Analysis III

Vorlesung von
Prof. Dr. Felix Finster
im Wintersemester 2011/2012
Überarbeitung und Textsatz in LyX von
Andreas Völklein

Stand: 1. April 2012

ACHTUNG

Diese Mitschrift ersetzt *nicht* die Vorlesung.
Es wird daher *dringend* empfohlen, die Vorlesung zu besuchen.

Links

Der Text der „GNU Free Documentation License“ kann auch auf der Seite

`https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.de.html`

nachgelesen werden.
Eine transparente Kopie der aktuellen Version dieses Dokuments kann von

`https://github.com/andiv/analysisIII`

heruntergeladen werden.

Literatur

Maßtheorie

- Theodor Bröcker: *Analysis II*, Spektrum Akad. Verl., 1995, ISBN 3-86025-418-9; Kap. I-III (recht knapp)
- Walter Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 2009, ISBN 978-0-07-054234-1; Kap. I-III

Funktionentheorie

- Klaus Jänich: *Funktionentheorie*, Springer, 2011, ISBN 978-3-540-20392-6
- Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979, ISBN 0-07-000657-1; (ausführlich)

Inhaltsverzeichnis

1 Integrationstheorie

Motivation und Überblick

Riemann-Integral

Das *Riemann-Integral* haben wir schon kennen gelernt.
Sei $I = [a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
TODO: Funktionsplot einfügen
Bilde eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $x_0 = a, x_n = b$ und $x_{k-1} < x_k \in \mathbb{R}$ in die Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Mit $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ ist die Feinheit:

$$\Delta Z := \max_{1 \leq k \leq n} |I_k|$$

Wähle Zwischenpunkte $\zeta_k \in I_k$ und definiere die Riemannsche Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot |I_k|$$

f heißt Riemann-integrierbar (Abkürzung: R-integrierbar), falls der Limes

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot |I_k| =: \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenpunkte existiert.
Bezeichne die Menge der auf dem Intervall I Riemann-integrierbaren Funktionen mit $\mathcal{R}(I)$.
Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, das heißt $C^0(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

<table>
<tr><th>Nachteile des Riemann-Integrals</th><th>Vorteile des Lebesgue-Integrals</th></tr>
<tr><td>Es ist nicht einfach zu entscheiden, welche Funktionen Riemann-integrierbar sind.</td><td>Die Lebesgue-integrierbaren Funktionen sind „schön“ charakterisiert.</td></tr>
<tr><td>Viele nicht-stetige Funktionen sind nicht Riemann-integrierbar, zum Beispiel:
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$</td><td>Man kann allgemeine Funktionen integrieren:
$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$</td></tr>
<tr><td>Uneigentliche Integrale müssen gesondert betrachtet werden:
$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{l\to\infty} \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$</td><td>Uneigentliche Integrale sind einfach handhabbar.</td></tr>
<tr><td>Konvergiere $f_n \to f$, gegen was konvergiert das Integral?
$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to\ ?$</td><td>Diese Frage ist mit den Lebesgueschen Integrationssätzen einfach zu entscheiden.</td></tr>
<tr><td>Funktionenräume $\mathcal{R}(I)$
Führe *Norm* ein:
$\lvert\lvert f(I)\rvert\rvert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$
Aber $(\mathcal{R}(I), \lvert\lvert.\rvert\rvert)$ ist nicht vollständig.</td><td>L^p-Räume sind vollständig, also Banachräume.
Zum Beispiel:
$L^1([0,1]) =$
$= \left\{ f \text{ ist L.-intbar.} \wedge \int_0^1 \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$
Für die L^1-Norm gilt:
$\lvert\lvert f\rvert\rvert \geq 0$
$\lvert\lvert f\rvert\rvert = 0 \Rightarrow f = 0$
$\lvert\lvert f+g\rvert\rvert \leq \lvert\lvert f\rvert\rvert + \lvert\lvert g\rvert\rvert$
Aber: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x =?$</td></tr>
</table>

Historischer Ursprung

Das Riemann-Integral geht auf Newton zurück, der sich mit folgender Thematik beschäftigte:

TODO: Bild: Sonne-Erde-Potential einfügen

Berechnung des Gravitationspotential der Sonne als Summe infinitesimal kleiner Punktquellen:

$$\Phi = \lim_{i\to\infty} \sum_i \frac{\Delta Q_i}{r_i}$$

Dieses Vorgehen wurde von Riemann mathematisch präzise gefasst und lieferte in der Mitte des 19. Jahrhunderts das Riemannsche Integral.

Borel und Lebesgue wählten am Anfang des 20. Jahrhunderts einen anderen Ansatz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, also $f(I) \subseteq [\alpha,\beta]$ für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Zerlege den Bildbereich in Streifen, also $y_0, \ldots, y_n$ mit $y_0 = \alpha, y_n = \beta$ und $y_{k-1} < y_k$ sowie $J_k := [y_{k-1}, y_k]$ für $1 \leq k \leq n$.

TODO: Abbildung: Funktion mit Streifen

Es ist $f^{-1}(J_k) \in \mathbb{R}$ und man definiert ein „Maß“ $\mu\left(f^{-1}(J_k)\right)$ dieser Menge. („Volumen“ oder „Länge“ des Intervalls)

Für stetige Funktionen liefert dies das Gleiche wie das Riemann-Integral, ist aber allgemeiner und hat viele Vorteile.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge so ist

$$\mu : M \to \mathbb{R}_0^+$$

eine Abbildung, für die

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mu\left(f^{-1}(J_k)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

gegen das Lebesgue-Integral konvergiert.

Sie werden sich fragen: Für welche Mengen kann man sinnvoll ein Maß definieren? Wie geht das?

Für ein Intervall $K = [x_0,x_1]$ sollte gelten:

$$\mu(K) = |K| = x_1 - x_0$$

Für paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_l$ mit $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und

$$J = \dot{\bigcup_{k=1}^{l}} I_k$$

sollte gelten:

$$\mu(J) = \sum_{k=1}^{l} \mu(I_k)$$

Geht das auch für beliebige, also unendliche Vereinigungen?

Sei I eine beliebige Indexmenge.

$$A := \dot{\bigcup_{\alpha\in I}} I_\alpha$$

Vermutung:

$$\mu(A) = \sum_{\alpha\in J} \mu(I_\alpha)$$

Beispiel: $A = [0,1]$

Dann soll $\mu(A) = 1$ gelten.

Sei $I = A$. Für $x \in I$ wähle $I_x := \{x\} = [x,x]$ und es gilt:

$$\mu(I_x) = |I_x| = 0$$

Aber:

$$A = \dot{\bigcup_{x\in I}} I_x$$

$$1 = \mu(A) \stackrel{?}{=} \sum_{x \in I} \mu(I_x) = \sum_{x \in I} 0 = 0$$

Dies geht also nicht. Das Problem liegt bei der überabzählbaren Summe.

Um solche grundsätzlichen Probleme zu vermeiden, arbeitet man in der Maßtheorie immer nur mit *abzählbaren* oder endlichen Mengenoperationen.

Mit diesen Dingen im Hinterkopf führen wir nun einige abstrakte Begriffe ein.

1.1 Maßräume, Maße

1.1.1 Definition (σ-Algebra, Maßraum, messbare Menge)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge (zum Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^n$).

Eine *σ-Algebra $\mathcal{M}$ über X* ist eine Menge von Teilmengen von X, so dass gilt:

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \complement A := X \setminus A \in \mathcal{M}$

iii) Ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Mengen in $\mathcal{M}$, so ist auch ihre Vereinigung

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$$

ein Element von $\mathcal{M}$.

„σ“ steht für abzählbar.

(X,μ) heißt *Maßraum* (Messraum, measurable space).

Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen *messbare Mengen*.

1.1.2 Bemerkung

- Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ gegeben, so bilde:

$$(B_k)_{k \in \mathbb{N}} := (A_1, \ldots, A_n, A_n, \ldots)$$

Nach iii) gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \in \mathcal{M}$$

Damit sind *endliche* Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{M}$ wieder messbar.

- Seien $A_k \in \mathcal{M}$ messbar für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann folgt:

$$\complement \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\complement A_k}_{\in \mathcal{M} \text{ (wg. ii))}} \Bigg)}_{\in \mathcal{M} \text{ (wg. iii))}}$$

Also gilt:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \complement \left(\complement \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \complement \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\complement A_k) \right) \in \mathcal{M}$$

Damit sind *abzählbare* Schnitte messbarer Mengen wieder messbar.

1.1.3 **Beispiele** (Erzeugnis, offene Menge, Topologie, Borelalgebra)

a) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ ist die kleinste σ-Algebra über X.

   Die Potenzmenge $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ ist als „Menge aller Teilmengen" die größte σ-Algebra über X.

   Beide sind im Folgenden nicht interessant.

b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen.

   $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ als Teilmenge enthält, und heißt *das Erzeugnis von $\mathcal{A}$*.

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}\}$$

c) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Definiere:

   $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls für alle $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$ gibt.

$$\mathcal{O} = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\}$$

   heißt *Topologie*.

   Führe jetzt *die von der Topologie erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{M}(\mathcal{O})$, die Borelalgebra* ein. Man kann also auf jedem topologischen Raum eine kanonische σ-Algebra einführen.

   Ein $A \in \mathcal{B}$ heißt *Borelmenge*.

   Wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ ist jede offene Menge eine Borelmenge.

   Jede abgeschlossene Menge A ist eine Borelmenge, denn $\complement A$ ist offen, also ist $\complement A$ eine Borelmenge und damit nach 1.1.1 ii) auch $A = \complement(\complement A)$.

   Es gibt Borelmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, zum Beispiel ist die abgeschlossene Menge $[0,1] \in \mathcal{B}$ und auch die offene Menge $(2,3) \in \mathcal{B}$ und daher auch deren Vereinigung $[0,1] \cup (2,3) \in \mathcal{B}$, die aber weder offen noch abgeschlossen ist.

   Anderes Beispiel: $[0,1] \cup (1,2) = [0,2) \in \mathcal{B}$

d) Betrachte für $z \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ die offenen Würfel:

$$W_{z,k} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \frac{z_j - 1}{2^{k+1}} < x_j < \frac{z_j + 1}{2^{k+1}} \right\}$$

$$\mathcal{A} := \{W_{z,k} | z \in \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

   TODO: Abbildung Würfel

   $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist die von den Würfeln erzeugte σ-Algebra und wieder die Borelalgebra, denn sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

   Schöpfe Ω durch abzählbar viele Würfel aus, also

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \in \mathcal{A}$$

   mit $W_n \in \mathcal{A}$.

   TODO: Abbildung Ausschöpfung

Da eine σ-Algebra unter abzählbaren Mengenoperationen abgeschlossen ist, folgt $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Es liegen also alle offenen Mengen in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Da $\mathcal{B}$ die *kleinste* σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen enthält, folgt $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Genauer in einer Dimension:

Sei $X = \mathbb{R}$. Ist $k \in \mathbb{N}$ gegeben, so bilde das Gitter:

$$2^{-k+1} \cdot \mathbb{Z} = \left\{ \frac{l}{2^{k+1}} \middle| l \in \mathbb{Z} \right\}$$

Für $l \in \mathbb{Z}$ definiere:

$$W_{l,k} = \Big((l-1) \cdot 2^{-k+1}, (l+1) \cdot 2^{-k+1} \Big)$$

TODO: Abbildung eindimensionales Gitter

Dann ist

$$W_k = \{ W_{l,k} | l \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

abzählbar und auch

$$W := \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$$

ein abzählbares Mengensystem.

Behauptung

Die Würfel erzeugen bereits die gesamte Borelalgebra:

$$\mathcal{M}(W) = \mathcal{B}$$

Beweis

Offensichtlich ist $\mathcal{M}(W) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

Zu zeigen ist, dass $\mathcal{M}(W)$ alle offenen Mengen enthält.

Sei also $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist

$$A = \bigcup \{ U \subseteq \Omega | U \in W \}$$

ist eine abzählbare Vereinigung von Würfeln, also ist $A \in \mathcal{M}(W)$.

Es gilt:

$$A = \Omega$$

$A \subseteq \Omega$ ist klar, da $U \subseteq \Omega$ ist.

Umgekehrt ist $A \supseteq \Omega$, denn für $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \Omega$.

Wähle k so groß, dass $2^{-k} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ ist.

TODO: Abbildung Zahlenstrahl

Dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $x \in W_{l,k}$, also ist $A = \Omega$.

Daher ist $A = \Omega \in \mathcal{M}(W)$ und somit folgt

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{M}(W) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O})$$

Also ist $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(\mathcal{O})$.

$\square_{\text{Behauptung}}$

Alle Borelmengen sollten also messbar sein.

Betrachte auf topologischen Räumen, sofern nichts anderes gesagt wird, stets die Borelalgebra als σ-Algebra.

1.1.4 Definition (Erzeugendensystem, messbare Abbildung)

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ heißt *Erzeugendensystem* von $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$ ist.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Maßräumen (X,M) und (Y,M') heißt *messbar*, falls das Urbild messbarer Mengen messbar ist.

Bemerkung

Die Definition der Messbarkeit hat Ähnlichkeit mit der Definition der Stetigkeit:

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, falls das Urbild *offener* Mengen *offen* ist.

1.1.5 Beispiel

- W ist ein Erzeugendensystem der Borelalgebra von $\mathbb{R}$.
- Nach Definition ist jede stetige Funktion automatisch messbar, denn es gilt:
  Sei $f : X \to Y$ stetig, dann ist für jede offene Menge Ω nach Definition auch $f^{-1}(\Omega)$ offen.
  Beachte für Mengen $V,V_j \subseteq Y$ mit $j \in \mathbb{N}$:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(V_j)$$
$$f^{-1}(\complement V) = \complement f^{-1}(V)$$

  Die Mengenoperatoren sind also mit dem Bilden des Urbilds verträglich.
  Sei $\mathcal{A} \subseteq Y$ messbar, also in $\mathcal{B}(Y)$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{B}(X)$, also ist f tatsächlich messbar.

1.1.6 Satz (Messbarkeit ist transitiv)

Seien X ein Maßraum und Y,Z topologische Räume mit zugehöriger Borelalgebra.

Ist $f : X \to Y$ messbar und $g : Y \to Z$ messbar, so ist $g \circ f : X \to Z$ messbar.

Beweis

Zu zeigen ist, dass für alle messbaren $A \subseteq Z$ schon $(g \circ f)^{-1}(A)$ messbar ist.
Es genügt wieder A in einem Erzeugendensystem zu betrachten. Wähle als solches die offenen Mengen.
Sei also $A \in \mathcal{O}$, dann ist $g^{-1}(A)$ messbar, weil g messbar ist und daher auch

$$f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(A) = (g \circ f)^{-1}(A)$$

messbar, weil f messbar ist.
Insgesamt ist also $g \circ f$ messbar.

$\square_{1.1.6}$

1.1.7 Bemerkung und Definition (Kompaktifizierung)

Betrachte im Folgenden $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ oder *die Kompaktifizierung der reellen Zahlen* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$.

$$\mathcal{O} = \langle \{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty] | a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty,a) | a \in \mathbb{R}\} \rangle$$

Dies ist die von diesen Mengen erzeugte Topologie.
Konkreter: Bilde die Bijektion

$$\begin{aligned} \phi : \overline{\mathbb{R}} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \tanh(x) & x \in \mathbb{R} \\ +1 & x = +\infty \\ -1 & x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

TODO: Abbildung Kompaktifizierung
Betrachte auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Topologie, die von ϕ induziert wird, also ist $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ genau dann offen, wenn $\phi(\Omega) \subseteq [-1,1]$ offen ist.

1.1.8 Satz (Messbarkeit)

Sei X ein Maßraum.

i) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die Mengen mit $\{x | f(x) > a\}$ messbar sind.

ii) $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ihre Komponenten messbar sind.

iii) Die messbaren Abbildungen $X \to \mathbb{R}^n$ bilden einen Vektorraum.

iv) Ist $f : X \to \mathbb{R}^n$ messbar, so ist auch $|f| : X \to \mathbb{R}_0^+$.
Sind $g,h : X \to \mathbb{R}$ messbar, so auch ihr Produkt $g \cdot h : X \to \mathbb{R}$.

Beweis

i) „$\Rightarrow$“: Ist klar, da $\{x|f(x) > a\} = f^{-1}((a,\infty])$ als Urbild einer messbaren Menge messbar ist.

„$\Leftarrow$“: Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten wir die Borelalgebra, die von den offenen Intervallen und $(a,\infty],[-\infty,a)$ erzeugt wird.

Wir betrachten ein möglichst einfaches Erzeugendensystem:

$$\mathcal{E} = \{(a,\infty]|a \in \mathbb{R}\}$$

Es ist $[-\infty,a] \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Komplemente gebildet werden können.

Es ist $[-\infty,a) = [-\infty,a-1] \cup (a-2,a) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Vereinigungen gebildet werden können.

Es ist $(a,b] = [-\infty,b] \cap (a,\infty) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ und $(a,b) = [-\infty,b) \cap (a,\infty) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Schnitte gebildet werden können.

Also ist $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.

Betrachte nun $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} = \{(a,\infty]|a \in \mathbb{Q}\}$.

Behauptung

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$$

Beweis

Man muss zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ist.
Sei also $(a,\infty]$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so wähle eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \searrow a$.

$$(a,\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n,\infty]}_{\in \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}})$$

$\square_{\text{Behauptung}}$

Weil für $V,V_j \in \overline{\mathbb{R}}$ für $j \in \mathbb{N}$ schon

$$f^{-1}\left(\bigcup_j V_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(V_j)$$
$$f^{-1}(\complement V) = \complement f^{-1}(V)$$

gilt, brauchen wir die Messbarkeit von $f^{-1}(\Omega)$ nur für alle Ω eines Erzeugendensystems zeigen.

$$f^{-1}((a,\infty]) = \{x|f(x) > a\}$$

ist aber nach Voraussetzung messbar, also f messbar.

$\square_{\text{i)}}$

ii) „$\Leftarrow$“: Es genügt wieder ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ zu betrachten.

Sei $z \in \mathbb{Z}^n$, dann ist

$$W_{z,k} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \frac{z_l - 1}{2^{k+1}} < x_l < \frac{z_l + 1}{2^{k+1}}, l \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

ein Würfel mit der Kantenlänge 2^{-k}.

$$f^{-1}(W_{z,k}) = \{x \in X | f(x) \in W_{z,k}\} = \left\{ x \in X \middle| \frac{z_l - 1}{2^{k+1}} < f_l(x) < \frac{z_l + 1}{2^{k+1}}, l \in \{1, \ldots, n\} \right\} =$$
$$= \bigcap_{l=1}^{n} \left\{ x \in X \middle| f_l(x) \in \left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right\} = \bigcap_{l=1}^{n} f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right)$$

Nehme an, die $f_l : X \to \mathbb{R}$ sind messbar. Dann ist

$$f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right)$$

messbar und somit auch:

$$\bigcap_{l=1}^{n} f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right) = f^{-1}(W_{z,k})$$

Daher ist $f : X \to \mathbb{R}^n$ messbar.

„$\Rightarrow$“: Sei f messbar. Dann ist

$$f_l^{-1}((a,b)) = f^{-1}\Big(\overbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{(a,b)}_{l\text{-tes Argument}} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{\text{ist offen in } \mathbb{R}^n} \Big)$$

messbar, da f messbar ist.

$\square_{\text{ii)}}$

iii) Für messbare Abbildungen $f,g : X \to \mathbb{R}^n$ ist auch

$$\begin{aligned} (f,g) : X &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

messbar und für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle + \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

stetig, also insbesondere messbar. Nach 1.1.6 ist dann auch die Verkettung

$$\begin{aligned} \langle + \rangle \circ (f,g) : X &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \alpha f(x) + \beta g(x) \end{aligned}$$

messbar.

$\square_{\text{iii)}}$

iv) Es folgt mit 1.1.6 analog zu iii) für messbare Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}^n$ und $g,h : X \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f| : X &\overset{\text{messbar}}{\to} \mathbb{R}^n \overset{\text{stetig}}{\to} \mathbb{R} \\ x &\overset{\text{messbar}}{\mapsto} f(x) \overset{\text{stetig}}{\mapsto} |f(x)| \\ g \cdot h : X &\overset{\text{messbar}}{\to} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\text{stetig}}{\to} \mathbb{R} \\ x &\overset{\text{messbar}}{\mapsto} (g(x), h(x)) \overset{\text{stetig}}{\mapsto} g(x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

$\square_{1.1.8}$

Bemerkung

ii) ist sehr nützlich, weil wir uns daher im Folgenden oft auf reelle Funktionen beschränken können.
Schön ist, dass Messbarkeit sich auf Grenzwerte überträgt.

1.1.9 Satz (Limes ist messbar)

i) Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen, so sind auch die punktweise definierten Funktionen

$$\sup_n f_n, \ \inf_n f_n, \ \limsup_n f_n, \ \liminf_n f_n$$

messbar.

ii) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, so ist f auch messbar.

Beweis

i) Zu zeigen ist nach 1.1.8 i), dass für jedes $a \in \mathbb{Q}$ schon $\{x | (\sup_n f_n)(x) > a\}$ messbar ist. Die Menge

$$\left\{x \middle| \left(\sup_n f_n\right)(x) > a\right\} = \left\{x \middle| \sup_n (f_n(x)) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x | f_n(x) > a\}}_{\text{messbar, da } f \text{ messbar ist}}$$

ist als Vereinigung messbarer Mengen wieder messbar.

Für $\inf_n f_n$ folgt analog:

$$\left\{x \middle| \left(\inf_n f_n\right)(x) > a\right\} = \left\{x \middle| \inf_n (f_n(x)) > a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x | f_n(x) > a\}}_{\text{messbar, da } f \text{ messbar ist}}$$

Dieser Schnitt messbarer Mengen ist wieder messbar.

Außerdem ist

$$\limsup_n f_n = \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq j} f_n$$

als Verkettung von messbaren Funktionen messbar.

Für den Limes inferior folgt die Behauptung analog.

$\square_{\text{i)}}$

ii) Sei f_n punktweise konvergent. Dann ist

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

nach i) messbar.

$\square_{1.1.9}$

1.1.10 **Definition** (Stufenfunktion)

Eine messbare Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt, heißt *Stufenfunktion*.
TODO: Abbildung Stufenfunktion einfügen

1.1.11 Satz

Ist $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ messbar, so gibt es eine aufsteigende Folge von Stufenfunktionen φ_n, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} (k-1)\cdot 2^{-j} & \text{falls } \exists_{k\in\mathbb{N}_{<j\cdot 2^j}} : (k-1) \leq f(x)\cdot 2^j \leq k \\ j & f(x) > j \end{cases}$$

hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.
Die punktweise Konvergenz $\varphi_j \to f$ ist klar.
TODO: Skizze erstellen

Bemerkung

Der Limes ist sogar gleichmäßig.

$\square_{1.1.11}$

1.1.12 **Korollar** (Approximation durch Stufenfunktionen)

$f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn f punktweiser Limes von Stufenfunktionen ist.

Beweis

„$\Leftarrow$“: Diese Aussage folgt direkt aus Satz 1.1.9 ii).
„$\Rightarrow$“: Nach Satz 1.1.8 ii) genügt es den Fall $n = 1$ zu betrachten. Setze:

$$f_+ := \max(f,0) \qquad\qquad f_- := \max(-f,0)$$

Dann ist $f = f_+ - f_-$.
f_+ und f_- sind analog zu 1.1.8 iv) messbar, da gilt:

$$f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$$
$$f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

Approximiere sie nun gemäß Satz 1.1.11 durch Stufenfunktionen.

$\square_{1.1.12}$

1.1.13 Definition (Maß)

Ein *Maß* auf einem Maßraum $(X,\mathcal{M})$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Ist $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen, so gilt:

$$\mu\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right)}_{\in\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$$

Diese Eigenschaft nennt man σ-Additivität.

$(X,\mathcal{M},\mu)$ heißt auch Messraum mit Maß.

