

Bachelorarbeit

Andreas Windorfer

2. Mai 2020

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1	Fazit	4
1.1	Rot-Schwarz-Baum	4
1.1.1	Suchen im Rot-Schwarz-Baum	5
1.1.2	Einfügen in den Rot-Schwarz-Baum	6
1.1.3	Löschen aus dem Rot-Schwarz-Baum	11
1.1.4	Suchen im Rot-Schwarz-Baum	11

1 Fazit

1.1 Rot-Schwarz-Baum

Der Rot-Schwarz-Baum gehört zur Gruppe der **balancierten BST** und erfüllt alle Eigenschaften um ihn als Hilfsstruktur im Tango-Baum zu verwenden. Bei balancierten BST gilt für die Höhe $h = O(n)$, mit n = Anzahl der Knoten. Jeder Knoten benötigt ein zusätzliches Attribut, um eine Farbinformation zu speichern. Der Name der Datenstruktur kommt daher, dass die beiden durch das zusätzliche Attribut unterschiedenen Zustände als *Rot* und *Schwarz* bezeichnet werden. Die Farbe ist also eine Eigenschaft der Knoten und im folgenden wird einfach von roten bzw. schwarzen Knoten gesprochen. Innerhalb mancher Operationen wird von einem Knoten aus direkt auf dessen Vater zugegriffen, so dass man sich im Baum auch nach oben hin bewegen kann. In Implementierungen wird das so umgesetzt, dass es zusätzlich zu den beiden Zeigern auf die Kinder noch einen zum Vater gibt. Als Blätter werden schwarze Sonderknoten verwendet, deren Schlüssel auf *null* gesetzt wird, um sie eindeutig erkennen zu können. Fehlende Kinder von Knoten mit gewöhnlichem Schlüssel werden durch solche Blätter ersetzt. Folgende zusätzliche Eigenschaften müssen bei einem Rot-Schwarz-Baum erfüllt sein.

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. Die Wurzel ist schwarz.
3. Jedes Blatt (Sonderknoten) ist schwarz.
4. Beide Kinder eines roten Knotens sind schwarz.
5. Für jeden Knoten gilt, dass alle Pfade, die an ihm starten und an einem Blatt (Sonderknoten) enden, die gleiche Anzahl an schwarzen Knoten enthalten.

Sei (v_0, v_1, \dots, v_n) ein Pfad von einem Knoten v_0 zu einem Blatt v_n . Die Anzahl der schwarzen Knoten innerhalb (v_1, \dots, v_n) wird als **Schwarz-Höhe** $bh(x)$ von Knoten v_0 bezeichnet. Die eigene Farbe des betrachteten Knotens bleibt dabei also außen vor. Dadurch hat ein Knoten die gleiche Schwarz-Höhe wie ein rotes Kind und eine um eins erhöhte Schwarz-Höhe gegenüber einem schwarzen Kind. Die Schwarz-Höhe eines Knoten x ist genau dann eindeutig wenn er Eigenschaft 5 nicht verletzt. Hält x Eigenschaft 5 ein, so gilt $bh(x) = i$ wenn x rot ist und $bh(x) = i - 1$ wenn x schwarz ist. Ist $bh(x)$ eindeutig, so enthält jeder Pfad der mit x startet und an einem Blatt endet

$bh(x) + 1$ schwarze Knoten, wenn x schwarz ist und $bh(x)$ wenn x rot ist. Im folgenden wird **RBT** (Red-Black-Tree) als Abkürzung für Rot-Schwarz-Baum verwendet.

