Tarefa 2

April 18, 2021

1 Tarefa 2

Alunos: Andreza(164213), Gil(225323) e Yan(118982)

1.1 Importar bibliotecas básicas:

[25]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
```

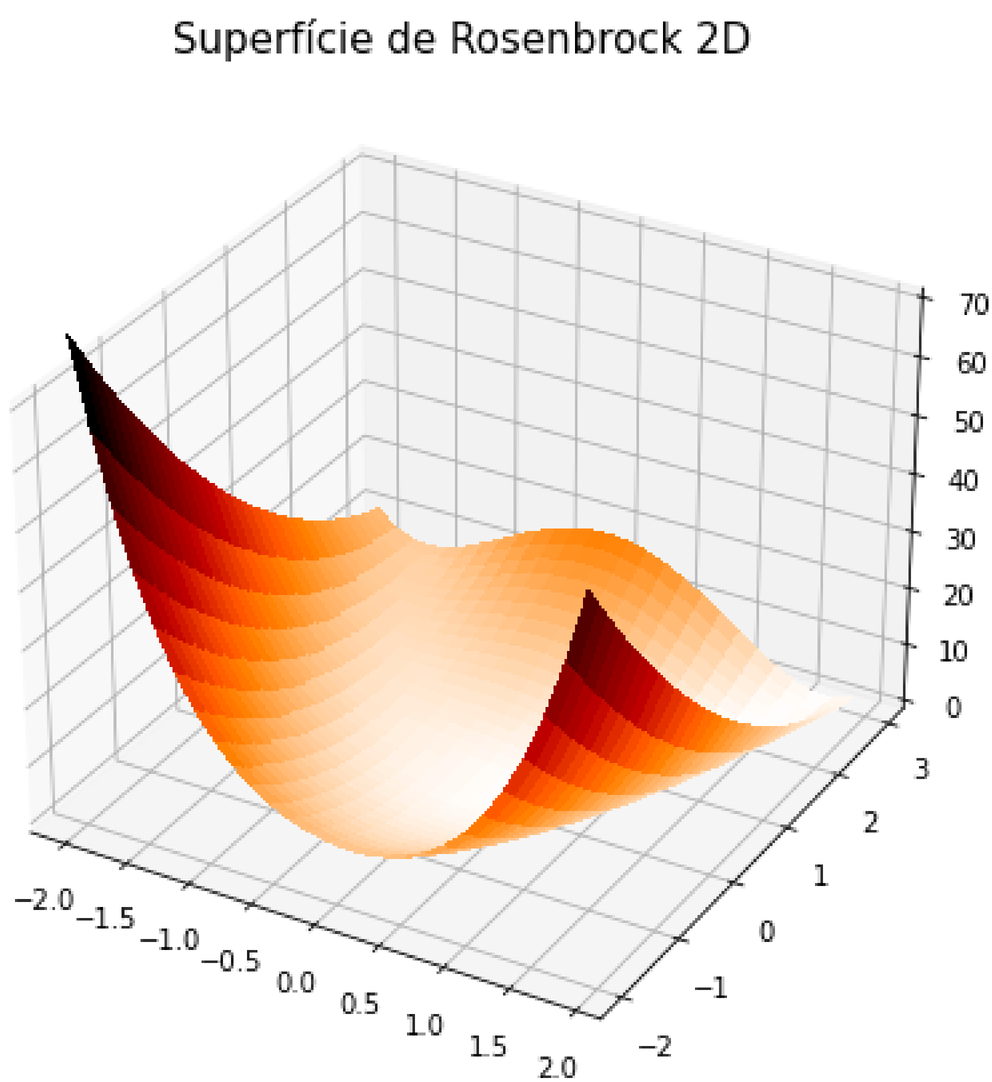
1.2 Minimizar a função do problema de Rosenbrock:

1.3 Gráfico da Superfície de Rosenbrock

[26]:
```
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
plt.figure(figsize=(6,6))
rosenbrock_func = lambda x,y: (x-1)**2 + 2*(y-x**2)**2
# Inicializa uma plt figure
fig = plt.figure(figsize=(12, 7))
ax = fig.add_subplot(projection='3d')

# Cria a superfícia a ser plotada usando o intervalo X1 [-2, 2] e X2 [-1, 3]
surface_x1 = np.arange(-2, 2, 0.15)
surface_x2 = np.arange(-2, 3, 0.15)
surface_x1, surface_x2 = np.meshgrid(surface_x1, surface_x2)
function_surface = rosenbrock_func(surface_x1, surface_x2)
# Plot the surface
surf = ax.plot_surface(surface_x1, surface_x2, function_surface, cmap=cm.
↪gist_heat_r,
                       linewidth=0, antialiased=False)
ax.set_zlim(0, 70)
ax.set_title("Superfície de Rosenbrock 2D", fontsize=15)
plt.show()
```