1.1.14 Beispiele

i) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) \in [0,\infty]$ kann beliebig gewählt werden, zum Beispiel $\mu(X) = 1$.

ii) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$; Sei $p \in X$.

$$\mu_p(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist das sogenannte Dirac-Maß $\delta(x-p)\,\mathrm{d}x$.

iii) Sei $X = \{1,\ldots,n\}$ eine endliche Menge und $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Verwende das Zählmaß:

$$\mu(A) := \#A$$

1.1.15 Satz

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $A_n \in \mathcal{M}$.

a) Ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so folgt die Additivität:

$$\mu(A_1 \dot\cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

b) Monotonie:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

c) Für eine aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ messbarer Mengen gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Beweis

a) Setze $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$. Aus der σ-Additivität folgt:

$$\mu\left(A_1 \dot\cup A_2\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(A_1\right) + \mu\left(A_2\right)$$

$\square_{\text{a)}}$

b) Setze $B_1 = A_1$ und für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$B_n := A_n \setminus \{A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}\}$$

TODO: Abbildung von B_n einfügen

Die B_n sind nach Konstruktion paarweise disjunkt und es gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Letzteres folgt, da gilt:

$$\mu\left(A_n\right) = \mu\left(B_n \dot\cup A_n \setminus B_n\right) \overset{\text{a)}}{=} \mu\left(B_n\right) + \underbrace{\mu\left(A_n \setminus B_n\right)}_{\geq 0} \geq \mu\left(B_n\right)$$

$\square_{\text{b)}}$

c) Setze B_n wie in b), so folgt wegen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ schon $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Es folgt:

$$\mu\left(A_n\right) = \mu\left(B_1 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n\right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu\left(B_j\right)}_{\geq 0}$$

$\left(\mu\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton steigende Folge, womit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B_j\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$\square_{1.1.15}$

1.2 Konstruktion des eindimensionalen Lebesgue-Maßes

Ziel

Konstruiere ein Maß auf der Borelmenge von $\mathbb{R}$.
Höhere Dimensionen werden später auf das eindimensionale Maß zurückgeführt.
Das Maß soll die „Länge eines Intervalls“ verallgemeinern.

Ursprünge

HENRI LEON LEBESGUE (1875-1941): Doktorarbeit (1902)
BOREL: Konstruktion „zu Fuß“
CARATHEODORY: Maßerweiterungen (1918); „unser Zugang“:

Idee

Beginne mit „einfachen“ Mengensystemen $\mathcal{A}$:
Sei $X = \mathbb{R}$. Betrachte endliche Vereinigung beschränkter Intervalle:
$A \in \mathcal{A}$ ist darstellbar als eine disjunkte Vereinigung beschränkter Intervalle $I_k \subseteq \mathbb{R}$ mit $|I_k| < \infty$ für $1 \leq k \leq n$:

$$A = I_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} I_n$$

Führe das Maß ein:

$$\mu(A) = |I_1| + \ldots + |I_n|$$

Bemerkung

Beachte, dass $(X,\mathcal{A},\mu)$ *kein* Maßraum ist, da $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist.

1.2.1 Lemma (Maßregeln) und Definition (Mengenalgebra, σ-Additivität, Prämaß)

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ wie oben.

i) $\mathcal{A}$ ist eine *Mengenalgebra*, das heißt:

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$
$$A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$$

ii) μ ist *additiv*, das heißt:

$$\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$$

iii) μ ist *σ-additiv*, das heißt für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$ und falls

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A$$

in $\mathcal{A}$ liegt, gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iv) μ ist *σ-endlich*, das heißt, es gibt für $n \in \mathbb{N}$ schon $S_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(S_n) < \infty$ und:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

Man nennt μ mit diesen Eigenschaften auch ein *Prämaß auf* $\mathcal{A}$ und $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein *Prämaß*.

Beweis

i) Ist klar.

ii) Ist klar.

iii) Setze $B_n := A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.
Dann ist wegen $A \in \mathcal{A}$ nach Voraussetzung und i) mehrfach angewendet $B_n \in \mathcal{A}$.

$$B_n \supseteq B_{n+1} \supseteq \ldots$$

ist eine absteigende Folge von Mengen und es gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Zu zeigen ist:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$$

Denn es gilt:

$$\mu(B_n) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Sei $\varepsilon > 0$, so wähle kompakte $C_n \subseteq B_n$ mit

$$\mu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

zum Beispiel endlich viele kompakte Intervalle.
TODO: Abbildung B_n
Setze $D_n = C_1 \cap \ldots \cap C_n$.
Dann ist $D_n \subseteq B_n$ und es gilt:

$$B_n \setminus D_n = \bigcup_{k=1}^{n} (B_n \setminus C_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \setminus C_k)$$

Damit folgt wegen der Monotonie bei endlichen Mengenoperationen:

$$\mu(B_n \setminus D_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \right) = \varepsilon \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = \varepsilon$$

Also sind die D_n kompakt und steigen ab:

$$D_n \supseteq D_{n+1} \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$$

Letzteres folgt aus:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Deswegen gibt es ein N mit $D_N = \emptyset$, denn ansonsten wähle beliebige $x_n \in D_n$ und diese besitzen einen Häufungspunkt $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

Also folgt

$$\mu(D_n) = 0$$

und damit ergibt sich

$$\mu(B_n) = \underbrace{\mu(D_n)}_{=0} + \underbrace{\mu(B_n \setminus D_n)}_{<\varepsilon} < \varepsilon$$

und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

iv) Wähle $S_n = (-n,n) \in \mathcal{A}$.

$\square_{1.2.1}$

1.2.2 Bemerkung

Beachte, dass im Allgemeinen nicht jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ schon in $\mathcal{A}$ liegt, da $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra, sondern nur eine Mengenalgebra ist.

Die σ-Additivität gilt nur unter folgender zusätzlichen Annahme:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Im Folgenden ist unser Ziel, das Prämaß zu einem Maß zu erweitern.

1.2.3 Theorem (Satz von Hahn über Maßerweiterungen)

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Prämaß.

Dann lässt sich μ *eindeutig* zu einem Maß auf der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *erweitern* und es gilt für $M \in \mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$:

$$\mu(M) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : A_n \in \mathcal{A} \wedge M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

TODO: Abbildung: Überdeckung von M

Bemerkung

Dieser Satz ist recht tief gehend und hat sich über längere Zeit unter Mitwirkung von Lebesgue, Borel und Caratheodory entwickelt.

Der Beweis geht in mehreren Schritten.

1.2.4 Definition (äußeres Maß)

Sei $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra auf X.
Ein *äußeres Maß* auf $\mathcal{N}$ ist eine Abbildung

$$\mu^* : \mathcal{N} \to [0,\infty]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Monotonie: Für $A,B \in \mathcal{N}$ gilt:

$$A \subseteq B \qquad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

iii) Ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{N}$, so gilt:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y_n)$$

Beachte: Die σ-Additivität muss hier nicht gelten!

1.2.5 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Theorem 1.2.3 definiert

$$\mu^*(Y) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : A_n \in \mathcal{A} \wedge Y \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \tag{1.1}$$

ein äußeres Maß auf $\mathcal{N} := \mathcal{P}(X)$.
Es gilt für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu^*(A) = \mu(A) \tag{1.2}$$

Beweis

Zunächst zum Beweis von (1.2):
Sei $A \in \mathcal{A}$ gegeben, dann gilt:

$$A = \underbrace{A}_{=:A_1} \cup \underbrace{\emptyset}_{=:A_2} \cup \underbrace{\emptyset}_{=:A_3} \cup \ldots$$

Und es folgt, weil in der Definition des äußeren Maßes in (1.1) ein Infimum gebildet wird:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Umgekehrt wähle für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$$

und:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \tag{1.3}$$

Dies ist möglich, da das Infimum $\mu^*(A)$ beliebig genau durch ein Element $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ der bestimmenden Menge genähert werden kann.
Wegen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \in \mathcal{A}$ kann man die σ-Additivität verwenden und es folgt:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

Weil dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.
Insgesamt gilt also $\mu(A) = \mu^*(A)$.
Zeige nun, dass μ^* ein äußeres Maß ist.

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ist klar nach der Definition: Wähle als Überdeckung $\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$.

ii) Monotonie: Sei $A \subseteq B$. Wegen $A \subseteq B$ gilt

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : B_n \in \mathcal{A} \wedge B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\} \subseteq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : A_n \in \mathcal{A} \wedge A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \tag{1.4}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : A_n \in \mathcal{A} \wedge A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \leq \\ &\overset{(1.4)}{\leq} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \,\middle|\, \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : B_n \in \mathcal{A} \wedge B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\} = \mu^*(B) \end{aligned}$$

iii) Sei $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{N} = \mathcal{P}(X)$, also nicht in $\mathcal{A}$.
Wähle $A_{jn} \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$Y_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{jn}$$

ist und gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{jn}) \leq \mu^*(Y_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Dies ist aufgrund der Definition des äußeren Maßes immer möglich.
Dann ist

$$Y := \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} A_{jn}$$

und es gilt:

$$\mu^*(Y) \underset{\text{äußeren Maßes}}{\overset{\text{Def. des}}{\leq}} \underbrace{\sum_{n,j=1}^{\infty}}_{\text{auch abzählbar}} \mu(A_{nj}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Y_j) + \varepsilon$$

Da ε beliebig ist, folgt:

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y_n)$$

$\square_{1.2.5}$

1.2.6 Bemerkung

Der große Nachteil des äußeren Maßes ist, dass es nicht σ-additiv ist.

Idee

Wähle ein System von Teilmengen so aus, dass dieses System eine σ-Algebra bildet und außerdem die Einschränkung des äußeren Maßes σ-additiv wird, also ein Maß definiert.

1.2.7 Definition (μ^*-messbar)

Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt μ^**-messbar*, wenn für jede Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

Bemerkung

Also „zerlegt“ man eine beliebige Teilmenge Z mit Hilfe von A, so gilt die Additivität.
TODO: Abbildung $A,Z \subseteq X$ einfügen

1.2.8 Lemma (Caratheodory)

Seien μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{M}$ das System der μ^*-messbaren Mengen von X.
Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und μ^* ein Maß auf $\mathcal{M}$.

Beweis

Gehe schrittweise vor.

- $\emptyset \in \mathcal{M}$ ist klar, wegen:

$$Z = \underbrace{(Z \cap \emptyset)}_{=\emptyset} \dot{\cup} \underbrace{(Z \setminus \emptyset)}_{=Z}$$
$$\mu^*(Z) = \underbrace{\mu^*(Z \cap \emptyset)}_{=0} + \mu^*(Z \setminus \emptyset)$$

- Sei $A \in \mathcal{M}$, das heißt es gilt für alle $Z \subseteq X$:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*\left(Z \setminus \complement A\right) + \mu^*\left(Z \cap \complement A\right)$$

  Also ist auch $\complement A$ μ^*-messbar, das heißt $\complement A \in \mathcal{M}$.

- Seien $A,B \in \mathcal{M}$ und $Z \subseteq X$ beliebig.
  Es genügt $A' = A \cap Z$ und $B' = B \cap Z$ zu betrachten.
  TODO: Abbildung A',B',Z einfügen
  Da B bereits μ^*-messbar ist, gilt für alle $\tilde{Z} \subseteq X$:

$$\mu^*(Z) = \mu^*\left(\tilde{Z} \cap B\right) + \mu^*\left(\tilde{Z} \setminus B\right)$$

  Wähle $\tilde{Z} = A'$, dann gilt

$$\tilde{Z} \cap B = A' \cap B = (A \cap Z) \cap B = A \cap Z \cap B = (A \cap Z) \cap (B \cap Z) = A' \cap B'$$

$$\tilde{Z} \setminus B = A' \setminus B = (A \cap Z) \setminus B = (A \cap Z) \setminus (B \cap Z) = A' \setminus B'$$

  und es folgt:

$$\mu^*\left(A' \cap B'\right) + \mu^*\left(A' \setminus B'\right) = \mu^*\left(A'\right)$$

  Wegen der μ^*-Messbarkeit von A folgt:

$$\mu^*\left(A'\right) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z)$$

  Addiere jetzt die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A' \cap B'\right) + \mu^*\left(A' \setminus B'\right) + \mu^*\left(A'\right) + \mu^*(Z \setminus A) &= \mu^*\left(A'\right) + \mu^*(Z) \\ \mu^*\left(A' \cap B'\right) + \underbrace{\mu^*\left(A' \setminus B'\right) + \mu^*(Z \setminus A)}_{\stackrel{?}{=}\mu^*(Z \setminus (A' \cap B'))} &= \mu^*(Z) \end{aligned}$$

  Verwende nochmals die μ^*-Messbarkeit von A für $\tilde{Z} := Z \setminus (A' \cap B')$:

$$\mu^*\Bigg(\underbrace{A \cap (Z \setminus (A' \cap B'))}_{=A' \setminus B'}\Bigg) + \mu^*\Bigg(\underbrace{(Z \setminus (A' \cap B')) \setminus A}_{=Z \setminus A'}\Bigg) = \mu^*\left(Z \setminus \left(A' \cap B'\right)\right)$$

  Daher ist $A \cap B \in \mathcal{M}$.

- Für $A,B \in \mathcal{M}$ sind dann auch

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap \complement B \\ A \cup B &= \complement\left(\complement A \cap \complement B\right) \end{aligned}$$

  in $\mathcal{M}$.

Wir wissen also, dass $\mathcal{M}$ eine Mengenalgebra ist.

- Additivität: Seien $A,B \in \mathcal{M}$ disjunkte Mengen, dann folgt für $\tilde{Z} := Z^* := Z \cap (A \dot{\cup} B)$:

$$\begin{aligned} \mu^*(Z^*) &= \mu^*(Z^* \cap A) + \mu^*(Z^* \setminus A) = \\ &= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B) \end{aligned}$$

  Verwende dabei, dass A und B disjunkt sind.
  Setze $Z = X$, so folgt:

$$\mu^*(A \dot{\cup} B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

  Wegen $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C = (A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C$ für $C \in \mathcal{M}$ folgt per Induktion für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$:

$$\mu^*(Z \cap (A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n)) = \mu^*(Z \cap A_1) + \ldots + \mu^*(Z \cap A_n)$$

- Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist:
  Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Teilmengen in $\mathcal{M}$ mit:

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$$

  Das heißt, es gilt für alle $Z \subseteq X$:

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z)$$

  Sei also $Z \subseteq X$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ schon

$$A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n \in \mathcal{M}$$

  und deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap (A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n)) + \mu^*(Z \setminus (A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n)) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu^*(Z \cap A_k)}_{\geq 0} + \mu^*(Z \setminus A) \end{aligned}$$

  Verwende dabei:

$$\begin{gathered} A \supseteq A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n \\ \mu^*(Z \setminus A) \leq \mu^*(Z \setminus (A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n)) \end{gathered}$$

  Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, folgt wegen $Z \cap A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z \cap A_k$ und

$$\mu^*(Z \cap A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \setminus B_k)$$

  mit $Z \cap A \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$:

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_k) + \mu^*(Z \setminus A) \geq \\ &\underset{\text{Maß}}{\overset{\text{Def. äußeres}}{\geq}} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt für äußere Maße immer:

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt es $B_i, C_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \supseteq Z \cap A$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \supseteq Z \setminus A$ und:

$$\mu^*(Z \cap A) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(B_i) - \varepsilon$$
$$\mu^*(Z \setminus A) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(C_i) - \varepsilon$$

$(B_i, C_i)_{i\in\mathbb{N}} := (B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots)$ überdeckt Z, womit folgt:

$$\mu^*(Z) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mu^*(B_i) + \mu^*(C_i)) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) + 2\varepsilon$$

Da ε beliebig ist, folgt die Behauptung:

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z)$$

Daher ist $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wieder μ^*-messbar, das heißt $A \in \mathcal{M}$.
Insgesamt folgt, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. $\square_{\text{iii)}}$

- Das Maß ist σ-additiv, denn:
  Sei wieder $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{M}$ ein System paarweise disjunkter messbarer Mengen. Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) \overset{\text{Additivität}}{=} \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \underset{\text{als Infimum}}{\overset{\text{Def. von } \mu^*}{\leq}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

  Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir überall Gleichheit, also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$\square_{1.2.8}$

Beweis von 1.2.3

Sei $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die σ-Algebra, die aus dem Lemma von Caratheodory kommt, und das Maß $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ auf $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
Es bleibt noch zu zeigen:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ (Nur dann wissen wir, dass auch $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$ gilt.)
2. Eindeutigkeit

Zu 1.: Sei $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass A schon μ^*-messbar ist.
Sei $Z \subseteq X$ beliebig. Dann gilt nach der Definition des äußeren Maßes als Infimum:

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, sei $\varepsilon > 0$.
Es gibt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $A_n \in \mathcal{A}$,

$$Z \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

und:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon$$

Dann folgt:

$$Z \cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$$
$$Z \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)$$

Es ergibt sich:

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \overset{\text{Def. äußeres Maß}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon$$

Da ε beliebig ist, ist A tatsächlich μ^*-messbar.
Also ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.
Zu 2.: Zeige schließlich noch die Eindeutigkeit:
Sei μ wie oben konstruiert, ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$.
Wegen der σ-Endlichkeit (vergleiche das Lemma 1.2.1 iv) über Maßregeln) gibt es eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, so dass gilt:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \qquad\qquad \mu(S_n) < \infty$$

Sei $Y \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Zu zeigen ist $\mu(Y) = \nu(Y)$.
Wegen der σ-Additivität genügt es zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(Y \cap S_n) = \nu(Y \cap S_n) \tag{1.5}$$

(Denn: $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y \cap S_n = Y$)
Um paarweise disjunkte Mengen zu bekommen, wähle

$$Z_1 = Y \cap S_1 \qquad Z_2 = Y \cap (S_2 \setminus S_1) \qquad Z_3 = Y \cap (S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)) \qquad \dots$$

und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(Z_n) = \nu(Z_n)$$

Wegen der σ-Additivität von μ und ν folgt:

$$\mu(Y) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(Z_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \nu(Y)$$

Um die Notation zu vereinfachen, zeige anstelle von 1.5 allgemein für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$:

$$\mu(Y \cap A) = \nu(Y \cap A)$$

Oder zeige noch etwas einfacher:
Hat $A \in \mathcal{A}$ endliches Maß und ist $Y \in \mathcal{M}$ mit $Y \subseteq A$, so gilt:

$$\mu(Y) = \nu(Y)$$

Nach Definition von μ gilt

$$\mu(Y) = \mu^*(Y) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \geq \nu(Y)$$

wobei wieder $Y \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $A_n \in \mathcal{A}$ ist.

Wegen der σ-Additivität von ν wissen wir außerdem, dass $\nu(Y) \leq \inf \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt, womit für alle $Y \in \mathcal{M}$ mit $Y \subseteq A$ folgt:

$$\nu(Y) \leq \mu(Y)$$

Diese Ungleichung gilt auch für $\tilde{Y} := A \setminus Y$:

$$\nu(A \setminus Y) \leq \mu(A \setminus Y)$$

Wegen der Additivität folgt:

$$\mu(A) = \nu(A) = \nu(A \setminus Y) + \nu(Y) \leq \mu(A \setminus Y) + \mu(Y) = \mu(A) < \infty$$

Also muss überall schon Gleichheit gelten. Also ist $\mu(Y) = \nu(Y)$. $\square_{1.2.3}$

Bemerkung

Auf die Bedingung, dass das Prämaß σ-endlich ist, kann bei vielen Konstruktionen verzichtet werden.
Setze $\inf \emptyset = \infty$.
Wir haben also das Maß μ auf $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
Falls $(X = \mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ das Prämaß von Lemma 1.2.1, also $\mathcal{A}$ alle offenen Intervalle enthält, ist $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ die Borelalgebra.
Wir wollen jetzt μ auf eine etwas größere σ-Algebra erweitern.

1.2.9 Definition (Lebesguesche Nullmenge)

Eine Menge $A \in \mathcal{P}(X)$ heißt *Lebesguesche Nullmenge*, falls $\mu^*(A) = 0$ ist. Es gilt

$$0 = \mu^*(A) = \inf\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right)$$

mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A$.

Daher gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon$, $A_n \in \mathcal{A}$ und $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Aus $A_n \in \mathcal{A}$ folgt, dass $M := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Borelmenge ist und

$$\mu(M) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon$$

gilt.

Lemma

Ist A eine Lebesguesche Nullmenge, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Borelmenge M_n mit $\mu(M_n) < \frac{1}{n}$.

$$M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$$

ist wieder eine Borelmenge und:

$$\mu(M) \leq \mu(M_n) < \frac{1}{n}$$

Also ist $\mu(M) = 0$ und daher gilt:

- Jede Lebesguesche Nullmenge ist eine Teilmenge einer Borelmenge vom Maß 0.
- Aber nicht jede Lebesguesche Nullmenge ist eine Borelmenge.

1.2.10 Definition (μ-messbar)

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *μ-messbar*, falls A mit Hilfe einer Borelmenge B und einer Lebesgueschen Nullmenge N in folgender Form dargestellt werden kann:

$$A = B \cup N$$

Die μ-messbaren Mengen bilden wieder eine σ-Algebra $\mathcal{M} \supsetneq \mathcal{B}$.

1.2.11 Definition (Lebesgue-Komplettierung, fast überall, Lebesgue-Maß)

$\mathcal{M}$ heißt die *Lebesgue-Komplettierung.*
Die Mengen $A \in \mathcal{M}$ heißen Lebesgue-messbar.
Eine Aussage gilt Lebesgue-fast überall, falls die Punkte, für die sie nicht gilt, eine Lebesguesche Nullmenge bilden.
$(\mathbb{R},\mu,\mathcal{M})$ heißt eindimensionales Lebesgue-Maß.

Bemerkung

Die Konstruktion könnte man analog auch im $\mathbb{R}^n$ durchführen.
Wir betrachten stattdessen später das Produktmaß.

1.3 Konstruktion des Integrals

In diesem Abschnitt sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum, zum Beispiel das eindimensionale Lebesgue-Maß.

1.3.1 Bemerkung und Definition (Treppenfunktion, Integral, Norm)

Eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls $|\varphi(X)| < \infty$ ist und für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Urbild $\varphi^{-1}(\{c\})$ endliches Maß hat.
TODO: Abbildung Treppenfunktion einfügen
Die Treppenfunktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{T}(X)$, denn seien $\varphi,\psi \in \mathcal{T}(X)$ zwei Treppenfunktionen, so gilt:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$
$$|(\varphi + \psi)(X)| \leq |\varphi(X)| + |\psi(X)| < \infty$$

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)^{-1}(\{c\}) &\subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) + \psi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\\ \mu\left((\varphi + \psi)^{-1}(\{c\})\right) &\leq \mu\left(\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) + \psi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) \leq\\ &\leq \underbrace{\sum_{c \in \varphi(X)}}_{\text{endlich}} \underbrace{\mu\left(\varphi^{-1}(c)\right)}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{c \in \psi(X)}}_{\text{endlich}} \underbrace{\mu\left(\psi^{-1}(c)\right)}_{<\infty} < \infty\end{aligned}$$

Die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation ist klar.
Für Treppenfunktionen definiere das Integral:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \varphi(X)} y \cdot \mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) < \infty$$

Wir wollen diesen Integralbegriff durch Approximation auf allgemeine Funktionen ausdehnen. Dazu betrachten wir

$$||\varphi||_1 := \int_X |\varphi| \, \mathrm{d}\mu$$

und nennen dies L^1-„*Norm*“.

Idee

Betrachte die „Cauchy-Folge“ $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \in \mathcal{T}(X)$ für die es für alle $\varepsilon > 0$ schon ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||\varphi_n - \varphi_m|| \leq \varepsilon$ für alle $n,m \in \mathbb{N}_{>N}$ gibt.
Hoffnung: $\varphi_n \overset{?}{\to} \varphi$ und $\displaystyle\int_X \varphi \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$.
Ist $||.||_1$ eine Norm?
Aus der Linearität der Summe und den entsprechenden Eigenschaften des Betrages folgt, wie direkt zu überprüfen ist, dass gilt:

i) $||\varphi||_1 \geq 0$

ii) $||\lambda\varphi||_1 = |\lambda| \cdot ||\varphi||_1$

iii) $||\varphi + \psi|| \leq ||\varphi|| + ||\psi||$

Also ist $||.||_1$ eine Seminorm.
Definitheit:

$$\begin{aligned} ||\varphi||_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_X |\varphi| \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{y\in\varphi(X)} |y| \cdot \underbrace{\mu\left(\varphi^{-1}(y)\right)}_{\text{muss 0 sein für } y\neq 0} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(x) = 0 \underset{x\in X\setminus N}{\forall} \text{ für eine Menge } N \text{ mit } \mu(N) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi = 0 \text{ fast überall} \end{aligned}$$

Also ist $||.||_1$ nicht definit und damit keine Norm.

$$\mathcal{N}(\mu) := \{\varphi \in \mathcal{T}(X) \mid ||\varphi||_1 = 0\}$$

ist ein Teilraum von $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mu) := \mathcal{T}(X)$.

Bemerkung

Auf $\mathcal{T}(\mu)/_{\mathcal{N}(\mu)}$ ist $||.||_1$ eine Norm.
Aber $(\mathcal{T}, ||.||_1)$ ist nicht vollständig, denn man kann zum Beispiel stetige Funktionen bezüglich der L^1-Norm durch Treppenfunktionen approximieren.
Man könnte nun $\mathcal{T}(\mu)$ abstrakt vervollständigen, dies wäre aber unpraktisch.