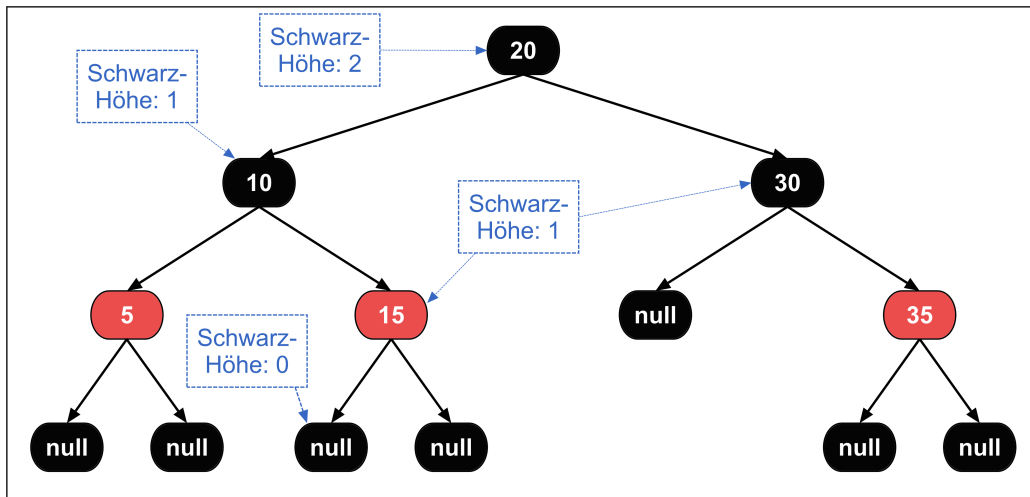


Abbildung 1: Rot-Schwarz-Baum ohne Verletzung von Eigenschaften.

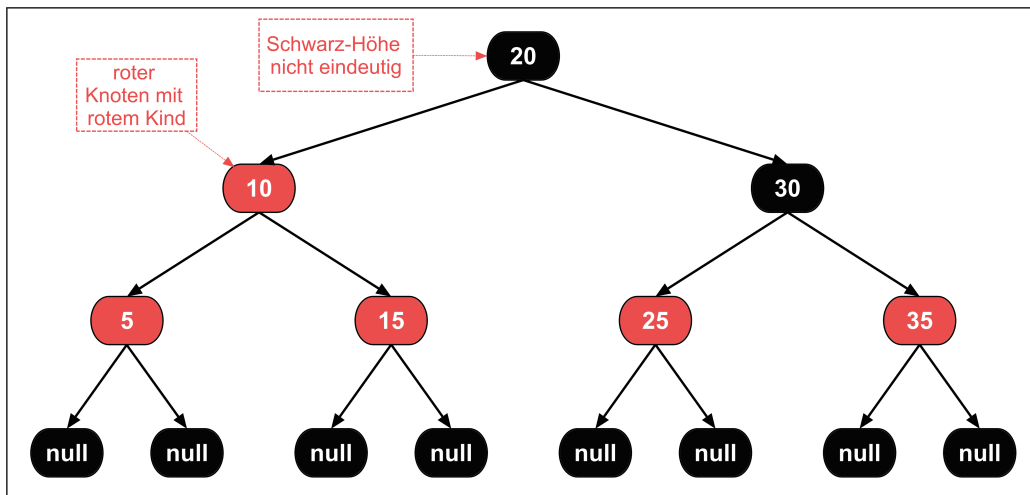


Abbildung 2: Rot-Schwarz-Baum bei dem Eigenschaft vier und fünf verletzt sind.

1.1.1 Suchen im Rot-Schwarz-Baum

Die Suche unterscheidet sich nur in einem Punkt von der in ?? vorgestellten. Wird nach einem Schlüssel gesucht, der im RBT nicht vorhanden ist, so wird

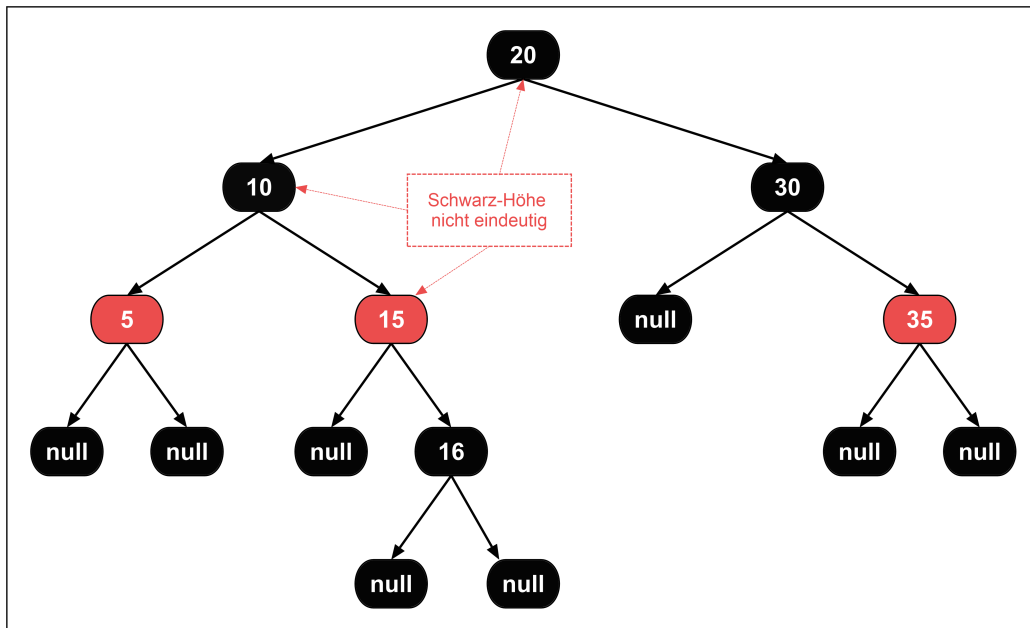


Abbildung 3: Rot-Schwarz-Baum bei dem Eigenschaft fünf verletzt ist.

