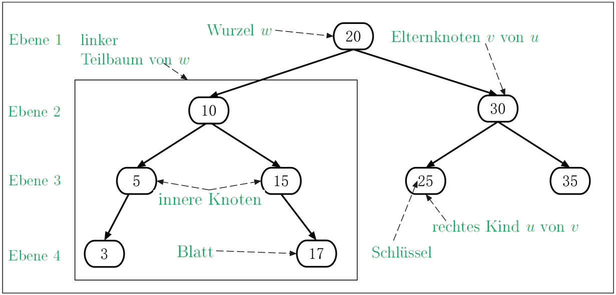
Tango Bäume

Andreas Windorfer

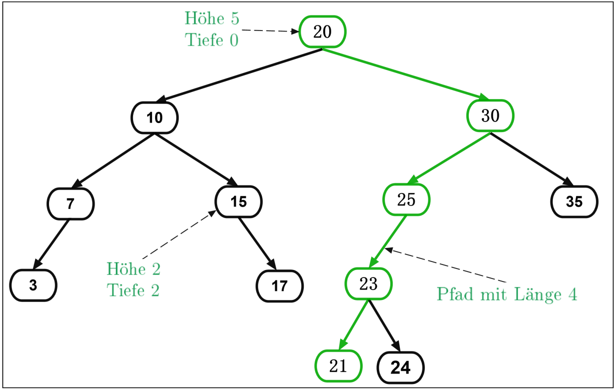
24. Oktober 2020

Übersicht

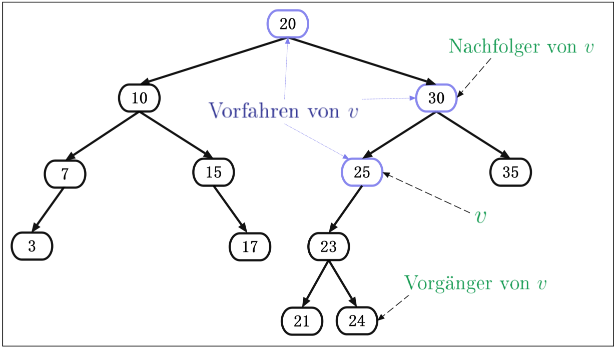
Binärer Suchbaum



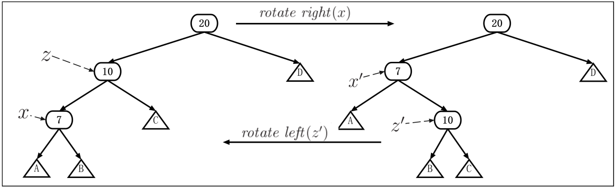
Binärer Suchbaum



Binärer Suchbaum



Binärer Suchbaum



Übersicht

Binärer Suchbaum

Dynamische Optimalität

Tango Baum

access(k) Operation

Parameter / Rückgabe

- Parameter k: Schlüssel im BST (Schlüsselmenge K)
- Rückgabe: Knoten mit Schlüssel k

$access(k)$ Operation

Einschränkungen

Ein Zeiger p (berührter Knoten) in die Struktur:

- Setze p auf ein Kind von p
- Setze p auf den Elternknoten von p
- Rotationen

access(k) Operation

Einschränkungen

Ein Zeiger p (berührter Knoten) in die Struktur:

- Setze p auf ein Kind von p
- Setze p auf den Elternknoten von p
- Rotationen

Berechnung der Kosten

Einheitskosten von „1“.

