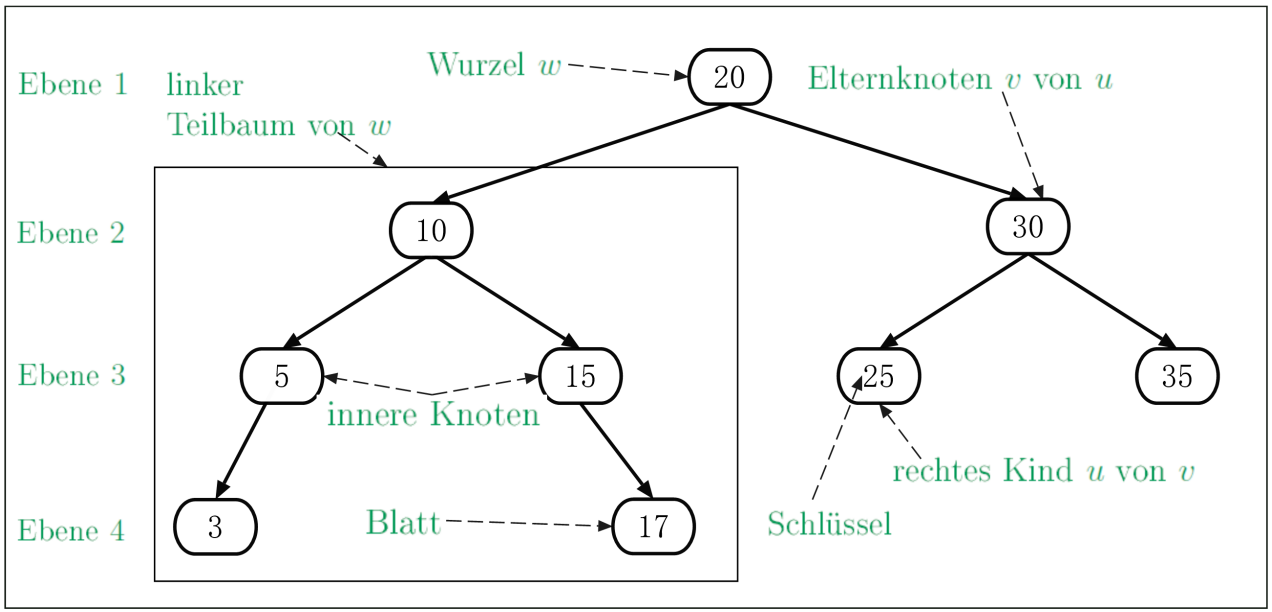
Tango Bäume

Andreas Windorfer

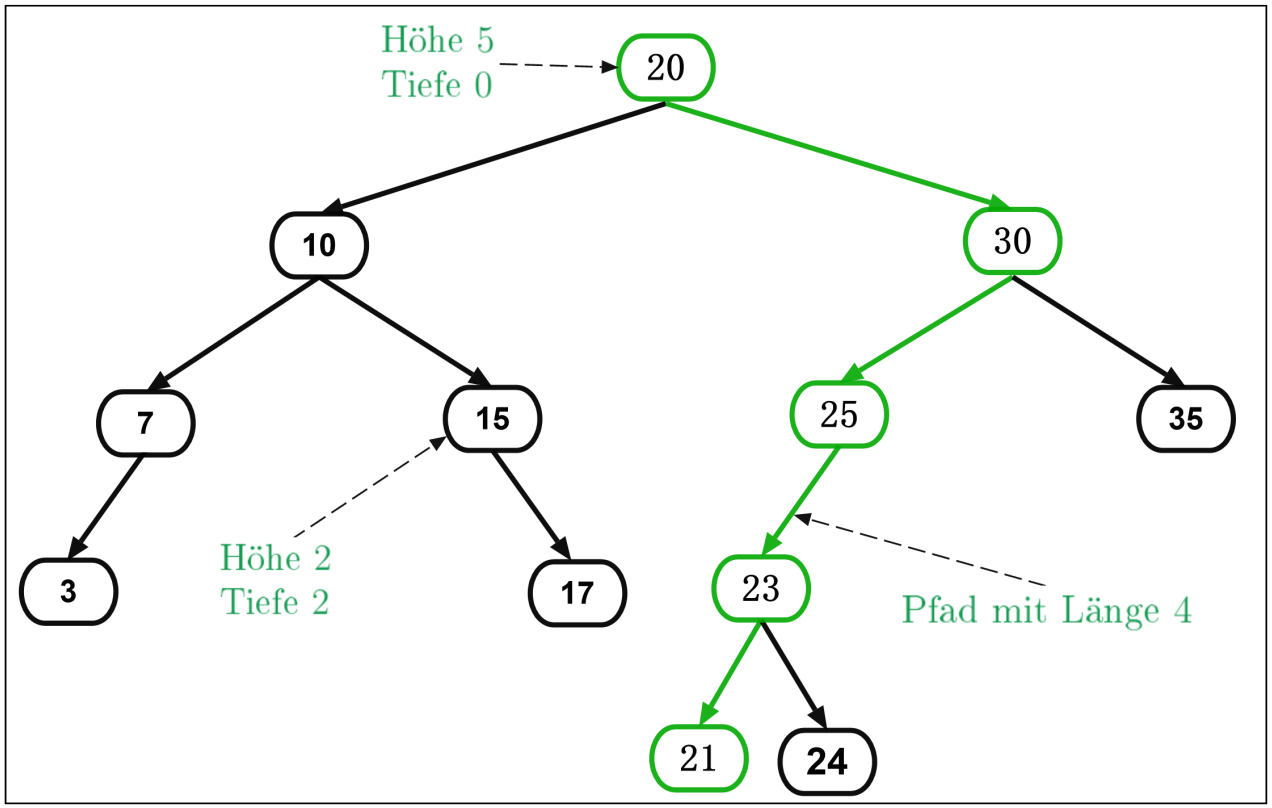
23. Oktober 2020

Übersicht

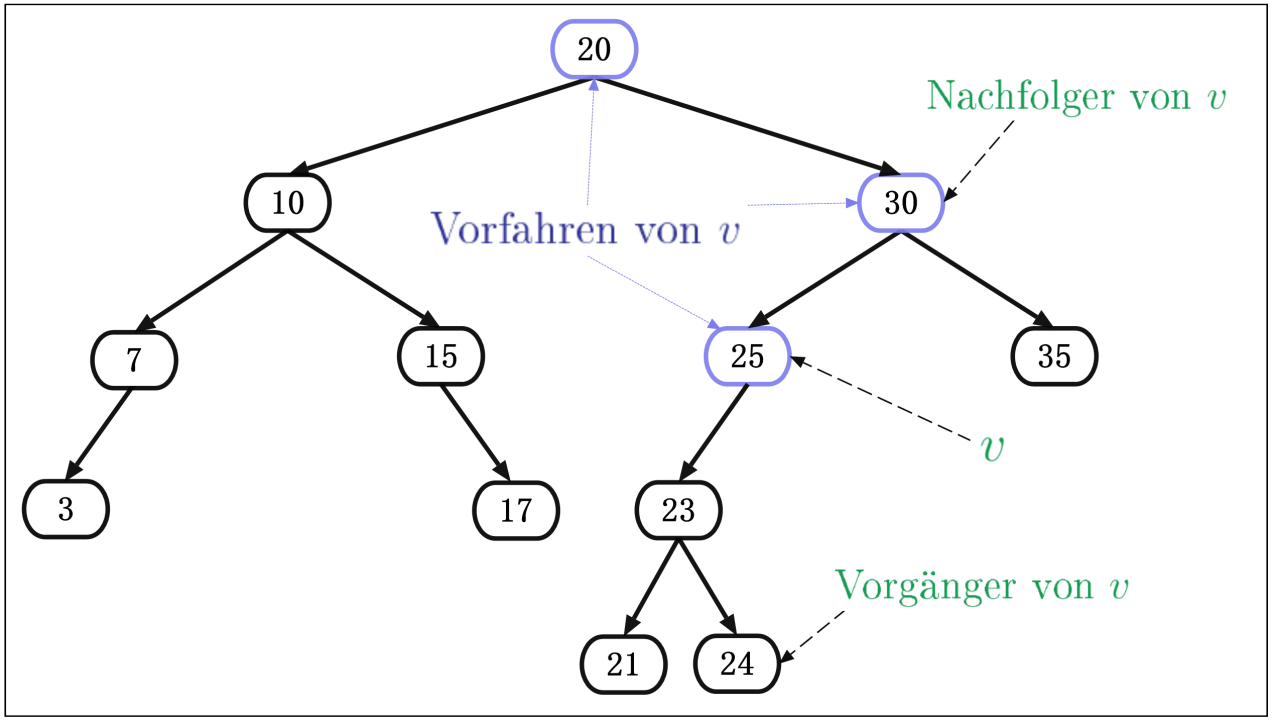
Binärer Suchbaum



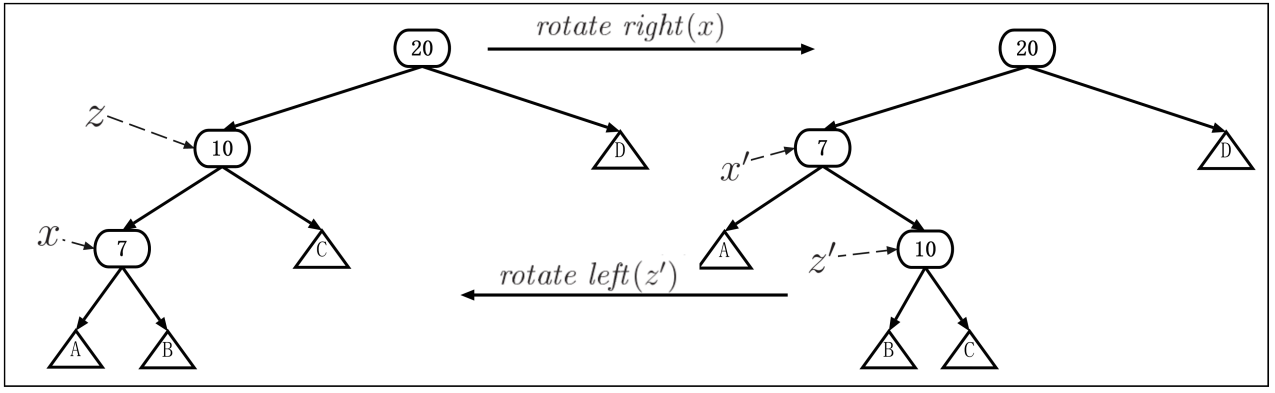
Binärer Suchbaum



Binärer Suchbaum



Binärer Suchbaum



Übersicht

access(k) Operation

Parameter / Rückgabe

- Parameter k: Schlüssel im BST (Schlüsselmenge K)
- Rückgabe: Knoten mit Schlüssel k

access(k) Operation

Einschränkungen

Ein Zeiger p (berührter Knoten) in die Struktur:

- Setze p auf ein Kind von p
- Setze p auf den Elternknoten von p