1.3.2 Lemma

Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge in $\mathcal{T}(X)$.
Dann gibt es eine Teilfolge $\left(\varphi_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, die fast überall punktweise konvergent ist, also:

$$\varphi_{n_j}(x) \mapsto \varphi(x) \qquad \text{für fast alle } x \in X$$

Zusätzlich existiert für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $Z \subseteq X$ mit $\mu(Z) < \varepsilon$, sodass

$$\varphi_{n_j}\Big|_{X\setminus Z} \rightrightarrows \varphi\Big|_{X\setminus Z}$$

gleichmäßig konvergiert.
Beachte: Für eine L^1-Cauchy-Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \in \mathcal{T}$ ist

$$z_n := \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, weil für $m \in \mathbb{N}_{>n}$ gilt:

$$\begin{aligned}|z_n - z_m| = \left|\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu - \int_X \varphi_m \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X (\varphi_n - \varphi_m)\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \\ \leq \int_X |\varphi_n - \varphi_m|\,\mathrm{d}\mu = ||\varphi_n - \varphi_m|| \to 0\end{aligned}$$

Beweis

Wähle induktiv eine Teilfolge (zur Einfachheit wieder mit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnet), sodass für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt:

$$||\varphi_n - \varphi_k||_1 \leq 2^{-2k}$$

Setze:

$$Y_n := \left\{x \mid |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \geq 2^{-n}\right\}$$

Die Y_n sind messbar, denn die Funktion $\varphi_{n+1} - \varphi_n \in \mathcal{T}$ messbar ist und daher auch $|\varphi_{n+1} - \varphi_n|$, weswegen das Urbild

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n|^{-1}\left(\left[2^{-n},\infty\right]\right)$$

der Borelmenge $[2^{-n},\infty]$ messbar ist. Es folgt:

$$\begin{aligned}&2^{-n}\cdot\mu(Y_n) \leq \int_{Y_n} |\varphi_{n+1} - \varphi_n|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |\varphi_{n+1} - \varphi_n|\,\mathrm{d}\mu \leq 2^{-2n} \\ &\Rightarrow \quad \mu(Y_k) \leq 2^{-k}\end{aligned}$$

Setze nun $Z_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} Y_n$, dann folgt:

$$\mu(Z_k) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{\leq} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(Y_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot 2^{-k}$$

Sei $x \notin Z_k$, dann ist $x \notin Y_n$ für alle $n \geq k$:

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq 2^{-n}$$

Die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} |\varphi_{n+1} - \varphi_n|$ konvergiert absolut und gleichmäßig in x.
Also ist $\varphi_n(x)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, gleichmäßig in x.

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x) \qquad \underset{x\notin Z_k}{\forall}$$

Für $m \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| &\leq |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| + \ldots + |\varphi_{m+}(x) - \varphi_m(x)| = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2 \cdot 2^{-m}\end{aligned}$$

Bilde nun $Z = \bigcap_{k=0}^{\infty} Z_k$. Für jedes $x \notin Z$ gibt es ein $k := k(x)$ mit $x \in Z_k$ und deswegen konvergiert

$$\varphi_k(x) \to f(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \in \mathbb{R}$$

punktweise.

$$\mu(Z) = \mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} Z_k\right) \leq \mu(Z_k) \leq 2 \cdot 2^{-k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Da k beliebig ist, folgt $\mu(Z) = 0$, also ist Z eine Lebesguesche Nullmenge.
Beachte: Für eine L^1-Cauchy-Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \in \mathcal{T}(X)$ ist

$$z_n := \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

eine Folge reeller Zahlen.
Diese Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, weil gilt:

$$\begin{aligned}|z_n - z_m| &= \left|\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu - \int_X \varphi_m \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X (\varphi_n - \varphi_m)\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \\ &\leq \int_X |\varphi_n - \varphi_m|\,\mathrm{d}\mu = ||\varphi_n - \varphi_m||_1 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Wir können also folgenden Grenzwert bilden:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

1.3.3 **Definition** (Lebesgue-integrabel, Integral)

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *(Lebesgue-)integrabel*, wenn es eine L^1-Cauchy-Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Die Zahl

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

heißt das *Integral* von f über X. Für eine messbare Menge $Y \subseteq X$ setzt man

$$\int_Y f \mathrm{d}\mu = \int \chi_Y \cdot f \mathrm{d}\mu$$

wobei

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in Y \\ 0 & \text{falls } x \notin Y \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von Y ist.
Beachte, dass $\chi_Y \cdot \varphi_n \to \chi_Y \cdot \varphi$ fast überall konvergiert.

1.3.4 Lemma

Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei L^1-Cauchy-Folgen von Treppenfunktionen, die beide fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \psi_m|| = 0$$

Also ist:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis

Setze $\tau_n := \varphi_n - \psi_n$. Dann ist $\tau_n \in \mathcal{T}(X)$ und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge und $\tau_n \to 0$ fast überall punktweise konvergent.
Zu zeigen ist: $\tau_n \to 0$ in L^1, also $||\tau_n||_1 \to 0$.

- Es genügt, dies für eine Teilfolge zu zeigen, denn nehme an, dass $\left|\left|\tau_{n_j}\right|\right| \to 0$ konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||\tau_n - \tau_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n,m \in \mathbb{N}_{\geq N}$.
Da $\left|\left|\tau_{n_j}\right|\right| \to 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}_{>N}$ mit $||\tau_K|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, womit für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ folgt:

$$||\tau_n|| \leq ||\tau_n - \tau_K|| + ||\tau_K|| \leq \varepsilon$$

- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wähle die Teilfolge (die wir zur Einfachheit wieder mit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen) so, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt:

$$||\tau_n - \tau_k|| \leq \varepsilon$$

τ_n konvergiert gleichmäßig auf $X \setminus Z$ und $\mu(Z) < \frac{\varepsilon}{||\tau_k||_\infty}$. (genau wie in Lemma 1.3.2)
Es gilt:

$$||\tau_k||_\infty := \sup(\tau_k) < \infty$$

Denn τ_k nimmt als Treppenfunktion nur endlich viele Funktionswerte an. Setze:

$$M = \{x | \tau_k(x) \neq 0\} \qquad \text{(wieder für unser festes } k\text{)}$$

$$||\tau_n||_1 = \int_X |\tau_n| \mathrm{d}\mu \leq \int_Z |\tau_n| \mathrm{d}\mu + \int_{M\setminus Z} |\tau_n| \mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus M} |\tau_n| \mathrm{d}\mu$$

$$\int_Z |\tau_n| \mathrm{d}\mu \leq \int_Z |\tau_n - \tau_k| + \int_Z |\tau_k| \leq ||\tau_n - \tau_k||_1 + \underbrace{\sup |\tau_k| \cdot \mu(Z)}_{<\varepsilon \text{ nach Konstruktion von } Z \text{ auf } M\setminus Z} \leq$$

$$\leq ||\tau_n - \tau_k||_1 + \varepsilon$$

$$\int_{M\setminus Z} |\tau_n| \mathrm{d}\mu \leq \sup_{M\setminus Z} |\tau_n| \cdot \underbrace{\mu(M)}_{<\infty,\text{ da } \tau_n \text{Treppenfkt.}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{da } \tau_n \rightrightarrows 0$$

$$\int_{X\setminus M} |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_{X\setminus M} |\tau_n - \tau_k| \,\mathrm{d}\mu \leq ||\tau_n - \tau_k||$$

(Da $\tau_k = 0$ auf $X \setminus M$ ist.)
Also insgesamt:

$$||\tau_n||_1 \leq 2\,||\tau_n - \tau_k||_1 + \varepsilon + \varepsilon \qquad \text{falls } n > N(\varepsilon)$$

Indem wir k genügend groß wählen können wir erreichen, dass $||\tau_n - \tau_k||_1 < \varepsilon$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}_{>N(k)}$:

$$||\tau_n||_1 \leq 4\varepsilon$$

$\square_{1.3.4}$

1.3.5 **Satz** (Regeln für das Integral)

i) Die integrablen Funktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mu)$. Das Integral ist darauf eine lineare Abbildung:

$$\int : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$$

ii) Sind $f,g \in \mathcal{L}^1$ und ist $f \geq g$ fast überall, so folgt:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \mathrm{d}\mu \qquad \text{(Monotonie)}$$

iii) Sei $Y \subseteq X$ messbar und von endlichem Maß, dann gilt:

$$\int_X \chi_Y \mathrm{d}\mu = \int_Y \mathrm{d}\mu = \mu(Y)$$

iv) Seien Y und Z messbar und disjunkt. Ist außerdem $f : Y \cup Z \to \mathbb{R}$ integrabel, dann sind $f\Big|_Y$ und $f\Big|_Z$ integrabel und es gilt:

$$\int_{Y\cup Z} f \mathrm{d}\mu = \int_Y f \mathrm{d}\mu + \int_Z f \mathrm{d}\mu$$

v) Ist f integrabel, so auch $|f|$ und es gilt:

$$\left| \int_X f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

vi) Die L^1-Norm ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$. Das Integral ist stetig.

vii) Ändert man eine integrable Funktion auf einer Nullmenge ab, so ist die neue Funktion wieder integrabel und das Integral ändert sich nicht.

Bemerkung

Aus v) folgt, dass auch die Funktionen

$$f_+ := \frac{1}{2}\left(|f| + f\right) = \max\left(0,f\right)$$
$$f_- := \frac{1}{2}\left(|f| - f\right) = \max\left(0,-f\right)$$

integrabel sind.

Beweis

Seien $f,g \in \mathcal{L}^1\left(X\right)$. Wähle L^1-Cauchy-Folgen $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,$\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass:

$$\varphi_n \to f \qquad \text{fast überall}$$
$$\gamma_n \to f \qquad \text{fast überall}$$

Wir wissen dann, dass die Integrale $\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu$, $\int_X \gamma_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu$ konvergieren.
Es genügt deshalb, die Rechenregeln für Treppenfunktionen zu überprüfen und dann zum Limes überzugehen.
Zum Beispiel ist $\varphi_n + \gamma_n$ eine L^1-Cauchy-Folge und es konvergiert $\varphi_n + \gamma_n \to f + g$ fast überall, womit folgt:

$$\int_X \left(f+g\right)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \left(\varphi_n + \gamma_n\right)\mathrm{d}\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu + \int_X \gamma_n \mathrm{d}\mu\right) \underset{\text{für Folgen}}{\overset{\text{Konvergenzsätze}}{=}} \int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$$

Zu v): Wähle eine L^1-Cauchy-Folge $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \to f$. Dann ist $\left(|\varphi_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine L^1-Cauchy-Folge, da gilt:

$$\left||\varphi_n| - |\varphi_m|\right| \le |\varphi_n - \varphi_m|$$

$\square_{1.3.5}$

1.3.6 Satz

Integrable Funktionen sind μ-messbar, also messbar nach Änderung auf einer Nullmenge und es gilt:

$$\|f\|_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0 \quad \text{fast überall}$$

Beweis

Nach Satz 1.1.9 ist der punktweise Limes messbarer Funktionen wieder messbar, weswegen f als punktweiser Limes von Treppenfunktionen messbar.
Nach Satz 1.1.11 ist $|f|$ der Limes einer aufsteigenden Folge $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen, also:

$$0 \le \varphi_n \le |f|$$

Die φ_n sind sogar Treppenfunktionen, denn $|f|$ ist außerhalb einer Menge Z gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen.
Wäre ein $\varphi_n = c > 0$ auf einer Menge M vom Maß $\mu(M) = \infty$, dann wäre eine Treppenfunktion größer als $\frac{c}{2}$ auf $M \setminus Z$, was ein Widerspruch ist, da $\mu(M \setminus Z) = \infty$ ist.
Aus $\|f\|_1 = 0$ folgt $\|\varphi_n\|_1 = 0$ und somit $\varphi_n = 0$ fast überall.

$$\mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi_n > 0\}\right) = 0$$

Also gilt fast überall $f = 0$. $\square_{1.3.6}$

1.3.7 **Satz** (Normkonvergenzsatz)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge integrabler Funktionen (nicht notwendigerweise Treppenfunktionen!).
Dann gilt:

i) Es gibt eine Teilfolge $\left(f_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_j} \to f$ fast überall.

   Außerdem gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $Z \subseteq X$ mit $\mu(Z) < \varepsilon$ und $f_{n_j}\big|_{X\setminus Z} \rightrightarrows f\big|_{X\setminus Z}$.

ii) Je zwei solche Grenzfunktionen stimmen fast überall überein.

iii) $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und insbesondere gilt:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis

i) Dies beweist man genauso wie im Konstruktionslemma 1.3.2.

   Beachte nun, dass

$$Y_k := \left\{|f_{k+1} - f_k| \geq 2^{-k}\right\}$$

   nach 1.3.5 und 1.3.6 messbar ist. $\square_{\text{i)}}$

ii) Sei $\left(f_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}} \to f$ eine konvergente Teilfolge, also $\left\|f - f_{n_j}\right\|_1 \to 0$ und sei $\left(f_{m_j}\right)_{j\in\mathbb{N}} \to g$ eine weitere konvergente Teilfolge, also $\left\|f_{m_j} - g\right\|_1 \to 0$.

   Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$\|f - g\|_1 \leq \underbrace{\left\|f - f_{n_j}\right\|_1}_{\to 0} + \underbrace{\left\|f_{n_j} - f_{m_j}\right\|_1}_{\to 0 \text{ (C.-F.)}} + \underbrace{\left\|f_{m_j} - g\right\|_1}_{\to 0} \to 0$$

   Also $\|f - g\|_1 = 0$ und somit $f = g$ fast überall. $\square_{\text{ii)}}$

iii) Vorüberlegung: Falls $\varphi_n \to g$ fast überall konvergiert und eine L^1-Cauchy-Folge von Treppenfunktionen ist, dann gilt

$$\|\varphi_n - g\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - g\|_1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1 = 0$$

nach der Definition einer Cauchy-Folge.

Zeige nun, dass f integrabel ist:

Wir können annehmen, dass $f_n \to f$ punktweise konvergiert, sonst gehe zu einer Teilfolge über. Außerdem gibt eine Menge $Z \subseteq X$ mit $\mu(Z) = 0$ und:

$$f_n\big|_{X\setminus Z} \rightrightarrows f$$

Wähle eine Folge von Treppenfunktionen τ_n so, dass $|f_n - \tau_n| < \frac{1}{n}$ auf $X\setminus Z_n$ mit $\mu(Z_n) < \frac{1}{2^n}$ und $\|f_n - \tau_n\|_1 < \frac{1}{n}$.

Es folgt:

$$\|\tau_l - \tau_n\|_1 \leq \|\tau_l - f_l\| + \|f_l - f_n\| + \|f_n - \tau_n\| \xrightarrow{n,l\to\infty} 0$$

Also ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge. Zudem ist klar, dass $\tau_n \to f$ fast überall konvergiert, nämlich außerhalb von:

$$Z := \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty} Z_l\right)$$

Wegen

$$\mu\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} Z_l\right) < \sum_{l=k}^{\infty}\frac{1}{2^l} = 2\cdot 2^{-k}$$

ist $\mu(Z) = 0$. Also konvergiert $\tau_n \to f$ fast überall und daher ist f nach der Definition integrabel.

Nach der Vorüberlegung gilt $\|\tau_n - f_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Mit der Dreiecksungleichung folgt für eine Teilfolge $\left(f_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen f konvergiert:

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - \tau_n\|_1 + \|\tau_n - f\|_1 \to 0$$

Da f_n eine L^1-Cauchy-Folge ist, folgt $\|f_n - f\|_1 \to 0$ auch für die gesamte Folge.

Hieraus folgt auch, dass $\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$ ist.

$\square_{1.3.7}$

1.3.8 Proposition und Definition (($L^1(X,\mu)$, $\|.\|_1$) ist normierter Vektorraum)

$\mathcal{L} := \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,\mu)$ bezeichnet die *Menge aller integrablen Funktionen.* Auf dieser gibt es die L^1-Seminorm.

Der *Kern*

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}(X) := \mathcal{N}(X,\mu) := \left\{f\in\mathcal{L}\middle|\ \|f\|_1 = 0\right\} \subseteq \mathcal{L}$$

dieser Seminorm ist ein Untervektorraum.

Betrachte die Äquivalenzrelation:

$$f \sim \tilde{f} \Leftrightarrow f - \tilde{f} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \left\|f - \tilde{f}\right\|_1 = \int_X \left|f - \tilde{f}\right|\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f - \tilde{f} = 0 \text{ fast überall}$$

Durch herausdividieren des Kerns erhalten wir die Menge der Äquivalenzklassen $L^1(X,\mu) := \mathcal{L}/\mathcal{N}$.

$\left(L^1(X,\mu), \|.\|_1\right)$ ist ein normierter Raum.

Beweis

Das Integral auf $L^1(X,\mu)$ ist definiert durch:

$$\int_X [f]\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

Es ist wohldefiniert, denn die Funktionen einer Äquivalenzklasse unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge und dies ändert das Integral nicht.
Zudem gilt:

$$\|[f]\|_1 = \|f\|_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ fast überall} \quad \Leftrightarrow \quad [f] = 0 \in L^1(X,\mu)$$

Daher ist $\left(L^1(X,\mu), \|.\|_1\right)$ ein normierter Vektorraum. $\square_{1.3.8}$

1.3.9 Korollar $((L^1(X,\mu), \|.\|_1)$ ist Banachraum$)$

$\left(L^1(X,\mu), \|.\|_1\right)$ ist ein Banachraum.

Beweis

Zu zeigen ist, dass $\left(L^1(X,\mu), \|.\|_1\right)$ vollständig ist.
Sei also $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
Nach 1.3.7 gibt es eine Teilfolge $\left(f_{n_j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_j} \to f$ fast überall. Außerdem ist die Grenzfunktion f eindeutig bis auf eine Nullmenge und es gilt $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Daher gilt $[f_n] \to [f]$ und $[f]$ ist eindeutig, da sich die Grenzfunktionen nur auf einer Nullmenge unterscheiden. $\square_{1.3.9}$

1.3.10 Bemerkung

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.
Frage: Wann ist die Funktion integrierbar?
Die Definition lautet:
f ist integrierbar, falls es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die

- L^1-Cauchy-Folge ist, und
- $\varphi_n \to f$ fast überall punktweise konvergiert.

Dann gilt:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

Einfacher ist folgende Methode:
Die Funktion $|f| : X \to [0,\infty)$ ist wieder messbar und

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X \varphi\mathrm{d}\mu \middle| 0 \le \varphi \le f \text{ ist Stufenfunktion}\right\} \in [0,\infty]$$

ist wohldefiniert.

Falls (X,μ) schon σ-endlich ist, kann man hier „Stufenfunktion“ durch „Treppenfunktion“ ersetzen, denn es gilt:

Für eine Stufenfunktion $0 \leq \varphi \leq f$ gilt $|\varphi(X)| < \infty$ und φ ist messbar.

$$\varphi(x) = \sum_{y \in \varphi(X)} y \cdot \chi_{\varphi^{-1}(y)}(x) \geq 0$$

Betrachte eine Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ mit $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$.

$$\varphi_n(x) := \sum_{y \in \varphi(X)} y \cdot \chi_{A_n \cap \varphi^{-1}(y)}(x)$$

Die Folge $\varphi_n \xrightarrow{n \to \infty} \varphi$ konvergiert punktweise und ist aufsteigend.

Also sind die φ_n Treppenfunktionen und nach monotoner Konvergenz gilt:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

Also gilt:

$$\sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \middle| 0 \leq \varphi \leq f \text{ ist Stufenfunktion}\right\} = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \middle| 0 \leq \varphi \leq f \text{ ist Treppenfunktion}\right\}$$

1. Fall: $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Dann ist f nicht integrierbar $\left(f \notin L^1\right)$, weil die L^1-Norm $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$ nicht endlich ist.

2. Fall: $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist f tatsächlich integrierbar, wie man folgendermaßen sieht:
   Zerlege $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ = \max\{f,0\}$ und $f_- = \max\{-f,0\}$.
   Die Funktionen $f_\pm$ sind messbar und nicht negativ, außerdem gilt $f_\pm \leq |f|$. Damit folgt:

   $$\int_X f_+ \mathrm{d}\mu < \infty \qquad \int_X f_- \mathrm{d}\mu < \infty$$

   Nach Satz 1.1.11 gibt es Folgen von Treppenfunktionen $(\varphi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n^+ \nearrow f_+$ und $\varphi_n^- \nearrow f_-$.
   Setze $f_n := \varphi_n^+ - \varphi_n^-$. Dann konvergiert $f_n \to f$ und es gilt $|f_n| \leq |f|$.
   Nach dominierter Konvergenz ist dann f integrierbar und es gilt:

   $$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

1.4 Die Konvergenzsätze

Frage

Wenn $f_n \to f$ punktweise konvergiert und alle f_n integrabel sind, wann ist f integrabel?

Wann kann man das Integral und den Grenzwert vertauschen?

1.4.1 Beispiel

$$f_n := \begin{cases} n^2\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{falls } \text{-}\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Abbildung δ-Funktions-Näherung

Für alle $x \neq 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Also folgt:

$$0 = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Derartige Probleme kann man auf zwei Arten vermeiden:

a) Die f_n sind monoton steigend.

b) Die f_n werden von einer integrablen Funktion g dominiert.

1.4.2 Theorem (monotone Konvergenz, Beppo-Levi)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in L^1(X)$ eine fast überall monoton steigende Folge integrabler Funktionen, also $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ für fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen f konvergiere, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei das Integral $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq C < \infty$ beschränkt und f_n.

Dann gilt für das Integral:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis

Da $L^1(\mathbb{R},\mu)$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge ist.

Für $n \geq m$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_X |f_n - f_m|\,\mathrm{d}\mu \overset{f_n \text{ mon. steigend}}{=} \int_X (f_n - f_m)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_n \mathrm{d}\mu - \int_X f_m \mathrm{d}\mu$$

Da $\left(\int_X f_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und durch C beschränkt ist, ist es demnach eine Cauchy-Folge. $\square_{1.4.2}$

1.4.3 Theorem (dominierte Konvergenz)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in L^1(X)$ eine Folge integrabler Funktionen, die von der integrablen Funktion $g \in L^1$ dominiert sind, das heißt $|f_n| \leq g \in L^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in X$, und $f_n \to f$ konvergiere fast überall.

Dann ist $f \in L^1$ integrabel und für das Integral gilt:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis

Zeige wiederum, dass f_n eine L^1-Cauchy-Folge ist.
Ohne Einschränkung konvergiere $f_n \to f$ überall und es gelte $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bilde die Funktionenfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch:

$$h_k(x) = \sup\left\{|f_n(x) - f_m(x)| \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N}_{\geq k}\right\}$$

Behauptung Die h_k sind integrabel.

Beweis $|f_n - f_m|$ ist für alle $n,m \in \mathbb{N}$ integrabel. Also ist für alle $l \in \mathbb{N}_{\geq k}$ schon

$$v_l := \max\left\{|f_n - f_m| \,\middle|\, k \leq n,m \leq l\right\}$$

integrabel.
Außerdem ist $(v_l)_{l\in\mathbb{N}_{\geq k}}$ eine monoton steigende Folge und nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\int_X v_l \mathrm{d}\mu \leq 2 \int_X g \mathrm{d}\mu$$

Wegen der monotone Konvergenz folgt $h_k = \lim\limits_{l\to\infty} v_l \in L^1$. $\square_{\text{Behauptung}}$

$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also eine absteigende Folge integrabler Funktionen, die punktweise gegen 0 konvergiert. Damit folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X h_k \mathrm{d}\mu = 0$$

Also gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_X |f_n - f_m| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X h_N \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine L^1-Cauchy-Folge. $\square_{1.4.3}$

1.4.4 Beispiel

TODO: Abb1 einfügen
Betrachte die Funktionenfolge für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_n(x) \to 0$ konvergiert punktweise, aber es gilt:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Beachte, dass für jede dominierende Funktion g schon $\int_{-1}^{1} g \mathrm{d}\mu = \infty$ gilt, weswegen $g \notin L^1$ ist, der Satz über dominierte Konvergenz also nicht anwendbar ist.

1.5 Integration nicht negativer Funktionen

1.5.1 Definition (Stufenfunktion, Treppenfunktion)

Eine Funktion $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine *Stufenfunktion*, falls φ messbar und $|\varphi(X)| < \infty$ ist. Für eine Stufenfunktion definiert man das Integral:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \varphi(x)} y \cdot \mu\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$

Eine Funktion $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine *Treppenfunktion*, falls φ eine Stufenfunktion und für alle $c \neq 0$ schon $\mu\left(\varphi^{-1}(c)\right) < \infty$ gilt.
Sei $f : X \to [0,\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (das heißt f ist nicht negativ und darf den Wert ∞ annehmen) messbar, aber nicht notwendigerweise in L^1, dann definiere:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \middle| \varphi \text{ ist eine Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\} \tag{1.6}$$

1.5.2 Beispiel

Für $X = \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Stufenfunktion, aber keine Treppenfunktion.