```
<Figure size 432x432 with 0 Axes>
```



Uma função não convexa. A região do mínimo, a parte esbranquiçada do vale, é muito plana. A planície, por sua vez, dificulta o algorítimo de encontrar o valor exato do ponto mínimo da função, que no caso é o ponto (1,1). Vamos assumir que nosso ponto de partida seja a origem, já na região de planície.

1.3.1 Função para plotar a descida do gradiente:

[27]:
```
def plot_gradient_descent(surface_x1: np.array,
                          surface_x2: np.array,
                          function_surface: np.array,
                          x1_values: np.array,
                          x2_values: np.array) -> None:
    # Initialize figure
    plt.figure(figsize=(12, 7))
```

```
    plt.contour(surface_x1, surface_x2, function_surface, 50)
    plt.plot([0],[0], marker='o', markersize = 10, color = 'r')
    plt.plot(last_x[0], last_x[1], '*', markersize=10, color = 'r')
    path = [x1_values.T, x2_values.T]
    path = np.asarray(path)
    plt.quiver(path[0,:-1], path[1,:-1],
               path[0,1:]-path[0,:-1], path[1,1:]-path[1,:-1],
               scale_units = 'xy', angles = 'xy', scale = 15, color = 'k')
    plt.legend(['o', '*'],
               labels=["Ponto inicial {}".format((0, 0)),
                       "Ponto final {}".format((round(last_x[0], 8),␣
↪round(last_x[1], 8)))])
    plt.xlabel("X1", fontsize=13)
    plt.ylabel("X2", fontsize=13)
```

1.4 Descida do gradiente explícita

1.4.1 Definindo a função Rosenbrock 2D a ser otimizada e a função que calcula o gradiente

[28]:
```
def rosenbrock_2d(x: np.array) -> float:
    x1 = x[0]
    x2 = x[1]
    return np.power((1 - x1), 2) + 100*np.power((x2 - x1**2), 2)

def calc_gradient(x: np.array) -> list:
    x1 = x[0]
    x2 = x[1]
    dx1 = -400*x1*x2 + 400*np.power(x1, 3) + 2*x1 - 2
    dx2 = 200*x2 - 200*np.power(x1, 2)
    return [dx1, dx2]
```

1.4.2 Função de descida do gradiente

[29]:
```
def gradient_descent(lr: float, lr_decay:float) -> tuple:

    # Variavel para salvar valores de f
    function_values = []

    # Ponto inicial
    current_x = [0, 0]
    # Salva valor de f no ponto inicial
    previous_f = rosenbrock_2d(current_x)
    function_values.append(previous_f)

    # Variaveis para plotar grafico
    X1 = []
```

```
    X2 = []
    X1.append(current_x[0])
    X2.append(current_x[1])

    step = 0
    while step < 5e4:
        step += 1
        # Calcula gradientes e aplica
        # descida do gradiente nos pontos
        gradients = calc_gradient(current_x)
        current_x -= lr*np.asarray(gradients)

        # Calcula valor da função no novo ponto
        current_f = rosenbrock_2d(current_x)
        function_values.append(current_f)
        X1.append(current_x[0])
        X2.append(current_x[1])
        # Checagem da tolerancia
        tol_value = np.absolute(current_f - previous_f)
        if tol_value < 1e-5:
            break
        previous_f = current_f
        lr *= lr_decay

    # Retorna todos os valores assumidos pela função
    # e o ponto final
    print("Ultimo valor de f:", current_f)
    print("Ultimo ponto x1 = {0} e x2 = {1}".format(current_x[0], current_x[1]))
    print("Número de passos:", step)
    X1 = np.asarray(X1)
    X2 = np.asarray(X2)