Zugriffsfolgen

Zugriffsfolgen

- $X = x_1, x_2, ..., x_m$, mit $\forall i \in \{1, 2, .., m\} : x_i \in K$
- $access(x_1)$, $access(x_2)$, ..., $access(x_m)$

Zugriffsfolgen

Zugriffsfolgen

- $X = x_1, x_2, ..., x_m$, mit $\forall i \in \{1, 2, .., m\} : x_i \in K$
- $access(x_1)$, $access(x_2)$, ..., $access(x_m)$

dynamische BST

- Anpassung der Struktur

Kostenrechnung

$Anzahl\ der\ Einzelschritte + m$

dynamisch Optimal

$OPT(X)$

Niedrigste Kosten zum Ausführen von X

dynamisch Optimal

$OPT(X)$

Niedrigste Kosten zum Ausführen von X

dynamisch Optimal

BST mit Kosten von $O(OPT(X))$, für beliebige X

c-competitive

BST mit Kosten von $O(c \cdot OPT(X))$, für beliebige X

Tango Baum

Eigenschaten

- Aus BSTs bestehender BST
- $\log(\log(n))$-competitive

Literatur

Erik D. Demaine, Dion. Harmon, John. Iacono, and Mihai. Patrascu. Dynamic optimality-almost. SIAM Journal on Computing, 37(1):240 251, 2007.

Interleave Lower Bound

Motivation

- Berechnung einer unteren Schranke zu $OPT(X)$
- Beweis der $\log(\log(n))$-competitiveness

Lower Bound Tree

Definition

Zu $X = x_1, x_2, ., x_m$ und $K = \{k \in \mathbb{N} | k\ ist\ in\ X\ enthalten\}$

Lower Bound Tree

Definition

Zu $X = x_1, x_2, ., x_m$ und $K = \{k \in \mathbb{N} | k \textit{ ist in } X \textit{ enthalten}\}$ ist der komplette BST P mit der Schlüsselmenge K der LBT.

Beispiel LBT

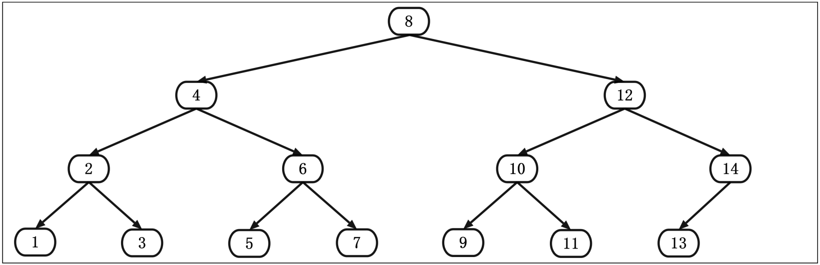


Abbildung: Der Lower Bound Tree zur Zugriffsfolge $1, 2, .., 14$.

Lower Bound Tree

Linke Region eines Kontens v

Schlüssel des linken Teilbaumes von v und $key(v)$

Linke Region eines Kontens v

Schlüssel des rechten Teilbaumes von v

Interleave durch v

x_{i-1} liegt in der linken Region und x_i in der rechten, oder umgekehrt.

Lower Bound Tree

inScore (X, v)

Anzahl der Interleaves durch v

$IB(X)$

$IB(X) = \sum_{u \in U} inScore(X, u)$

Transition Points

T_0 Startzustand, T_i nach ausführen von *access* x_i.

Transition Points

T_0 Startzustand, T_i nach ausführen von *access* x_i. $j \in 0, 1, ..m$

Zu jedem Knoten u aus P, mit nicht leerer rechter Region, existiert ein transition point in T_j

Transition Points

Sei v der Transition Point zu u und T_j

1. Im Pfad von der Wurzel zu v ist ein Knoten mit einem Schlüssel aus der linken Region von u enthalten.
2. Im Pfad von der Wurzel zu v ist ein Knoten mit einem Schlüssel aus der rechten Region von u enthalten.
3. Kein anderer Knoten mit kleinerer Tiefe erfüllt die Eigenschaften eins und zwei.

Transition Points

Sei U die Menge der Knoten in P mit einer nicht leeren rechten Region.

- Lemma 1: Es gibt zu jedem Knoten $u \in U$ genau einen transition point in T_j.
- Lemma 2: Wird ein transition point nicht berührt, so ist er noch immer der transition point des selben Knotens.
- Lemma 3: Ein Knoten kann nicht der transition point mehrerer Knoten sein.

