
- Benda disebut diskrit jika:
  - terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda, atau
  - elemen-elemennya tidak bersambungan (*unconnected*).

  Contoh: himpunan bilangan bulat (*integer*)

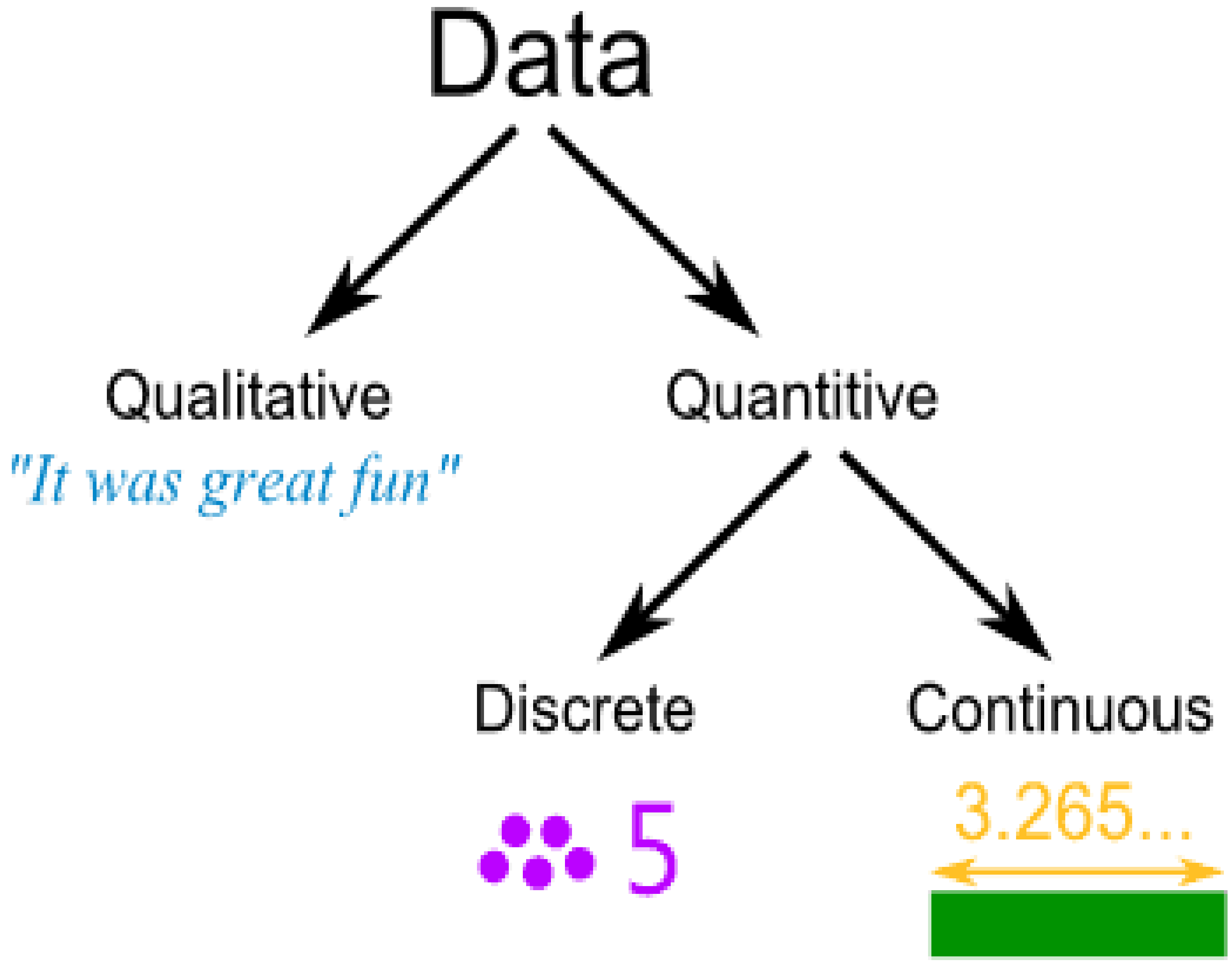
- Lawan kata diskrit: **kontinyu** atau **menerus** (*continuous*).