    return [function_values, current_x, X1, X2]
```

Condições Assumimos interromper a computação depois de 50.000 passos (step < 5e4) Nossa tolerância entre a diferença do ponto novo para o ponto velho, em módulo, foi de 0,00001 (1e-5)

1.4.3 Descida do Gradiente com learning rate 1e-3

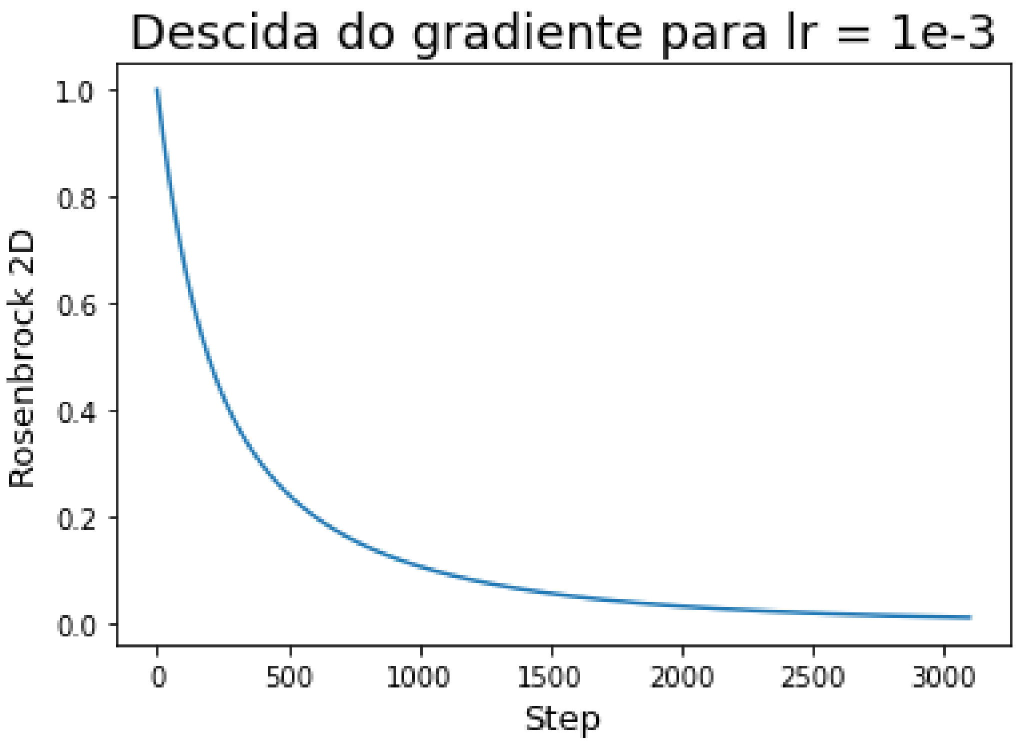
[30]:
```
lr = 1e-3
lr_decay = 1
func_values, last_x, x1_values, x2_values = gradient_descent(lr, lr_decay)
```