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{y \in \varphi(x)} y \cdot \mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \infty = \infty$$

Für eine Treppenfunktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ gilt für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schon $\mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) < \infty$, weswegen $\int_X \varphi \mathrm{d}\mu < \infty$ ist.
Für eine Stufenfunktion $\varphi : X \to [0,\infty]$ gilt für alle $y \in [0,\infty]$ schon $\mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) \leq \infty$ und $\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \leq \infty$ ist wohldefiniert.

1.5.3 Satz

Ist $f \in L^1$, so stimmt (1.6) tatsächlich mit der früheren Definition des Integrals in 1.3.3 überein.

Beweis

Sei $f \in L^1$. Wegen der Monotonie gilt für alle Stufenfunktionen φ mit $0 \leq \varphi \leq f$ schon

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu$$

und nach dem Übergang zum Supremum:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \middle| \varphi \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

Umgekehrt gibt es nach Satz 1.1.11 eine aufsteigende Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Nach dem Theorem von der monotonen Konvergenz gilt dann:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \leq \sup\left\{\int_X \varphi\mathrm{d}\mu \middle| \varphi \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

$\square_{1.5.3}$

Also ist (1.6) tatsächlich eine Erweiterung des Integralbegriffs.

1.5.4 Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ \infty & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt für das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\mu = +\infty$$

TODO: Abb2 einfügen

Denn es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \mathrm{d}\mu = n^2 \cdot \frac{2}{n} = 2n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Die Rechenregeln für Integrale übertragen sich alle, wenn man sinnvoll mit „∞" umgeht, also (konsequent) $0 \cdot \infty = 0$ als Regel verwendet. Beachte, dass $\infty - \infty$ nicht definiert ist.

Betrachte zum Beispiel die Funktion:

$$\begin{aligned} f : [0{,}1] &\to [0{,}\infty] \\ x &\mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$\int_X f\mathrm{d}\mu = 0$, da jede Stufenfunktion φ mit $0 \leq \varphi \leq f$ identische verschwindet.

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_{y\in f(X)} y \cdot \mu\left(f^{-1}(y)\right) = \infty \cdot \mu\left(\mathbb{Q} \cap [0{,}1]\right) + 0 \cdot \mu\left((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0{,}1]\right) = \infty \cdot 0 + 0 \cdot \infty = 0$$

1.5.5 Theorem (monotone Konvergenz)

Sei $f_n : X \to [0{,}\infty]$ eine monoton aufsteigende Folge messbarer Funktionen mit:

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

Dann ist:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Beachte: Ist $\int_X f\mathrm{d}\mu = \infty$, so ist $f \notin L^1$ und f *nicht* integrierbar.

Beweis

Ist die linke Seite endlich, so sind alle f_n fast überall endlich, und man kann Theorem 1.4.2 anwenden.
Ist die linke Seite unendlich, so wegen der Monotonie auch die rechte Seite. $\square_{1.5.5}$

1.6 Zusammenhang zum Riemann-Integral

1.6.1 Definition (Zerlegung, Feinheit, Ober- und Untersumme, Riemann-integrierbar)

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Eine *Zerlegung* $Z = \{x_0, \ldots, x_{k+1}\}$ ist eine Menge von Punkten $x_j \in I$ mit:

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} = b$$

Die *Feinheit der Zerlegung* Z ist:

$$\Delta(Z) := \max_{j=0,\ldots,k} (x_{j+1} - x_j)$$

Nun kann man die *Obersumme*

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{j=0}^{k} \sup_{[x_j, x_{j+1}]} (f \cdot |x_{j+1} - x_j|)$$

und die *Untersumme*

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{j=0}^{k} \inf_{[x_j, x_{j+1}]} (f \cdot |x_{j+1} - x_j|)$$

bilden.
f heißt *Riemann-integrierbar* (kurz: R-integrierbar), falls es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Zerlegung Z gibt, mit:

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \leq \varepsilon$$

Das Riemann-Integral ist dann definiert als:

$$R\text{-}\int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_Z \underline{S}_Z(f)$$

1.6.2 Satz

f ist genau dann R-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ schon ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \leq \varepsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit $\Delta(Z) < \delta$.

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{1.6.2}$

1.6.3 Satz

Jede R-integrierbare Funktion ist Lebesgue-integrabel und es gilt:

$$R\text{ -}\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\mathrm{d}\mu$$

Insbesondere ist jede stetige Funktion auf $[a,b]$ integrabel.

Beweis

Sei f eine R-integrierbare Funktion. Dann gibt es eine absteigende Familie von Treppenfunktionen ψ_n und eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen φ_n mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

und:

$$\|\psi_n - \varphi_n\| \to 0$$

Genauer: Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegungen Z_n mit $\Delta(Z_n) < \frac{1}{n}$ und $Z_{n+1} \supseteq Z_n$, das heißt Z_{n+1} ist eine Verfeinerung von Z_n.

$$\begin{aligned}\psi_n\Big|_{[x_j,x_{j+1})} &= \sup_{[x_j,x_{j+1})}(f)\\ \varphi_n\Big|_{[x_j,x_{j+1})} &= \inf_{[x_j,x_{j+1})}(f)\end{aligned}$$

TODO: Abb4 einfügen

$$\|\psi_n - \varphi_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi_n - \varphi_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{k}\left(\sup_{[x_j,x_{j+1})}(f) - \inf_{[x_j,x_{j+1})}(f)\right)\cdot |x_{j+1}-x_j| \xrightarrow{\Delta(Z)\to 0} 0$$

Da $|\varphi_n| \leq |\psi_1| + |\varphi_1|$ und $|\psi_1| + |\varphi_1| \in L^1$, kann man den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhält

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \varphi\mathrm{d}\mu$$

und $\varphi_n \to \varphi$ konvergiert fast überall.
Genauso ist $|\psi_n| \leq |\psi_1| + |\varphi_1|$ und $|\psi_1| + |\varphi_1| \in L^1$, also nach der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \psi_n\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \psi\mathrm{d}\mu \quad \text{und } \psi_n \to \psi \text{ fast überall}$$

Da

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi_n\mathrm{d}\mu &= R\text{ -}\int_I \psi_n\mathrm{d}\mu \to R\text{ -}\int_I f\mathrm{d}x\\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n\mathrm{d}\mu &= R\text{ -}\int_I \varphi_n\mathrm{d}\mu \to R\text{ -}\int_I f\mathrm{d}x\end{aligned}$$

gilt, folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi - \psi| \, \mathrm{d}\mu = 0 = \|\varphi - \psi\|_1$$

Also gilt $\varphi = \psi$ fast überall. Da $\varphi \leq f \leq \psi$ gilt, ist f Lebesgue-integrabel und es gilt:

$$\int_I f \mathrm{d}\mu = R \text{ -}\int_I f \mathrm{d}x$$

$\square_{1.6.3}$

1.6.4 Beispiele

i) $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist fast überall 0, also ist f Lebesgue-integrabel und $\int_{[0,1]} f \mathrm{d}\mu = 0$.
Aber für alle Zerlegungen gilt $\overline{S}_f - \underline{S}_f \geq 1$, also ist f *nicht* R-integrierbar.

ii) Konstruiere nun eine Funktion f, die Lebesgue-integrabel, aber nicht R-integrabel ist, selbst wenn man sie auf einer Nullmenge beliebig abändert.
$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. Setze für alle $n \in \mathbb{N}$ nun

$$U_n := B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(q_n)$$

mit $0 < \varepsilon < 1$ und:

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Dann gilt:

$$\mu(U) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$$

Setze $f := \chi_U$, dann ist $f|_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 1$ und es gilt:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \mu(U) \leq 2\varepsilon$$

Aber für alle Zerlegungen gilt $\overline{S}_f - \underline{S}_f \geq 1$, also ist f *nicht* R-integrierbar.

1.6.5 Satz

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist.

(ohne Beweis)

1.6.6 Satz

Sei $M_n \subseteq X$ eine aufsteigende Folge messbarer Mengen mit:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

Dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann integrabel, wenn $f\Big|_{M_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrabel ist und $\int_{M_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ konvergiert.
Also sind uneigentliche Integrale im Lebesgue-Integral schon mit berücksichtigt.

Beweis

„$\Rightarrow$“: Sei f integrabel, dann sind $f\Big|_{M_n}$ und $|f|\Big|_{M_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrabel. Setze:

$$a_n := \int_{M_n} |f| \,\mathrm{d}\mu := \int_X \chi_{M_n} |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge, die beschränkt ist, und daher konvergiert. Für alle $x \in X$ gilt:

$$\chi_{M_n} |f| \xrightarrow{n\to\infty} |f|$$

Die Monotone Konvergenz liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Da $|\chi_{M_n} f| \leq |f| \in L^1$ ist, liefert die dominierte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

„$\Leftarrow$“: Definiere $f_n := \chi_{M_n} \cdot f$. Wir nehmen an, dass $\int_X |f| \leq C \in \mathbb{R}$ ist.
Da $|f_n| \nearrow |f|$ konvergiert, folgt aus der monotonen Konvergenz:

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

Außerdem konvergiert $f_n \to f$ und $|f_n| \leq |f| \in L^1$. Also folgt mit dominierte Konvergenz:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

$\square_{1.6.6}$

1.6.7 Bemerkung

Hauptwertintegrale sind *nicht* berücksichtigt.
Sei zum Beispiel $f \in L^1$ mit $f(0) \neq 0$.

$$H \ -\!\!\!\!\!\!\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right)$$

Aber $\dfrac{f(x)}{x}$ ist *nicht* in L^1.

1.7 Die Räume L^p

1.7.1 Definition (L^p-Norm, konvex)

Für $1 < p < \infty$ ist die L^p*-Norm* einer Funktion f definiert durch:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell für $p = 2$ gilt

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

mit:

$$\langle f,g \rangle = \int_X f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}\mu$$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x,y \in [a,b]$ und $\tau \in [0,1]$ gilt:

$$\varphi(\tau x + (1-\tau)\, y) \leq \tau \cdot \varphi(x) + (1-\tau) \cdot \varphi(y)$$

TODO: Abbildung konvexe Funktion einfügen

Der Graph liegt unterhalb der Sekante durch x und y.

1.7.2 Satz

a) Jede auf einem offenen Intervall definierte konvexe Funktion ist stetig.

b) Falls $f \in C^2([a,b])$ ist, gilt:

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow \underset{x \in [a,b]}{\forall} : f''(x) \geq x$$

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{1.7.2}$

1.7.3 Definition (konjugierte Exponenten)

Seien $1 < p,q < \infty$. p und q heißen *konjugierte Exponenten*, falls gilt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

1.7.4 Theorem

Seien p und q konjugierte Exponenten, $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum und $f,g : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt die Hölder-Ungleichung

$$\int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

und die Minkowski-Ungleichung:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $p = 2 = q$. Die Hölder-Ungleichung liefert dann die Schwarzsche Ungleichung:

$$\langle f,g \rangle = \int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Beweis

Zunächst die Hölder-Ungleichung:
Setze $A := \|f\|_p$ und $B := \|g\|_q$.
Betrachte zunächst Spezialfälle:

- $A = 0$: Dann ist $f^p = 0$ fast überall nach Satz 1.3.6, also $f = 0$ fast überall und daher auch $f \cdot g = 0$ fast überall, womit folgt:

$$\int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu = 0$$

- $B = 0$ geht analog.
- Die Fälle $A > 0$ und $B = \infty$ sowie $A = \infty$ und $B > 0$ sind trivial.

Wir können also annehmen, dass $0 < A,B < \infty$ gilt.
Führe eine Reskalierung durch:

$$F := \frac{f}{A} \qquad G := \frac{g}{B}$$

Dann gilt:

$$\|F\|_p = \left(\int_X \left(\frac{f}{A}\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{A^p}\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{A} \cdot \|f\|_p = 1$$

Analog folgt $\|G\|_q = 1$.
Wähle ein $x \in X$ mit $0 < F(x) < \infty$ und $0 < G(x) < \infty$.
Dann gibt es $s,t \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{\frac{s}{p}}$ und $G(x) = e^{\frac{t}{q}}$.
Wegen der Konvexität der Exponentialfunktion folgt aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $\tau = \frac{1}{p}$ und $(1 - \tau) = \frac{1}{q}$ die Youngsche Ungleichung:

$$F(x) \cdot G(x) = e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t = \frac{1}{p} \cdot F(x)^p + \frac{1}{q} \cdot G(x)^q$$

Diese Ungleichung ist trivialerweise auch dann erfüllt, wenn $F(x), G(x) \in \{0,\infty\}$ ist.
Integration liefert wegen $\int_X F(x)^p \,\mathrm{d}\mu = \|F\|_p^p = 1$ und $\int_X G(x)^q \,\mathrm{d}\mu = \|G\|_q^q = 1$:

$$\int_X F(x) \cdot G(x) \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \int_X F(x)^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \cdot \int_X G(x)^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Setze nun $F = \frac{f}{A}$ und $G = \frac{g}{B}$ ein:

$$\int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu \leq A \cdot B = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Beweis der Minkowski-Ungleichung:

$$(f + g)^p = f \cdot (f + g)^{p-1} + g\,(f + g)^{p-1}$$

Integration liefert:

$$\|f+g\|_p^p = \int_X f\cdot(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\cdot(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu$$

Wende nun die Hölder-Ungleichung an:

$$\int_X f\cdot(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \cdot \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q$$

Da p und q konjugierte Exponenten sind, gilt:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$q=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\frac{p}{p-1}$$

Es folgt:

$$\left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q = \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\int_X (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Also gilt:

$$\int f\,(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p\cdot\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\int g\,(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_p\cdot\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Somit ergibt sich:

$$\|f+g\|_p^p \le \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Falls $\|f+g\|_p=0$ ist, ist die Minkowski-Ungleichung trivialerweise richtig.

Ansonsten können wir durch $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$ dividieren. Es folgt:

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|f\|_p+\|g\|_p$$

Dies beweist die Minkowski-Ungleichung, denn es gilt:

$$p-\frac{p}{q}=p\left(1-\frac{1}{q}\right)=p\cdot\frac{1}{p}=1$$

$\square_{1.7.4}$

1.7.5 Definition (essentielles Supremum)

Sei $g: X\to[0,\infty]$ messbar. Setze:

$$S:=\left\{\alpha\in\overline{\mathbb{R}}\,\middle|\,g\le\alpha \text{ fast überall}\right\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}$$

Dann heißt

$$\sup\operatorname{ess}(g):=\inf(S)$$

das *essentielle Supremum*.

Die L^∞-Norm ist definiert als:

$$\|f\|_\infty:=\sup\operatorname{ess}(|f|)$$

1.7.6 Theorem

Die Aussage von Theorem 1.7.4 gilt auch dann, wenn $p = \infty$ und $q = 1$ ist, also:

$$\begin{aligned}\int_X fg\mathrm{d}\mu &\leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \\ \|f+g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \|f+g\|_1 &\leq \|f\|_1 + \|g\|_1\end{aligned}$$

Beweis

Wir wissen nach Definition des essentiellen Supremums, dass für fast alle $x \in X$ gilt:

$$0 \leq f(x) \leq \|f\|_\infty$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}f(x) \cdot g(x) &\leq \|f\|_\infty \cdot g(x) \\ \int_X f \cdot g\mathrm{d}\mu &\leq \|f\|_\infty \cdot \int_X g\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

Zeige nun die Minkowski-Ungleichungen:
Aus

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

folgt direkt

$$\sup\operatorname{ess}(|f+g|) \leq \sup\operatorname{ess}(|f|) + \sup\operatorname{ess}(|g|)$$

und nach Integration:

$$\|f+g\|_1 = \int_X |f+g|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu + \int |g|\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\square_{1.7.6}$

1.7.7 Definition

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die L^p-*Norm* ist definiert durch:

$$\|f\|_p = \begin{cases}\left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p < \infty \\ \sup\operatorname{ess}(|f|) & \text{falls } p = \infty\end{cases}$$

$\|f\|_p$ ist wohldefiniert, könnte aber ∞ sein.

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, f \text{ ist messbar mit } \|f\|_p < \infty\right\}$$

Identifiziere wieder Funktionen, die fast überall übereinstimmen.
$L^p(X)$ bezeichnet die Menge von Äquivalenzklassen solcher Funktionen.

1.7.8 Theorem

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(X)$ ein normierter Raum.

Beweis

Überprüfe, dass $\|.\|_p$ eine Norm ist:

- Homogenität:

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \|f\|_p$$
$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\operatorname{ess}(|\lambda f|) = \sup\operatorname{ess}(|\lambda|\,|f|) = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

- Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &\overset{\text{Monotonie}}{\leq} \big\||f| + |g|\big\|_p \leq \\ &\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \big\||f|\big\|_p + \big\||g|\big\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p\end{aligned}$$

- Definitheit: Zu zeigen ist, dass aus $\|f\|_p = 0$ schon $f = 0$ folgt.
  Sei $0 = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, so folgt:

$$\begin{aligned}&\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \\ \Rightarrow\quad &|f|^p = 0 \quad \text{fast überall} \\ \Rightarrow\quad &f = 0 \quad \text{fast überall} \\ \Rightarrow\quad &f = 0 \quad \text{in } L^p(X)\end{aligned}$$

  Sei $\|f\|_\infty = 0$, dann folgt $\sup\operatorname{ess}(|f|) = 0$, also $|f| \leq \varepsilon$ fast überall für alle $\varepsilon > 0$. Damit folgt $|f| = 0$ fast überall, also $f = 0$ in L^∞.

$\square_{1.7.8}$

1.7.9 Theorem

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(X)$ vollständig.

Beweis

1. Fall: $p = \infty$
   Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^∞, also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n,m \in \mathbb{N}_{>N}$. Dann gilt

$$f_k(x) \leq \|f_k\|_\infty$$

   fast überall, also mit Ausnahme einer Nullmenge A_k. Entsprechend gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

fast überall, also mit Ausnahme einer Nullmenge $B_{n,m}$. Die Menge

$$E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}$$

ist als Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge.
Wir wissen, dass für alle $k,m,n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X \setminus E$ gilt:

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Also konvergiert $f_n \rightrightarrows f$ gleichmäßig auf $X \setminus E$.
Dabei ist $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ durch diesen Grenzwert definiert.
Setze $f = 0$ auf E.
Dann ist $f \in L^\infty(x)$ und es gilt:

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in X} \operatorname{ess} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X\setminus E} \operatorname{ess} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2. Fall: $p < \infty$
   Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^p. Wähle eine Teilfolge (zur Einfachheit wieder mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet), so dass $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$ ist. Setze:

$$g_n := \sum_{i=1}^{n} |f_{i+1} - f_i| \qquad\qquad g := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{i+1} - f_i|$$

   Dann ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge.

   (a) Die Reihe konvergiert: $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$.

   (b) Die Reihe divergiert: $g(x) = \infty$ und $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, also $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$.

$$\begin{aligned}\|g_n\|_p &= \||f_2 - f_1| + |f_3 - f_2| + \ldots + |f_{n+1} - f_n|\|_p \leq \\ &\leq \|f_2 - f_1\|_p + \|f_3 - f_2\|_p + \ldots + \|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < 1\end{aligned}$$

   Also gilt $\displaystyle\int_X |g_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \|g_k\|^p \leq 1$ und daher $g_n \nearrow g$ und $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$.
   Nach monotoner Konvergenz (Theorem 1.4.2) folgt:

$$\int_X g^p \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p \mathrm{d}\mu \leq 1$$

   Also ist $g \in L^p$ und $\|g\|_p \leq 1$. Insbesondere ist g fast überall endlich.
   Das heißt, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ für fast alle $x \in X$ konvergiert.

$$f_{n+1} = f_1 + \sum_{i=1}^{n} (f_{i+1} - f_i)$$
$$f(x) := f_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$

$f(x)$ ist fast überall wohldefiniert, weil die Reihe fast überall absolut konvergiert.
Für alle $x \in X$, für welche die Reihe *nicht* absolut konvergiert, setzen wir $f(x) := 0$.
Es konvergiert $f_n \to f$ fast überall, also auch $|f_n - f|^p \to 0$ fast überall.

$$|f_n - f|^p \leq \left| \underbrace{f_1}_{\in L^p} + \underbrace{g}_{\in L^p} \right| \in L^1$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt: $\int_X |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $f_n \to f$ in L^p.

$\square_{1.7.9}$

1.7.10 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sup_{\mathbb{R}}(f) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \middle| \underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} : f(x) \leq \alpha \right\} = 1$$
$$\sup_{\mathbb{R}} \operatorname{ess}(f) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} | f(x) \leq \alpha \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R} \} = 0$$

1.8 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Ziel: Konstruiere das n-dimensionale Lebesgue-Maß induktiv aus dem eindimensionalen.
Beginne abstrakt mit dem Produkt von Maßräumen.
Gebe σ-endliche Maße $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ vor.
Zum Beispiel: $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ und $\mu = \nu$ das Lebesgue-Maß.

$$X \times Y = \{(x; y) | x \in X, y \in Y\}$$

ist das kartesische Produkt.
Wir wollen auf $X \times Y$ ein Maß konstruieren, das sogenannte *Produktmaß*.

1.8.1 Definition (Rechteck)

Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ zwei σ-endliche Maße, $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$.
Dann heißt $A \times B \subseteq X \times Y$ *Rechteck*.
TODO: Abb1 einfügen
$\mu(A) \cdot \mu(B)$ liefert einen sinnvollen „Volumenbegriff“ dafür.
Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von Rechtecken schreiben wir als:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \left\{ \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} A_k \times B_k \middle| A_k \in \mathcal{A}, B_k \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichnet die von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra.

1.8.2 Satz

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist eine Mengenalgebra, die unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

Beweis

Zeige, dass Schnitte und Komplemente von Elementen aus $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ wieder in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ liegen.
TODO: Abb2 einfügen

$$\begin{aligned}
(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\
\complement (A \times B) &= R_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} R_7 = \left(\complement A\right) \times B \dot{\cup} A \times \left(\complement B\right) \dot{\cup} \left(\complement A\right) \times \left(\complement B\right) \\
R_1 \dot{\cup} R_5 &= \left(\complement A\right) \times B \\
R_3 \dot{\cup} R_7 &= A \times \left(\complement B\right)
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ unter Schnitt und Komplementbildung abgeschlossen.
Es bleibt noch zu zeigen, dass mit $U{,}V \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ auch $U \cup V$ und $U \setminus V$ in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ liegen.
Dies ist aber erfüllt, da gilt:

$$\begin{aligned}
U \cup V &= \complement \left(\complement U \cap \complement V\right) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\
U \setminus V &= \complement \left(\complement U \cup \complement V\right) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}
\end{aligned}$$

$\square_{1.8.2}$

1.8.3 Bemerkung

Eine naheliegende Definition des Maßes von Rechtecken liefert die Abbildung:

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\
(A \times B) &\mapsto \mu(A) \cdot \mu(B)
\end{aligned}$$

Wir wissen aber nicht, ob dies ein Prämaß ist, weil nicht klar ist, ob die σ-Additivität gilt, also:

$$(\mu \otimes \nu) \left(\underbrace{\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (A_n \times B_n)}_{\in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu) \underbrace{(A_n \times B_n)}_{\in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$$

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, verwenden wir lieber den Satz von der monotonen Konvergenz und nutzen die Monotonie:

1.8.4 Definition (Monotonie)

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ heißt *monoton*, falls gilt:

i) Sind $Y_k \in \mathcal{M}$ mit $Y_k \subseteq Y_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{M}$$

ii) Sind $Y_k \in \mathcal{M}$ mit $Y_k \supseteq Y_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{M}$$

1.8.5 Beispiel

Betrachte $Z = \mathbb{R}$ und $M_n := (-n,n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $\mathcal{M} = \{\mathbb{R}, M_0 = \emptyset, M_1, M_2, \ldots\}$ ein monotones Mengensystem, aber keine Mengenalgebra, da zum Beispiel $M_2 \setminus M_1 \notin \mathcal{M}$ ist.

1.8.6 Lemma

Seien Z eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ eine Mengenalgebra, die unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Sei $\mathcal{M}$ das kleinste monotone Mengensystem, das $\mathcal{R}$ enthält.
Dann ist $\mathcal{M}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra.