einer der Sonderknoten erreicht. In diesem Fall wird die Suche abgebrochen ohne einen Knoten zurückzugeben. Die Operation verändert den RBT nicht.

1.1.2 Einfügen in den Rot-Schwarz-Baum

Zusätzlich werden dann noch die Zeiger *links* und *rechts* auf den schwarzen Sonderknoten gesetzt. Die Farbe neu eingefügter Knoten ist rot. Durch den neu eingefügten Knoten können Korrekturen notwendig werden, um die Rot-Schwarz-Baum Eigenschaften zu erhalten. Zunächst betrachten wir der Reihe nach welche der fünf Eigenschaften betroffen sein können. Es wird davon ausgegangen, dass in einen Rot-Schwarz-Baum ohne Verletzung von Eigenschaften eingefügt wurde.

1. Es ist immer noch jeder Knoten entweder rot oder schwarz.
2. Wurde in den leeren Baum eingefügt, so ist der neu eingefügte rote Knoten die Wurzel, was eine Verletzung darstellt. Waren bereits Knoten im Baum vorhanden bleibt die Wurzel unverändert.
3. Aufgrund des Sonderknotens sind die Blätter immer noch schwarz.

4. Der Baum wird nur direkt an der Einfügestelle verändert. Der neue Knoten hat schwarze Nachfolger, er könnte jedoch einen roten Vorgänger haben, so dass diese Eigenschaft verletzt wäre.
5. Da der neue Knoten rot ist, ändern sich keine Schwarz-Höhen von bereits enthaltenen Knoten. Die Schwarz-Höhe des neuen Knoten ist immer 1, denn beide Nachfolger verweisen auf den schwarzen Sonderknoten. Eigenschaft fünf bleibt also erhalten.

Es können also die Eigenschaften zwei und vier betroffen sein. Jedoch nur eine von ihnen, denn Eigenschaft zwei wird genau dann verletzt wenn der neue Knoten der Einzige im Baum ist. Dann kann er aber keinen roten Vorgänger haben.

Zur Korrektur wird eine zusätzliche Routine eingesetzt. Diese Routine arbeitet sich von der Einfügestelle solange nach oben in einer Schleife durch, bis alle Eigenschaften wieder erfüllt sind. Die Schleifenbedingung ist, dass eine Verletzung vorliegt. Dazu muss geprüft werden ob der betrachtete Knoten die rote Wurzel des Gesamtbaumes ist, oder ob er und sein Vorgänger beide rot sind. Beim ersten Durchlauf wird der neu eingefügte Knoten übergeben. Innerhalb der Schleife werden sechs Fälle unterschieden. Im folgenden wird auf vier Fälle detailliert eingegangen. Die restlichen zwei verhalten sich symmetrisch zu einem solchen. Jeder der Fälle verantwortet, dass zum Start der nächsten Iteration wieder nur maximal eine der beiden Eigenschaften zwei oder vier verletzt sein kann und Eigenschaft vier lediglich an einer Stelle verletzt wird. Eigenschaft eins bleibt in der Beschreibung außen vor, da es während der gesamten Laufzeit der Routine nur Knoten gibt, die entweder rot oder schwarz sind.

Fall 1: Die Wurzel ist rot: Dieser Fall wird behandelt in dem man die Wurzel schwarz färbt. Man muss noch zeigen, dass es durch das Umfärben zu keiner anderen Verletzung gekommen ist.

Betrachtung der Eigenschaften:

1. -
2. Die Wurzel wurde schwarz gefärbt.
3. Die Blätter sind unverändert.
4. Es wurden weder rote Knoten hinzugefügt, noch wurden Zeiger umgesetzt.

5. Da Umfärben der Wurzel kann hierauf keinen Einfluss haben, da sie in der Berechnung der Schwarz-Höhe jedes Knotens außen vor ist.

Es wird also keine Eigenschaft mehr verletzt und die Schleife wird keine weitere Iteration durchführen.