```
Ultimo valor de f: 0.010552817956188867
Ultimo ponto x1 = 0.8973659319527167 e x2 = 0.8048289691500664
Número de passos: 3096
```

Com 3096 passos, a função chegou num valor 0,01055 distante do mínimo, que é 0, quando x1=1 e x2=1.

[31]:
```
plt.plot(func_values)
plt.title("Descida do gradiente para lr = 1e-3", fontsize=18)
plt.xlabel("Step", fontsize=13)
plt.ylabel("Rosenbrock 2D", fontsize=13)
```

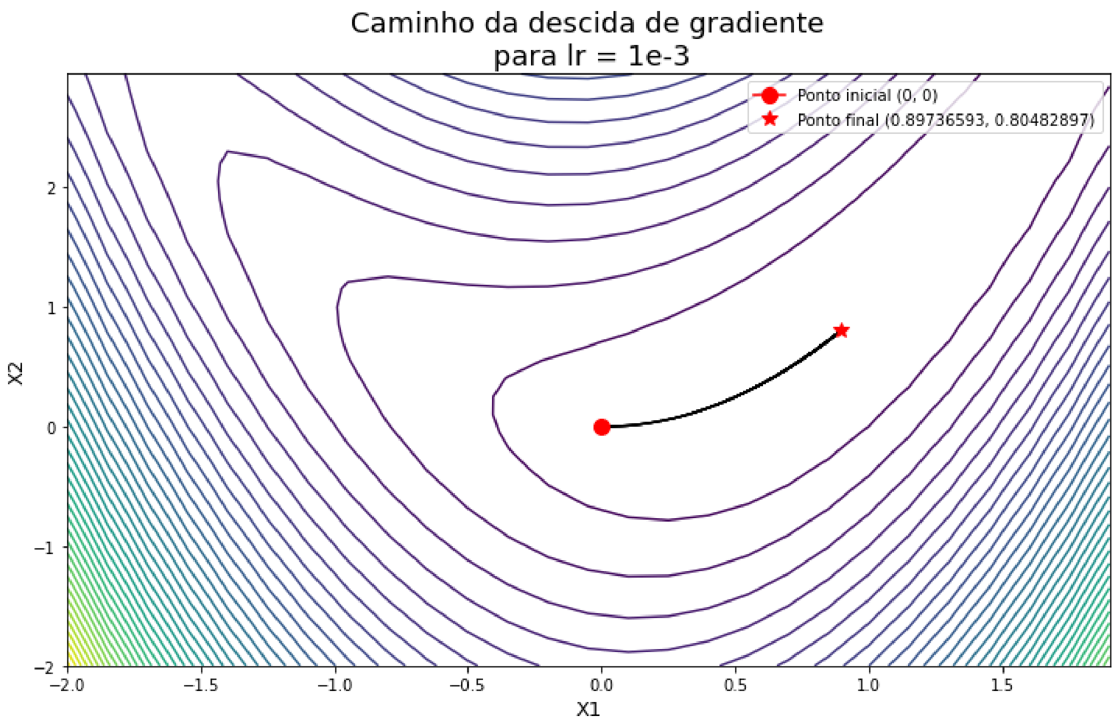
[31]: `Text(0, 0.5, 'Rosenbrock 2D')`



Percebemos que, para a tolerância e learning rate assumidos, há uma caída exponencial da função. Quanto mais próximo do valor mínimo em zero, mais "steps", mais passos deve-se tomar para avançar a uma velocidade cada vez menor. Dentre os learning rates assumidos neste trabalho, este foi o que melhor se aproximou do mínimo da função. Abaixo mostramos o caminho percorrido pelo algoritmo.

[32]:
```
plot_gradient_descent(surface_x1,
                      surface_x2,
                      function_surface,
                      x1_values,
                      x2_values)
plt.title("Caminho da descida de gradiente\n para lr = 1e-3", fontsize=18)
```

[32]: `Text(0.5, 1.0, 'Caminho da descida de gradiente\n para lr = 1e-3')`



1.4.4 Descida do Gradiente com learning rate 1e-4

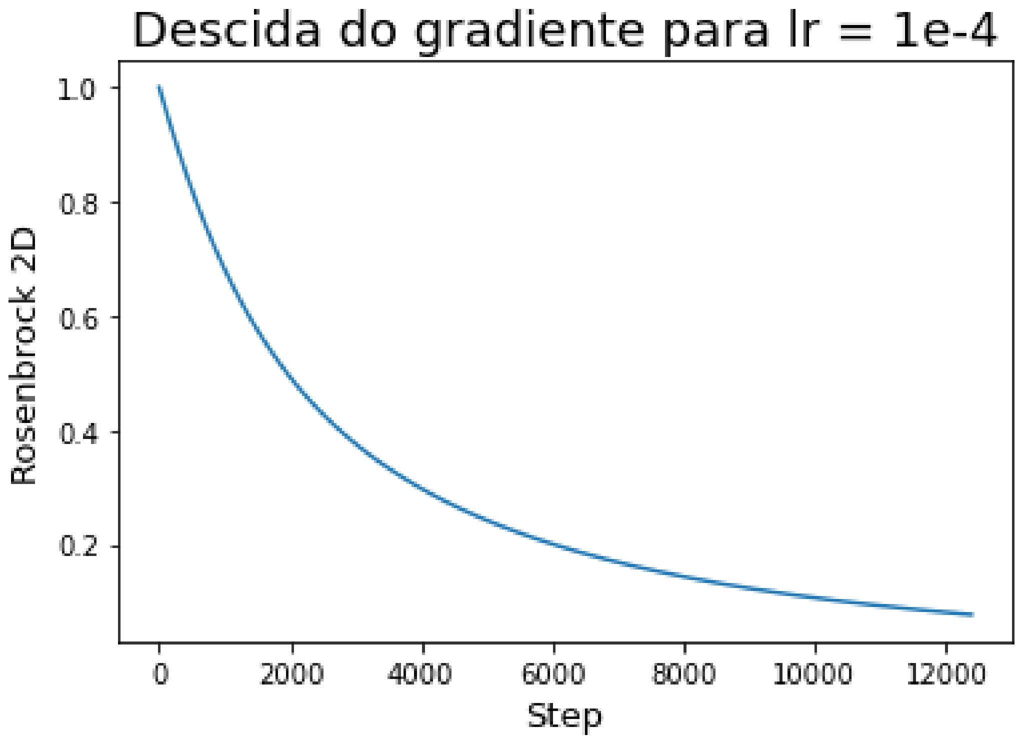
[33]:
```
lr = 1e-4
lr_decay = 1
func_values, last_x, x1_values, x2_values = gradient_descent(lr, lr_decay)
```