Beweis

Zur Existenz von $\mathcal{M}$: Betrachte den Schnitt aller monotonen Mengensysteme, die $\mathcal{R}$ enthalten.
Zeige nun, dass $\mathcal{M}$ eine Mengenalgebra ist. Nach dem Beweis von 1.8.2 genügt es also zu zeigen:

i) $Y \in \mathcal{M} \Rightarrow \complement Y \in \mathcal{M}$

ii) $X,Y \in \mathcal{M} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{M}$

Dann ist $\mathcal{M}$ auch automatisch eine σ-Algebra, denn wegen der Monotonie folgt aus $A_n \in \mathcal{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Definition

$$B_k := \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

schon:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \overset{\text{Monotonie}}{\in} \mathcal{M}$$

Zeige nun i): Setze:

$$\mathcal{M}' := \left\{ Y \in \mathcal{M} \middle| \complement Y \in \mathcal{M} \right\} \subseteq \mathcal{M}$$

Sei $A \in \mathcal{R}$, dann ist auch $\complement A \in \mathcal{R}$, da $\mathcal{R}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Also ist $A \in \mathcal{M}'$ und weil dies für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt, folgt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}'$.
Außerdem ist $\mathcal{M}'$ monoton, denn für eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}'$ gilt:
Weil $A_n \in \mathcal{M}$ liegt, folgt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.
Für die Komplemente, die definitionsgemäß in $\mathcal{M}$ liegen, gilt $\complement A_n \supseteq \complement A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt:

$$\complement \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement A_n \in \mathcal{M}$$

Insgesamt folgt also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}'$$

und damit $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.
Zeige nun ii): Setze für $B \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}_B := \left\{Y \in \mathcal{M} \middle| Y \cap B \in \mathcal{M}\right\}$$

Seien $A,B \in \mathcal{R}$, dann ist $A \cap B \in \mathcal{R}$ und daher $A \in \mathcal{M}_B$, weswegen für $B \in \mathcal{R}$ schon $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_B$ gilt.
Außerdem ist $\mathcal{M}_B$ monoton, was man analog zu i) zeigen kann. Daher gilt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$.
Das heißt für alle $Y \in \mathcal{M}$ und alle $B \in \mathcal{R}$ gilt $Y \cap B \in \mathcal{M}$. Also ist $B \in \mathcal{M}_Y$ also $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_Y$.
Da $\mathcal{M}_Y$ monoton ist, folgt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_Y$ für alle $Y \in \mathcal{M}$. Also gilt für alle $X,Y \in \mathcal{M}$ schon $X \cap Y \in \mathcal{M}$. $\square_{1.8.6}$

1.8.7 Lemma

Sei $f : X \times Y \to [0,\infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbare nicht negative Funktion. Dann gilt:

i) Jede Funktion $f_x : Y \to [0,\infty], y \mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar.

ii) Durch

$$x \mapsto \int_Y f_x \mathrm{d}\nu = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

wird eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion definiert.

Schreibe im Folgenden auch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ statt $\mathrm{d}\mu(x)$ und $\mathrm{d}\nu(y)$.

Beweis

Nehme zunächst $\mu(Y) < \infty$ an und betrachte den Fall $f = \chi_M$ mit $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Definiere also:

$$\mathcal{M} := \left\{M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \middle| f = \chi_M \text{ erfüllt die Bedingungen i) und ii)}\right\}$$

Wir wissen dann:

- $\mathcal{M}$ enthält alle Rechtecke, denn dann gilt

$$f(x,y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$$

und:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \chi_A(x) \cdot \nu(B)$$

Folglich ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

- $\mathcal{M}$ ist monoton: Seien $M_n \in \mathcal{M}$ mit $M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ und:

$$\begin{aligned} f_{n,x}(y) &:= \chi_{M_n}(x,y) \\ f_x(y) &:= \chi_M(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{n,x}(y) \end{aligned}$$

Die $f_{n,x}$ sind messbar, weil $M_n \in \mathcal{M}$ ist und daher f_n die Bedingungen i) und ii) erfüllt. Also ist $f_x(y)$ als Supremum messbarer Funktionen wieder messbar.

$$g_n(x) := \int_Y f_{n,x}(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{monotone}} g(x) := \int_Y f_x(y)\,\mathrm{d}y$$

Die Funktionen g_n sind in X messbar und daher ist die Funktion g als punktweiser Limes messbarer Funktionen wieder messbar.
Seien $M_n \in \mathcal{M}$ mit $M_n \supseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$ und:

$$\begin{aligned} f_{n,x}(y) &:= \chi_{M_n}(x,y) \\ f_x(y) &:= \chi_M(x,y) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_{n,x}(y) \end{aligned}$$

Die $f_{n,x}$ sind messbar, weil $M_n \in \mathcal{M}$ ist und daher f_n die Bedingungen i) und ii) erfüllt. Also ist $f_x(y)$ als Infimum messbarer Funktionen wieder messbar.

$$g_n(x) := \int_Y f_{n,x}(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{dominierte}} g(x) := \int_Y f_x(y)\,\mathrm{d}y$$

Die Funktionen g_n sind in X messbar. Da für alle $x \in X$ schon $f_{n,x}(y) \leq f_{1,x}(y) \in L^1$ eine dominierende Funktion ist und wegen

$$\int_Y |f_{1,x}(y)|\,\mathrm{d}y = \int_Y \chi_{M_1}(x,y)\,\mathrm{d}y \leq \nu(Y) < \infty$$

konvergieren die g_n punktweise nach g, weswegen g als punktweiser Limes messbarer Funktionen wieder messbar ist.

Nach Lemma 1.8.6 ist $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
Falls $\nu(Y) = \infty$ ist, gilt:
Da ν ein σ-endliches Maß ist, betrachte eine Folge $Y_n \in \mathcal{M}$ mit $\nu(Y_n) < \infty$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.
Sei $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ beliebig, so setze:

$$M_n := M \cap (X \times Y_n)$$

Es folgt $M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$. Definiere:

$$f_n := \chi_{M_n} \qquad\qquad f := \chi_M$$

Die f_n erfüllen i) und ii), da Y_n endliches Maß hat. (siehe oben)

$$f_x(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\underbrace{f_{n,x}(y)}_{\text{messbar nach i)}} \right)$$

Also ist f_x messbar.

$$g_n(x) := \int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{monotone}} g(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Die g_n sind messbar wegen ii) und daher ist g als punktweiser Limes messbarer Funktionen messbar.
Sei schließlich $f : X \times Y \to [0,\infty]$ messbar, so approximiere f durch Treppenfunktionen φ_n, also gilt für alle $x \in X$:

$$0 \leq \varphi_n(x) \nearrow f(x)$$

Jede Treppenfunktion kann als endliche Summe von charakteristischen Funktionen geschrieben werden:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{m(n)} y_k \cdot \chi_{M_k}(x)$$

Damit sind für die φ_n die Bedingungen i) und ii) erfüllt.

$$f(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_n(x,y))$$
$$f_x(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_{n,x}(y))$$

sind als Suprema messbarer Funktionen wieder messbar.

$$g_n(x) = \int_Y \varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{monotone}} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

Da die g_n messbar sind, ist auch g messbar. $\square_{1.8.7}$

1.8.8 Historisch

Bonaventura Cavalieri (1598-1647): Prinzip von Cavalieri

> „Zwei Körper besitzen das gleiche Volumen, wenn die Schnittflächen von ebenen parallel zu einer Grundebene den gleichen Flächeninhalt haben.“

TODO: Abb1 einfügen
Guido Fubini (1879-1943)
Beppo Levi (1875-1961)

1.8.9 Satz (Prinzip von Cavalieri)

Folgendes Prinzip geht auf Cavalieri zurück:
Es gibt auf $X \times Y$ genau ein Produktmaß

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$$

mit der Eigenschaft, dass für alle Rechteck $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Dann gilt für jede messbare Menge $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$(\mu \otimes \nu)(M) = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Definiere:

$$M_y := \left\{x \in X \middle| (x,y) \in M\right\}$$

Damit ist dies:

$$\int_X \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x = \mu(M_y)$$
$$(\mu \otimes \nu)(M) = \int_Y \mu(M_y)\,\mathrm{d}y$$

Beweis

Wende Lemma 1.8.7 für $f = \chi_M$ an. Dies liefert eine $\mathcal{B}$-messbare Funktion:

$$y \mapsto \int_X \underbrace{f(x,y)}_{=\chi_M(x,y)}\,\mathrm{d}x = \mu(M_y)$$

Die Abbildung

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$$
$$M \mapsto \int_Y \mu(M_y)$$

ist wohldefiniert als Integral einer nicht negativen Funktion.

Seien $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_n \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ paarweise disjunkt, $M := \dot{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} M_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n} = \chi_{M_1\cup\ldots\cup M_n} \nearrow \chi_M$$

ist eine aufsteigende Folge messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert.
Nach monotoner Konvergenz folgt

$$g_n(x) := \int_Y \chi_{M_1\cup\ldots\cup M_n}(x,y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{n\to\infty} \int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

und $g_n(x)$ ist aufsteigend, also $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$.
Nochmals monotone Konvergenz liefert:

$$\int_X g_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_X g(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = (\mu\otimes\nu)(M)$$

$$(\mu\otimes\nu)(M_1 \cup \ldots \cup M_N) = \int_X \underbrace{\left(\int_Y \chi_{M_1\cup\ldots\cup M_n}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)}_{=g_n(x)}\mathrm{d}x$$

Also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu\otimes\nu)(M_n) = (\mu\otimes\nu)(M)$ und somit ist $\mu\otimes\nu$ ein Maß auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

Auf Rechtecken hat $\mu \otimes \nu$ den gewünschten Wert.
Die σ-Additivität folgt aus der monotonen Konvergenz, $\mu \otimes \nu$ definiert also tatsächlich ein Maß.
Eindeutigkeit:
$\mu \otimes \nu|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ ist ein Prämaß auf der Mengenalgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, weil die σ-Additivität bei Einschränkung auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erhalten bleibt.
Nach dem Satz 1.2.3 von Hahn ist die Erweiterung von $\mu \otimes \nu|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ zu einem Maß auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eindeutig. $\square_{1.8.9}$

1.8.10 Korollar

Sei $f : X \to [0,\infty]$ messbar.
Betrachte das Produktmaß $\mu \otimes \lambda$ auf $X \otimes \mathbb{R}$, wobei λ das 1-dimensionale Lebesgue-Maß ist.
Dann ist die Menge

$$M^f := \{(x,t) \,|0 \leq t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

messbar und:

$$(\mu \otimes \lambda) \left(M^f\right) = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

TODO: Abb2 einfügen

Beweis

Die Funktion $\varphi : (x,t) \mapsto f(x) - t$ ist messbar, also ist auch $M^f = \varphi^{-1}((0,\infty]) \cap (X \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.
Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt mit $\chi_{M^f}(x,t) = \chi_{[0,f(x))}$:

$$(\mu \otimes \lambda) \left(M^f\right) = \int_X \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{M^f}(x,t) \,\mathrm{d}t\right)}_{=\int_0^{f(x)} \mathrm{d}t = f(x)} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_X f(x) \,\mathrm{d}x$$

$\square_{1.8.10}$

Seien nun X,Y zwei σ-endliche Maßräume und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbare Abbildung.

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \stackrel{?}{=} \int_Y \left(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

1.8.11 Theorem (Fubini)

a) Ist $f \geq 0$, so gilt:

$$\int_{X \times Y} f \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \in [0,\infty] \tag{1.7}$$

b) Ist f integrierbar, das heißt $\int_{X \times Y} |f(x,y)| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) < \infty$, so ist

$$\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x$$

für fast alle $y \in Y$ definiert und eine integrierbare Funktion und (1.7) gilt mit Werten in $\mathbb{R}$.

Beweis

a) $\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x = (\mu \otimes \lambda)\left(M_y^f\right)$ und $M_y^f = \left\{(x,t) \,\middle|\, 0 \leq t < f(x,y)\right\} \subseteq X \times \mathbb{R}$.

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \underbrace{(\nu\otimes(\mu\otimes\lambda))}_{=\nu\otimes\mu\otimes\lambda}\left(M^f\right) = \nu\otimes\mu\otimes\lambda\left(M^f\right) =$$
$$= \int_Y \mu\otimes\lambda\left(M^f\right)\mathrm{d}y = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

nach Korollar (1.8.10).

Man kann dabei beliebig assoziativ Klammern, weil das Produktmaß eindeutig ist.

b) Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar.

Schreibe $f = f^+ - f^-$ mit $f_+ = \max(f,0)$ und $f_- = \max(-f,0)$. $f_\pm$ sind nicht negativ und messbar.

Ist f außerdem integrierbar, so ist:

$$\int_{X\times Y} f_\pm(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \leq \int_{X\times Y} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty$$

Nach a) gilt:

$$\int_{X\times Y} f_+(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y\left(\int_X f_+(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$
$$\int_{X\times Y} f_-(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y\left(\int_X f_-(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$

Damit folgt wegen der Additivität des Integrals auch:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$

1.8.12 Beispiel

Die Bedingung, dass f integrierbar ist, ist notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

$$g_n(t) := \begin{cases} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}, & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Abb3 einfügen

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Betrachte nun die messbare Funktion:

$$\begin{aligned} f: [0{,}1] \times [0{,}1] &\to \mathbb{R} \\ (x{,}y) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, g_n(y) \end{aligned}$$

TODO: Abb4 einfügen

$$\int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}x = \int n \cdot (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, g_n(y)\,\mathrm{d}x$$

Dabei ist n so gewählt, dass $\frac{1}{n+1} \leq y < \frac{1}{n}$.

$$\int f(x{,}y)\,\mathrm{d}x = n \cdot g_n(y) \cdot \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_n(x)}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_{n+1}(x)}_{=1} \right) = 0$$

Also gilt:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0$$

Mit $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}y &= g_n(x) \int (n \cdot g_n(y) - (n-1)\, g_{n-1}(y))\,\mathrm{d}y = \\ &= g_n(x) \left(n \cdot \underbrace{\int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y}_{=1} - (n-1) \underbrace{\int_0^1 g_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y}_{=1} \right) = g_n(x) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \sum_n \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

Also gilt insgesamt:

$$0 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x{,}y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = +\infty$$

Der Grund dafür ist:

$$\int_{[0{,}1] \times [0{,}1]} |f(x{,}y)|\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = +\infty$$

Also ist f nicht integrierbar.
Man kann erreichen, dass $0 = \int \left(\int f(x{,}y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int \left(\int f(x{,}y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1$. Auch hier gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{[0{,}1] \times [0{,}1]} |f(x{,}y)|\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = +\infty \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x{,}y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int \left(\int |f(x{,}y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Der wichtigste Fall ist:
$\mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}\nu$ ist jeweils das 1-dimensionale Lebesgue-Maß.
$\underbrace{\mathrm{d}\mu \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}\mu}_{n \text{ Faktoren}}$ ist das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Was ist eine Lebesguesche Nullmenge?

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(\mu \otimes \mu)(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mu(\{0\}) \cdot \mu(\mathbb{R}) = „0 \cdot \infty" = 0$$

Beweis

$$A := \{0\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\{0\} \times [n,n+1)}_{=:A_n} = \dot{\bigcup}_{n=-\infty}^{\infty} A_n$$

Wegen der σ-Additivität folgt:

$$\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0 \cdot 1) = 0$$

□

1.8.13 Beispiel

Berechne folgendes Doppelintegral:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y} - y^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Der Integrand ist nicht negativ. Darum können wir die Integrale nach dem Theorem von Fubini vertauschen.
Wir können wegen der Grenzen des Integrals $x,y > 0$ annehmen.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y} - y^2} \mathrm{d}x = e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} \mathrm{d}x = e^{-y^2} \left(-y e^{-\frac{x}{y}} \right) \Big|_0^\infty = e^{-y^2} \cdot y$$
$$\int_0^\infty y e^{-y^2} \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(e^{-y^2} \right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}$$

1.9 Die Transformationsformel

Für die eindimensionale Variablentransformation verwendet man eine bijektive, stetige, differenzierbare und streng monoton steigende Funktion

$$\varphi : [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)] \in C^1$$

beziehungsweise streng monoton fallende Funktion:

$$\varphi : [a,b] \to [\varphi(b), \varphi(a)] \in C^1$$

Dann gilt nach der Transformation

$$\begin{aligned} u &= \varphi(t) \\ \mathrm{d}u &= \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

für das Integral:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t$$

Dies soll nun auf die Dimension n verallgemeinert werden. Schreibe dazu zunächst um mit $I = [a,b]$:

$$\int_I (f \circ \varphi)(t) \cdot \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

In höherer Dimension sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \varphi(U) =: V \subseteq \mathbb{R}^n \in C^1$ bijektiv. V soll messbar sein, zur Einfachheit sogar offen. Außerdem sei φ^{-1} stetig, zur Einfachheit sogar in C^1.

1.9.1 Definition (C^1-Diffeomorphismus, Jacobi-Matrix)

Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U,V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt C^1-*Diffeomorphismus*, falls φ bijektiv ist und $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$ sind.
Die *Jacobi-Matrix* ist die $n \times n$-Matrix:

$$J\varphi := \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \dots & \partial_n\varphi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\varphi_n & \dots & \partial_n\varphi_n \end{pmatrix}$$

1.9.2 Theorem

Seien $U,V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus.
Dann ist f genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \varphi) \cdot |\det(J\varphi)| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.
Es gilt:

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det(J\varphi)|\,\mathrm{d}x$$

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{1.9.2}$

1.9.3 Beispiel

Berechne das Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Variablentransformation:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{>0} \times (0{,}2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (r{,}\varphi) &\mapsto (r\cos\varphi{,}r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Das Herausschneiden von Nullmengen wie $\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}^2$ spielt für den Wert des Integrals keine Rolle.

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det\left(J\varphi\right) = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi r \cdot e^{-r^2} = 2\pi \cdot \int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{-1}{2} e^{-r^2}\right) = \\ &= -\pi\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \pi \end{aligned}$$

2 Komplexe Analysis

2.1 Grundlagen, Riemannsche Zahlenkugel

Setze die Rechenregeln im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen als bekannt voraus.
Beginne mit der Norm:

$$\|z\| = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$(\mathbb{C}, \|.\|)$ ist ein normierter Raum.
Es ist oft günstig, $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto x + \mathbf{i}y \end{aligned}$$

ist bijektiv, denn $\varphi^{-1}(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ ist sogar eine Isometrie, denn es gilt:

$$\|\varphi(x,y)\| = |x + \mathbf{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|$$

Also ist $\mathbb{C}$ metrisch und topologisch äquivalent zum $\mathbb{R}^2$.
Wir haben die Gaußsche Zahlenebene bereits kennengelernt.
TODO: Abb Gaußsche Zahlenebene
Konvergenz:
Eine folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, wenn $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.
Insbesondere ist $(\mathbb{C}, |.|)$ vollständig.
Stetigkeit ist genau wie in $\mathbb{R}^2$.
Anders ausgedrückt: $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ zusätzlich mit einer Multiplikation, die $\mathbb{C}$ zu einem Körper macht.
Diese Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z_1,z_2) &\mapsto z_1 \cdot z_2 \end{aligned}$$

ist stetig, denn es gilt:

$$\left|z_1 z_2 - z_1' z_2'\right| \leq \left|z_1 - z_1'\right| \cdot |z_2| + \left|z_1'\right| \cdot \left|z_2 - z_2'\right|$$

2.1.1 Definition (erweiterte komplexe Ebene $\overline{\mathbb{C}}$)

Es ist manchmal nützlich, $\mathbb{C}$ zu „kompaktifizieren".
Führe dann ∞ ein, das heißt „der Punkt im Unendlichen", und nenne

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

die erweiterte komplexe Ebene.
Rechenregeln:
Für alle $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$$

Es ist *nicht* möglich, $0 \cdot \infty$ zu bilden, also ist $\overline{\mathbb{C}}$ *kein* Körper.

2.1.2 Definition (Einheitskugel)

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-dimensionale *Einheitskugel*:

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, \|x\| = 1 \right\}$$

2.1.3 Proposition und Definition (Riemannsche Zahlenkugel)

Eine geometrische Darstellung von $\mathbb{C}$ beziehungsweise $\overline{\mathbb{C}}$ ist die *Riemannsche Zahlenkugel.*
TODO: Abb1 (Riemannsche Zahlenkugel) einfügen
$N = (0,0,1)$ ist der Nordpol und $Z = (x_1,x_2,x_3)$.
Die Riemannsche Zahlenkugel wird durch die *stereographische Projektion*

$$\begin{aligned} S^2 \setminus N &\to \mathbb{C} \\ Z &\mapsto z = \frac{x_1 + \mathbf{i}x_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

in die Gaußsche Zahlenebene überführt.
φ ist bijektiv, stetig und die inverse Abbildung φ^{-1} ist auch stetig, φ ist also ein Homöomorphismus.
Man kann φ auch zu einer Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : S^2 &\to \overline{\mathbb{C}} \\ Z &\mapsto \begin{cases} \varphi(Z) & \text{falls } Z \neq N \\ \infty & \text{falls } Z = N \end{cases} \end{aligned}$$

erweitern.
Da S^2 ein metrische Raum mit der Metrik

$$d\left(Z,Z'\right) = \left\|Z - Z'\right\|_{\mathbb{R}^3}$$

ist, liefert dies auch eine Metrik auf $\overline{\mathbb{C}}$, indem man setzt:

$$d\left(z,z'\right) := d\left(Z,Z'\right)$$

Wähle auf $\overline{\mathbb{C}}$ die Topologie $\mathcal{O} := \left\{\overline{\varphi}\left(\Omega\right)|\Omega \subseteq S^2 \text{ offen}\right\}$.
$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein kompakter topologischer Raum, also auch $\overline{\mathbb{C}}$.
Diese Topologie ist auf $\mathbb{C}$ äquivalent zur Standardtopologie.
$\overline{\mathbb{C}}$ ist daher eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.
Man dies eine 1-Punkt-Kompaktifizierung, da nur ein Punkt „∞" hinzugenommen wurde.

Beweis

Geradengleichung:

$$\left(\operatorname{Re}\left(z\right), \operatorname{Im}\left(z\right), 0\right) \overset{!}{=} N + \lambda \cdot \left(Z - N\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 1 + \lambda\left(x_3 - 1\right) \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\lambda = \frac{1}{1 - x_3}$$

Also folgt:

$$z = \frac{x_1 + \mathbf{i} x_2}{1 - x_3}$$

Berechne die Abstandsfunktion in $\overline{\mathbb{C}}$ genauer:

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\left(1 - x_3\right)^2} = \frac{1 - x_3^2}{\left(1 - x_3\right)\left(1 + x_3\right)} = \frac{1 - x_3}{1 + x_3}$$

$$|z|^2 - x_3\,|z|^2 = 1 + x_3$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$$1 - x_3 = \frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2} \qquad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{\mathbf{i}\left(1 + |z|^2\right)}$$

$$\begin{aligned} d\left(z, z'\right)^2 &= \left(x_1 - x_1'\right)^2 + \left(x_2 - x_2'\right)^2 + \left(x_3 - x_3'\right)^2 = \\ &= 2 - 2 \cdot \left(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' &= \frac{\left(z + \overline{z}\right)\left(z' + \overline{z}'\right) - \left(z - \overline{z}\right)\left(z' - \overline{z}'\right) + \left(|z|^2 - 1\right)\left(|z'|^2 - 1\right)}{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z|'^2\right)} = \\ &= \frac{2z\overline{z}' + 2\overline{z}z' + \left(|z|^2 - 1\right)\left(|z'|^2 - 1\right)}{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z|'^2\right)} = \\ &= \frac{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z'|^2\right) - 2\,|z - z'|^2}{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z|'^2\right)} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$d\left(z,z'\right) = \frac{2\left|z - z'\right|}{\sqrt{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z'|^2\right)}}$$
$$d\left(z,\infty\right) = \frac{2}{\sqrt{\left(1 + |z|^2\right)}}$$

TODO: restlichen Beweis einfügen

$\square_{2.1.3}$

2.1.4 Bemerkung (Konvergenz in $\overline{\mathbb{C}}$)

Die Topologie $\mathcal{O} := \left\{\overline{\varphi}\left(\Omega\right)|\Omega \subseteq S^2 \text{ offen}\right\}$ liefert einen Konvergenzbegriff auf $\overline{\mathbb{C}}$:

$z_n \to z \neq \infty$	z_n konvergiert in $\mathbb{C}$
$z_n \to \infty$	$\underset{L\in\mathbb{R}_{>0}}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} : \|z_n\| > L$

2.1.5 Beispiel

- Ein anderes Beispiel einer Kompaktifizierung ist die 2-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$:

  $$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

  Sei $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus, zum Beispiel $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
  Erweitere nun:

  $$\begin{aligned}\overline{\varphi} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\\ 1 &\mapsto +\infty\\ -1 &\mapsto -\infty\end{aligned}$$

  Wähle auf $\mathbb{R}$ die Topologie:

  $$\mathcal{O} := \{\overline{\varphi}\left(\Omega\right)|\Omega \text{ offen in } [-1,1] \text{ bezüglich der Teilraumtopologie}\}$$

- Beispiel für eine andere Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.
  TODO: Abb2 einfügen

  $$\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup S^1$$

  TODO: Was ist φ und $\mathcal{H}$?
  Erweitere φ:

  $$\begin{aligned}\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\dot{\cup}S^1 &\to \tilde{\mathbb{C}}\\ x \in S^1 &\to x \in S^1\end{aligned}$$

  Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge. Betrachte $x_n \in \mathcal{H}$ mit $\varphi\left(x_n\right) = z_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt Häufungspunkt $x \in \overline{\mathcal{H}}$.
  Falls $x \in \mathcal{H}$, dann folgt $\varphi\left(x\right)$ ist Häufungspunkt von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Falls $x \in S^1$, dann folgt $\varphi\left(x\right) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{C}}$.