  Contoh: himpunan bilangan riil (*real*)

Diskrit versus kontinu

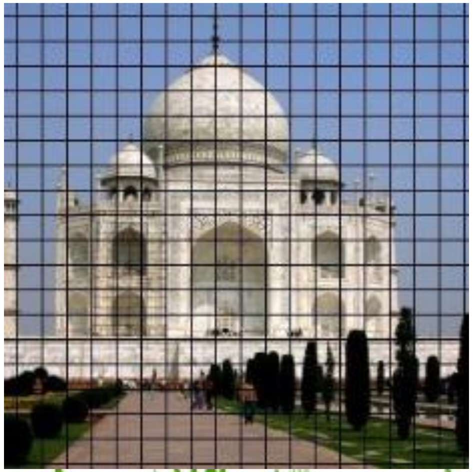


Kurva mulus: himpunan menerus
Titik-titik tebal di kurva: himpunan diskrit


Data
Qualitative
"It was great fun"
Quantitive
Discrete
5
Continuous
3.265...

- Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.

- Kamera digital menangkap gambar (analog) lalu direpresentasikan dalam bentuk diskrit berupa kumpulan *pixel* atau *grid.* Setiap *pixel* adalah elemen diskrit dari sebuah gambar



Mengapa Mempelajari Matematika Diskrit?

Mengapa Mempelajari Matematika Diskrit?

1. Mengajarkan mahasiswa untuk berpikir secara matematis

   → mengerti argumen matematika

   → mampu membuat argumen matematika.

2. Mempelajari fakta-fakta matematika dan cara menerapkannya.

Mengapa Mempelajari Matematika Diskrit?

3. Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika.

Matematika-nya orang Informatika!

Lima pokok kuliah di dalam Matematika Diskrit

1. **Penalaran matematika (*Mathematical reasoning*)**
   Mampu membaca dan membentuk argumen matematika
   (Materi: logika)

2. **Analisis kombinatorial (*Combinatorial analysis*)**
   Mampu menghitung atau mengenumerasi objek-objek
   (materi: kombinatorial → permutasi, kombinasi, dll)

3. **Sruktur diskrit**

   Mampu bekerja dengan struktur diskrit. Yang termasuk struktur diskrit: Himpunan, Relasi, Permutasi dan kombinasi, Graf, Pohon, *Finite-state machine*

Lima pokok kuliah di dalam Matematika Diskrit

4. **Berpikir algoritmik**

   Mampu memecahkan persoalan dengan menspesifikasikan algoritmanya

5. **Aplikasi dan pemodelan**

   Mampu mengaplikasikan matematika diskrit pada hampir setiap area bidang studi dan mampu memodelkan persoalan tersebut dalam *problem-solving skill*.

Moral of this story…

- Mahasiswa informatika harus memiliki pemahaman yang kuat dalam Matematiak Diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

Pengetahuan dasar

- Logika
- Relasi
- Fungsi
- Himpunan

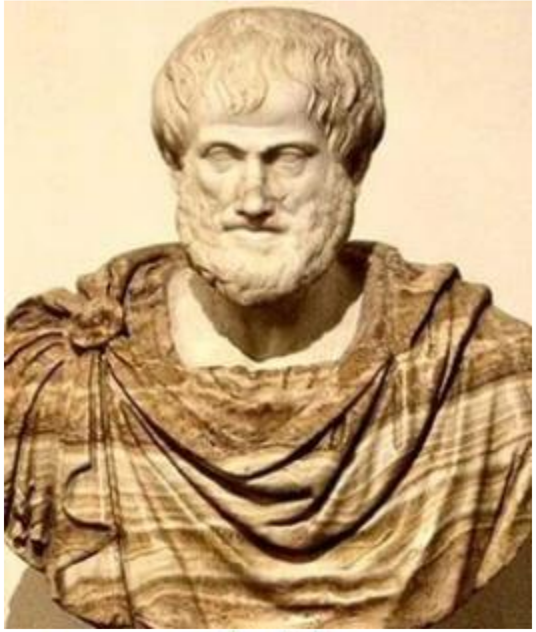
LOGIKA

Logika Matematika

- Logika merupakan studi penalaran

  ➔ Membahas apakah suatu penalaran **benar** atau **tidak**

- Dasar Teori Logika : **Proposisi**



Aristoteles, peletak dasar-dasar logika

1.1 Proposisi

- Proposisi: suatu kalimat yang dapat bernilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus keduanya.
- Nilai kebenaran dari suatu proposisi adalah benar (*True*) atau salah (*False*).
- Berkorespondensi dengan 1 dan 0 dalam dunia digital.

Contoh Proposisi (1)

"Gajah lebih besar daripada kucing."