Die Fälle 2 - 6 behandeln nun die Situation zweier aufeinanderfolgender roter Knoten. Der untere rote Knoten wird als x bezeichnet, der obere als y . Da Eigenschaft fünf nach jeder Iteration erfüllt ist muss y einen Bruder haben. Denn da y rot ist und Fall 1 nicht ausgewählt wurde, kann es nicht die Wurzel sein. Also muss auch y einen Vorgänger z haben. Von z aus starten über y mindestens zwei Pfade zu schwarzen Blättern. Hätte z nicht auch einen rechten Nachfolger, wäre bereits vor der Iteration Eigenschaft fünf verletzt gewesen. Wenn sich auf die Situation nach der Fallbehandlung bezogen wird, wird den Variablen ein Hochstrich hinzugefügt. Wurde beispielsweise Knoten y von rot nach schwarz gefärbt, so ist y rot und y' schwarz.

Fall 2: Der Bruder von y ist rot: Diesen Fall veranschaulicht Abbildung 4. Da y rot ist, muss z nach Eigenschaft schwarz sein, ansonsten wäre Eigenschaft vier mehrfach verletzt gewesen. Nun wird z rot gefärbt und beide Nachfolger von z , also y und dessen Bruder, schwarz. Somit hat x nun einen schwarzen Vorgänger und die Verletzung der Eigenschaft vier wurde an dieser Stelle behoben. Wie sieht es aber mit den Verletzungen insgesamt aus ?

Betrachtung der Eigenschaften:

1. -
2. Wenn z die Wurzel des Baumes ist, wurde sie rot gefärbt und eine Verletzung liegt vor.
3. Der rot umgefärbte Knoten z' hat zwei Nachfolger, somit wurde kein Blatt rot gefärbt.
4. Wenn der rot gefärbte Knoten z nicht die Wurzel ist, könnte er einen roten Vorgänger haben und Eigenschaft vier ist weiterhin Verletzt, das Problem liegt nun aber zwei Baumebenen höher.
5. Die Schwarz-Höhen der Pfade mit z' als inneren Knoten ändern sich nicht, da sie auch genau eines der schwarz umgefärbten Nachfolger von z' enthalten müssen. Die Schwarz-Höhen der Pfade mit z' als Startknoten werden um eins verringert. Dies gilt jedoch für jeden von ihnen, so dass Eigenschaft fünf weiterhin nicht verletzt wird.

Es kann also wieder nur entweder Eigenschaft zwei oder vier verletzt sein. Wenn die Problemstelle noch nicht an der Wurzel ist, so ist sie zumindest um zwei Ebenen nach oben gewandert.

Fall 3: y ist ein linker Nachfolger und sein Bruder ist schwarz. x ist linker Nachfolger:

Abbildung 5 zeigt eine entsprechende Situation. Da in dieser Situation, die Wurzel schwarz sein muss, gibt es den Vorgänger z von y . Da es nur eine Stelle im Baum geben kann an der Eigenschaft vier verletzt wird, muss z schwarz sein. Es wird nun eine Rechtsrotation auf z ausgeführt. Anschließend wird z rot gefärbt und y schwarz.

Betrachtung der Eigenschaften:

Dazu werden vier weitere Variablen auf Knoten verwendet. Es zeigt xl den linken Nachfolger von x , xr entsprechend den rechten Nachfolger. yl und yr bezeichnen die rechten Nachfolger von y bzw. z . Nachfolgend wird verwendet, dass die Teilbäume xl , xr , yl und yr durch die Ausführung unverändert bleiben.

1. -
2. Wenn z zu Beginn nicht die Wurzel des Gesamtbaumes war, blieb diese unbearbeitet. Ansonsten wurde durch die Rotation y' zur neuen Wurzel und y' wurde schwarz gefärbt.
3. Alle vier Plätze in der zweiten Ebene unter z werden von den unveränderten Teilbäumen xl , xr , yl oder yr besetzt. An den Blättern verändert sich also durch die Ausführung nichts.
4. Knoten x' ist jetzt direkter linker Nachfolger der neuen schwarzen Wurzel y' des Teilbaumes. An den nachfolgenden Teilbäumen von x' hat sich nichts geändert. Die linke Seite des neu entstandenen Baumes enthält also keine aufeinanderfolgenden roten Knoten. Der rechte Nachfolger von y' ist der rote z' . Rechts an z' hängt nun ein unveränderter Teilbaum, dessen Wurzel zuvor Bruder von y war. Dieser ist nach Fallunterscheidung ein schwarzer Knoten. Links hängt ebenfalls ein unveränderter Teilbaum, dessen Wurzel zuvor rechter Nachfolger von y war. Der rechte Nachfolger von y muss schwarz sein, ansonsten wäre Eigenschaft vier an zwei Stellen verletzt gewesen. Im Teilbaum mit Wurzel y gibt es also keine aufeinanderfolgenden roten Knoten. Da y schwarz gefärbt wurde kann auch nach oben keine neue Verletzung entstanden sein.