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region

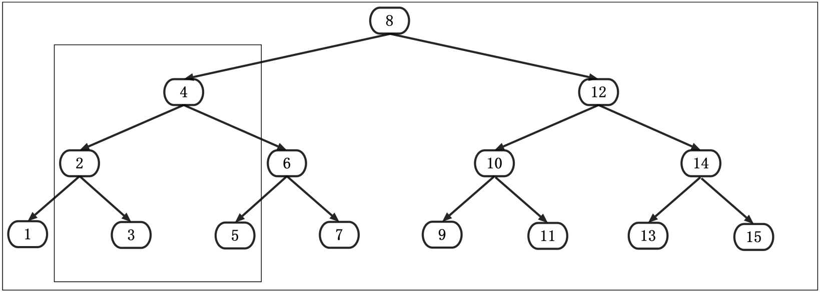
Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$

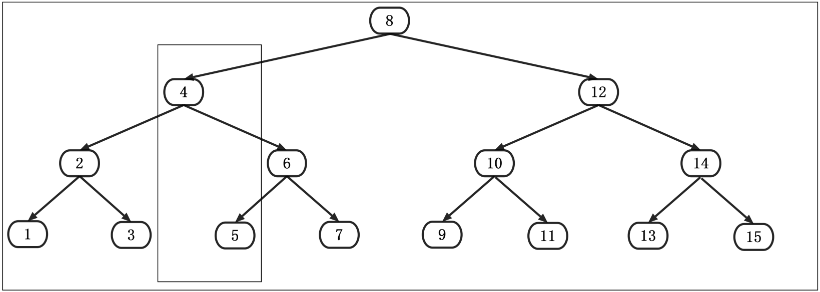
Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$
4. v_l ist der Vorfahre der Schlüssel der linken Region
5. v_r ist der Vorfahre der Schlüssel der rechten Region
6. w ist der gemeinsame Vorfahre dieser Schlüssel

Beweis Lemma 1



Beweis Lemma 1



Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$
4. v_l ist der Vorfahre der Schlüssel der linken Region
5. v_r ist der Vorfahre der Schlüssel der rechten Region
6. w ist der gemeinsame Vorfahre dieser Schlüssel
7. $w = v_l$ bzw. $w = v_r$
8. Transition point ist v_r bzw. v_l

Transition Point Zuordnung

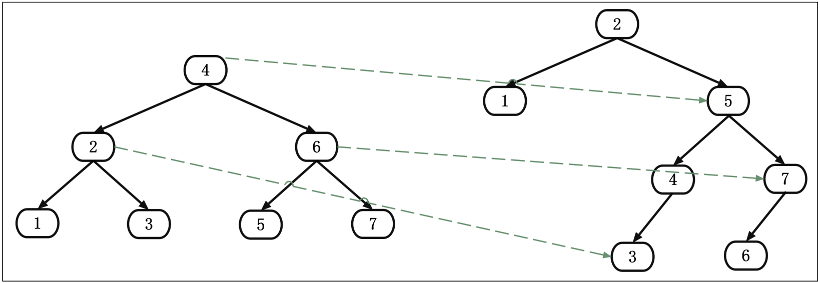


Abbildung: Links ein Lower Bound Tree, rechts ein BST

Satz Interleave Lower Bound

Sei $X = x_0, x_1, .., x_m$ eine Zugriffsfolge und n die Anzahl der Knoten im zu X erstellten Lower Bound Tree Y. Dann gilt $OPT\left(X\right) \geq IB\left(X\right)/2 - n$.

Beweis Interleave Lower Bound

1. Zählen der Berührungen von Transition Points
2. Die Anzahl der Berührungen kann für jeden Knoten einzeln bestimmt werden. (Lemma 5.1 und 5.3)

Beweis Interleave Lower Bound

1. Zählen der Berührungen von Transition Points
2. Die Anzahl der Berührungen kann für jeden Knoten einzeln bestimmt werden. (Lemma 5.1 und 5.3)
3. Betrachteter Knoten u. $X_l^{r\prime} = x_{i_0}, x_{i_1}, .., x_{i_p}$ bilden
4. $inScore\,(X, u) = p$