Ini suatu pernyataan ? benar

Ini suatu proposisi ? benar

Apa nilai kebenaran dari proposisi ini ? Benar/true

Contoh Proposisi (2)

"1089 < 101"

Ini pernyataan ? Benar

Ini proposisi ? Benar

Apa nilai kebenaran dari proposisi ini ? Salah/false

Contoh proposisi (3)

"$y > 15$"

Ini pernyataan ? benar

Ini proposisi ? salah

- Nilai kebenarannya bergantung pada nilai y, nilai y tidak dispesifikasikan nilainya.
- Tipe pernyataan ini adalah kalimat terbuka.

Contoh proposisi (4)

"Bulan ini Februari dan 24 < 5."

Ini pernyataan ? benar

Ini proposisi ? benar

Nilai kebenaran dari proposisi tersebut ? salah

Contoh proposisi (5)

“Serahkan uangmu sekarang!”

Ini pernyataan ? salah

(Kalimat perintah)

Ini proposisi ? salah

Hanya pernyataan yang dapat menjadi proposisi.

Contoh proposisi (6)

"Untuk sembarang bilangan bulat n ≥0, maka 2n adalah bilangan genap."

Ini pernyataan ? benar

Ini proposisi ? benar

Apa nilai kebenaran proposisi tersebut ? Benar

Contoh proposisi (7)

“$x < y$ jika dan hanya jika $y > x$.”

Ini pernyataan ? benar

Ini proposisi ? benar

… sebab nilai kebenarannya bergantung pada nilai x dan y.

Apa nilai kebenaran dari proposisi tsb ? benar

Contoh Proposisi

(a) 13 adalah bilangan ganjil

(b) Soekarno adalah alumnus UGM.

(c) $1 + 1 = 2$

(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$

(e) Ada monyet di bulan

(f) Hari ini adalah hari Rabu

(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh bukan Proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Tolong tutup pintu!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$

Proposisi adalah kalimat berita

1.2 Mengkombinasikan proposisi

- Proposisi baru dapat dibentuk dengan cara mengkombinasikan satu atau lebih proposisi yang dinamakan **proposisi majemuk** (*compound proposition*).
- Proposisi majemuk ada 3 macam, yaitu:
    1. Konjungsi (*and* / $\wedge$)
    2. Disjungsi *(or* / $\vee$*)*
    3. Ingkaran (*not* / $\neg$ / ~)

- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ….

- **Contoh**:

  p : 13 adalah bilangan ganjil.

  q : Soekarno adalah alumnus UGM.

  r : $2 + 2 = 4$

Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan p dan q adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q

     Notasi $p \wedge q$

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q

     Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p

     Notasi: $\sim p$

- p dan q disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition*)

Contoh Proposisi Majemuk

p : Hari ini hujan

q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau: Hari ini *tidak* hujan)

Operator Logika

- Negasi (NOT)
- Konjungsi - Conjunction (AND)
- Disjungsi - Disjunction (OR)
- Eksklusif Or (XOR)
- Implikasi (JIKA – MAKA)
- Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Tabel kebenaran dapat digunakan untuk menunjukkan bagaimana operator-operator tsb menggabungkan proposisi-proposisi.

1.2.1 Ingkaran atau Negasi (NOT)

- Operator Uner, Notasi , Simbol: $\neg$ / $\sim$

- Ingkaran merupakan pernyataan yang menyangkal yang diberikan. Ingkaran pernyataan dapat dibentuk dengan menambah ‘Tidak benar bahwa …’ didepan pernyataan yang diingkar.

1.2.1 Ingkaran atau Negasi (NOT)

Tabel Kebenarannya

p	$\sim p$
True (T)	False (F)
False (F)	True (T)

1.2.1 Ingkaran atau Negasi (NOT)

Contoh :

Tentukan ingkaran dari sebuah pernyataan serta tentukan nilai kebenarannya!