5. Es gilt $bh(xl) = bh(xr) = bh(yr) = bh(zr) = bh(z) - 1$. Wie oben bereits erwähnt wird die zweite Ebene unter der Wurzel von den Knoten xl' , xr' , yr' und zr' gebildet. Es müssen also lediglich die Knoten x' , y' und z' betrachtet werden. An x' und an z' folgen schwarze Knoten mit der Schwarz-Höhe $bh(z) - 1$. Die Schwarz-Höhen von x' und z' ist also wohldefiniert und es gilt $mathit{bh}(x') = bh(z') = bh(z)$. y' Nachfolger sind die roten Knoten x' und z' . Da die beide Nachfolger rot sind gilt $bh(y') = mathit{bh}(x') = bh(z')$. Somit sind alle Schwarz-Höhen im betrachteten Teilbaum in Ordnung. Die neue Wurzel der Teilbaumes y' hat die gleiche Schwarz-Höhe und die gleiche Farbe wie die vorherige Wurzel z . Damit kann es auch im Gesamtbaum zu keiner Verletzung der Eigenschaft gekommen sein.

Es ist keine der Eigenschaften verletzt, daher wird es zu keiner Iteration mehr kommen.

Fall 4: y ist ein linker Nachfolger und sein Bruder ist schwarz. x ist rechter Nachfolger:

Dieser in Abbildung 6 gezeigte Fall wird so umgeformt, dass eine Situation entsteht bei der Fall drei angewendet werden kann. Dazu wird eine Linksrotation an Knoten y durchgeführt.

Betrachtung der Eigenschaften:

Veränderungen gab es durch die Rotation lediglich im linken Teilbaum von z . Es seien xl und xr die linken schwarzen Nachfolgeknöten von x . yl ist der linke Nachfolger von y . xl , xr und yl müssen schwarz sein, ansonsten wäre Eigenschaft vier mehrfach verletzt gewesen.

1. -
2. Die Wurzel ist an der Ausführung nur beteiligt wenn z' auf sie zeigt. z' ist schwarz.
3. Die Teilbäume xl , xr und yr enthalten alle Blätter innerhalb des linken Teilbaumes von z . Außerdem bleiben die Teilbäume xl , xr und yr durch die Rotation unverändert und sie enthalten auch alle Blätter des linken Teilbaumes von z' .
4. Da x und y rot sind müssen z , xl und xr schwarz sein. Durch die Rotation ist y' linker Nachfolger von x' . x' ist Nachfolger vom schwarzen z' . Alle verbleibenden Nachfolger von x' und y' werden durch die unveränderten Teilbäume xl' , xr' und yr' gebildet. Deren Wurzeln müssen schwarz sein, ansonsten hätte es in ursprünglichen Baum an mehr als

einer Stelle eine Verletzung von Eigenschaft vier gegeben. Durch die Rotation verbleibt es also bei einer Verletzung der Eigenschaft vier in der gleichen Bauebene. Die beiden beteiligten roten Knoten sind nun aber linke Nachfolger.

5. Sei b die Schwarz-Höhe von yl . Es gilt $b = bh(yl) = bh(xl) = bh(xr)$. Nun wird der linke Teilbaum von z' von unten nach oben betrachtet. Die Nachfolger von y' sind yl und xl . Es muss gelten $\text{`}bh(y')_1 = b+1$. x' hat den roten y' als Nachfolger und den schwarzen xr , es gilt also $\text{`}bh(x')_1 = b+1$. Die Schwarz-Höhe von y ist $b+1$. Damit gilt $\text{`}bh(y)_1 = \text{`}bh(x')_1$ und y und x' haben die gleiche Farbe, damit gilt $\text{`}bh(z)_1 = \text{`}bh(z')_1$.

Es sind also weiterhin zwei rote aufeinanderfolgende rote Knoten in den gleichen Bauebenen vorhanden. Diese sind nun aber beides linke Knoten. Der Bruder des oberen roten Knotens ist der selbe schwarze Knoten wie vor der Ausführung von Fall 4. Damit kann direkt mit dem Bearbeiten von Fall 3 begonnen werden.

