Subiect 3 Proiect – Alexandrescu Andra

Thursday, 16 January 2025 15:05

a) $f_\theta(x) = e^{-2\theta} \cdot \frac{(2\theta)^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$

I. Metoda momentelor (MM)

$E(X) = \overline{X}$ (media empirică) (media teoretică) cu $X$ variabilă aleatoare discretă $\Rightarrow E(X) = \overline{X} = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x)$

Rescriere funcție de masă a probabilității:

$P(X=x) = f(x) = e^{-2\theta} \cdot \frac{2\theta^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$

De fapt, se observă că e o distribuție Poisson (probabilitatea a $k$ evenimente într-un interval $\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$)

În cazul acesta, e vorba despre $x$ evenimente (substitui $k$ cu $x$) și unde $\lambda = 2\theta$: $\frac{2\theta^x \cdot e^{-2\theta}}{x!}$

Distribuția Poisson cu $\lambda = 2\theta$ are media variabilei aleatoare Poisson $E(X) = \lambda = 2\theta$

(Dem. caz general:

$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$)

Revenind:

$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-2\theta} \cdot \frac{2\theta^x}{x!} = e^{-2\theta} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{2\theta^x}{x!} = 2\theta \cdot e^{-2\theta} \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \frac{2\theta^y}{y!}$

$x=0$; $e^{-2\theta}$ nu depinde de $x$

$x \cdot \frac{2\theta^x}{x!} = \frac{2\theta^x}{(x-1)!} = 2\theta \frac{2\theta^{x-1}}{(x-1)!}$

Substitui $x$ cu $y$ unde $y = x-1$

$x=1 \Rightarrow y=0$

$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$= 2\theta \cdot e^{-2\theta} \cdot e^{2\theta} = 2\theta \cdot e^{\cancel{2\theta - 2\theta}} = 2\theta \cdot 1 = 2\theta$

Obs. Caz general funcție exponențială: $e^x = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y}{y!}$

$\Rightarrow e^{2\theta} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{2\theta^y}{y!}$

Așadar, $E(X) = 2\theta$, iar estimarea lui $\lambda$ presupune să egalez media teoretică $E(X)$ cu cea empirică $\overline{X}$

unde $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$; $2\theta = \overline{X} \Leftrightarrow \theta = \frac{\overline{X}}{2} = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$

acest set de date $x_1, \dots x_n$ va da ca media empirică să fie o val. apropiată de $2\theta$

II. Metoda Verosimilității Maxime

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

[Caz general:

Funcția de verosimilitate pt distribuția Poisson:

$L(\lambda) \overset{not}{=} L(\lambda | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda | X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$]

Așadar, $L(2\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-2\theta} \cdot \frac{2\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-2n\theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{2\theta^{x_i}}{x_i!}$

$= e^{-2n\theta} \cdot (2\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$

Logaritmarea verosimilității:

$\ln L(\lambda) \xrightarrow{\text{devine sumă}} \ln(e^{-2n\theta}) + \ln\left((2\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}\right) = -2n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(2\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i!}\right)$

$\log_n(a \cdot b) = \log_n a + \log_n b$

$= -2n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(2\theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) = -2n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln 2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$

Derivarea log-verosimilității în raport cu $\lambda$:

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -2n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta}$

Obs. $\frac{\partial}{\partial \theta}(-2n\theta) = -2n$

$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln 2\theta\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta}$

Egalarea derivatei cu 0 pt a afla maximul:

$-2n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 2n \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\overline{x}}{2}$

Așadar, estimarea lui $\theta$ este $\hat{\theta} = \frac{\overline{x}}{2}$

b) $f_\theta(x) = C_n^x \theta^x \cdot (1-\theta)^{(1-x)}$, $x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $\theta \in (0,1)$, $n$ fixat

X variabilă aleatoare discretă

$f_\theta(x)$ ar putea interpretată ca o distribuție de probabilitate, similară cu distribuția binomială (modificare puterii a termenului $(1-\theta)$ din $(n-x)$ în $(1-x)$), care se poate fi interpretat ca o singură încercare cu două rezultate posibile (succes 1 și eșec 0), în loc să se refere la un număr de succese din n încercări. Așadar, în cazul ăsta, $\theta^x$ e probabilitatea de succes, iar $(1-\theta)^{(1-x)}$ probabilitatea de eșec, încă dacă $x=0$, va fi un eșec garantat.

