



Induksi Matematika

Matematika Diskrit



Outline

- Definisi
- Prinsip Induksi Sederhana
- Prinsip Induksi yang Dirampatkan
- Prinsip Induksi Kuat
- Bentuk Induksi Secara Umum



Definisi

- Induksi matematika adalah :
Metode pembuktian untuk proposisi perihal bilangan bulat
- Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika
- Induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas



Contoh 1

Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $n(n+1)/2$

Bukti :

Misalkan $n = 6 \rightarrow p(6)$ adalah “Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai 6 adalah $6(6+1)/2$ ”
terlihat bahwa :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \rightarrow 6(7)/2 = 21$$

Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**



Contoh 2

Jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .

Bukti

Misalkan $n = 6$ buah ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) maka :

- $n = 1 \rightarrow 1 = 1 \quad \rightarrow (1)^2 = 1$
- $n = 2 \rightarrow 1+3 = 4 \quad \rightarrow (2)^2 = 4$
- $n = 3 \rightarrow 1+3+5 = 9 \quad \rightarrow (3)^2 = 9$
- $n = 4 \rightarrow 1+3+5+7 = 16 \quad \rightarrow (4)^2 = 16$
- $n = 5 \rightarrow 1+3+5+7+9 = 25 \quad \rightarrow (5)^2 = 25$
- $n = 6 \rightarrow 1+3+5+7+9+11 = 36 \rightarrow (6)^2 = 36$

Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**



Contoh Lain

- Setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima
- Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3
- Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar
- Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$
- Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n .



Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bilangan bulat positif dan ingin dibuktikan bahwa $p(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat positif n . Maka langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :
 1. $p(n)$ benar
 2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$
- Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n



Prinsip Induksi Sederhana

- Basis induksi
 - ☞ Digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan benar bila n diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat positif terkecil
 - ☞ Buat implikasi untuk fungsi berikutnya benar untuk setiap bilangan bulat positif
- Langkah induksi
 - ☞ Berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar.
 - ☞ Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi.
- Bila kedua langkah tersebut benar maka pembuktian bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n .



Contoh 3

- Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$,
 $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika



Solusi

i. Basis induksi

$p(1)$ benar $\rightarrow n = 1$ diperoleh dari :

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1+1)/2 \\ &= 1(2)/2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

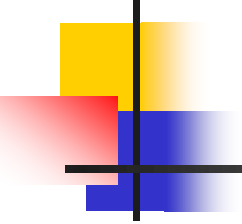
ii. Langkah induksi

Misalkan $p(n)$ benar \rightarrow asumsi bahwa :

$$1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$

Adalah benar (hipotesis induksi). Perhatikan bahwa $p(n+1)$ juga benar yaitu :

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = (n+1)[(n+1)+1]/2$$



$$\begin{aligned}1+2+3+\dots+n+(n+1) &= (1+2+3+\dots+n)+(n+1) \\&= [n(n+1)/2]+(n+1) \\&= [(n^2+n)/2]+(n+1) \\&= [(n^2+n)/2]+[(2n+2)/2] \\&= (n^2+3n+2)/2 \\&= (n+1)(n+2)/2 \\&= (n+1)[(n+1)+1]/2\end{aligned}$$

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n , terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$



Contoh 4

- Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .



Solusi

i. Basis induksi
 $p(1)$ benar \rightarrow jumlah 1 buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$

ii. Langkah induksi

Misalkan $p(n)$ benar \rightarrow asumsi bahwa :

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

Adalah benar (hipotesis induksi)

Perlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :

$$1+3+5+\dots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2n-1)+(2n+1) &= [1+3+5+\dots+(2n-1)]+(2n+1) \\ &= n^2 + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .



Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Prinsip induksi sederhana dapat dirampatkan (*generalized*)
- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikannya perlu menunjukkan bahwa :
 1. $p(n_0)$ benar
 2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$

sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$



Contoh 5

- Untuk semua bilangan bulat tidak negatif n , buktikan dengan induksi matematika bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$



Solusi

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak negatif n , $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

i. Basis induksi

$p(0)$ benar \rightarrow untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama) diperoleh dari :

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 = 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii. Langkah induksi

Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Diasumsikan benar (hipotesis induksi). Perhatikan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$



Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) + 2^{(n+1)} \\ &= 2^{(n+1)} - 1 + 2^{n+1} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak negatif n , terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$



Contoh 6

- Buktikan dengan induksi matematika bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6



Solusi

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6

i. Basis induksi

$$p(7) \text{ benar} \rightarrow 3^7 < 7! \leftrightarrow 2187 < 5040$$

ii. Langkah induksi

Misalkan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $3^n < n!$ adalah benar. Perhatikan juga bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu $3^{n+1} < (n+1)!$

Hal ini dapat ditunjukkan sbb :

$$3^{n+1} < (n+1)!$$

$$3 \cdot 3^n < (n+1) \cdot n!$$

$$3^n \cdot 3 / (n+1) < n!$$

Menurut hipotesis induksi, $3^n < n!$, sedangkan untuk $n > 6$, nilai $3/(n+1) < 1$, sehingga $3/(n+1)$ akan memperkecil nilai di ruas kiri persamaan. Efek nettonya, $3^n \cdot 3/(n+1) < n!$ jelas benar

Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif lebih besar dari 6



Prinsip Induksi Kuat

- Prinsip induksi yang lebih kuat adalah sbb :
 1. $p(n_0)$ benar
 2. Jika $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$
- Versi induksi yang lebih kuat mirip dengan induksi sederhana, perbedaannya adalah pada langkah (ii) :
 - ☞ hipotesis induksi yang lebih kuat
bahwa semua pernyataan $p(1), p(2), \dots, p(n)$ adalah benar
 - ☞ Hipotesis induksi sederhana
bahwa $p(n)$ benar
- Prinsip induksi kuat memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan andaian yang lebih banyak



Contoh 7

- Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Buktikan dengan induksi matematika (prinsip induksi kuat) bahwa setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima



Solusi

- Misalkan $p(n)$ adalah proposisi setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima
- Basis induksi
 $p(2)$ benar \rightarrow 2 sendiri adalah bilangan prima dan 2 dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri
- Langkah induksi
Misalkan $p(n)$ benar, asumsikan bahwa bilangan 2, 3, ..., n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima (hipotesis induksi). Perhatikan juga bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.



Hal ini dapat ditunjukkan sbb :

- Jika $n + 1$ bilangan prima \rightarrow perkalian satu atau lebih bilangan prima
- Jika $n + 1$ bukan bilangan prima \rightarrow terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa

$$(n+1)/a = b \text{ atau } (n+1) = ab$$

dimana $2 \leq a \leq b \leq n$.

Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

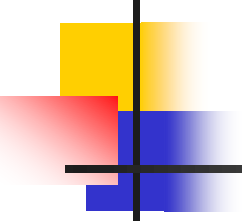
Ini berarti bahwa $n+1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n+1 = ab$

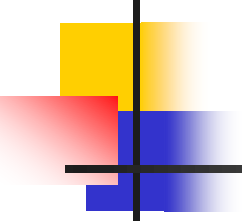
Langkah (i) dan (ii) dibuktikan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima



Bentuk Induksi Secara Umum

- Membuat bentuk umum metode induksi sehingga dapat diterapkan tidak hanya untuk pembuktian proposisi yang menyangkut himpunan bilangan bulat positif tetapi juga pembuktian yang menyangkut himpunan obyek yang lebih umum.
- Syaratnya himpunan obyek tersebut harus mempunyai :
 1. Keterurutan
 2. Elemen terkecil

- 
- Relasi biner " $<$ " pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan " $<$ ") bila memiliki properti berikut :
 - (i) Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$
 - (ii) Diberikan $x, y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar : $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$
 - (iii) Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X , terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil"

- 
- Misalkan X terurut baik oleh " $<$ " dan $p(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X . Pembuktian bahwa $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$. Untuk pembuktiannya hanya perlu menunjukkan bahwa :
 - (i) $p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X
 - (ii) Jika $p(y)$ benar untuk $y < x$, maka $p(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ di dalam X
- Sehingga $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$



Contoh 8

- Tinjau barisan bilangan yang didefinisikan sbb :

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1, n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m, n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

- Sebagai contoh :

$$\begin{aligned} S_{0,0} &= 0 & S_{1,0} &= S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ S_{0,1} &= S_{0,0} + 1 = 1 & S_{1,1} &= S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2 \\ S_{2,0} &= S_{1,0} + 1 = 2 & S_{2,1} &= S_{2,0} + 1 = 2 + 1 = 3, \dots \end{aligned}$$

- Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n , $S_{m,n} = m+n$



Solusi

- Basis induksi

$(0,0)$ elemen terkecil di dalam X , maka $S_{m,n} = 0 + 0 = 0$

- Langkah induksi

Buktikan semua $(m,n) > (0,0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m',n') < (m,n)$ maka $S_{m,n} = m+n$ juga benar.

Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m',n') \rightarrow$ hipotesis induksi

Tunjukkan juga bahwa $S_{m,n} = m + n$ baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus 1 :

Jika $n = 0$ maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$

Karena $(m-1, n) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi

$S_{m-1,n} = (m-1) + n$ sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1) + n + 1 = m + n$



Kasus 2 :

Jika $n \neq 0$ maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$

Karena $(m, n-1) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi

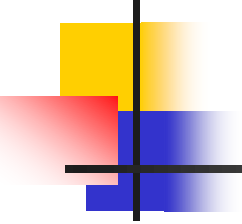
$$S_{m,n-1} = m + (n-1) \text{ sehingga } S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) + 1 = m + n$$

- Langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n , $S_{m,n} = m + n$



Latihan Soal

1. Temukan rumus untuk menghitung $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ dengan memeriksa nilai-nilai ekspresi untuk n yang kecil, lalu gunakan induksi matematik untuk membuktikan rumus tersebut.
2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.
3. Buktikan melalui induksi matematik bahwa $1(2)+2(3)+\dots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$
4. Sebuah kios penukaran uang hanya mempunyai pecahan uang senilai Rp 2.000,- dan Rp. 5.000,- Untuk uang senilai berapa saja yang dapat ditukar dengan kedua pecahan tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik

- 
5. Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebaga berikut :

$$S_{1,1} = 5$$

Untuk semua pasang bilangan bulat positif (m,n) kecuali $(1,1)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2 & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m,n) :

$$S_{m,n} = 2(m+n) + 1$$