2.2 Analytische Funktionen, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

2.2.1 Definition (komplex differenzierbar, holomorph)

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt in $z \in \Omega$ *(komplex) differenzierbar* mit *komplexer Ableitung* $f'(z)$, falls der Limes

$$\lim_{\Omega\setminus\{z'\}\ni z\to z'} \frac{\overbrace{f(z') - f(z)}^{\in\mathbb{C}}}{\underbrace{z'-z}_{\in\mathbb{C}}} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

existiert. Ist f für jedes $z \in \Omega$ differenzierbar, so heißt f in Ω *holomorph*.

2.2.2 Beispiele

a) Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ ein komplexes Polynom, das heißt $a_k \in \mathbb{C}$.

$$f(z') - f(z) = a_n\left(z'^n - z^n\right) + a_{n-1}\left(z'^{n-1} - z^{n-1}\right) + \ldots + a_1\left(z' - z\right) =$$
$$= \left(z' - z\right)\left(a_n\left(\left(z'\right)^{n-1} + \left(z'\right)^{n-2}\cdot z + \left(z'\right)^{n-3} z^2 + \ldots + z^{n-1}\right) + \ldots + a_1\right)$$

Dividiere durch $z' - z$ und bilden den Limes $z' \to z$:

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1$$

Dies ist dasselbe wie die Ableitung eines reellen Polynoms.

b) Nehme an, $f(z)$ ist reellwertig, das heißt $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \Omega$, zum Beispiel $f(z) = |z|^2$, und komplex differenzierbar ist.

Das heißt der Limes

$$f'(z) = \lim_{\Omega\setminus\{z'\}\ni z\to z'} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

existiert. Betrachte speziell $z' = z + h$ mit $h \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Dann ist

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni h\to 0} \frac{\overbrace{f(z+h)}^{\in\mathbb{R}} - \overbrace{f(z)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{h}_{\in\mathbb{R}}} \in \mathbb{R}$$

reell.

Betrachte nun $z' = z + \mathbf{i}h$ mit $h \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni h\to 0} \frac{\overbrace{f(z+h)}^{\in\mathbb{R}} - \overbrace{f(z)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{\mathbf{i}h}_{\in\mathbf{i}\mathbb{R}}} \in \mathbf{i}\mathbb{R}$$

rein imaginär.

Insgesamt folgt also $f'(z) = 0$.

2.2.3 Bemerkung

Was heißt komplex differenzierbar?
Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathbf{i}y \in \Omega$, $x,y \in \mathbb{R}$ und $f = u + \mathbf{i}v$, $u = \mathrm{Re}\,(f)$, $v = \mathrm{Im}\,(f)$.

$$f : \Omega \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u\,(x,y) \\ v\,(x,y) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, was *reell* differenzierbar bedeutet, nämlich:

$$f\,(x + h_1, y + h_2) = f\,(x,y) + A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o\,(h)$$

Dabei bedeutet $g \in o\,(h)$:

$$\lim_{\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni h \to 0} \frac{g\,(h)}{\|h\|} = 0$$

Dabei ist $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ und $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.
Außerdem ist $A \in L\left(\mathbb{R}^2\right)$ die Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \partial_1 u & \partial_2 u \\ \partial_1 v & \partial_2 v \end{pmatrix}$$

2.2.4 Satz

f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn f in (x,y) reell differenzierbar ist und die sogenannten *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt:

$$\partial_1 u = \partial_2 v \qquad\qquad \partial_2 u = -\partial_1 v$$

Günstige Notation:

$$\begin{aligned} \partial_1 f &:= \partial_1 u + \mathbf{i}\partial_1 v \\ \partial_2 f &:= \partial_2 u + \mathbf{i}\partial_2 v \end{aligned}$$

Dann kann man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der Form

$$\partial_1 f = -\mathbf{i}\partial_2 f$$

oder auch als

$$\partial_2 f = \mathbf{i}\partial_1 f$$

schreiben.
Realteil:

$$\partial_1 u = \partial_2 v$$

Imaginärteil:

$$\partial_1 v = -\partial_2 u$$

Beweis

Die Bedingung von komplexer Differenzierbarkeit kann man auch mit einer „Approximationsformel“ schreiben:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\,h + E(h)$$

Dabei ist $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ und $E(h) \in o(h)$, also:

$$\lim_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni h\to 0} \frac{E(h)}{|h|} = 0$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{E(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Diese Approximationsformel ist also tatsächlich äquivalent zur Existenz des Limes des Differenzenquotienten.
Schreibe nun Real- und Imaginärteil aus:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\big(f'(z)\cdot h\big) &= \operatorname{Re}\big(f'(z)\big)\cdot\operatorname{Re}(h) - \operatorname{Im}\big(f'\big)\cdot\operatorname{Im}(h)\\ \operatorname{Im}\big(f'(z)\cdot h\big) &= \operatorname{Re}\big(f'(z)\big)\cdot\operatorname{Im}(h) + \operatorname{Im}\big(f'\big)\cdot\operatorname{Re}(h)\end{aligned}$$

Mit $h_1 = \operatorname{Re}(h)$ und $h_2 = \operatorname{Im}(h)$ folgt:

$$\left.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|_{(x+h_1,y+h_2)} = \left.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|_{(x,y)} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f'(z)) & -\operatorname{Im}(f'(z)) \\ \operatorname{Im}(f'(z)) & \operatorname{Re}(f'(z)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h)$$

Hierin sieht man folgendes:

1. Ist f komplex differenzierbar, so ist f auch reell differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\big(f'(z)\big) &= \partial_1 u = \partial_2 v\\ \operatorname{Im}\big(f'(z)\big) &= -\partial_2 u = \partial_1 v\end{aligned}$$

   Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

2. Sei f reell differenzierbar und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen seien erfüllt.
   Dann erfüllt $\alpha := \partial_1 u + \mathbf{i}\partial_1 v \in \mathbb{C}$ die Approximationsformel:

$$f(z+h) = f(z) + \alpha\cdot h + o(h)$$

   Denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha h) \\ \operatorname{Im}(\alpha h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) & -\operatorname{Im}(\alpha) \\ \operatorname{Im}(\alpha) & \operatorname{Re}(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h) \\ \operatorname{Im}(h) \end{pmatrix}$$

$\square_{2.2.4}$

2.2.5 Beispiel und Definition (Laplace-Operator, harmonisch)

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen lauten:

$$\partial_1 u = \partial_2 v \tag{2.1}$$
$$\partial_2 u = -\partial_1 v \tag{2.2}$$

Nehme an, dass u und v zweimal stetig reell differenzierbar sind. Dann folgt:

$$\partial_1^2 u \overset{2.1}{=} \partial_{12}^2 v \overset{\text{S.v.Schwarz}}{=} \partial_{21}^2 v \overset{2.2}{=} -\partial_2\left(\partial_2 u\right) = -\partial_2^2 u$$

Mit dem *Laplace-Operator*

$$\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2$$

sieht man, dass u die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u \overset{!}{=} 0$$

erfüllt.
Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man auch *harmonisch.*

$$\partial_1^2 v \overset{2.2}{=} \partial_{12}^2 u \overset{\text{S.v.Schwarz}}{=} \partial_{21}^2 u \overset{2.1}{=} -\partial_2\left(\partial_2 v\right) = -\partial_2^2 v$$

u und v sind durch die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen miteinander verknüpft.
Man sagt dazu auch: u und v sind zueinander *konjugierte harmonische Funktionen.*

2.2.6 Bemerkung

Gegeben sei die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto f\left(x,y\right) \end{aligned}$$

Die Frage ist, wann f holomorph ist.
Hilfreich ist, wenn man in der Darstellung

$$\begin{aligned} z &= x + \mathbf{i}y \\ \overline{z} &= x - \mathbf{i}y \end{aligned}$$

nun x und y als komplexe Zahlen auffasst. Auflösen liefert:

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) \qquad\qquad y = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z - \overline{z}\right)$$

Setze $x = x\left(z,\overline{z}\right)$ und $y = y\left(z,\overline{z}\right)$ in $f\left(x,y\right)$ ein:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \Omega \subseteq \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \left(z,\overline{z}\right) &\mapsto \tilde{f}\left(z,\overline{z}\right) \end{aligned}$$

Fasse z und $\overline{z}$ *formal* als zwei unabhängige Variablen auf, womit folgt:

$$\partial_1 \tilde{f} = \partial_1 x \cdot \partial_1 f + \partial_1 y \cdot \partial_2 f = \frac{1}{2}\left(\partial_1 f - \mathbf{i}\partial_2 f\right)$$
$$\partial_2 \tilde{f} = \partial_2 \cdot \partial_1 f + \partial_2 y \cdot \partial_2 f = \frac{1}{2}\left(\partial_1 f + \mathbf{i}\partial_2 f\right)$$

Also ist genau dann $\partial_2 \tilde{f} = 0$, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. In diesem Fall gilt:

$$\partial_1 \tilde{f} = \partial_1 f$$

2.2.7 Beispiel

a) $f(x,y) = x^2 + 2\mathbf{i}xy - y^2 = (x + \mathbf{i}y)^2$

Überprüfe die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + 2\mathbf{i}y$$
$$\partial_2 f(x,y) = 2\mathbf{i}x - 2y$$

Also gilt:

$$\partial_1 f = -\mathbf{i}\partial_2 f$$

Daher sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und f ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

Rechenverfahren:

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) \qquad y = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z - \overline{z}\right)$$

$$\tilde{f}(z,\overline{z}) = z^2$$

$\tilde{f}$ hängt also nur von z und nicht von $\overline{z}$ ab. Deshalb ist f holomorph.

b) $f(x,y) = x^2 + 2\mathbf{i}xy$

$$\partial_1 f = 2x + 2\mathbf{i}y \qquad \partial_2 f = 2\mathbf{i}x$$

$$\begin{aligned} & \partial_1 f = -\mathbf{i}\partial_2 f \\ \Leftrightarrow \quad & 2x + 2\mathbf{i}y = 2x \\ \Leftrightarrow \quad & y = 0 \end{aligned}$$

Also ist f *nicht* auf $\mathbb{C}$ holomorph, denn f ist genau dann an der Stelle z komplex differenzierbar, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ gilt.

Rechenverfahren:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z,\overline{z}) &= \frac{1}{4}\left(z + \overline{z}\right)^2 + 2\mathbf{i} \cdot \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) \cdot \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z - \overline{z}\right) = \\ &= \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}z\overline{z} + \frac{1}{4}\overline{z}^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\overline{z}^2 = \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}z\overline{z} - \frac{1}{4}\overline{z}^2 \end{aligned}$$

Also ist f nicht holomorph, da $\tilde{f}$ von $\overline{z}$ abhängt.

$$\partial_2 \tilde{f} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\overline{z} = \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\right)$$

Das heißt $\tilde{f} = 0$ ist äquivalent zu $\operatorname{Im}(z) = 0$.

2.3 Polynome

Ein komplexes Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ist eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$.
$P(z)$ ist holomorph mit:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$$

2.3.1 **Theorem** (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß)

Jedes nicht konstante Polynom besitzt wenigstens eine Nullstelle.

Beweis

i) Zeige, dass die Funktion $\varphi(z) := |P(z)|$ ihr Infimum annimmt, das heißt, dass es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) \geq \varphi(\zeta)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

$$\varphi(z) \geq |a_n| \cdot |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq \underbrace{|z|^n}_{\to\infty} \cdot \left(\underbrace{|a_n|}_{\neq 0} - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot \underbrace{|z|^{k-n}}_{\to 0 \text{ für } |z|\to\infty} \right) \xrightarrow{|z|\to\infty} \infty$$

Zur Bildung des Infimums genügt es, $z \in B_R(0)$ für ein „großes" $R \in \mathbb{R}$ zu betrachten.

Da φ stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ ihr Infimum an der Stelle ζ an.

ii) Nehme an, dass $\varphi(\zeta) \neq 0$ ist, denn ansonsten sind wir fertig.

Nehme außerdem ohne Einschränkung an, dass $\zeta = 0$ und $P(\zeta) = 1$ ist, denn man kann zu

$$\frac{P(z+\zeta)}{P(\zeta)}$$

übergehen. Also ist:

$$P(z) = 1 + \sum_{m=1}^{n} a_k z^k$$

Wähle dabei $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ so, dass $a_m \neq 0$ ist.

Polarkoordinaten: $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0{,}2\pi)$ mit:

$$z = r \cdot e^{\mathbf{i}\varphi}$$

$$|P(z)| = 1 + a_m r^m e^{\mathbf{i}m\varphi} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k r^k e^{\mathbf{i}k\varphi}$$

Wähle φ so, dass $a_m r^m e^{\mathbf{i}m\varphi} = -|a_m| r^m$ ist. Wählt man nun r klein genug, zum Beispiel

$$r = \min\left(1, \frac{|a_m|}{2 \cdot \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|}\right)$$

so gilt:

$$|P(z)| \leq 1 - |a_m| r^m + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| r^k < 1$$

Man sieht, dass $|P(z)| < |P(0)|$ ist, im Widerspruch dazu, dass $|P(z)|$ bei $z = 0$ sein Infimum annimmt.

Also ist $\varphi(0) = 0$ und somit haben wir eine Nullstelle von P gefunden.

$\square_{2.3.1}$

2.3.2 Korollar

Jedes Polynom P zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, das heißt es gibt $\zeta_n \in \mathbb{C}$ für $n = \deg(P)$ mit:

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - \zeta_k)$$

Beweis

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, dann kann man eine Polynomdivision durchführen und erhält

$$P(z) = (z - \zeta) P_1(z)$$

mit $\deg(P_1) = \deg(P) - 1$.

Induktiv kann man den Grad bis auf 0 reduzieren. $\square_{2.3.2}$

2.3.3 Definition (Vielfachheit)

Eine Nullstelle kann in einem Polynom mehrfach auftreten.

Jedes nicht konstante Polynom P hat $N \in \mathbb{N}$ verschiedene Nullstellen und kann mit $A, \zeta_k \in \mathbb{C}$ und $r_k \in \mathbb{N}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$ schreiben als:

$$P(z) = A \cdot \prod_{k=1} (z - \zeta_k)^{r_k}$$

Die Zahl r_k heißt die *Vielfachheit* oder *Ordnung* der Nullstelle ζ_k.

2.3.4 Theorem (Lucas)

Liegen alle Nullstellen eines Polynoms P in einer Halbebene der komplexen Ebene, dann liegen die Nullstellen von P' auch in dieser Halbebene.

Wie kann man eine Halbebene charakterisieren?

$\mathrm{Im}\,(z) > 0$	obere Halbebene
$\mathrm{Im}\,(z) < 0$	untere Halbebene
$\mathrm{Re}\,(z) > 0$	rechte Halbebene
$\mathrm{Re}\,(z) < 0$	linke Halbebene

Allgemeiner kann man eine Halbebene mit $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wie folgt charakterisieren:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0$$

Beweis

TODO: Abbildung Halbebene mit Nullstellen einfügen

Die Produktregel liefert:

$$\begin{aligned} P\,(z) &= a_n\,(z-\zeta_1)\ldots(z-\zeta_n) \\ \frac{P'\,(z)}{P\,(z)} &= \frac{1}{z-\zeta_1} + \frac{1}{z-\zeta_2} + \ldots + \frac{1}{z-\zeta_n} \end{aligned}$$

Nehme an, dass die ζ_k alle in der Halbebene H liegen, die durch die Ungleichung

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0$$

charakterisiert ist.

Nehme an, dass $z \notin H$ liegt, womit folgt:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\zeta_k}{b}\right) = \underbrace{\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\mathrm{Im}\left(\frac{a-\zeta_k}{b}\right)}_{>0} > 0$$

Sei $\xi \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}\right) = -\frac{\mathrm{Im}\,(\xi)}{|\xi|^2}$$

Beim Bilden des Reziproken ändert sich also das Vorzeichen des Imaginärteils. Also gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{b}{z-\zeta_k}\right) < 0$$

Es folgt:

$$\mathrm{Im}\left(b \cdot \frac{P'\,(z)}{P\,(z)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{b}{z-\zeta_1} + \ldots + \frac{b}{z-\zeta_n}\right) < 0$$

Also ist $\dfrac{P'\,(z)}{P\,(z)} \neq 0$ für alle $z \notin H$.

Daher hat P' im Komplement von H keine Nullstelle. $\square_{2.3.4}$

2.4 Rationale Funktionen, Möbiustransformation

2.4.1 Definition (rationale Funktion)

Seien P und $Q \neq 0$ komplexe Polynome. Dann heißt die Funktion

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$$

eine *rationale Funktion.*

Betrachte im Folgenden eine solche rationale Funktion.

2.4.2 Bemerkung

Man kann Zähler und Nenner in Linearfaktoren zerlegen.

Wenn der gleiche Linearfaktor in Zähler und Nenner vorkommt, kürzen wir immer. So kann man erreichen, dass $P(z)$ und $Q(z)$ keine gemeinsame Nullstelle haben.

Nehme dies im Folgenden stets an.

2.4.3 Definition (Pol)

Hat Q eine Nullstelle der Ordnung n, so heißt dies ein *Pol* von R der Ordnung n.

2.4.4 Proposition (Quotientenregel)

Falls $Q(z) \neq 0$ ist, so ist $R(z)$ komplex differenzierbar und es gilt die Quotientenregel:

$$R'(z) = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Beweis

Man kann genau wie in der reellen Analysis den Limes des Differenzenquotienten bilden und erhält das selbe Ergebnis. $\square_{2.4.4}$

2.4.5 Bemerkung

R kann zu einer Abbildung $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ erweitert werden, indem man an den Polstellen $R(z) := \infty$ setzt.

Man kann R sogar zu einer Abbildung $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ erweitern, indem man setzt:

$$R(\infty) := \lim_{z\to\infty} R(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{a_n z^n}{a_m z^m} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \frac{a_n}{b_m} & m = n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

Dabei ist $n = \deg(P)$ und $m = \deg(Q)$.

2.4.6 Satz (Partialbruchzerlegung)

Sei $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ und $Q = (z-\zeta_1)^{r_1}\dots(z-\zeta_n)^{r_n}$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen ζ_n. Dann ist R darstellbar in der Form

$$R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{n} G_j\left(\frac{1}{z-\zeta_j}\right)$$

mit Polynomen G,G_j.

Beweis

Die elementare Partialbruchzerlegung (Polynomdivision) ist:

$$R(z) = G(z) + \frac{P_1(z)}{(z-\zeta_1)^{r_1}} + \dots + \frac{P_k(z)}{(z-\zeta_n)^{r_n}}$$

Schreibe nun:

$$\frac{P_j}{(z-\zeta_j)^{r_j}} = \frac{c_{r_j}}{(z-\zeta_j)^{r_j}} + \frac{c_{r_j-1}}{(z-\zeta_j)^{r_j-1}} + \dots + \frac{c_1}{z-\zeta_j} =: G_j\left(\frac{1}{z-\zeta_j}\right)$$

$\square_{2.4.6}$

Dies führt einen dazu, die Transformationen $z \mapsto \dfrac{1}{z-\zeta}$ etwas allgemeiner zu betrachten:

2.4.7 Definition (Möbiustransformation)

Eine rationale Funktion

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit a,b,c,$d \in \mathbb{C}$ und $ad - cb \neq 0$ heißt *Möbiustransformation.*

2.4.8 Bemerkung

Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ bedeutet gerade, dass die Nullstellen von Zähler und Nenner verschieden sind, denn:

$$\zeta_{\text{Nenner}} = -\frac{d}{c} \neq -\frac{b}{a} = \zeta_{\text{Zähler}}$$

Somit folgt $S \neq 0$. S ist eine Abbildung:

$$S : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}$$

Erweitere durch die Vorschrift

$$S(\infty) := \frac{a}{c} \qquad\qquad S\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

zu einer Abbildung:

$$S : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

Diese ist bijektiv, stetig und hat eine stetige Inverse, ist also ein *Homöomorphismus der Riemannschen Zahlenkugel*.
Betrachte nun *homogene Koordinaten*:

$$z =: \frac{z_1}{z_2} \qquad\qquad w =: \frac{w_1}{w_2}$$

Beachte, dass die $w_j, z_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1,2\}$ nicht eindeutig bestimmt sind, da nur der Quotient von Bedeutung ist.
Die Möbiustransformation lässt sich dann schreiben als

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Die Möbiustransformationen bilden also eine Gruppe unter der Matrixmultiplikation, da S^{-1} existiert, weil die Determinante $\det(S) = ad - cb \neq 0$ nicht verschwindet.
Dies ist die sogenannte *projektive Gruppe*:

$$P(1,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Gl}(2,\mathbb{C})$$

Jede Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kann als Produkt folgender Faktoren mit $\alpha, h \in \mathbb{C}$ und $h \neq 0$ geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{1.}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2.}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3.}$$

Die Bedeutung von S ist:

1. $S(z) = z + \alpha$ (Parallelverschiebung)
2. $S(z) = h \cdot z$ (Rotation falls $|k| = 1$, andernfalls zusätzlich Streckung)
3. $S(z) = \dfrac{1}{z}$ (Inversion am Einheitskreis)

Beachte, dass diese Abbildungen winkeltreu sind, das heißt, dass die Transformation einen Winkel (zum Beispiel festgelegt durch drei Punkte) nicht ändert.

2.5 Potenzreihen, der Konvergenzsatz von Abel

2.5.1 Erinnerung

Eine *Potenzreihe* in $\mathbb{C}$ ist definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n, z \in \mathbb{C}$.
Der *Konvergenzradius* ist:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierten Funktionen mit $f_n \rightrightarrows f$, das heißt f_n *konvergiert gleichmäßig* gegen f, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

2.5.2 Satz

Sei R der Konvergenzradius einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
   Für jedes $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varrho < R$ ist die Konvergenz auf $B_\varrho(0)$ gleichmäßig.

ii) Falls $|z| > R$ ist, divergiert die Potenzreihe.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz kann man im Innern des Konvergenzradius gliedweise differenzieren.

Beweis

Siehe Analysis I. $\square_{2.5.2}$

2.5.3 Satz

Sei R der Konvergenzradius einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

Auf $\Omega = \{|z| < R\}$ ist die Funktion $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorph und für die Ableitung gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Beweis

Definiere die Polynome:

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
$$g_n := f_n'$$

Sei nun $z \in \Omega$, so wähle ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_{2\varepsilon}(z) \subseteq \Omega$.
TODO: Abb1 einfügen
Auf $B_\varepsilon(z)$ gilt dann:

$$f_n \rightrightarrows f \qquad\qquad g_n \rightrightarrows g$$

g existiert, da der Konvergenzradius von g gegeben ist durch:

$$\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\,|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}} = R$$

Denn es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{\log k}{k}} = 1$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz und der Konvergenz der Ableitung folgt allgemein, dass man Differentiation und Summation vertauschen kann. Zur Deutlichkeit im Detail:
Schreibe $f = f_n + R_n$ mit $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.
Dann ist:

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - g(z) = \left(\frac{f_n(z') - f_n(z)}{z' - z} - g_n(z)\right)^{1.} - \Big(g(z) - g_n(z)\Big)^{2.} + \left(\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z}\right)^{3.}$$

Zeige nun, dass alle Terme im Limes $z' \to z$ und $n \to \infty$ verschwinden.

1. Term verschwindet, da Polynome differenzierbar sind und wegen der Definition von g_n.
2. Term verschwindet, da die Potenzreihe g_n in z konvergiert, denn:

$$g(z) - g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3. Term:

$$\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z'^k - z^k}{z' - z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(z'^{k-1} + z'^{k-2} z + \ldots + z^{k-1}\right)$$

Sei $0 < \varrho < R$ so gewählt, dass $z \in B_\varrho(0)$, dann folgt:

$$\left|\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k \varrho^{k+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Induktiv folgt sofort, dass $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ innerhalb des Konvergenzradius beliebig oft differenzierbar ist und dass gilt:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \\
f'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \\
&\vdots \\
f^{(k)}(z) &= k! \cdot a_k + \frac{(k+1)!}{1!} \cdot a_{k+1} z + \ldots
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Einsetzen liefert dann sofort die Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

2.5.4 Beispiel

Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$

lässt sich für $|z| < 1$ mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

umschreiben zu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n$$

Der Konvergenzradius von f ist $R = 1$ und die Pole von f sind $z = \pm\mathbf{i}$.

TODO: Abb2 einfügen

Dieses Beispiel haben wir schon früher als reelle Funktion betrachtet.

Wir verstehen jetzt, warum der Konvergenzradius 1 ist, denn f hat Pole in der komplexen Ebene, deren Betrag 1 ist.