```
Ultimo valor de f: 0.07731336295746939
Ultimo ponto x1 = 0.7222519131907607 e x2 = 0.5203464298142022
Número de passos: 12384
```

Conforme diminuímos o learning rate, como o gradiente da função também se torna cada vez mais próximo de zero, levamos mais steps para atingirmos nossa tolerância. Ele entra numa região subótima em comparação com o lr=1e-3

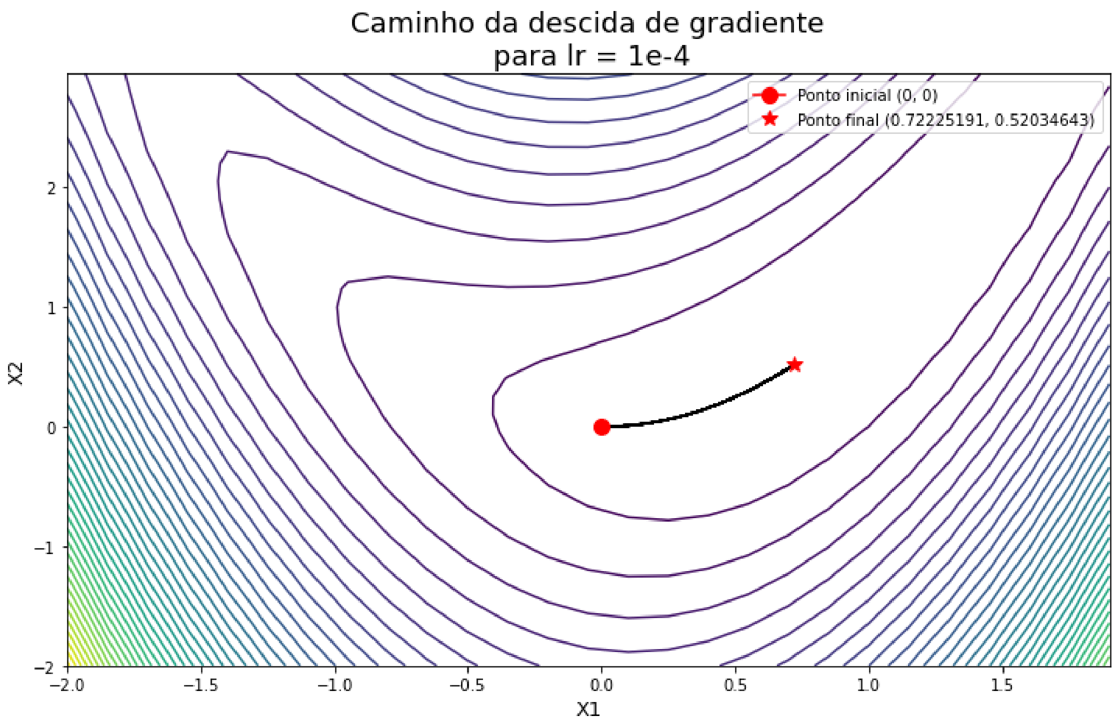
[34]:
```
plt.plot(func_values)
plt.title("Descida do gradiente para lr = 1e-4", fontsize=18)
plt.xlabel("Step", fontsize=13)
plt.ylabel("Rosenbrock 2D", fontsize=13)
```

[34]: `Text(0, 0.5, 'Rosenbrock 2D')`



[35]:
```
plot_gradient_descent(surface_x1,
                      surface_x2,
                      function_surface,
                      x1_values,
                      x2_values)
plt.title("Caminho da descida de gradiente\n para lr = 1e-4", fontsize=18)
```

[35]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Caminho da descida de gradiente\n para lr = 1e-4')
```



1.4.5 Descida do Gradiente com learning rate 1e-2

[36]:
```
lr = 1e-2
lr_decay = 1
func_values, last_x, x1_values, x2_values = gradient_descent(lr, lr_decay)
```

```
Ultimo valor de f: nan
Ultimo ponto x1 = nan e x2 = nan
Número de passos: 50000
```

Podemos ver que para valores grandes de *learning rate*, a descida de gradiente não consegue convergir para o ponto mínimo da função. Ao invés disso ela diverge, aumentando seu valor até ocorrer um estouro de memória.

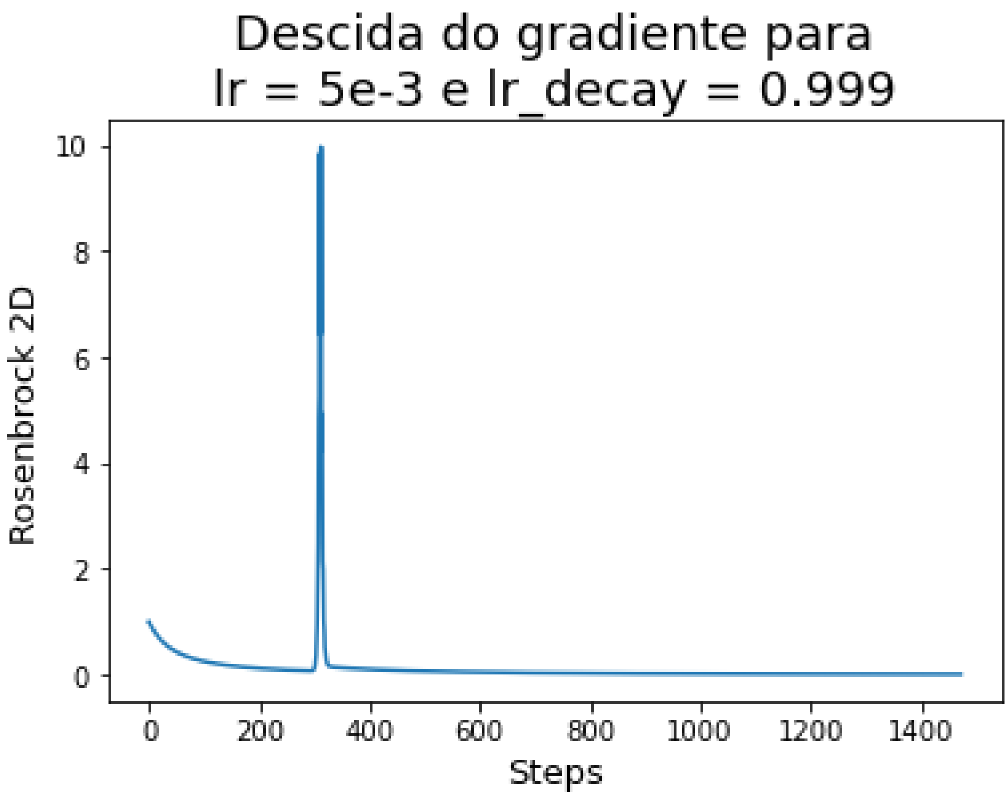
1.4.6 Descida do Gradiente com política de redução do learning rate