Fall 5: y ist ein rechter Nachfolger und sein Bruder ist schwarz. x ist rechter Nachfolger:

Symmetrisch zu Fall 3 noch ausführen **Fall 6: y ist ein rechter Nachfolger und sein Bruder ist schwarz. x ist linker Nachfolger:**

Symmetrisch zu Fall 4 noch ausführen

1.1.3 Löschen aus dem Rot-Schwarz-Baum

1.1.4 Suchen im Rot-Schwarz-Baum

Lemma: Maximale Höhe des Rot-Schwarz-Baum:

Für einen Rot-Schwarz-Baum mit Höhe h und n inneren Knoten gilt $h \leq 2\lg(n+1)$.

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, dass ein Teilbaum t_1 mit Wurzel x_1 und Schwarzhöhe $bh(x_1)$ zumindest über $2^{bh(x_1)} - 1$ innere Knoten verfügt, also $n \geq 2^{bh(x_1)} - 1$. Dies wird durch Induktion über die Höhe h_{x_1} gezeigt. Für $h_{x_1} = 0$ besteht t_1 nur aus einem Blatt und enthält keine inneren Knoten. Natürlich gilt in diesem Fall auch $bh(t_1) = 0$.

Induktionsanfang mit $h_{x_1} = 0$:

$$2^0 - 1 = 0$$

Induktionsschritt:

Nun wird ein Teilbaum T_2 mit Wurzel x_2 mit Höhe $h+1$ betrachtet. Jedes seiner beiden Nachfolger hat entweder Schwarzhöhe $bh(x_2)$, wenn es rot ist,

oder $bh(x_2) - 1$, wenn es schwarz ist. Die Höhe beider Nachfolger ist niedriger als die eigene Höhe von x_2 . Somit kann bei beiden Nachfolgern jeweils die Induktionsnahme für die Mindestanzahl der inneren Knoten eingesetzt werden.

$$2^{bh(x_1)-1} - 1 + 2^{bh(x_1)-1} - 1 = 2^{bh(x_1)} - 2$$

Addiert man einen inneren Knoten aufgrund der Wurzel x_2 hinzu, erhält man die Behauptung.

$$2^{bh(x_1)} - 2 + 1 = 2^{bh(x_1)} - 1.$$

Es gilt also $n \geq 2^{bh(x)} - 1$.

Auf einem Pfad in einem Rot-Schwarz-Baum t_3 von der Wurzel bis zu einem Blatt sind der erste und der letzte Knoten, sowie mindestens jeder zweite der weiteren Knoten schwarz. Es gilt also $bh(t_3) \geq \frac{h(t_3)}{2}$. Damit kann man in der Ungleichung $bh(t_3)$ durch $h(t_3)$ ersetzen, woraus dann das Lemma folgt.

$$n \geq 2^{\frac{h(t_3)}{2}} - 1 \Rightarrow n + 1 \geq 2^{\frac{h(t_3)}{2}} \Rightarrow \lg(n + 1) \geq \frac{h(t_3)}{2} \Rightarrow 2\lg(n + 1) \geq h(t_3)$$