Wir überlegen nun, was auf dem Rand des Konvergenzgebiets passiert:

2.5.5 Theorem (Satz von Abel)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R = 1$.

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt für jedes $K \in \mathbb{R}_{>0}$ für $\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$:

$$f(1) = \lim_{z \to 1} f(z)$$

TODO: Abb3 einfügen

Geometrische Bedeutung ist, dass z in einem „Kegel" liegen muss.

Beachte:

- Konvergenzradius 1 ist keine Einschränkung, denn sonst kann man reskalieren.
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ braucht *nicht* absolut zu konvergieren.
- Es gilt auch $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, für $|z_0| = 1$ mit $\frac{|z-z_0|}{1-|z|} \leq K$.

Beweis

Ohne Einschränkung gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

Ansonsten addiere eine Konstante zu a_0.

Setze:

$$\begin{aligned} S_n &:= a_0 + \ldots + a_n \\ S_n(z) &:= a_0 + a_1 z \ldots + a_n z^n = \\ &= S_0 + (S_1 - S_0) z + \ldots + (S_n - S_{n-1}) z^n = \\ &= S_0 (1-z) + S_1 \left(z - z^2\right) + \ldots + S_{n-1} \left(z^{n-1} - z^n\right) + S_n z^n = \\ &= (1-z) \left(S_0 + S_1 z + \ldots + S_{n-1} z^{n-1}\right) + S_n z^n \end{aligned}$$

Es gilt $S_n z^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, da $S_n \to 0$ konvergiert und und $z^n \to 0$ konvergiert wegen $|z| < R = 1$.

Somit folgt:

$$f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$$

Wir nehmen an, dass $|1-z| \leq K \cdot (1-|z|)$ ist und zudem $S_n \to 0$ gilt.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ schon $S_n < \varepsilon$ ist. Dann folgt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |S_n z^n| \leq \varepsilon \frac{|z|^N}{1-|z|} < \frac{\varepsilon}{1-|z|} \leq \frac{K\varepsilon}{|1-z|}$$

Und es ergibt sich:

$$|f(z)| \leq |1-z| \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_k z^k \right| + K\varepsilon \xrightarrow{z \to 1} K\varepsilon$$

Also gilt:

$$f(z) \xrightarrow{z \to 1} 0$$

$\square_{2.5.5}$

2.6 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.6.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞, ist also holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und es gilt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z$$

Mit der Produktformel von Cauchy folgt:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$$

Bereits in Analysis I wurde gezeigt:
Polardarstellung mit $r := e^{\mathrm{Re}(z)}$ und $\varphi =: \mathrm{Im}(z)$:

$$\begin{aligned} e^z &= re^{i\varphi} \\ e^{\mathbf{i}\varphi} &= \cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Dies erlaubt es, die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente zu erweitern.

$$\begin{aligned} \cos(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}\right) \\ \sin(z) &:= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right) \end{aligned}$$

Diese sind als Linearkombination holomorpher Funktionen holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und können als Potenzreihe dargestellt werden.
Periodizität:

$$\cos(2\pi) = 1 \qquad \sin(2\pi) = 0 \qquad e^{2\pi\mathbf{i}} = 1$$

Allgemeiner gilt für ein $a \in \mathbb{Z}$:

$$e^{z+2\pi a\mathbf{i}} = e^z \tag{2.3}$$

2.6.2 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Die definierende Gleichung für den Logarithmus ist:

$$e^{\log(z)} = z$$

Man sieht sofort:

- Diese Gleichung ist nur für $z \neq 0$ lösbar.
- Wegen (2.3) ist sie nur bis auf ein Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$ bestimmt.

Betrachte für $z \neq 0$ den Absolutbetrag:

$$\left|e^{\log(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(\log(z))} = |z|$$

Daher ist $\mathrm{Re}(\log(z))$ eindeutig bestimmt.
Für $n \in \mathbb{Z}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ folgt mit der Argumentfunktion

$$\arg(z) := \varphi = 2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) \in [\theta, \theta + 2\pi)$$

für $z = |z| e^{\mathbf{i}\varphi} = x + \mathbf{i}y$:

$$\mathrm{Im}(\log(z)) = \arg(z) + 2\pi n$$

$$\log(z) = \log(|z|) + \mathbf{i} \cdot \arg(z) \tag{2.4}$$

Also ist die Bestimmungsgleichung für log mehrdeutig lösbar.
Die Gleichung (2.4) definierte einen eindeutigen Logarithmus.
Das Problem ist, dass log unstetig an $L_\theta := \left\{te^{\mathbf{i}\theta} | t \geq 0\right\}$ ist.
Lösung: „Schneide die komplexe Ebene auf.“
Zum Beispiel so:
TODO: Abb1 einfügen
Dann ist $\log : \mathbb{C}|_{L_\theta} \to \mathbb{C}$ stetig.

2.7 Kurven, Konformität

2.7.1 Definition (Kurve)

Seien $I := [a,b]$ für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.
Eine *Kurve* γ ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{C}$.

- $\gamma(a)$ heißt der *Anfangspunkt*.
- $\gamma(b)$ heißt der *Endpunkt*.
- Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt die Kurve γ *geschlossen*.
- $\tau \in I$ heißt *Parameter der Kurve* $\gamma : \tau \mapsto \gamma(\tau)$.
- Falls die (reelle) Ableitung

  $$\gamma'(\tau) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(\tau + h) - \gamma(\tau)}{h}$$

  existiert und stetig ist, heißt γ *stetig differenzierbar*.
- γ heißt *regulär*, falls γ stetig differenzierbar ist und für alle $\tau \in I$ schon $\gamma'(\tau) \neq 0$ gilt.
- γ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar*, falls γ stetig auf I ist und es Intervalle I_j gibt, so dass $\gamma|_{I_j^\circ}$ stetig differenzierbar ist, und $I = I_1 \dot\cup \ldots \dot\cup I_n$ gilt.

2.7.2 Beispiel und Definition

Betrachte die holomorphe Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und die reguläre Kurve $\gamma : I \to \Omega$.
Das Ziel ist, geometrische Informationen über f zu gewinnen, indem man das Bild der Kurve betrachtet.

TODO: Abb2 einfügen

$f \circ \gamma$ ist eine Kurve in $f(\Omega)$.

TODO: Abb3 einfügen (ändere u in v und $\tilde{u}$ in $\tilde{v}$)

$v := \gamma'(\tau)$ ist die Tangente an γ in z_0.

$$\tilde{v} := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ \gamma)\right)(\tau_0) = f'(\gamma(\tau_0)) \cdot \gamma'(\tau_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\in\mathbb{C}} \cdot v$$

Schreibe nun Real- und Imaginärteil aus:

$$v = v_1 + \mathbf{i}v_2 \qquad \tilde{v} = \tilde{v}_1 + \mathbf{i}\tilde{v}_2 \qquad f'(z_0) = a + \mathbf{i}b$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Determinante:

  $$\det(A) = a^2 - b \cdot (-b) = a^2 + b^2 \geq 0$$

  Daher erhält A die Orientierung, ist also eine „Drehstreckung“ einschließlich Achsenstreckung.

- Es gilt:

  $$\underbrace{A^*}_{=A^T} \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot E_2$$

  Eine unitäre Matrix U erfüllt:

  $$U^* \cdot U = E$$

  Dies ist eine Drehung.
  Also ist A eine Drehung verkettet mit einer zentrischen Streckung. Hierbei bleiben die *Winkel erhalten.*

Statt winkeltreu sagt man auch *konform.*

Also beschreibt die Multiplikation mit $f'(z_0)$ eine Orientierungs- und Winkelerhaltende Transformation der komplexen Ebene.

Genauer: Seien $u,v \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

$$\cos\varphi = \frac{\langle u,v \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle \tilde{u},\tilde{v} \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\tilde{u}\| \cdot \|\tilde{v}\|} = \cos\tilde{\varphi}$$

Nebenrechnung:

$$\tilde{v} = Av \qquad\qquad \tilde{u} = Au$$

$$\langle \tilde{u},\tilde{v}\rangle = \langle Au,Av\rangle = \langle u,A^*Av\rangle = \left(a^2+b^2\right)\cdot\langle u,v\rangle$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|^2 &= \langle \tilde{u},\tilde{u}\rangle = \langle Au,Au\rangle = \langle u,A^*Au\rangle = \left(a^2+b^2\right)\cdot\langle u,u\rangle\\ \|\tilde{v}\|^2 &= \langle \tilde{v},\tilde{v}\rangle = \langle Av,Av\rangle = \langle v,A^*Av\rangle = \left(a^2+b^2\right)\cdot\langle v,v\rangle\end{aligned}$$

Analog kann man den Winkel zwischen zwei Kurven betrachten:

TODO: Abb1 einfügen

Polarzerlegung:

$$u = |u|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$$

mit

$$\arg u := \varphi \mod 2\pi \in [0,2\pi)$$

nach der üblichen Konvention.

$$\alpha = \arg u - \arg v = \arg \frac{u}{v}$$

$$\hat{\alpha} = \arg \frac{(f\circ\gamma)'(\tau_0)}{(f\circ\tilde{\gamma})'(\tau_0)} = \arg \frac{f(z_0)\cdot\gamma'(\tau_0)}{f(z_0)\cdot\tilde{\gamma}'(\tau_0)} = \arg\frac{\gamma'(\tau_0)}{\tilde{\gamma}'(\tau_0)} = \arg\frac{u}{v} = \alpha$$

2.7.3 Beispiel

Betrachte Kurvenscharen $\gamma_x(t)$ und $\delta_y(t)$.

$$\begin{aligned}\gamma_x : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto x + \mathbf{i}t\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\delta_y : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t + \mathbf{i}y\end{aligned}$$

TODO: Abb2 einfügen

Betrachte nun die Kurven $\exp\circ\gamma_x$ und $\exp\circ\delta_y$:

$$\begin{aligned}(\exp\circ\gamma_x)(t) &= e^{\gamma_x(t)} = e^{x+\mathbf{i}t} = e^x\cdot e^{\mathbf{i}t}\\ (\exp\circ\delta_y)(t) &= e^{\delta_y(t)} = e^{t+\mathbf{i}y} = e^t\cdot e^{\mathbf{i}y}\end{aligned}$$

TODO: Abb3 und Abb4 einfügen

Die Winkel bleiben erhalten, aber Längen und Flächeninhalte bleiben im Allgemeinen *nicht* erhalten.

2.8 Kurvenintegrale, Komplexe Integration

Betrachte wieder eine stetige und stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : I = [a,b] \to \Omega$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

TODO: Abb4 einfügen

Identifiziere zunächst $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$.

2.8.1 Proposition und Definition (Bogenlänge)

Die *Bogenlänge* $L(\gamma)$ der Kurve γ ist folgendermaßen definiert:

$$L(\gamma) := \int_a^b \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau$$

(Nehme hier zur Einfachheit an, dass γ differenzierbar ist, sonst muss man stückweise integrieren und die Integrale addieren.)
$L(\gamma)$ ist unabhängig von der Parametrisierung sein.

Beweis

Rechne die Unabhängigkeit von der Parametrisierung nach.
Sei $\tilde{\gamma}$ eine andere Parametrisierung der Kurve, also:

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \tau)(t) \qquad \tau : [\alpha,\beta] \to [a,b]$$

τ sei streng monoton steigend, also $\tau'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$.

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_\alpha^\beta \left|\tilde{\gamma}'(t)\right| \mathrm{d}t \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(t) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}}_{>0}\right| \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(t)\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t =$$

$$\underset{t=t(\tau),\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}{\overset{\text{Substitution}}{=}} \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau = L(\gamma)$$

$\square_{2.8.1}$

2.8.2 Bemerkung

Es gilt zudem:

$$\int_\alpha^\beta \gamma'(t) \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_a^b \gamma'(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Sei nun außerdem $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, zum Beispiel f holomorph.
Wir wollen „f längs γ integrieren", also:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$$\int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau$$

Dies wäre eine Möglichkeit, denn dies ist unabhängig von der Parametrisierung.
In der komplexen Analysis ist das Integral

$$\int_a^b f(\gamma(\tau)) \gamma'(\tau) \mathrm{d}\tau$$

interessanter, weil keine komplexe Konjugation eingeht.

2.8.3 Definition (komplexes Integral)

Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ stetig und stückweise differenzierbar und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.
Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

das *komplexe Integral* oder *Konturintegral* von f über γ.

Beachte

Wir integrieren über eine *reelle Variable* $t \in [a,b]$, aber der Integrand ist komplexwertig.
Man kann dies auf reellwertige Integrale zurückführen:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + \mathbf{i}\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$$

Dies sind Riemann- beziehungsweise Lebesgue-Integral im Reellen.
Insbesondere sieht man:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) &= \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{i.A.}}{\neq} \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\big)\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

2.8.4 Satz

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis

Sei $t : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ streng monoton steigend, stetig und stückweise differenzierbar.
Dann folgt aus $\tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma \circ t)(\tau)$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f \circ \gamma \circ t)(\tau) \cdot (\gamma \circ t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)(t(\tau)) \cdot \gamma'(t(\tau))\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &\underset{\text{formel}}{\overset{\text{Transformations-}}{=}} \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\square_{2.8.4}$

2.8.5 Beispiel

i) Betrachte $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ und:

$$\begin{aligned}\gamma : [1,2] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^2 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\cdot 1\mathrm{d}t = \left.\frac{-1}{t}\right|_1^2 = \frac{-1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

ii) Betrachte $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
Wähle eine Parametrisierung, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0{,}1] &\to \mathbb{C}\\ \gamma_1(\tau) &= \tau(1+\mathbf{i})\\ \gamma_1'(\tau) &= (1+\mathbf{i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 ((1+\mathbf{i})\cdot\tau)^n\cdot(1+\mathbf{i})\,\mathrm{d}\tau =\\ &= (1+\mathbf{i})^{n+1}\cdot\int_0^1 \tau^n\mathrm{d}\tau = \frac{1}{n+1}\cdot(1+\mathbf{i})^{n+1}\end{aligned}$$

Wähle eine andere Parametrisierung:

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0{,}2] &\to \mathbb{C}\\ \gamma(\tau) &= \begin{cases}\tau & 0\leq\tau\leq 1\\ (1+(\tau-1)\,\mathbf{i}) & 1\leq\tau\leq 2\end{cases}\\ \gamma'(\tau) &= \begin{cases}1 & 0<\tau<1\\ \mathbf{i} & 1<\tau<2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \tau^n\cdot 1\mathrm{d}\tau + \int_1^2 (1+(\tau-1)\cdot\mathbf{i})^n\cdot\mathbf{i}\mathrm{d}\tau =\\ &= \frac{1}{n+1} + \mathbf{i}\cdot\left.\frac{1}{(n+1)\,\mathbf{i}}(1+(\tau-1)\,\mathbf{i})^{n+1}\right|_1^2 =\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big((1+\mathbf{i})^{n+1}-1\Big) = \frac{1}{n+1}\cdot(1+\mathbf{i})^{n+1}\end{aligned}$$

Der Wert dieses Integrals ist also für beide Integrationswege gleich.

2.8.6 Definition

Sei $\gamma : [0{,}1] \to \mathbb{C}$. Setze:

$$\begin{aligned}\text{-}\,\gamma := \tilde\gamma : [0{,}1] &\to \mathbb{C}\\ \tau &\mapsto \tilde\gamma(\tau) = \gamma(1-\tau)\end{aligned}$$

Also „durchlaufe die Kurve rückwärts“.
Sei $\gamma_1 : [a{,}b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [b{,}c] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.
Definiere dann $\gamma_1+\gamma_2 : [a{,}c] \to \mathbb{C}$ durch:

$$(\gamma_1+\gamma_2)(\tau) = \begin{cases}\gamma_1(\tau) & \tau\in[a{,}b]\\ \gamma_2(\tau) & \tau\in(b{,}c]\end{cases}$$

2.8.7 Lemma

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(-\gamma(\tau))\cdot(-\gamma)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f(\gamma(1-\tau))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\gamma(1-\tau))\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int_0^1 f(\gamma(1-\tau))\cdot\gamma'(1-\tau)\cdot(-1)\,\mathrm{d}\tau \underset{t:=1-\tau,\mathrm{d}t=-\mathrm{d}\tau}{\overset{\text{Substitution}}{=}} -\int_1^0 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\cdot(-1)\,\mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^c f((\gamma_1+\gamma_2)(\tau))\cdot(\gamma_1+\gamma_2)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int_a^b f(\gamma_1(\tau))\cdot\gamma_1'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_b^c f(\gamma_2(\tau))\cdot\gamma_2'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_2 f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Induktiv folgt die Behauptung. $\square_{2.8.7}$

2.8.8 Definition

Setze:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\overline{z} &:= \overline{\int_{\gamma} \overline{f(z)}\mathrm{d}z} \\
\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}x &:= \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\overline{z}\right) \\
\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}y &:= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\overline{z}\right)
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}x + \mathbf{i}\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}y$$

Also gilt „$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathbf{i}\mathrm{d}y$“. Etwas ausführlicher:

$$\begin{aligned}
x + \mathbf{i}y = z &= \gamma(\tau) \\
x(\tau) &:= \operatorname{Re}(\gamma(\tau)) && \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\big(\gamma'(\tau)\big) = x'(\tau) \\
y(\tau) &:= \operatorname{Im}(\gamma(\tau)) && \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\big(\gamma'(\tau)\big) = y'(\tau) \\
\mathrm{d}x &= x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{d}y &= y'(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\overline{z} = \overline{\int_\gamma \overline{f(z)}\mathrm{d}z} = \overline{\int_a^b \overline{f(\gamma(\tau))}\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\overline{\gamma'(\tau)}\mathrm{d}\tau$$
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(\tau))\cdot\underbrace{\mathrm{Re}\left(\gamma'(\tau)\right)}_{=:x'(\tau)}\mathrm{d}\tau$$
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\gamma(\tau))\cdot\underbrace{\mathrm{Im}\left(\gamma'(\tau)\right)}_{=:y'(\tau)}\mathrm{d}\tau$$

Setze $p = f$ und $q = \mathbf{i}f$ und schreibe:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma p\mathrm{d}x + \int_\gamma q\mathrm{d}y$$

2.9 Abhängigkeit vom Integrationsgebiet

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und wegzusammenhängend, $z_0, z \in \Omega$ und $p,q : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

2.9.1 Definition (wegunabhängig)

Sei γ_1 eine differenzierbare Kurve, die z_0 mit z verbinden.
Das Integral

$$\int_{\gamma_1} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

heißt *wegunabhängig*, wenn für alle differenzierbaren Kurven γ_2, die z_0 mit z verbinden, gilt:

$$\int_{\gamma_1} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) = \int_{\gamma_2} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

TODO: Abb2 einfügen
In diesem Fall schreibt man auch:

$$\int_{z_0}^{z} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) := \int_{\gamma_1} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

Frage

Wann gilt diese Gleichheit?

Allgemeine Frage

Wann ist ein Integral wegunabhängig?

2.9.2 Theorem (Frobenius, Poincaré, ...)

Das Linienintegral

$$\int_\gamma (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine Funktion $U : \Omega \to \mathbb{C}, x + \mathbf{i}y \mapsto U(x,y)$ gibt, sodass gilt:

$$p = \partial_1 U \qquad q = \partial_2 U \tag{2.5}$$

Beweis

„⇐“: Nehme an, dass (2.5) gilt, womit folgt:

$$\int_\gamma (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) = \int_a^b \left(\partial_1 U \cdot x'(\tau)\,\mathrm{d}x + \partial_2 U \cdot y'(\tau)\,\mathrm{d}y\right) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(U(x(\tau), y(\tau))\right) = \\ = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(z) - U(z_0)$$

Also hängt das Integral tatsächlich nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
„⇒“: Nehmen an, dass das Integral wegunabhängig ist.
$z_0 = (x_0, y_0)$ sei fest, während $z = (x,y)$ variabel sei.
Wähle als Kurve speziell ein Polygonzug, dessen Teile parallel zur x- oder y-Achse verlaufen.
TODO: Abb3 einfügen
γ kann durch einen solchen Polygonzug approximiert werden.
Verwende hierbei, dass Ω offen und wegzusammenhängend ist.
Definiere:

$$U(x,y) := \int_\gamma (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

Dies ist wohldefiniert, weil das Integral nach Voraussetzung wegunabhängig ist.
Berechne die partielle Ableitung $\partial_1 U$:
Wähle den Polygonzug so, dass er in einer Umgebung von (x,y) horizontal verläuft.
Dann gilt mit einer Konstante $C \in \mathbb{C}$:

$$U(x,y) = \int^x p(\tilde{x}, y)\,\mathrm{d}\tilde{x} + C$$
$$\partial_1 U = p(x,y)$$

Berechne die partielle Ableitung $\partial_2 U$:
Wähle den Polygonzug so, dass er in einer Umgebung von (x,y) vertikal verläuft.
Dann gilt mit einer Konstante $K \in \mathbb{C}$:

$$U(x,y) = \int^y q(x, \tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} + K$$
$$\partial_2 U = q(x,y)$$

Also sind die Differentialgleichungen (2.5) erfüllt. $\square_{2.9.2}$

2.9.3 Definition (totales Differential)

Man schreibt auch das *unbestimmte Integral*

$$\int p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = U$$

und nennt U eine *Stammfunktion*. Außerdem heißt

$$p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = \partial_1 U\mathrm{d}x + \partial_2 U\mathrm{d}y =: \mathrm{d}U$$

das *totale Differential* $\mathrm{d}U$.
Das totale Differential ist *exakt*, das heißt es kann in obiger Form geschrieben werden.

2.9.4 Bemerkung

Zurück zum Konturintegral:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\underbrace{f}_{=p} \mathrm{d}x + \underbrace{\mathbf{i}f}_{=q} \mathrm{d}y \right)$$

Nach Theorem 2.9.2 ist das Konturintegral genau dann wegunabhängig, wenn ein

$$F(z = x + \mathbf{i}y) = F(x,y)$$

in Ω existiert, so dass gilt:

$$\partial_1 F = f(z) \qquad \partial_2 F = \mathbf{i}f(z)$$

Also folgt:

$$\partial_1 F = -\mathbf{i} \cdot \partial_2 F$$

Also erfüllt F die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und es gilt $f(z) = F'(z)$.

2.9.5 Korollar

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = F'(z)$.

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{2.9.5}$

2.9.6 Satz

Für jedes Polynom $P(z)$ und jede geschlossene Kurve γ gilt:

$$\int_\gamma P(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$Q(z) := \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \ldots + a_0 z$$

$Q(z)$ ist eine holomorphe Stammfunktion, denn es gilt $Q'(z) = P(z)$. $\square_{2.9.6}$

2.10 Das Cauchysche Theorem

Betrachte ein Rechteck $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ mit $R \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$.
TODO: Abb4 einfügen

Frage

Die Frage kann in zwei äquivalenten Fragestellungen formuliert werden:

1. Für welche f ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ unabhängig vom Integrationsweg.
2. Für welche f gibt es eine holomorphe Stammfunktion.

Notwendiges Kriterium

Falls für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ für alle geschlossenen Wege γ schon

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt, dann ist jedes Kurvenintegral über $f(z)$ wegunabhängig und somit gibt es eine holomorphe Stammfunktion F.
Nun gilt aber $f = F'$, weswegen auch f holomorph ist.
Beginne mit einfachen Integrationswegen und zwar dem Integral längs des Randes von R.

2.10.1 Theorem (Goursat)

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt:

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis

Zerlege R in vier kongruente Rechtecke $R^{(1)}, \ldots, R^{(4)}$.
TODO: Abb5 einfügen

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\partial R^{(4)}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dies gilt, da sich die Integrale längs der „inneren Kanten“ gegenseitig aufheben.
Da dies vier Summanden sind, gilt für mindestens eines der Rechtecke $R^{(k)}$:

$$\left|\oint_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{1}{4}\left|\oint_{\partial R} f(z)\right|$$

Dieses nennen wir $R_1 := R^{(k)}$.
Wähle nun induktiv Rechtecke $R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$ so, dass gilt:

$$\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$$

Zudem gilt

$$\mathrm{Vol}(R_n) = 4^{-n} \cdot \mathrm{Vol}(R)$$

und die Kantenlängen von R_n sind schon 2^{-n} mal die Kantenlängen von R.
Seien z_n die Mittelpunkte dieser Rechtecke. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt $z^* \in R$.
TODO: Abb6 einfügen
Verwende nun ein lokales Argument:
Da f in z^* holomorph ist, gilt:

$$f(z) = f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*) + o(|z - z^*|)$$

Anders ausgedrückt gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in B_\delta(z^*) \setminus \{z^*\}$ gilt:

$$\left|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)\right| < \varepsilon\,|z - z^*|$$

$f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)$ ist ein Polynom in z, hat also eine holomorphe Stammfunktion.
Wähle nun n so groß, dass $R_n \subseteq B_\delta(z^*)$ ist. Dann gilt:

$$\oint_{\partial R_n} \left[f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)\right] \overset{2.9.6}{=} 0$$

Beachte dabei, das wir ein Polynom integrieren.

$$\oint_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_n} \left(f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)\right)\mathrm{d}z$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\oint_{\partial R_n} \Big(\underbrace{f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)}_{|\ldots|\leq\varepsilon|z-z^*|}\Big)\mathrm{d}z\right| \leq \\
&\leq \varepsilon\left|\oint_{\partial R_n} \underbrace{|z - z^*|}_{\leq 2^{-n}\cdot\max\{b-a,d-c\}=:d_n} \mathrm{d}z\right| \leq \\
&\leq \varepsilon \cdot \underbrace{d_n}_{\text{Durchmesser von } R_n} \cdot \underbrace{L_n}_{\text{Umfang von } R} \\
&\leq \varepsilon \cdot 4^{-n} \cdot \underbrace{d}_{\text{Durchmesser von } R} \cdot \underbrace{L}_{\text{Umfang von } R}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\oint_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z \geq 4^{-n} \left| \oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \right|$$

Damit folgt:

$$\left| \oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \varepsilon \cdot d \cdot L$$

Da ε beliebig ist, folgt $\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. $\square_{2.10.1}$

2.10.2 Theorem

Sei $R' = R \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein Rechteck ohne endlich viele innere Punkte, also $\zeta_k \in R^\circ$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sei zudem f auf R' holomorph und es gelte:

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$$

Dann gilt:

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis

Es genügt, einen Ausnahmepunkt zu betrachten, da wir das Rechteck ansonsten in endlich viele Rechtecke zerlegen können.