b) $f_p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \{0, 1, \dots, n\}$, $p \in (0,1)$

coef binomial; prob. de succes; nr. total încercări; nr. total succese

X val. aleatoare discretă

I. Metoda momentelor

Caz general media distribuției binomiale:

$E(X) = \overline{X} = \sum_{x=0}^{n} x \cdot C_n^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \xrightarrow[\text{=> primul termen al sumei e tot 0}]{\text{Pt. } x=0} \sum_{x=1}^{n} x \cdot C_n^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

$= n \cdot \sum_{x=1}^{n} C_{n-1}^{x-1} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = n \cdot \sum_{x=1}^{n} C_{n-1}^{x-1} \, p \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(x-1)} =$

$x \cdot C_n^x = x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} = \cancel{x} \cdot \frac{n}{\cancel{x}} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} = n \cdot C_{n-1}^{x-1}$

$= np \cdot \sum_{x=1}^{n} C_{n-1}^{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(x-1)} = np \cdot \sum_{y=0}^{n-1} C_{n-1}^{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{(n-1)-y} =$

substitui $x$ cu $y = x-1$

$x=1 \Rightarrow y=0$

$x=n \Rightarrow y=n-1$

$= n \cdot p \cdot 1 = np$

Știu $\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = (p + (1-p))^{n-1} = 1$

$E(X) = np = \overline{X} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\overline{X}}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

II. Metoda verosimilității maxime

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

Funcția de verosimilitate:

$L(p) = L(p | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(p | X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} C_n^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{n-x_i}$

Log-verosimilitate:

$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} \ln C_n^{x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + \sum_{i=1}^{n} (n-x_i) \cdot \ln(1-p) =$

$\log_n(a \cdot b) = \log_n a + \log_n b$

Derivarea log-verosimilității în raport cu $p$:

$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} (n-x_i)}{1-p}$

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\ln C_n^{x_i}\right) = 0$

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\ln(p) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}$

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\ln(1-p) \cdot \sum_{i=1}^{n} (n-x_i)\right) = \frac{-1}{1-p} \cdot \sum_{i=1}^{n} (n-x_i)$

Egalarea derivatei cu 0 pt a afla maximul:

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (n-x_i)}{1-p} \Leftrightarrow (1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i = p \sum_{i=1}^{n} (n-x_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - p \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = p \sum_{i=1}^{n} (n-x_i)$

$\Leftrightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} (n-x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot n} = \frac{\overline{x}}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

c) $f_\theta(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\theta > 0$, $\alpha > 0$ cunoscut, Distribuția Gamma

X variabilă aleatoare continuă

I. Metoda momentelor

$E(X) = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\theta(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot \int_0^{\infty} x^\alpha \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \int_0^{\infty} \theta^\alpha t^\alpha \cdot e^{-t} \theta\,dt$

$t = \frac{x}{\theta} \Rightarrow x = \theta t$, $dx = \theta\,dt$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot \theta^{\alpha+1} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} t^\alpha \cdot e^{-t} dt}_{\text{fct. gamma } \Gamma(\alpha+1)} = \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha+1) \xrightarrow[\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)]{\text{Prop. (recursivitate)}} \frac{\theta \cdot \alpha \cdot \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} = \alpha\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\alpha}$

II. Metoda verosimilității maxime

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

Funcția de verosimilitate:

$L(\theta) = L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\right) \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$

Log-verosimilitate:

$\ln L(\theta) = -n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\alpha \ln(\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$

Derivarea log-verosimilității în raport cu $p$:

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$

Egalarea derivatei cu 0 pt a afla maximul:

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = \frac{n\alpha}{\theta} \Big| \cdot \theta \Leftrightarrow \frac{n\overline{x}}{\theta} = n\alpha \Big| \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\overline{X}}{\theta} = \alpha \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\alpha}$

($\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$)

d) $f_\theta(x) = \frac{\theta^x}{(\theta+1)^{x+1}}$, $x \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$

X variabilă aleatoare discretă

I. Metoda momentelor

$E(X) = \overline{X} = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f_\theta(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\theta^x}{(\theta+1)^{x+1}} = \frac{1}{\theta+1} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^x = \frac{1}{\cancel{\theta+1}} \cdot \theta(\cancel{\theta+1}) = \theta \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

