Bachelorarbeit

Andreas Windorfer

30. März 2020

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Fazit

3 Dynamische binäre Suchbäume

innerer Knoten
Teilbaum
Höhe Nur eine Wurzel vorhanden, dann Höhe 0
innerer Knoten, auch Wurzel

4 Balancierte Suchbäume

5 Rot-Schwarz-Baum

Der Rot-Schwarz-Baum gehört zu den binären Suchbäumen mit speziellen Invarianten, um balanciert zu bleiben. Zusätzlichen zu den Zeigern *Links*, *Rechts* und *Vater* benötigt jeder Knoten ein zusätzliches Bit Speicherplatz, um die Farbinformation zu speichern. Der Name der Datenstruktur kommt daher, dass die beiden durch das zusätzliche Bit unterschiedenen Zustände als *Rot* und *Schwarz* bezeichnet werden. Die Farbe ist also eine Eigenschaft der Knoten. Zeiger auf Kinder oder Väter die aktuell im Baum nicht vorhanden sind zeigen auf einen schwarzen Sonderknoten. Dieser Sonderknoten wird in dieser Arbeit durch den Schlüsselwert *null* dargestellt. Als *Schwarz-Höhe* $bh(x)$ eines Knotens wird die Anzahl der schwarzen Knoten bis zu einem Blatt bezeichnet. Die eigene Farbe des betrachteten Knotens bleibt bei der Betrachtung außen vor. Aufgrund der Eigenschaft fünf ist die Schwarz-Höhe eines Knotens wohldefiniert. Die Höhe h ist beim Rot-Schwarz-Baum wie bei anderen binären Suchbäumen definiert, berücksichtigt also auch die roten Knoten.
Folgende zusätzliche Eigenschaften müssen bei einem Rot-Schwarz-Baum erfüllt sein.

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. Die Wurzel ist schwarz.
3. Jedes Blatt ist schwarz.
4. Beide Kinder eines roten Knotens sind schwarz.

5. Für jeden Knoten enthalten alle Pfade, die an diesem Knoten starten und in einem Blatt enden, die gleiche Anzahl an schwarzen Knoten.

Der Zweck dieser Einschränkungen ist es die Höhe des Rot-Schwarz-Baumes zu begrenzen, und so die üblichen Operationen effizient ausführen zu können.

Lemma: Höhe des Rot-Schwarz-Baum:
Für einen Rot-Schwarz-Baum mit Höhe h und n inneren Knoten gilt $h \leq 2lg(n+1)$.
Beweis:
Zunächst wird gezeigt, dass ein Teilbaum mit Wurzel x und Schwarzhöhe $bh(x)$ zumindest über $2^{bh(x)} - 1$ innere Knoten verfügt. Dies wird durch Induktion über die Höhe h_x gezeigt. Für $h_x = 0$ besteht x nur aus einem Blatt und enthält keine inneren Knoten. Natürlich gilt in diesem Fall auch $bh(t_1) = 0$.
Induktionsanfang mit $h_x = 0$:
$2^0 - 1 = 0$
Induktionsschritt:
Nun wird ein Teilbaum x_1 mit Höhe $h+1$ betrachtet. Jedes seiner beiden Kinder hat entweder Schwarzhöhe $bh(x)$, wenn es rot ist, oder $bh(x) - 1$, wenn es schwarz ist. Die Höhe beider Kinder ist niedriger als die eigene Höhe von x, somit kann jeweils die Induktionsnahme eingesetzt werden. Jedes Kind hat also mindestens $2^{bh(x_1)-1} - 1$ innere Knoten. Addiert ergibt sich
$2^{bh(x_1)-1} - 1 + 2^{bh(x_1)-1} - 1 = 2^{bh(x_1)} - 2$
Addiert man einen inneren Knoten aufgrund der Wurzel des Teilbaumes hinzu, erhält man die Behauptung.
$2^{bh(x_1)} - 2 + 1 = 2^{bh(x_1)} - 1$
Es gilt also $n \geq 2^{bh(x)} - 1$.
Auf einem Pfad in einem Rot-Schwarz-Baum t von der Wurzel bis zu einem Blatt sind der erste und der letzte Knoten, sowie mindestens jeder zweite innere Knoten schwarz. Es gilt also $bh(t) \geq \frac{h(t)}{2}$. Damit kann man in der Ungleichung $bh(t)$ durch $h(t)$ ersetzen, woraus dann das Lemma folgt.
$n \geq 2^{\frac{h(t)}{2}} - 1 \Rightarrow n+1 \geq 2^{\frac{h(t)}{2}} \Rightarrow \lg(n+1) \geq \frac{h(t)}{2} \Rightarrow 2lg(n+1) \geq h(t)$

Literatur