- Rotationen

access(k) Operation

Einschränkungen

Ein Zeiger p (berührter Knoten) in die Struktur:

- Setze p auf ein Kind von p
- Setze p auf den Elternknoten von p
- Rotationen

Berechnung der Kosten

Einheitskosten von „1“.

Zugriffsfolgen

Zugriffsfolgen

- $X = x_1, x_2, ..., x_m$, mit $\forall i \in \{1, 2, .., m\} : x_i \in K$
- $access(x_1)$, $access(x_2)$, ..., $access(x_m)$

Zugriffsfolgen

Zugriffsfolgen

- $X = x_1, x_2, ..., x_m$, mit $\forall i \in \{1, 2, .., m\} : x_i \in K$
- $access(x_1)$, $access(x_2)$, ..., $access(x_m)$

dynamische BST

- Anpassung der Struktur

Kostenrechnung

Anzahl der Einzelschritte $+ m$

dynamisch Optimal

$OPT(X)$

Niedrigste Kosten zum Ausführen von X

dynamisch Optimal

$OPT(X)$

Niedrigste Kosten zum Ausführen von X

dynamisch Optimal

BST mit Kosten von $O(OPT(X))$, für beliebige X

c-competitive

BST mit Kosten von $O(c \cdot OPT(X))$, für beliebige X

Tango Baum

Eigenschaten

- Aus BSTs bestehender BST
- $\log(\log(n))$-competitive

Literatur

Erik D. Demaine, Dion. Harmon, John. Iacono, and Mihai. Patrascu. Dynamic optimality-almost. SIAM Journal on Computing, 37(1):240 251, 2007.