1. b : Sepeda motor beroda dua

   ~ b : Tidak benar sepeda motor beroda dua

1.2.1 Ingkaran atau Negasi (NOT)

2. p : kayu memuai bila dipanaskan

   $\sim p$:

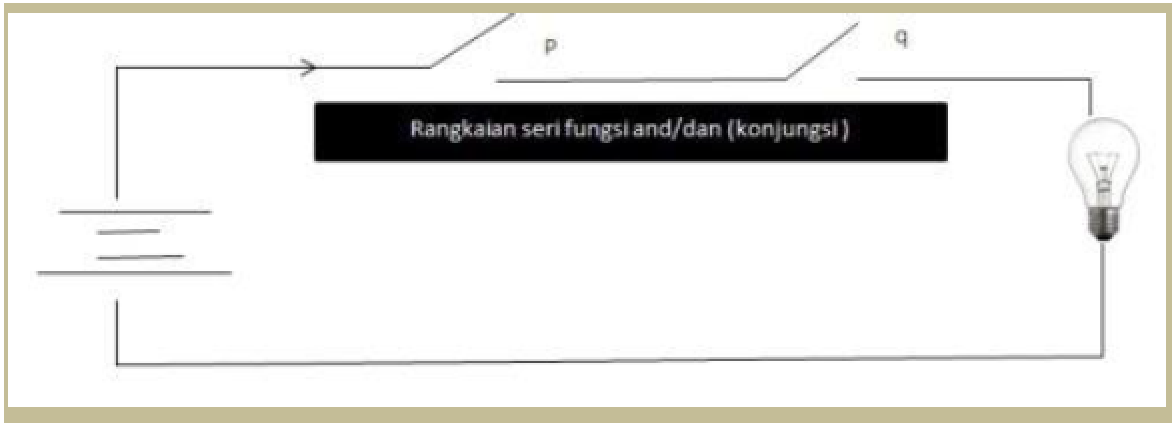
3. r : 3 bilangan positif

   $\sim r$:

1.2.2 Konjungsi - Conjunction (AND)

- Gabungan dua pernyataan yang dirangkai dengan kata hubung logika “dan, tetapi, meskipun, walaupun”.
- Lambangnya "Λ“
- Operasi konjungsi sering juga diperlihatkan sebagai hubungan seri pada rangkaian listrik.

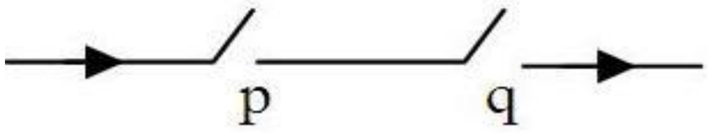
1.2.2 Konjungsi - Conjunction (AND)



- Jika saklar p dan q tertutup (on) ternyata lampu menyala maka pernyataan bernilai benar
- Jika salah satu saklar p atau q terbuka (off) ternyata lampu tidak menyala maka pernyataan bernilai salah.
- Jika keduanya saklar p dan q terbuka (off) ternyata lampu juga tidak menyala, maka pernyataan bernilai salah.

1.2.2 Konjungsi - Conjunction (AND)

Operator Biner, Simbol: $\wedge$



p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1.2.2 Konjungsi - Conjunction (AND)

- Contoh : tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $p \wedge q$ berikut ini!

a. *p* : 100 + 500 = 800

q : 4 adalah faktor dari 12

b. *p* : Pulau Bali dikenal sebagai pulau Dewata

q : 625 adalah bilangan kuadrat

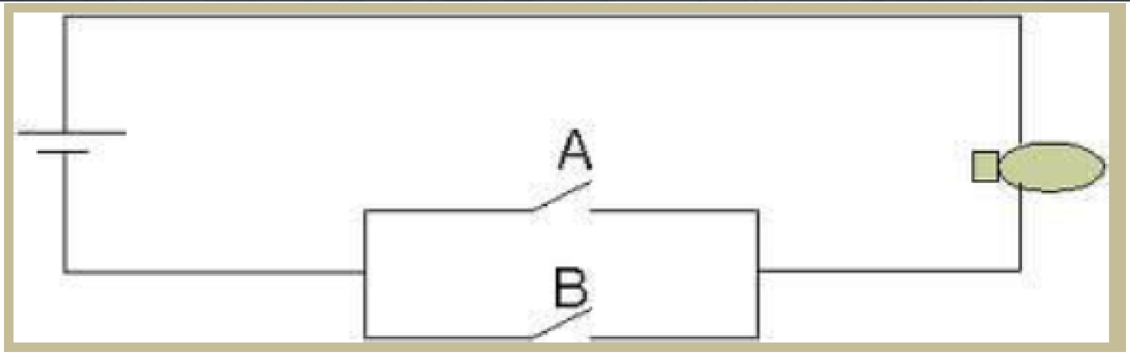
c. “Bulan ini bulan Februari dan 24 < 5.”

d. “Bulan ini bulan Maret dan 24 > 5.”