[37]:
```
lr = 5e-3
lr_decay = 0.999
func_values, last_x, x1_values, x2_values = gradient_descent(lr, lr_decay)
```

```
Ultimo valor de f: 0.009292014747243678
Ultimo ponto x1 = 0.9036913756452383 e x2 = 0.8162498914145423
Número de passos: 1472
```

[38]:
```
plt.plot(func_values)
plt.title("Descida do gradiente para\nlr = 5e-3 e lr_decay = 0.999",␣
 ↪fontsize=18)
plt.xlabel("Steps", fontsize=13)
plt.ylabel("Rosenbrock 2D", fontsize=13)
```

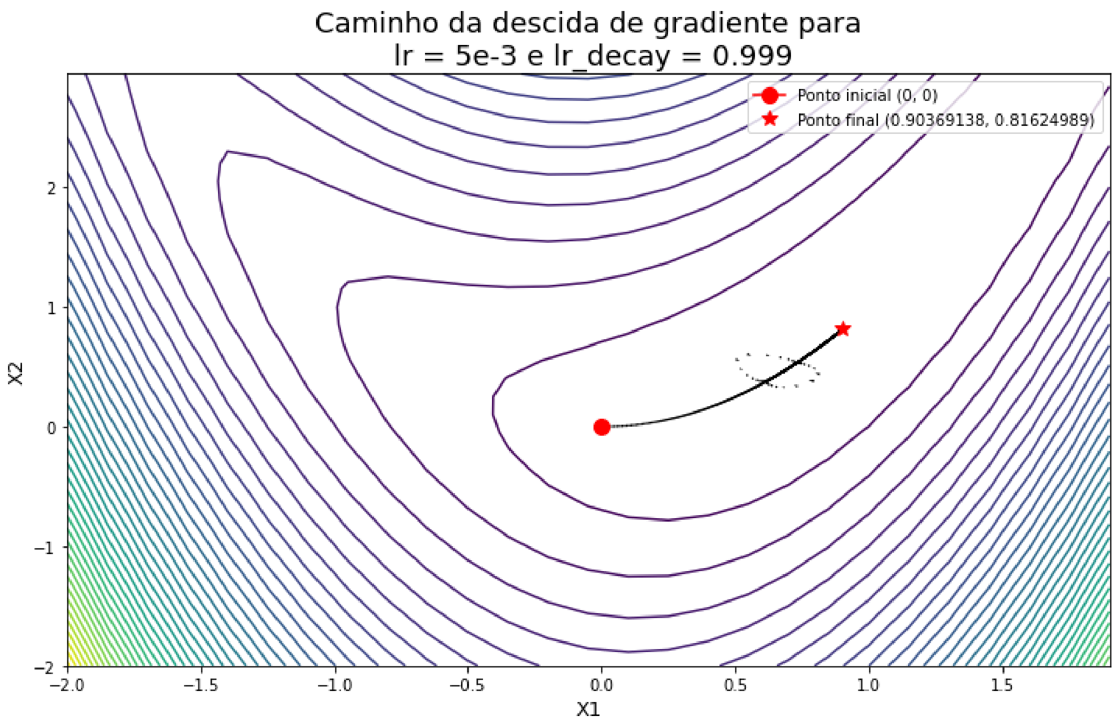
[38]:
```
Text(0, 0.5, 'Rosenbrock 2D')
```



A nossa função para a descida de gradiente se perde numa região provavelmente de mínimo local, como mostramos no gráfico abaixo na área pontilhada.

