Segunda Prova de Álgebra Linear - 21/03/2024

Nome:

OBS: A pontuação se encontra ao fim de cada questão. Sua nota máxima é 100.

Exercício 1 *Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço vetorial das matrizes 2×2.*

a) Mostre que o seguinte subconjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ \textit{que satisfazem}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

b) Calcule a dimensão desse subespaço.

(Vale 20 pontos cada item)

Solução: Queremos todas as matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que satisfazem $\begin{pmatrix} x & y \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2y \\ z & 2w \end{pmatrix}$.

Isso implica que $y = z = 0$ e x, w são livres, ou seja, as matrizes que queremos são $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ com $x, w \in \mathbb{R}$.

Vamos resolver a letra a). Somando duas dessas matrizes obtemos

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & 0 \\ 0 & w + w' \end{pmatrix}$$

que é uma matriz do mesmo tipo. Multiplicando uma dessas matrizes por um $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\lambda.\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.x & 0 \\ 0 & \lambda.w \end{pmatrix},$$

que é uma matriz do mesmo tipo. Isso mostra que as matrizes desse tipo formam um subespaço das matrizes 2×2.

Vamos resolver a letra b). Note que

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geram o subespaço. Agora se

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então $x = w = 0$, ou seja, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são L.I. Isso mostra que essas duas matrizes formam uma base do subespaço e portanto o subespaço tem dimensão 2.

Exercício 2 *Calcule a dimensão do subespaço do* $\mathbb{R}^6$ *gerado pelos vetores abaixo.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Vale 20 pontos)

Solução questão 3:

Note que o terceito vetor é combinação dos dois primeiros, basta subtrair o primeiro do segundo. Vamos jogar ele fora. O que resta ainda gera o mesmo espaço. Vejamos que os dois que sobraram são L.I.

Para ver que formam uma base para o subespaço, basta notar que são L.I.. Considere uma combinação nula deles:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa combinção obtemos duas equações distintas $a + b = 0$ e $a = 0$. Essas duas juntas dão $a = b = 0$, ou seja, os vetores acima geram o espaço e são L.I., portanto base do espaço.

Assim o espaço tem dimensão 2.

Exercício 3 *Considere as seguintes bases ordenadas do* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule a matriz $[Id]_\beta^\alpha$.

(Vale 20 pontos)

Solução: Chame

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como vimos em sala de aula as colunas da matriz $[Id]_\beta^\alpha$ são:

$1^{\underline{a}}$ coluna $= [v_1]_\beta$, $2^{\underline{a}}$ coluna $= [v_2]_\beta$ e $3^{\underline{a}}$ coluna $= [v_3]_\beta$.

Agora $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow [v_1]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow [v_2]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow [v_3]_\beta = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercício 4 *Resolva o sistema linear* $Ax = b$ *utilizando a regra de Cramer.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Vale 20 pontos)

Solução: Vamos calcular o $\det(A)$ para saber se podemos usar a regra de Cramer.

Se subtrairmos da linhas 2 e 3 a linha 1 o valor do determinante não é alterado:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace na coluna 1}}{=} 1.(1.2 - 3.1) = -1.$$

Podemos usar a regra de Cramer.

Assim $x_1 = \frac{1}{-1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{-1}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $x_3 = \frac{1}{-1}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Então $x_1 = \frac{1.(3.5-5.4)}{-1} = 5$, $x_2 = \frac{-1.(1.5-1.4)}{-1} = 1$ e $x_3 = \frac{1.(5.1-3.1)}{-1} = -2$.

Exercício 5 *Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 e seja v_1, v_2, v_3 uma base de V.*

a) Explique porque $v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3$ é outra base de V.

b) Explique porque $v_1, v_2,\ v_1 + v_2,\ v_3$ não é outra base de V.

(Vale 20 pontos cada item)

Solução: *a)* $v_1, v_1 + v_2, v_3$ foi obtida de v_1, v_2, v_3 por um operação elementar e como v_1, v_2, v_3 geram V então $v_1, v_1 + v_2, v_3$ também geram V.

Agora $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3$ foi obtida de v_1, v_1+v_2, v_3 por um operação elementar e como v_1, v_1+v_2, v_3 geram V então $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3$ também geram V. Isso prova que $v_1,\ v_1+v_2,\ v_1+v_2+v_3$ geram V. Vamos ver que são L.I.

Se $xv_1 + y(v_1 + v_2) + z(v_1 + v_2 + v_3) = 0$ então $(x + y + z)v_1 + (y + z)v_2 + zv_3 = 0$, mas v_1, v_2, v_3 são L.I. Então $x + y + z = y + z = z = 0$, mas isso implica que $x = y = z = 0$. isso garante que $v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3$ são L.I.

b) Toda base de V precisa ter 3 elementos e esse conjunto tem 4 elementos.

Dum vita est, spes est.