1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)

- Gabungan dua pernyataan yang dirangkai dengan kata hubung logika “atau”.
- Lambang “V”
- Operasi disjungsi sering juga ditunjukkan dengan hubungan paralel pada rangkaian listrik.

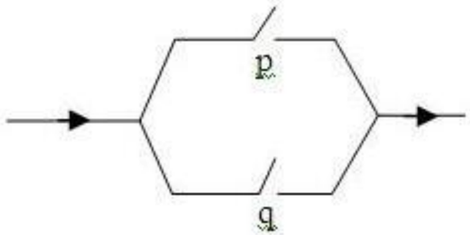
1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)



- Jika saklar A dan B tertutup (on) ternyata lampu menyala maka pernyataan bernilai benar
- •Jika salah satu saklar A tertutup (on) dan B terbuka (off), atau jika salah satu saklar A terbuka (off) dan B tertutup (on) ternyata lampu menyala maka pernyataan bernilai benar.
- •Jika keduanya saklar A dan B terbuka (off) ternyata lampu tidak menyala, maka pernyataan bernilai salah.

1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)

Operator Biner, Simbol: $\vee$



P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)

Contoh 1:

- Tentukanlah nilai kebenaran untuk disjungsi dua pernyataan yang diberikan !

a. p : 3 + 4 = 12

q : Dua meter sama dengan 200 cm

b. p : 29 adalah bilangan prima

q : Bandung adalah ibu kota Provinsi Jawa Barat

c. p : Dua garis yang sejajar mempunyai titik potong

q : adalah bilangan cacah

1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)

Jika p dan q merupakan dua buah pernyataan maka "*p* V *q*" bernilai benar (B) jika *p* dan *q* keduanya bernilai benar, atau salah satu bernilai salah, sebaliknya "*p* V *q*" bernilai salah (S) jika keduanya bernilai salah ini juga disebut **Disjungsi inklusif** atau **inklusif OR**

1.2.3 Disjungsi - Disjunction (OR)

Contoh 2 :

- *p* : Andre membeli permen.
- *q* : Andre membeli coklat.
- *p* v *q* : Andre membeli permen atau coklat.

Di sini mempunyai dua pengertian:

1) Andre membeli permen saja atau coklat saja tetapi tidak keduanya.
2) Andre membeli permen saja atau coklat saja tetapi mungkin juga keduanya.

1.2.4 Eksklusif Or (XOR)

- **Ekslusif OR (XOR)** adalah jika *p* dan *q* merupakan dua buah pernyataan maka "$p \vee q$" bernilai benar (B) jika salah satu bernilai salah (S) atau salah satu bernilai (B), sebaliknya "$p \vee q$" bernilai salah (S) jika keduanya bernilai benar (B) atau keduanya bernilai salah (S).
- sebuah disjungsi ekslusif or bernilai benar, jika paling sedikit satu komponennya benar tetapi tidak dua-duanya.

1.2.4 Eksklusif Or (XOR)

Operator Biner, Simbol: $\oplus$

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.2.4 Eksklusif Or (XOR)

Contoh :

- *p* : Dodi naik pesawat terbang.
- *q* : Dodi naik kapal laut.
- $p \vee q$: Dodi naik pesawat terbang atau kapal laut.

Dalam contoh tersebut, Dodi hanya naik pesawat terbang saja atau kapal laut saja, dan tidak mungkin naik pesawat terbang dan sekaligus naik kapal laut.

1.2.4 Eksklusif Or (XOR)

Kata “atau” (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. Inclusive or

“atau” berarti “*p* atau *q* atau keduanya”

2. Exclusive or

“atau” berarti “*p* atau *q* tetapi bukan keduanya”.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

- Implikasi adalah pernyataan majemuk yang di sajikan dalam “jika ….. maka …… “.
- Notasi “***p* => *q***”,dibaca “ jika ***p*** maka ***q*”**.
- Pada implikasi p => q, p disebut anteseden (hipotesis) dan q disebut konsekuen.
- “ *p* => *q*” akan salah jika “B => S (*p* = B, *q* =S) selainnya benar.
- Perhatikan tabel kebenaran untuk implikasi berikut.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Implikasi $p \longrightarrow q$ adalah proposisi yang bernilai salah jika p benar dan q salah, dan bernilai benar jika lainnya.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh

- Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah
- Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