Beweis Interleave Lower Bound

1. Zählen der Berührungen von Transition Points
2. Die Anzahl der Berührungen kann für jeden Knoten einzeln bestimmt werden. (Lemma 5.1 und 5.3)
3. Betrachteter Knoten u. $X_l^{r\prime} = x_{i_0}, x_{i_1}, .., x_{i_p}$ bilden
4. $inScore\,(X, u) = p$
5. Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq \lfloor p/2 \rfloor$

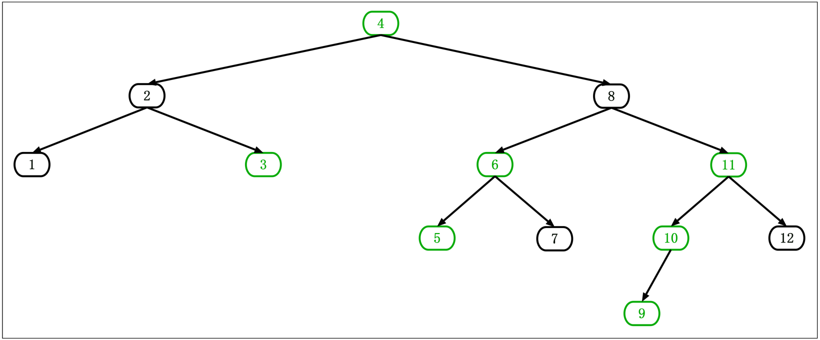
Beweis Interleave Lower Bound

1. Zählen der Berührungen von Transition Points
2. Die Anzahl der Berührungen kann für jeden Knoten einzeln bestimmt werden. (Lemma 5.1 und 5.3)
3. Betrachteter Knoten u. $X_l^{r\prime} = x_{i_0}, x_{i_1}, .., x_{i_p}$ bilden
4. $inScore(X, u) = p$
5. Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq \lfloor p/2 \rfloor$
6. Es folgen mindestens $\lfloor p/2 \rfloor \geq p/2 - 1$ Berührungen des transition points von u

Beweis Interleave Lower Bound

1. Zählen der Berührungen von Transition Points
2. Die Anzahl der Berührungen kann für jeden Knoten einzeln bestimmt werden. (Lemma 5.1 und 5.3)
3. Betrachteter Knoten u. $X_l^{r\prime} = x_{i_0}, x_{i_1}, .., x_{i_p}$ bilden
4. $inScore\,(X, u) = p$
5. Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq \lfloor p/2 \rfloor$
6. Es folgen mindestens $\lfloor p/2 \rfloor \geq p/2 - 1$ Berührungen des transition points von u
7. $IB\,(X)\,/2 - |U| \geq IB\,(X)\,/2 - n$

Aufbau des Tango Baumes

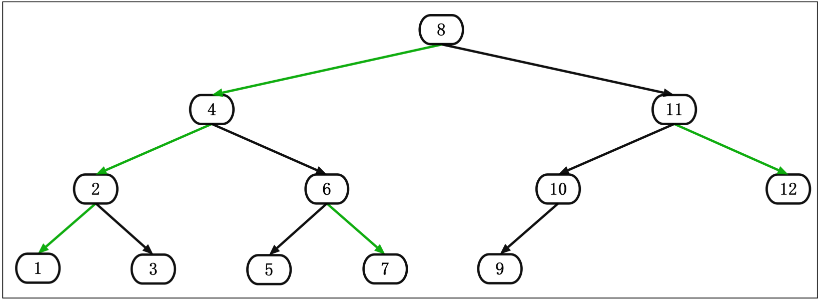


Erweiterte Knoten:

1. *depth*
2. *minDepth*
3. *maxDepth*

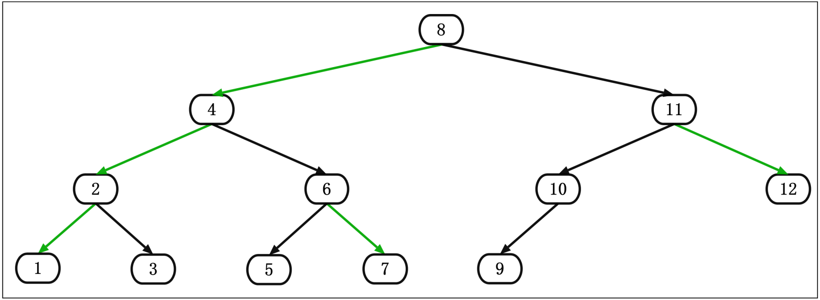
Aufbau des Tango Baumes

- preferred childs



Aufbau des Tango Baumes

- preferred childs

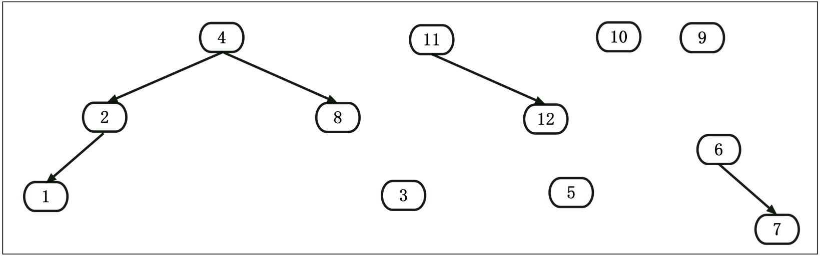


- preferred paths

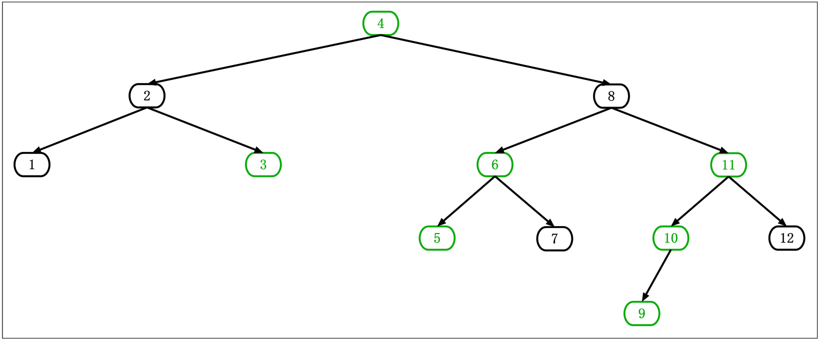
$$P_1 = (8, 4, 2, 1)$$
$$P_2 = (3)$$
$$P_3 = (6, 7)$$

Aufbau des Tango Baumes

- Hilfsbäume

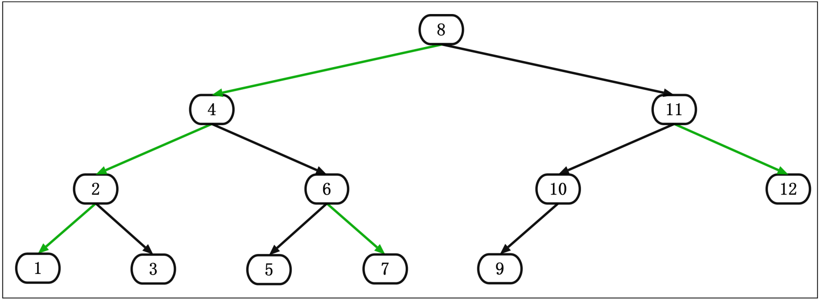


Aufbau des Tango Baumes



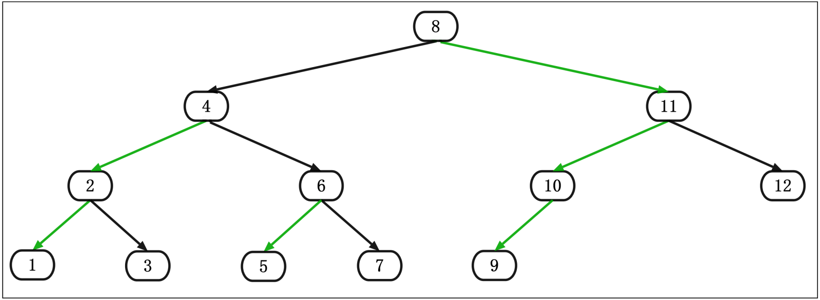
Aufbau des Tango Baumes

- *access*(9)