Literatur

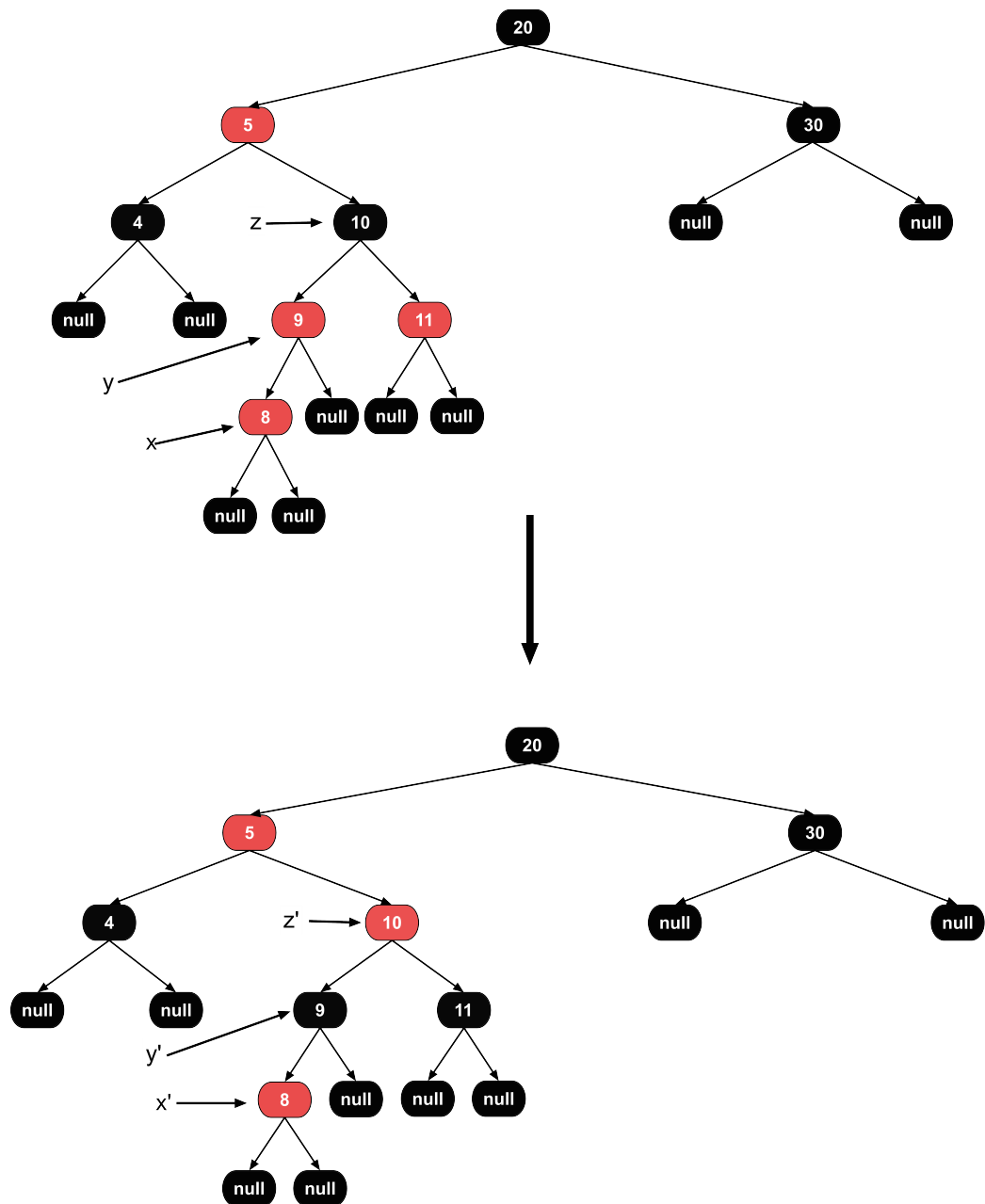


Abbildung 4: Korrektur nach dem Einfügen. Dargestellt ist Fall 2

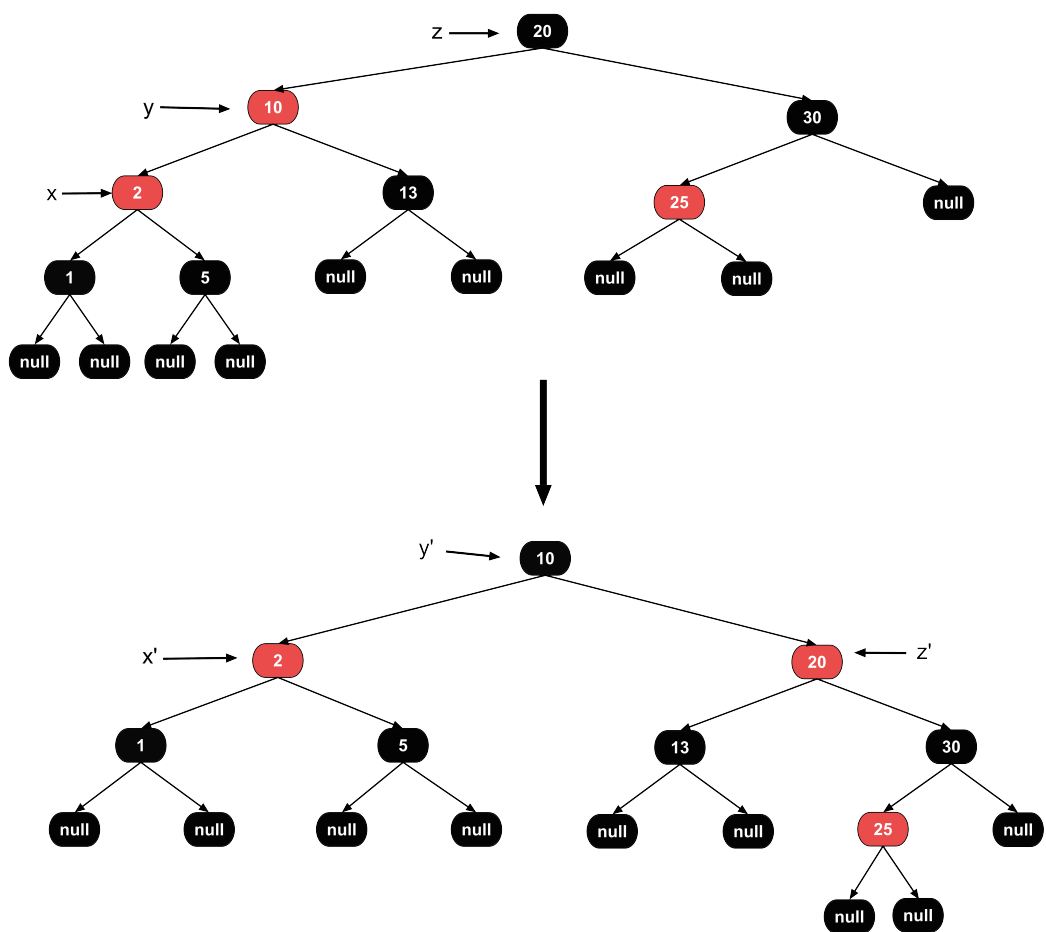