- Contoh-contoh tersebut di atas adalah berbentuk “jika *p*, maka *q*”, dimana *p* biasa disebut hipotesis dan *q* adalah konklusi.
- Pernyataan semacam ini disebut proposisi bersyarat atau kondisonal atau implikasi.
- Di dalam bahasa alami (bahasa percakapan manusia), terdapat hubungan sebab akibat antara hipotesis dan konklusi.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

"Jika suhu mencapai 800C, maka alarm berbunyi"

- Implikasi seperti ini adalah normal dalam Bahasa Indonesia.
- Tetapi dalam penalaran matematik dipandang implikasi lebih umum daripada implikasi dalam bahasa alami.
- Definisi mengenai implikasi adalah pada nilai kebenarannya, bukan didasarkan pada penggunaan bahasa.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

"Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka 1+1=2"

- Implikasi di atas tetap valid secara matematis meskipun tidak ada kaitan antara Paris sebagai ibukota Perancis dengan 1+1=2.
- Implikasi tersebut bernilai benar karena hipotesis benar (Paris ibukota Perancis adalah benar) dan konklusi juga benar (1+1=2 adalah benar).

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

“Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka 1+1=3”

- Bernilai salah karena hipotesis benar tetapi 1+1 = 3 salah.
- Implikasi p q memainkan peranan penting dalam penalaran

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Implikasi ini tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan standar “jika *p*, maka *q*” tetapi juga dapat di ekspresikan dalam berbagai cara, antara lain :

(a) Jika *p*, maka *q*	(*if p, then q*)
(b) Jika *p*, *q*	(*if p,q*)
(c) *p* mengakibatkan *q*	(*p implies q*)
(d) *q* jika *p*	(*q if p*)
(e) *p* hanya jika *q*	(*p only if q*)
(f) *p* syarat cukup agar *q*	(*p is sufficient for q*)
(g) *q* syarat perlu bagi *p*	(*q is necessary for p*)
(h) *q* bilamana *p*	(*q whenever p*)

1.2.5 Contoh implikasi (1)

a. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur
b. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang
c. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik
d. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan
e. Ahmad bisa mengambil matakuliah teori bahasa formal hanya jika ia sudah lulus matematika diskrit
f. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dan rokok
g. Syarat perlu bagi Imdonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan
h. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebang

1.2.5 Contoh Implikasi (2)

Implikasi

“Jika hari ini hari Jumat maka 2+3 > 7.”

bernilai benar untuk semua hari kecuali hari Jumat, walaupun 2+3 > 7 bernilai salah.

1.2.5 Contoh Implikasi (3)

Kapan pernyataan berikut bernilai benar?

"Jika hari tidak hujan maka saya akan pergi ke Lembang."

Bernilai benar :
– jika hari tidak hujan dan pergi ke Lembang,
– hari hujan dan tetap pergi ke Lembang,
– hari hujan dan tidak pergi ke lembang

Bernilai salah apabila
– hari tidak hujan dan tidak pergi ke Lembang.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

- Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai sama dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca: "*p* jika dan hanya jika *q*" atau "*p* bila dan hanya bila *q*."
- Dengan demikian jelaslah bahwa biimplikasi dua pernyataan p dan q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai sama, yaitu keduanya bernilai salah atau keduanya bernilai benar.
- Biimplikasi merupakan kalimat bersyarat ganda.
- Biimplikasi menggunakan kata hubung **JIKA DAN HANYA JIKA**.
- Notasinya: "<=>"

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Operator Biner, Simbol: $\leftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 1 :

“Jika sore ini hujan, maka jalan raya basah”

Jika jalan raya basah, apakah selalu disebabkan oleh hujan? Tentu saja tidak selalu begitu, karena jalan raya basah bisa saja disebabkan disiram, banjir, ataupun hal lainnya. Pernyataan seperti ini telah kita ketahui sebagai sebuah implikasi.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 2 :

“Jika orang masih hidup maka dia masih bernafas”

- Jika seseorang masih bernafas, apakah bisa dipastikan orang tersebut masih hidup? Ya, karena jika dia sudah tidak bernafas, pasti orang tersebut sudah meninggal.
- Pernyataan yang demikian disebut *biimplikasi* atau *bikondisional* atau *bersyarat ganda*.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 3:

"Jika nilai ujian matematika saya lebih dari 7.50 maka saya lulus."