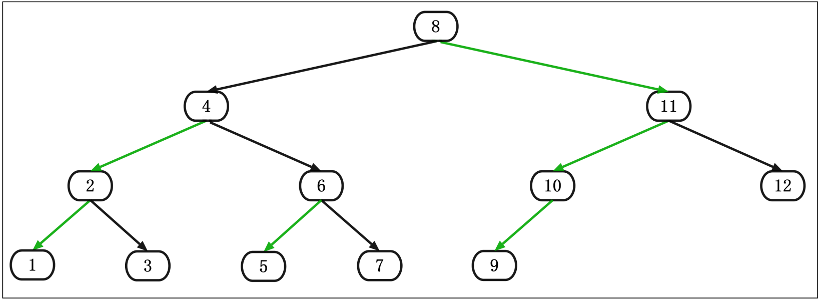
Aufbau des Tango Baumes

- *access*(9)



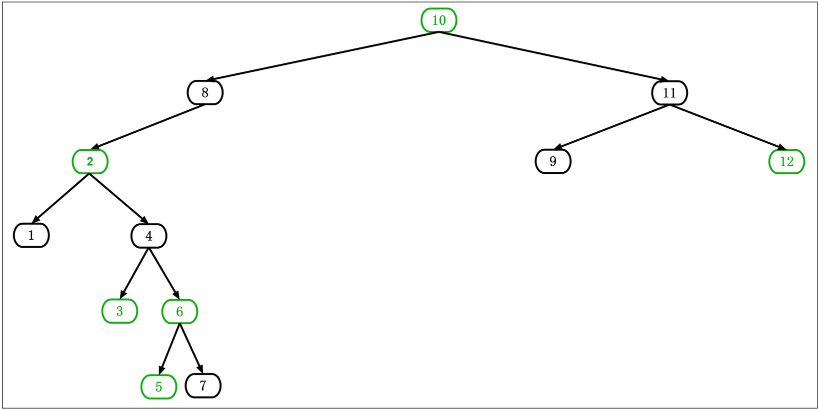
Aufbau des Tango Baumes

- *access*(9)



Aufbau des Tango Baumes

- *access*(9)



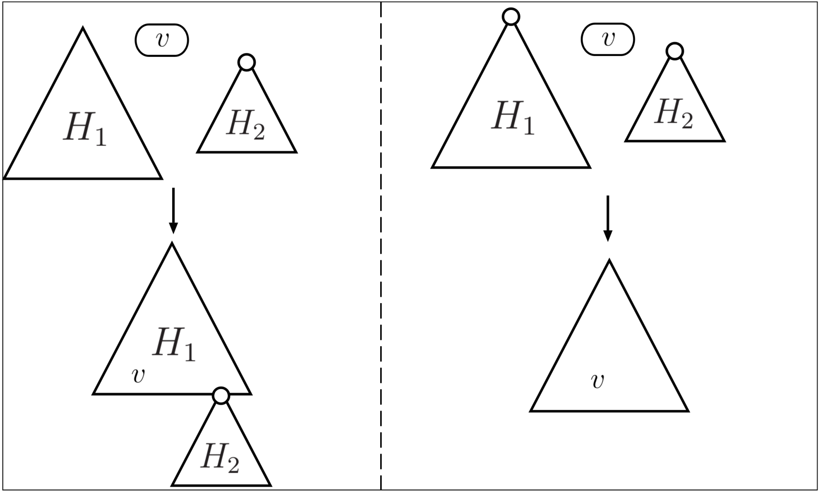
access Operation

- Suche findet im HB mit der Tango Baum Wurzel satt.