Interleave Lower Bound

Motivation

- Berechnung einer unteren Schranke zu $OPT(X)$
- Beweis der $\log(\log(n))$-competitiveness

Lower Bound Tree

Definition

Zu $X = x_1, x_2, ., x_m$ und $K = \{k \in \mathbb{N} | k \textit{ ist in } X \textit{ enthalten}\}$

Lower Bound Tree

Definition

Zu $X = x_1, x_2, ., x_m$ und $K = \{k \in \mathbb{N} | k \textit{ ist in } X \textit{ enthalten}\}$
ist der komplette BST P mit der Schlüsselmenge K der LBT.

Beispiel LBT

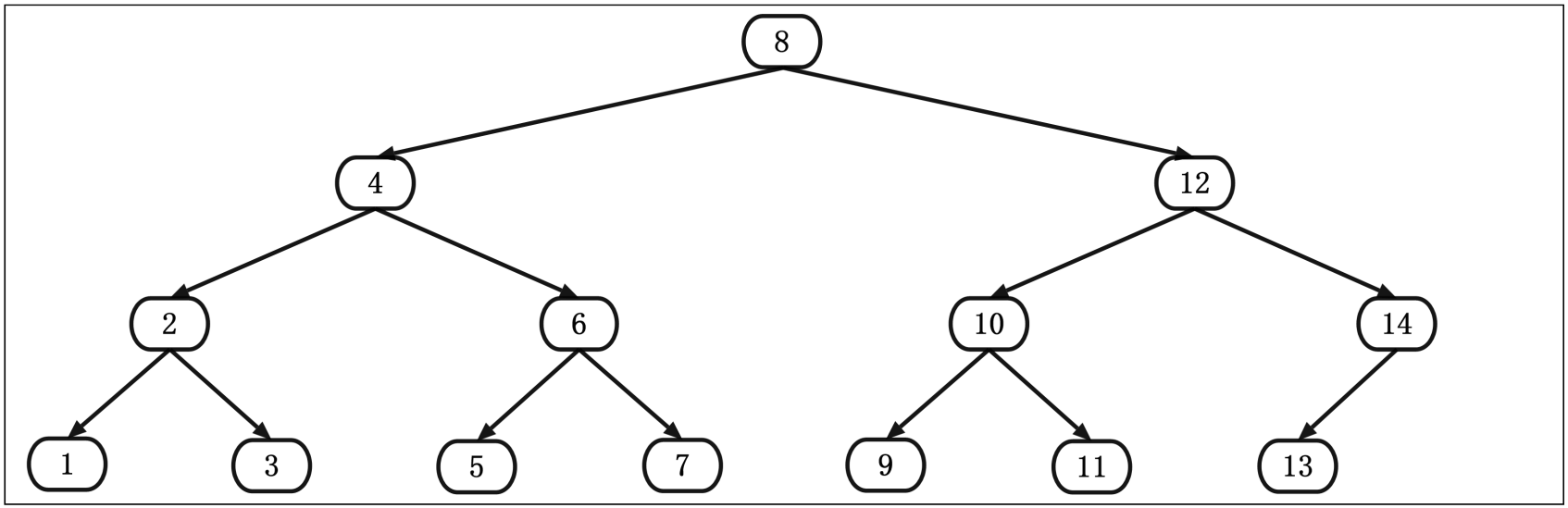


Abbildung: Der Lower Bound Tree zur Zugriffsfolge $1, 2, .., 14$.

Lower Bound Tree

Linke Region eines Kontens v

Schlüssel des linken Teilbaumes von v und $key(v)$

Linke Region eines Kontens v

Schlüssel des rechten Teilbaumes von v

Interleave durch v

x_{i-1} liegt in der linken Region und x_i in der rechten, oder umgekehrt.