[39]:
```
plot_gradient_descent(surface_x1,
                      surface_x2,
                      function_surface,
                      x1_values,
                      x2_values)
plt.title("Caminho da descida de gradiente para\n lr = 5e-3 e lr_decay = 0.
 ↪999", fontsize=18)
```

[39]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Caminho da descida de gradiente para\n lr = 5e-3 e lr_decay =
0.999')
```



1.5 Descida do gradiente utilizando Tensorflow

[40]:
```
import tensorflow as tf
```

1.5.1 Descida de gradiente com tensorflo e lr = 1e-3 (melhor valor da parte 1)

[41]:
```
def calc_gradient_tf(x: np.array) -> tuple:

    x1 = tf.Variable(float(x[0]), name='x1', dtype=tf.float32, trainable=True)
    x2 = tf.Variable(float(x[1]), name='x2', dtype=tf.float32, trainable=True)

    with tf.GradientTape(persistent=True) as tape:
        tape.watch(x1)
        tape.watch(x2)
        y = (1 - x1)**2 + 100*((x2 - x1**2)**2)

    dx1 = tape.gradient(y, x1).numpy()
    dx2 = tape.gradient(y, x2).numpy()
    return [dx1, dx2]
```

[42]:
```
def gradient_descent_tf(lr: float) -> tuple:

    # Variavel para salvar valores de f
```

```
    function_values = []

    # Ponto inicial
    current_x = [0, 0]
    # Salva valor de f no ponto inicial
    previous_f = rosenbrock_2d(current_x)
    function_values.append(previous_f)

    # Variaveis para plotar grafico
    X1 = []
    X2 = []
    X1.append(current_x[0])
    X2.append(current_x[1])

    step = 0
    while step < 5e4:
        step += 1
        # Calcula gradientes e aplica
        # descida do gradiente nos pontos
        gradients = calc_gradient_tf(current_x)
        current_x -= lr*np.asarray(gradients)
        # Calcula valor da função no novo ponto
        current_f = rosenbrock_2d(current_x)
        function_values.append(current_f)
        X1.append(current_x[0])
        X2.append(current_x[1])
        # Checagem da tolerancia
        tol_value = np.absolute(current_f - previous_f)
        if tol_value < 1e-5:
            break
        previous_f = current_f

    # Retorna todos os valores assumidos pela função
    # e o ponto final
    print("Ultimo valor de f:", current_f)
    print("Ultimo ponto x1 = {0} e x2 = {1}".format(current_x[0], current_x[1]))
    print("Número de passos:", step)
    X1 = np.asarray(X1)
    X2 = np.asarray(X2)

    return [function_values, current_x, X1, X2]
```

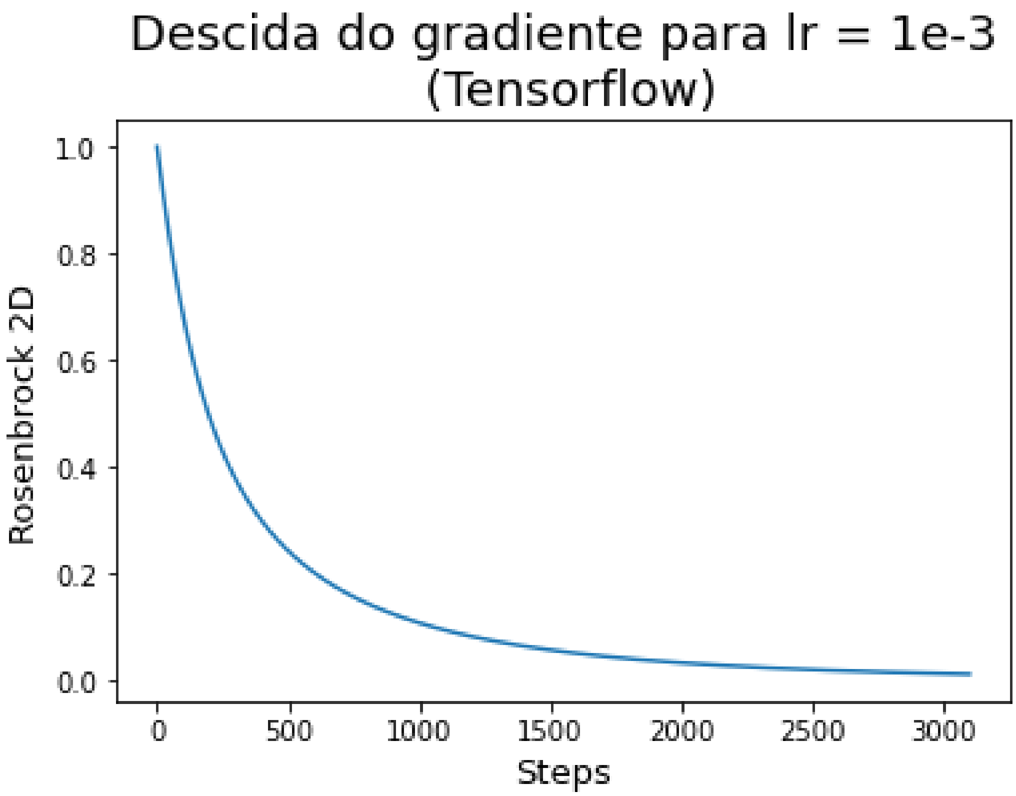
[43]:
```
func_values, last_x, x1_values, x2_values = gradient_descent_tf(1e-3)
```