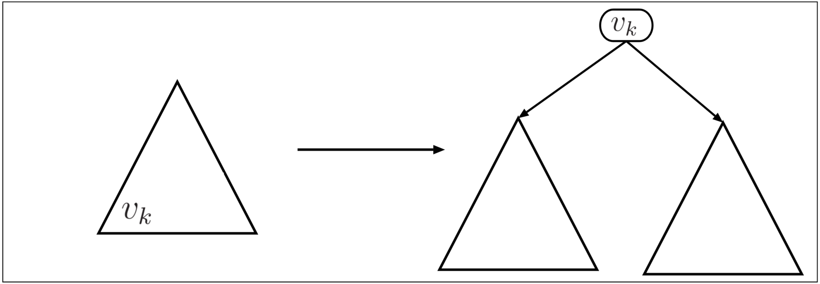
Anforderungen an die DS der Hilfsbäume

1. $h = O(\log(n))$
2. *concatenate* (*HB* H_1, *Knoten* v, *HB* H_2)
   Zusammenführen von T_1 und T_2. Laufzeit $O(\log(n))$
3. *split* (*Schlüssel* k)
   Zerteilen der eigenen Struktur. Laufzeit $O(\log(n))$

concatenate (*HB* H_1, *Knoten* *v*, *HB* H_2)



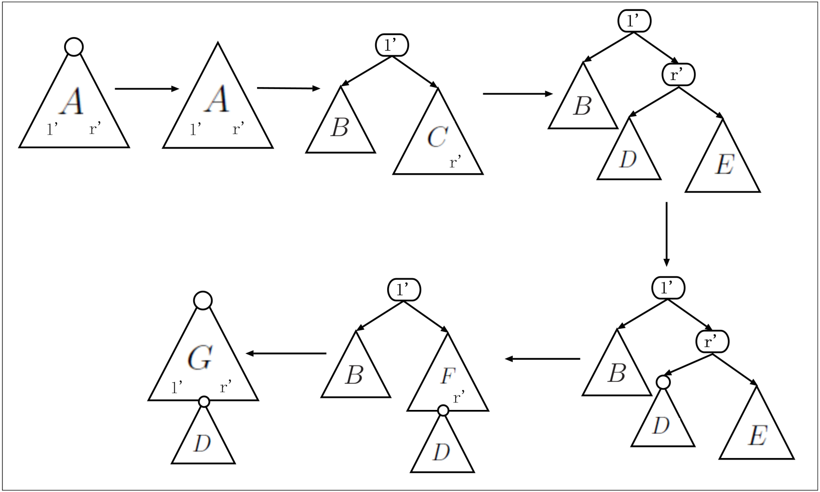
split (Schlüssel k)



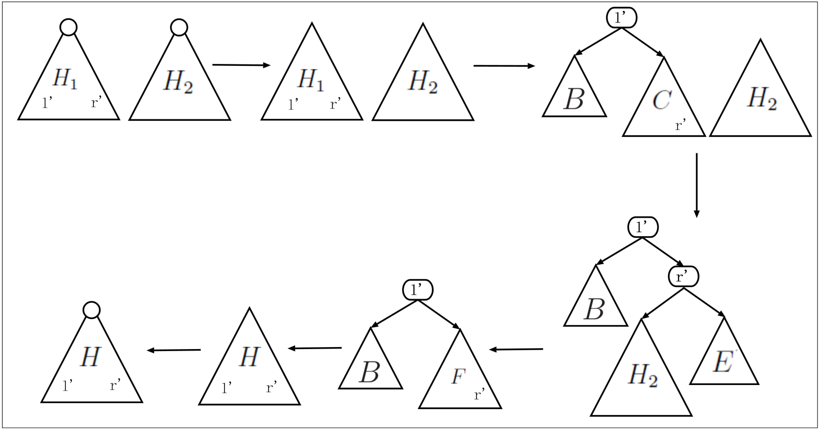
Hilfsoperationen für *access*

1. *join* $(HB\ T_1\ ,\ HB\ T_2)$
   Vereinigen von T_1 und T_2
2. *cut* $(depth\ d\ )$
   Zerteilen der eigenen Struktur beim Knoten mit Tiefe d