Lower Bound Tree

inScore (X, v)

Anzahl der Interleaves durch v

IB (X)

$IB(X) = \sum_{u \in U} inScore(X, u)$

Transition Points

T_0 Startzustand, T_i nach ausführen von *access* x_i.

Transition Points

T_0 Startzustand, T_i nach ausführen von *access* x_i. $j \in 0, 1, ..m$

Zu jedem Knoten u aus P, mit nicht leerer rechter Region, existiert ein transition point in T_j

Transition Points

Sei v der Transition Point zu u und T_j

1. Im Pfad von der Wurzel zu v ist ein Knoten mit einem Schlüssel aus der linken Region von u enthalten.
2. Im Pfad von der Wurzel zu v ist ein Knoten mit einem Schlüssel aus der rechten Region von u enthalten.
3. Kein anderer Knoten mit kleinerer Tiefe erfüllt die Eigenschaften eins und zwei.

Transition Points

Sei U die Menge der Knoten in P mit einer nicht leeren rechten Region.

- Lemma 1: Es gibt zu jedem Knoten $u \in U$ genau einen transition point in T_j.
- Lemma 2: Wird ein transition point nicht berührt, so ist er noch immer der transition point des selben Knotens.
- Lemma 3: Ein Knoten kann nicht der transition point mehrerer Knoten sein.

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region

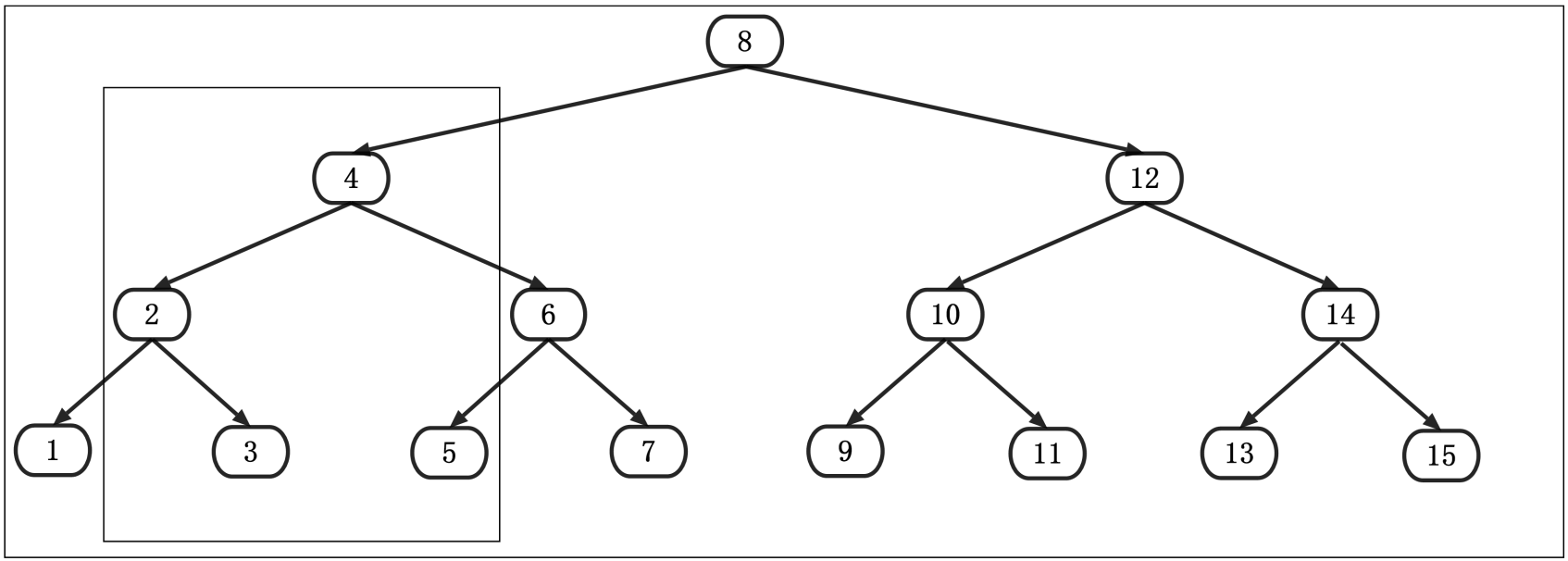
Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$