```
Ultimo valor de f: 0.010552816365783677
Ultimo ponto x1 = 0.8973659428411338 e x2 = 0.8048289813102087
Número de passos: 3096
```

Podemos ver que a descida de gradiente utilizada na parte um (explícita) e a descida de gradiente utilizando o framework Tensorflow diferem nas respostas finais a partir da oitava casa decimal para os valores de X1 e X2 e nona casa decimal para o mínimo valor assumido pela função. Podemos considerar essas diferenças muito pequenas como desprezíveis.

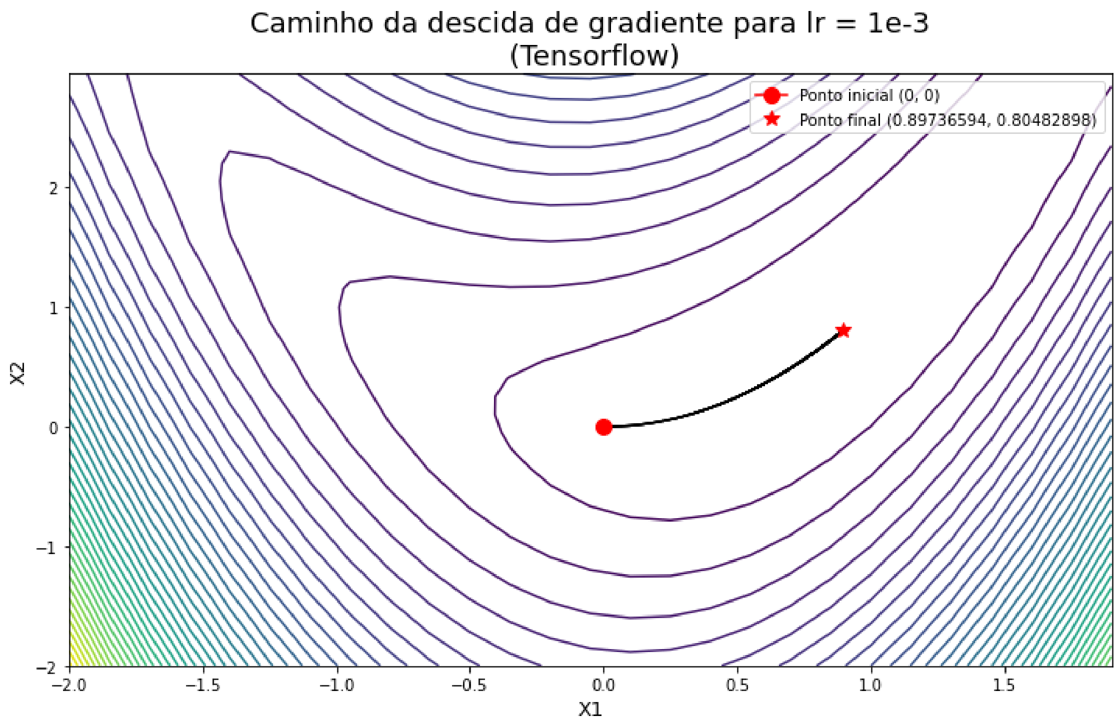
[44]:
```
plt.plot(func_values)
plt.title("Descida do gradiente para lr = 1e-3\n (Tensorflow)", fontsize=18)
plt.xlabel("Steps", fontsize=13)
plt.ylabel("Rosenbrock 2D", fontsize=13)
```

[44]:
```
Text(0, 0.5, 'Rosenbrock 2D')
```



[45]:
```
plot_gradient_descent(surface_x1,
                      surface_x2,
                      function_surface,
                      x1_values,
                      x2_values)
plt.title("Caminho da descida de gradiente para lr = 1e-3\n (Tensorflow)",␣
 ↪fontsize=18)
```

[45]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Caminho da descida de gradiente para lr = 1e-3\n (Tensorflow)')
```


Caminho da descida de gradiente para lr = 1e-3
(Tensorflow)
Ponto inicial (0, 0)
Ponto final (0.89736594, 0.80482898)
X1
X2
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2
1
0
−1
−2