Abbildung 5: Korrektur nach dem Einfügen. Dargestellt ist Fall 3

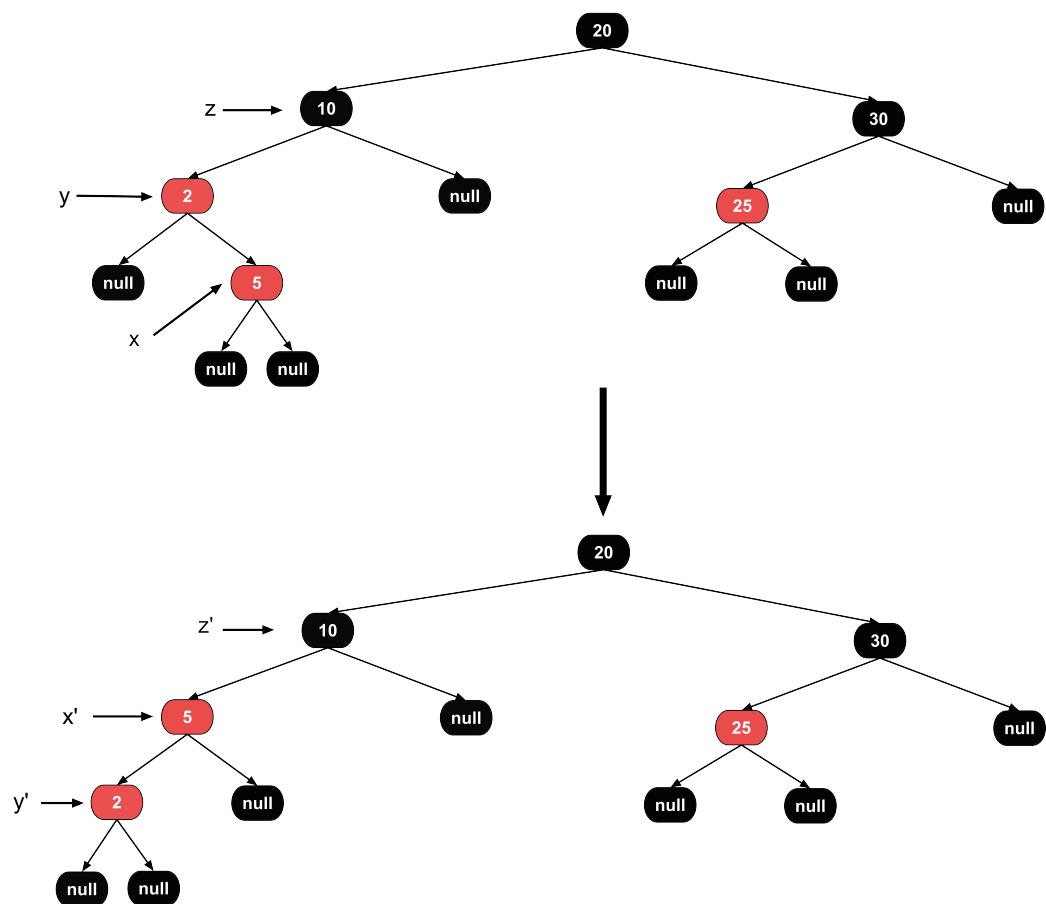


Abbildung 6: Korrektur nach dem Einfügen. Dargestellt ist Fall 4