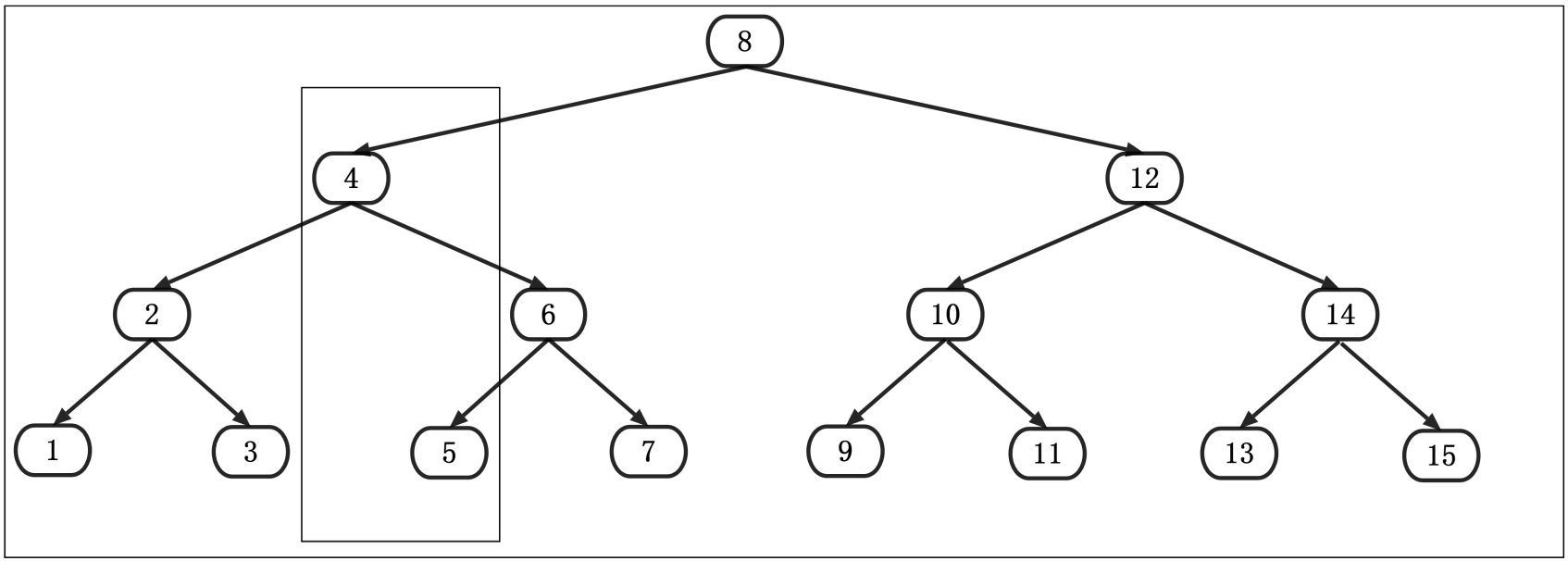
Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$
4. v_l ist der Vorfahre der Schlüssel der linken Region
5. v_r ist der Vorfahre der Schlüssel der rechten Region
6. w ist der gemeinsame Vorfahre dieser Schlüssel

Beweis Lemma 1



Beweis Lemma 1



Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$

Beweis Lemma 1

1. l ist der kleinste Schlüssel der linken Region
2. r ist der größte Schlüssel der rechten Region
3. der Teilbaum mit der Wurzel u enthält genau die Schlüssel aus $K_l^r = \{k \in K | k \in [l, r]\}$
4. v_l ist der Vorfahre der Schlüssel der linken Region
5. v_r ist der Vorfahre der Schlüssel der rechten Region
6. w ist der gemeinsame Vorfahre dieser Schlüssel
7. $w = v_l$ bzw. $w = v_r$
8. Transition point ist v_r bzw. v_l