Știm seria geometrică: $\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = \frac{1}{1-p}$ ($p \in (-1,1) \setminus \{0\}$), $p$ e prob. de succes

$p \overset{not}{=} \frac{\theta}{\theta+1}$; $\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p^x = ?$

Știu $\sum_{x=0}^{\infty} p^x = \frac{1}{1-p} \Big| \cdot \frac{\partial}{\partial p}$ derivez în fct. de $p$ $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{x=0}^{\infty} p^x\right) = \frac{1}{(1-p)^2}$

$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} x p^{x-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$; Așadar $\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p^x = p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p^{x-1} = \frac{p}{(1-p)^2}$

Deci $\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^x = \frac{\frac{\theta}{\theta+1}}{\left(1 - \frac{\theta}{\theta+1}\right)^2} = \frac{\theta}{(\theta+1) \cdot \left(\frac{\cancel{\theta}+1-\cancel{\theta}}{\theta+1}\right)^2} = \frac{\theta}{\cancel{(\theta+1)} \cdot \frac{1}{(\theta+1)^{\cancel{2}}}} = \theta(\theta+1) = \theta^2 + \theta$

II. Metoda verosimilității maxime

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

Funcția de verosimilitate:

$L(\theta) = L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{(\theta+1)^{x_i+1}} = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{(1+\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)}}$

Log-verosimilitate:

$\ln L(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \ln\theta - \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + n\right) \cdot \ln(\theta+1)$

($\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$)

Derivarea log-verosimilității

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n\overline{x}}{\theta} - \frac{n\overline{x}+n}{\theta+1}$

Egalarea derivatei cu 0 pt a afla maximul:

$\frac{n\overline{x}}{\theta} = \frac{n(\overline{x}+1)}{\theta+1} \Big| \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\overline{x}}{\theta} = \frac{\overline{x}+1}{\theta+1} \Leftrightarrow \cancel{\overline{x}\theta} + \overline{x} = \cancel{\theta\overline{x}} + \theta$

$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \overline{x}$

e) $f_\theta(x) = \frac{\lambda}{\theta} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\theta > 0$, $\lambda > 0$ cunoscut

X variabilă aleatoare continuă

I. Metoda momentelor

$E(X) = \overline{X} = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\lambda}{\theta} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{\lambda}{\theta} \int_0^{\infty} x^\lambda \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{\lambda}{\cancel{\theta}} \cdot \int_0^{\infty} \theta^\lambda \cdot t^\lambda \cdot e^{-t} \cancel{\theta}\,dt = \lambda \cdot \theta^\lambda \cdot \int_0^{\infty} t^\lambda \cdot e^{-t} dt = \lambda \cdot \theta^\lambda \cdot \Gamma(\lambda+1)$

$t \overset{not}{=} \frac{x}{\theta} \Rightarrow x = \theta t$, $dx = \theta\,dt$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$\int_0^{\infty} x^k \cdot e^{-x} dx = k! = \Gamma(k+1)$

$= \lambda \cdot \theta^\lambda \cdot \lambda! \Rightarrow \theta^\lambda = \frac{\overline{X}}{\lambda^2 \cdot (\lambda-1)!}$

$\hat{\theta} = \left(\frac{\overline{X}}{\lambda^2 \cdot (\lambda-1)!}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$

II. Metoda verosimilității maxime

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

Funcția de verosimilitate:

$L(\theta) = L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\theta} x_i^{\lambda-1} \cdot e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right) = \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda-1}\right) \cdot e^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$

Log-verosimilitate:

$\ln L(\theta) = \underbrace{n\ln\lambda}_{\text{constantă}} - n\ln\theta + \underbrace{(\lambda-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}_{\text{constantă}} - \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Derivarea log-verosimilității

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ ($= n\overline{X}$)

Egalarea derivatei cu 0 pt a afla maximul:

$\frac{1}{\theta^2} \cdot n\overline{X} = \frac{n}{\theta} \Big| \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\overline{X}}{\theta^2} = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \theta\overline{X} - \theta^2 = 0$

$\theta(\overline{X} - \theta) = 0$

$\Leftrightarrow \hat{\theta} = 0$ sau $\hat{\theta} = \overline{X}$

dar $\theta > 0$ (cerință)