- Apakah saya bisa lulus selain jika nilai matematika saya lebih dari 7.50? Tidak.
- Satu-satunya syarat kelulusan adalah bila nilai ujiannya lebih dari 7.50.
- Inilah yang disebut biimplikasi.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 4:

Perhatikan pernyataan berikut ;

(a) x2 ≥ 0 jhj 20 = 1

(b) x2 ≥ 0 jhj 20 = 0

(c) x2 < 0 jhj 20 = 1

(d) x2 < 0 jhj 20 = 0

- Pernyataan (a) dan (d) merupakan pernyataan yang benar, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.
- Sedangkan pernyataan (c) dan (d) merupakan pernyataan yang salah, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang berbeda.

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Tautologi

adalah pernyataan yang selalu benar.

Contoh :

Tautologi

p	~p	P V ~p
B	S	B
S	B	B

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah.

- Contoh :

Kontradiksi

p	~p	P Λ ~p
B	S	S
S	B	S

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Dua pernyataan disebut ekivalen jika nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut sama,

$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$

p	q	(p⇒q	∧	q⇒p)
B	B	B	**B**	B
B	S	S	**S**	B
S	B	B	**S**	S
S	S	B	**B**	B

$p \Leftrightarrow q$

p	q	p⇔q
B	B	**B**
B	S	**S**
S	B	**S**
S	S	**B**

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Pernyataan-pernyataan dapat digabungkan dengan operasi untuk membentuk pernyataan baru.

p	q	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

p	q	$\neg(p\wedge q)$	$(\neg p)\vee(\neg q)$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p)\vee(\neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Pernyataan $\neg(P\wedge Q)$ dan $(\neg P)\vee(\neg Q)$ ekivalen secara logika, karena $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$ selalu benar.

1.4 Hukum-hukum Logika Proposisi

1. Hukum identitas (i) $p \vee F \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge T \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi) (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
2. Hukum Null / dominasi (i) $p \wedge F \Leftrightarrow F$ (ii) $p \vee T \Leftrightarrow T$	7. Hukum Komutatif (i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. Hukum negasi (i) $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow T$ (ii) $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow F$	8. Hukum asosiatif (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
4. Hukum idempoten (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$	9. Hukum distributif (i) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Hukum involusi (negasi ganda) ${\sim}({\sim}p) \Leftrightarrow p$	10. Hukum De Morgan (i) ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ (ii) ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

1.4 Hukum-hukum Logika Proposisi

- Digunakan untuk membuktikan:

–Dua proposisi ekivalen

(selain menggunakan tabel kebenaran)

–Suatu proposisi tautologi atau kontradiksi (selain menggunakan tabel kebenaran)

–Membuktikan kesahan suatu argumen

1.4.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

. Hukum De Morgan

(i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

1.4.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum distributif

(i) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

1.4.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum negasi

(i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow T$

(ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

$$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q) \qquad \text{(Hukum negasi)}$$

Contoh penggunaan hukum-hukum logika (1)

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum identitas

(i) $p \vee F \Leftrightarrow p$

(ii) $p \wedge T \Leftrightarrow p$

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh penggunaan hukum-hukum logika (1)

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh penggunaan hukum-hukum logika (2)

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

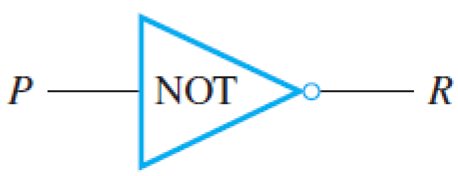
Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q)$	(Hukum identitas)
	$\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q)$	(Hukum distributif)
	$\Leftrightarrow p \vee F$	(Hukum *Null*)
	$\Leftrightarrow p$	(Hukum identitas)

APLIKASI PADA RANGKAIAN LOGIKA DIGITAL

- Ada tiga gerbang rangkaian logika yang dikenal.
- Simbol masing – masing diperlihatkan pada gambar dibawah ini :