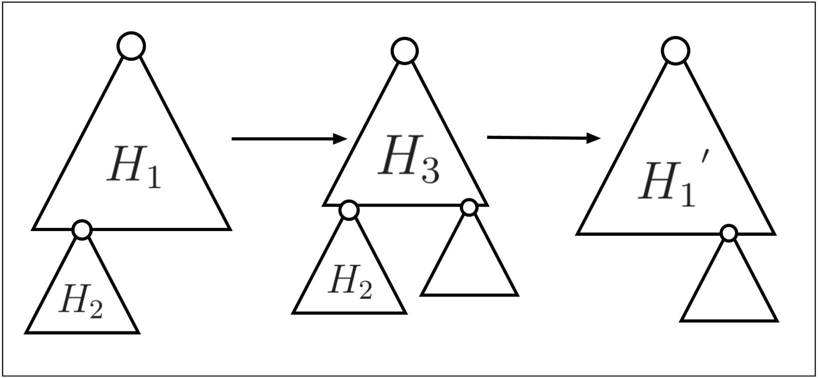
cut Operation



join Operation



access Operation



Laufzeit von *access*

1. $IB(X)$ Interleaves führen zu $IB(X)$ Wechsel bei preferred children von links nach rechts, oder umgekehrt.
2. maximal n zusätzliche Wechsel bei preferred children, durch Erstzugriffe in Teilbäume

Laufzeit von *access*

1. $IB(X)$ Interleaves führen zu $IB(X)$ Wechsel bei preferred children von links nach rechts, oder umgekehrt.
2. maximal n zusätzliche Wechsel bei preferred children, durch Erstzugriffe in Teilbäume
3. Das ergibt maximal $IB(X) + n$ Wechsel bei preferred children

Laufzeit von *access*

1. $IB(X)$ Interleaves führen zu $IB(X)$ Wechsel bei preferred children von links nach rechts, oder umgekehrt.
2. maximal n zusätzliche Wechsel bei preferred children, durch Erstzugriffe in Teilbäume
3. Das ergibt maximal $IB(X) + n$ Wechsel bei preferred children
4. Es wird maximal $IB(X) + n + 1$ mal an der Wurzel des Tango Baumes gestartet.
5. Für die Höhe eines Hilfsbaumes gilt $O(\log(\log(n)))$

Laufzeit von *access*

1. $IB(X)$ Interleaves führen zu $IB(X)$ Wechsel bei preferred children von links nach rechts, oder umgekehrt.
2. maximal n zusätzliche Wechsel bei preferred children, durch Erstzugriffe in Teilbäume
3. Das ergibt maximal $IB(X) + n$ Wechsel bei preferred children
4. Es wird maximal $IB(X) + n + 1$ mal an der Wurzel des Tango Baumes gestartet.
5. Für die Höhe eines Hilfsbaumes gilt $O(\log(\log(n)))$
6. $O((IB(X) + n + m)(1 + \log(\log(n))))$

Laufzeit von *access*

1. $IB(X)$ Interleaves führen zu $IB(X)$ Wechsel bei preferred children von links nach rechts, oder umgekehrt.
2. maximal n zusätzliche Wechsel bei preferred children, durch Erstzugriffe in Teilbäume
3. Das ergibt maximal $IB(X) + n$ Wechsel bei preferred children
4. Es wird maximal $IB(X) + n + 1$ mal an der Wurzel des Tango Baumes gestartet.
5. Für die Höhe eines Hilfsbaumes gilt $O(\log(\log(n)))$
6. $O((IB(X) + n + m)(1 + \log(\log(n))))$
7. $O((OPT(X) + n)(1 + \log(\log(n))))$, mit $OPT(X) \geq IB(X)/2 - n$

Laufzeit von *access*

Einzelne Access Operation:

1. $\Theta(\log(n))$ Wechsel bei preferred children

Laufzeit von *access*

Einzelne Access Operation:

1. $\Theta(\log(n))$ Wechsel bei preferred children
2. $O(\log(n)(\log(\log(n))+1))$

Laufzeit von *access*

Einzelne Access Operation:

1. $\Theta(\log(n))$ Wechsel bei preferred children
2. $O(\log(n)(\log(\log(n)) + 1))$
3. Balancierte BSTs erreichen $O(\log(n))$