NOT

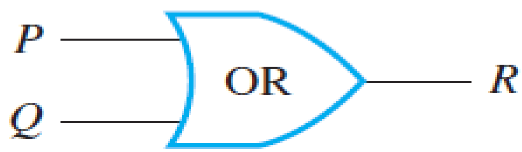


Input	Output
P	*R*
1	0
0	1

AND

Input		Output
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

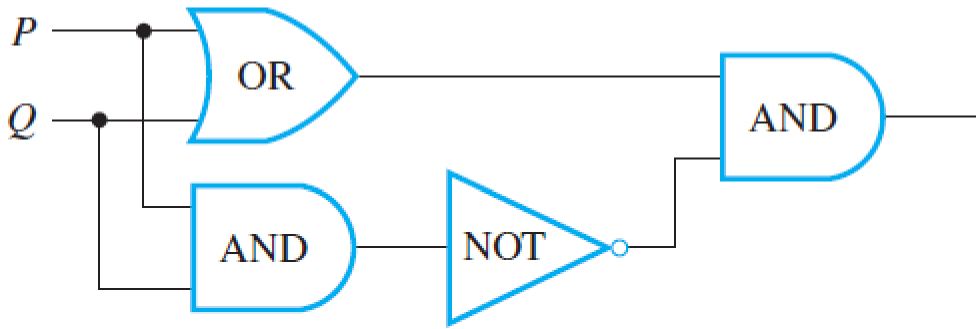
OR



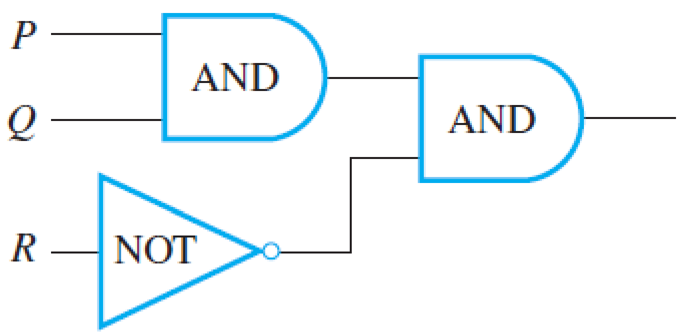
Input		Output
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Contoh

Tentukanlah output dari setiap kombinasi rangkaian berikut .



(a)

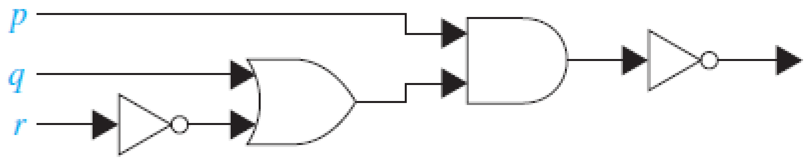


(b)

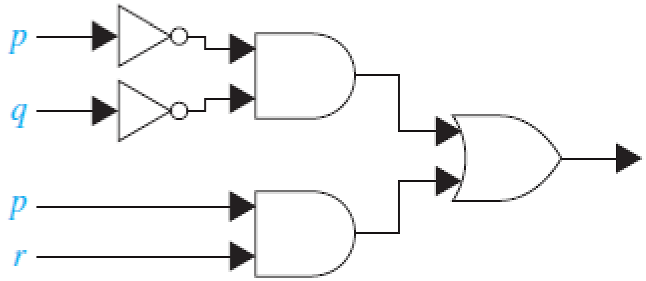
Latihan Soal

4. Tentukanlah output dari setiap kombinasi rangkaian.

a)



b)



5. Buatlah rangkaian kombinasi dari inverter, gerbang OR atau gerbang AND dengan input p, q, r dan outputnya :

$$((\neg p \vee \neg r) \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge (q \vee r))$$

Latihan Soal

1. Diketahui proposisi-proposisi :

p : hari ini hujan

q: hari ini dingin

terjemahkan ekspresi logika (notasi simbolik) berikut :

a. $q \vee \neg p$ b. $\neg p \wedge \neg q$ c. $\neg(\neg p)$

2. Diketahui proposisi-proposisi berikut

p : pemuda itu tinggi

q : pemuda itu tampan

Nyatakan proposisi berikut dalam ekspresi logika (notasi simbolik)

a. Pemuda itu tinggi dan tampan
b. Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
c. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
d. Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan

3.Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan

p: Pelayanan baik

q: Tarif kamarnya murah dan

r : Hotelnya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik :

a. Tarif kamarnya murah, tetapi pelayanannya buruk

b. Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.

c. Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah & pelayanannya buruk.

4. Nyatakan pernyataan berikut " anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah", misalkan :

p: anda berusia di bawah 17 tahun

q: anda sudah menikah

r: anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam pemilu

5. Buatlah Tabel Kebenaran $p \vee \neg q \rightarrow \neg p$

6. Tunjukkan bahwa $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ adalah tautologi

7. Tunjukkan bahwa $p \vee q \rightarrow r$ ekivalen secara logika $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

8. Gunakan hukum logika proposisi, untuk membuktikan bahwa :

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) = p$

Selamat Belajar