TODO: Abb1-b einfügen

Den Ausnahmepunkt nennen wir ζ.

Wähle ein kleines Rechteck R_0 mit Durchmesser d_0 und Umfang L_0 um ζ und nenne die restlichen Rechtecke R_i mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $N \in \mathbb{N}$.

TODO: Abb2 einfügen

Weil f in R_i für $i \geq 1$ holomorph ist, folgt:

$$\oint_{\partial R_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Damit folgt:

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial R_0} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Nach Voraussetzung können wir zu einem gegebene $\varepsilon > 0$ das Rechteck R_0 so klein wählen, dass für alle $z \in \partial R_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot (z - \zeta)| &\leq \varepsilon \\ |f(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{|z - \zeta|} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\left|\oint_{\partial R_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \varepsilon \int_{\partial R_0} \frac{\overbrace{|\mathrm{d}z|}^{=|\gamma'(t)|\mathrm{d}t}}{|z-\zeta|} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{\min_{z\in\partial R_0} \underbrace{(|z-\zeta|)}_{>0}} \cdot L_0$$

Da ε beliebig ist, folgt:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$\square_{2.10.2}$

Verallgemeinere dies nun auf beliebige Kurven in einer Kreisscheibe.

2.10.3 Theorem

Sei f in $\Delta := B_R(0) \in \mathbb{C}$ holomorph mit $R \in \mathbb{R}_{>0}$.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in Δ:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis

Sei $z = x + \mathbf{i}y \in \Delta$.
TODO: Abb3 einfügen
Wähle ein Rechteck R so, dass die linke untere Ecke der Ursprung und die rechte obere Ecke z ist.
Nach Theorem 2.10.1 ist

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

und deshalb ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z =: F(z)$$

wohldefiniert.
Nach Korollar 2.9.5 genügt es zu zeigen, dass $F(z) = F(x,y)$ mit $z = x + \mathbf{i}y$ eine holomorphe Stammfunktion von f ist.
Sei γ_h ein Weg, der z und $z + h$ parallel zur reellen Achse verbindet.
Sei γ_g ein Weg, der z und $z + \mathbf{i}h$ parallel zur imaginären Achse verbindet.
TODO: Abb4 einfügen

$$\partial_1 F = \lim_{0\neq h\to 0} \int_{\gamma_h} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+h) \cdot \underbrace{\gamma'(h)}_{=1} \mathrm{d}h = f(z)$$

$$\partial_2 F = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h} \left(F(z+\mathbf{i}h) - F(z)\right) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+\mathbf{i}h) \cdot \mathbf{i}\mathrm{d}h = \mathbf{i}f(z) = \mathbf{i}\partial_1 F$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, weswegen F holomorph ist und es gilt:

$$F'(z) = f(z)$$

$\square_{2.10.3}$

2.10.4 Theorem

Sei f holomorph in $\Delta' = \Delta \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ mit $\zeta_j \in \Delta$ für $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}$ und es gelte für $1 \leq j \leq n$:

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$$

Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ in Δ'.

Beweis

TODO: Abb5 einfügen

Wähle Kurven γ_1 und γ_2 so, dass

- die Kurven keinen der Punkte ζ_j schneiden.
- in einer Umgebung von z die Kurve γ_1 parallel zur imaginären Achse und γ_2 parallel zur reellen Achse ist.

Da nach Theorem 2.10.2 schon

$$\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt, folgt wieder:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z =: F(z)$$

Ab jetzt geht der Beweis genau wie der von Theorem 2.10.3. $\square_{2.10.4}$

2.11 Der Cauchysche Integralsatz

Sei γ wieder eine geschlossene Kurve.
Wir wollen nun Funktionen integrieren, die Pole haben.
Beginne speziell mit der Funktion

$$\frac{1}{z-a}$$

wobei a nicht im Bild $\operatorname{im}(\gamma)$ der Kurve liegt.
TODO: Abb6 einfügen

2.11.1 Lemma

Es gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z = 2\pi \mathbf{i} \cdot n$$

für ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\log(z-a)$ ist eine holomorphe Stammfunktion, aber nicht auf ganz $\mathbb{C}$.
TODO: Abb7 einfügen

Beweis

Wähle eine Parametrisierung

$$\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$$

und setze $z(t) = \gamma(t)$ und:

$$h(t) := \int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a} \mathrm{d}t$$

TODO: Abb8 einfügen

$$h'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-a}$$

Dann ist

$$e^{-h(t)}(z(t)-a)$$

stetig und stückweise differenzierbar und hat die Ableitung:

$$\left(e^{-h(t)}(z(t)-a)\right)' = e^{-h(t)}\left(-h'(t)(z(t)-a)+z'(t)\right) = 0$$

Also es eine Konstante $K \in \mathbb{C}$, das heißt:

$$e^{-h(t)} = \frac{K}{z(t)-a}$$

Da $h(\alpha) = 0$ ist, weil α die untere Integralgrenze ist, folgt:

$$e^{-h(t)} = \frac{z(\alpha)-a}{z(t)-a}$$

Da die Kurve geschlossen ist, also $z(\alpha) = z(\beta)$ gilt, folgt:

$$e^{-h(\beta)} = \frac{z(\alpha)-a}{z(\beta)-a} = 1$$

Damit ergibt sich:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z = h(\beta) = 2\pi \mathbf{i} n$$

$\square_{2.11.1}$

2.11.2 **Definition** (Index)

Sei γ eine geschlossene Kurve, die $a \in \mathbb{C}$ nicht schneidet. Dann heißt

$$n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

der Index oder auch *die Windungszahl* von γ bezüglich a.

2.11.3 **Theorem** (Cauchyscher Integralsatz)

Sei $f : \Delta = B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine geschlossene Kurve in Δ.
Dann gilt für jedes $a \in \Delta$, das nicht auf γ liegt

$$n(\gamma,a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

Beweis

Die Funktion

$$F(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

ist auf $\Delta \setminus \{a\}$ holomorph und es gilt:

$$\lim_{z\to a} (z-a) F(z) = \lim_{z\to a} (f(z) - f(a)) \overset{f \text{ stetig}}{=} 0$$

Also können wir Theorem 2.10.4 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - f(a) \cdot \oint_\gamma \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z = \\ &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - f(a) \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot n(\gamma,a) \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a) \cdot n(\gamma,a)$$

$\square_{2.11.3}$

2.11.4 **Korollar**

Sind $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \Delta$ und $\gamma = \partial B_\varepsilon(a) \subseteq \Delta$, so gilt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

Beweis

Der Index ist eins, weil gilt:

$$\oint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}$$

$\square_{2.11.4}$

2.11.5 Bemerkung und Definition (Zusammenhangskomponenten)

Also ist $f(a)$ eindeutig bestimmt durch $f\Big|_{\partial B_\varepsilon(a)}$, das heißt f kann nicht in einer kleinen Umgebung um a abgeändert werden.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathrm{Re}(f) = 0 = \nabla^2 \mathrm{Im}(f)\\ \partial_1 f = -\mathbf{i}\partial_2 f\end{aligned}$$

Diese harmonische Differentialgleichung ist im Innern eindeutig durch die Randwerte bestimmt. Eigenschaften des Index:

$$n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} \mathrm{d}\tau$$

Gehe Kurven rückwärts oder setze geschlossene Kurven aneinander:

$$\begin{aligned}n(-\gamma,a) &= -n(\gamma,a)\\ n(\gamma_1+\gamma_2,a) &= n(\gamma_1,a) + n(\gamma_2,a)\end{aligned}$$

TODO: Abb1 einfügen

Das Bild (englisch „image“) bezeichnet man mit $\mathrm{im}(\gamma)$ (beziehungsweise englisch „range“ $\mathrm{Rg}(\gamma)$).

$$\mathrm{im}(\gamma) := \gamma([a,b])$$

ist eine kompakte, also abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}n(\gamma) : \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) &\to \mathbb{Z}\\ a &\mapsto n(\gamma,a)\end{aligned}$$

Für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist zusammenhängend äquivalent zu wegzusammenhängend (auch bogenzusammenhängend genannt).

$$\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) = \dot{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}} \Omega_\lambda$$

Ω_λ heißen *die Zusammenhangskomponenten* und für alle λ aus der Indexmenge Λ ist Ω_λ zusammenhängend.

Es könnte auch unendlich viele Zusammenhangskomponenten geben.

TODO: Abb2 einfügen

Da $\mathrm{im}(\gamma)$ beschränkt ist, gibt es einen Radius R, so dass gilt:

$$\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \Delta = B_R(0)$$

TODO: Abb3 einfügen

2.11.6 Satz

Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{im}(\gamma) \subseteq \Delta = B_R(0)$.

i) Falls $|a| > R$ ist, so gilt $n(\gamma,a) = 0$.

ii) Auf jeder Zusammenhangskomponente ist

$$\begin{aligned} n(\gamma,.) : \Omega_\lambda &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto n(\gamma,x) \end{aligned}$$

konstant.

Beweis

i) $\dfrac{1}{z-a}$ ist in diesem Falls auf ganz Δ holomorph. Nach Theorem 2.10.3 folgt:

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0$$

$\square_{\text{i)}}$

ii) Seien $a,b \in \Omega_\lambda$. Mann kann dann a und b durch einen Polygonzug miteinander verbinden.

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass der Polygonzug nur aus einer Linie besteht, denn sonst kann man ihn in endlich viele Linien zerlegen.

Daher ist die Verbindungslinie $v(a,b) := \left\{ \tau a + (1-\tau) b \middle| 0 \leq \tau \leq 1 \right\}$ von a nach b eine Teilmenge von Ω_λ.

Es genügt also zu zeigen, dass gilt:

$$n(\gamma,a) = n(\gamma,b)$$

Da a und b in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen, gilt

$$v(a,b) \cap \operatorname{im}(\gamma) = \emptyset$$

und damit ist $\dfrac{z-a}{z-b}$ auf γ nicht Element von $\mathbb{R}_{\leq 0}$, denn wäre $\dfrac{z-a}{z-b} = -c$ für ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so würde

$$\begin{aligned} z - a &= -c(z-b) \\ z &= \frac{1}{1+c} \cdot a + \frac{c}{1+c} \cdot b \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{1+c} + \frac{c}{1+c} = 1$$

gelten, also würde $z \in v(a,b)$ folgen.

TODO: Abb4? einfügen

Folglich ist $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ längs γ wohldefiniert, wobei für $\log(z)$ wieder die komplexe Ebene auf der negativen reellen Achse „geschlitzt" ist.

$$\left(\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{z-a}{z-b}}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{z-a}{(z-b)^2}\right) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$

Es folgt:

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) \mathrm{d}z = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\Bigg|_{z_0}^{z_0} = 0 = n(\gamma,a) - n(\gamma,b)$$

$\square_{2.11.6}$

2.11.7 Lemma

Seien γ eine geschlossenen Kurve, die nicht durch den Ursprung geht, und $z_1, z_2 \in \operatorname{im}(\gamma)$ mit $\operatorname{im}(z_1) < 0$ und $\operatorname{im}(z_2) > 0$. Bezeichne die Teilkurven von z_1 nach z_2 mit γ_1 und die von z_2 nach z_1 mit γ_2.
Falls γ_1 die negative reelle Achse nicht schneidet und γ_2 die positive reelle Achse nicht schneidet, dann ist $n(\gamma,0) = 1$.
TODO: Abb5 einfügen

Beweis

Sei $L_1 = \left\{\lambda \cdot z_1 \middle| \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$ der Strahl durch 0 und z_1 und L_2 der Strahl durch 0 und z_2.
Sei C ein Kreis um den Ursprung, der γ nicht schneidet.
Wähle σ_1 und σ_2 wie in der Zeichnung.
TODO: Wie genau werden die σ gewählt?

$$\oint_{\sigma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0 = \oint_{\sigma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

Dies gilt, da 0 in derselben Zusammenhangskomponente wie ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > R$ ist.
Nach Satz 2.11.6 i) gilt:

$$n(\sigma_1,a) = 0$$

Die Kurve $\mathcal{C}$ (siehe Zeichnung) schneidet nach Konstruktion σ_1 nicht.
Also liegen a und 0 in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\sigma_1)$, weswegen $n(\sigma_1,0) = 0$ ist.
Damit folgt:

$$0 = n(\sigma_1,0) + n(\sigma_2,0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\sigma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\sigma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\underbrace{\oint_{C}\frac{\mathrm{d}z}{z}}_{=2\pi\mathbf{i}} = n(\gamma,0) - 1$$

Damit folgt:

$$n(\gamma,0) = 1$$

$\square_{2.11.7}$

2.12 Einfache Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

TODO: Abb7 einfügen

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \Omega$.
Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $B_{2\varepsilon}(a) \subseteq \Omega$ gilt und definiere $C := \partial B_{2\varepsilon}(a)$.
Für alle $z \in B_\varepsilon(a)$ gilt dann:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Nehme an, dass man unter dem Integral nach z ableiten darf, was wir später rechtfertigen werden.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Also sollte f beliebig oft komplex differenzierbar sein.

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z) \right| &\leq \frac{n!}{2\pi} \sup_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \cdot \underbrace{2\pi \cdot 2\varepsilon}_{\text{Länge von } C} \leq \\ &\leq 2\varepsilon \cdot n! \cdot \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \cdot \sup_C |f| \leq \\ &\leq \underbrace{2 \sup_C |f|}_{=:K} \cdot \frac{n!}{\varepsilon^n} \end{aligned}$$

„Man hat unter Kontrolle wie rasch die Ableitungen in n ansteigen.“
Betrachte die Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0) \right|^n \leq K \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{\varepsilon} \right)^n$$

Falls $|z - z_0| < \varepsilon$ ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante.

2.12.1 Lemma

TODO: Abb1 einfügen

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\varphi(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig auf der geschlossenen Kurve $\gamma := \partial\Delta$, mit $\Delta := B_{2\varepsilon}(a) \subseteq \Omega$ das heißt $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ und $(\varphi \circ \gamma) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sollen stetig sein.
Dann sind die Funktionen

$$F_n(z) = \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \mathrm{d}\zeta$$

mit $n \in \mathbb{N}$ auf $B_\varepsilon(a)$ holomorph und es gilt $F_n'(z) = n \cdot F_{n+1}(z)$.

Beweis

a) Zeige, dass $F_1(z)$ stetig ist:
Sei $z_0 \in B_\varepsilon(a)$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $B_{2\delta}(z_0) \subseteq B_\varepsilon(a)$. Sei $z \in B_\delta(z_0)$.

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \oint_\gamma \varphi(\zeta) \underbrace{\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)}_{=\frac{z-z_0}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}} \mathrm{d}\zeta = (z - z_0) \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \mathrm{d}\zeta$$

Wir wissen, dass $|\zeta - z| \geq \varepsilon$ und $|\zeta - z_0| \geq \varepsilon$ ist.
Damit folgt:

$$\begin{aligned} |F(z) - F(z_0)| &\leq |z - z_0| \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \oint_\gamma |\varphi(\zeta)| \underbrace{|\mathrm{d}\zeta|}_{=|\gamma'(\tau)|\mathrm{d}\tau} \leq \\ &\leq |z - z_0| \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sup_\gamma |\varphi| \cdot 2\pi \cdot 2\varepsilon \end{aligned}$$

Also ist F Lipschitz stetig in z_0.

b) Zeige, dass F_1 komplex differenzierbar in $z = z_0$ ist und dass $F_1'(z_0) = F_2(z_0)$ gilt.
Betrachte die Abschätzung aus a) und ersetze $\varphi(\zeta)$ durch $\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$, also ist

$$G_1(z) = \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta = \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0}$$

stetig in z_0 und daher existiert der Limes:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0}$$

Nochmals erklärt:

$$F_1(z) = \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

$$F_1(z) - F_1(z_0) = (z - z_0) \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \mathrm{d}\zeta$$

Daher gilt:

$$\frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \oint_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Dabei ist:

$$\psi(\zeta) := \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$$

Da ψ stetig ist, ist das Konturintegral stetig und daher konvergiert der Differenzenquotient.

c) Der allgemeine Fall folgt durch Induktion:

$$F_n(z) - F_n(z_0) = \oint_\gamma \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) \mathrm{d}\zeta$$

Für die Stetigkeit verwende folgendes Ergebnis:

Behauptung

Für $p,q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^p (\zeta - z)^q} \mathrm{d}\zeta = \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+q}} \mathrm{d}\zeta$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \oint \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^p (\zeta - z)^q} \mathrm{d}\zeta &= \lim_{z \to z_0} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\gamma(\tau))}{(\gamma(\tau) - z_0)^p (\gamma(\tau) - z)^q} \gamma'(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\gamma(\tau))}{(\gamma(\tau) - z_0)^{p+q}} \gamma'(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \oint_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+q}} \mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

$\square_{\text{Behauptung}}$

Benutze folgende Identität:

$$1 = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0} = \frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\zeta - z)^n} &= \frac{1}{(\zeta - z)^n} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(\zeta - z)^n} \cdot \left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) = \\
&= \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} = \\
&= \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} = \\
&= \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} \cdot \left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} = \\
&= \frac{1}{(\zeta - z)^{n-2} (\zeta - z_0)^2} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)^2} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} = \\
&\;\;\vdots \\
&= \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} + \underbrace{\frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^n} + \ldots + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)}}_{n \text{ Terme}}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \oint_\gamma \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) \mathrm{d}\zeta = \\
&= \oint_\gamma \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^n} + \ldots + \frac{1}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} \right) \mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$F_n'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \varphi(\zeta) \frac{n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = n \cdot F_{n+1}(z_0)$$

Damit folgt auch die Differenzierbarkeit.

$\square_{2.12.1}$

2.12.2 Theorem

Jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist in Ω unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

Dabei ist γ eine Kurve in Ω, die z mit Index 1 umläuft.

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{2.12.2}$

2.12.3 Satz (Morera)

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und für jede geschlossene Kurve in Ω gelte $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
Dann ist f holomorph.

Beweis

Nach Theorem 2.9.4 gibt es eine holomorphe Stammfunktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ und $F'(z) = f(z)$.
Da F nach Theorem 2.12.2 zweimal differenzierbar ist, folgt, dass f differenzierbar und damit holomorph ist. $\square_{2.12.3}$

2.12.4 Satz (Liouville)

Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die beschränkt ist, ist konstant.

Beweis

Da f beschränkt ist, gilt für ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z)| \leq C$$

TODO: Abb2 einfügen
Für $R > 2|z|$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

$$|\zeta - z| > \frac{R}{2}$$

Nach Theorem 2.12.2 gilt:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R}{2}\right)^{-2} \cdot \sup_{\partial B_R(0)} |f| \cdot 2\pi R \leq \frac{4}{R} \cdot C \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Da R beliebig groß gewählt werden kann, folgt $f'(z) = 0$.
Wir sehen also, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f'(z) = 0$$

TODO: Abb3 einfügen

Seien nun z_1,$z_2 \in \mathbb{C}$ und γ ein Weg, der z_1 und z_2 verbindet, dann gilt:

$$f(z_1) - f(z_0) = \int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Damit folgt:

$$f(z_1) = f(z_0)$$

Also ist f konstant. $\square_{2.12.4}$

Dies liefert einen eleganten Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra:

2.12.5 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis

Nehme an, $P(z)$ sei ein nicht konstantes Polynom ohne Nullstellen.
Damit würde folgen, das

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, da gilt:

$$f'(z) = -\frac{P'(z)}{P(z)^2}$$

Das Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ lässt sich mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$ schreiben als:

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \ldots\right)$$

Also ist $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$ und somit gilt:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

Daher nimmt $|f(z)|$ sein Maximum innerhalb einer Kugel $B_R(0)$ für eine $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ an.
Daher ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt und damit nach dem Satz von Liouville 2.12.4 konstant.
Also ist $P(z)$ konstant, was ein Widerspruch ist. $\square_{2.12.5}$

2.13 Hebbare Singularitäten, Taylorreihen

Die Bedingung für „Ausnahmepunkte“ in Theorem 2.10.4 war:

$$\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)\,f(z)=0$$

2.13.1 Satz und Definition (hebbare Singularität, holomorphe Fortsetzung)

Seien $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ offen, $a\in\Omega$, $\Omega'=\Omega\setminus\{a\}$, $f:\Omega'\to\mathbb{C}$ holomorph und es gelte:

$$\lim_{a\neq z\to a}(z-a)\,f(z)=0$$

Dann gibt es eine holomorphe Funktion

$$\tilde{f}:\Omega\to\mathbb{C}$$

mit $\tilde{f}|_{\Omega'}=f$.
Die Umkehrung gilt auch.
Die Funktion $\tilde{f}$ ist eindeutig bestimmt.
$\tilde{f}$ heißt *holomorphe Fortsetzung* von f und a heißt *hebbare Singularität*.

Beweis

„$\Leftarrow$“: Sei $\tilde{f}$ holomorphe Fortsetzung. Dann gilt

$$\lim_{a\neq z\to a}(z-a)\,f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\,\tilde{f}(z)=0$$

weil $\tilde{f}$ stetig ist.
Die Eindeutigkeit ist wegen der Stetigkeit klar:

$$\tilde{f}(a)=\lim_{z\to a}\tilde{f}(z)=\lim_{a\neq z\to a}f(z)$$

„$\Rightarrow$“: Sei $C=\partial B_\varepsilon(a)\subseteq\Omega$.
Betrachte für $z\in B_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$ die Funktion:

$$G(\xi)=\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}$$

Diese Funktion ist holomorph in $\Omega\setminus\{a,z\}$ und erfüllt die Bedingungen von Theorem 2.10.4, denn es gilt für $\xi\in\Omega\setminus\{a,z\}$:

$$\lim_{\xi\neq z\to\xi}(z-\xi)\,G(\xi)=0$$

Also gilt nach Theorem 2.10.4 schon

$$\oint_\gamma G(z)\,\mathrm{d}z=0$$

und folglich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Dies ist genau wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes 2.11.3.
Da das Integral auch für $z = a$ wohldefiniert ist, können wir auf $B_\varepsilon(a)$, einschließlich $z = a$ setzen:

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Also ist $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta & \text{falls } z \in B_\varepsilon(a) \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

$\square_{2.13.1}$

2.13.2 Theorem (Taylorformel)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \Omega$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} \cdot (z-a)^k + f_n(z) \cdot (z-a)^n$$

Dabei ist $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und es gilt mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $C := \partial B_\varepsilon(a)$ und $z \in B_\varepsilon(a)$:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \cdot \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n \cdot (\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

Beweis

Die Funktion

$$\begin{aligned} F : \Omega \setminus \{a\} &\to \mathbb{C} \\ z \mapsto F(z) &:= \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \end{aligned}$$

ist holomorph und es gilt:

$$\lim_{a \neq z \to a} (z-a) \cdot F(z) = \lim_{z \to a} (f(z) - f(a))$$

Also ist die Singularität von F an der Stelle a hebbar.
f_1 sei die holomorphe Fortsetzung von F, das heißt $f_1 : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph und für alle $z \in \Omega \setminus \{a\}$ gilt $f_1(z) = F(z)$.
Dann gilt für alle $z \in \Omega \setminus \{a\}$:

$$\begin{aligned} && f(z) &= f(a) + f_1(z) \cdot (z-a) \\ \Leftrightarrow && f_1(z) &= \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \end{aligned}$$

Nun kann man induktiv weiter schließen:
Es gibt eine holomorphe Funktion $f_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ mit:

$$f_1(z) = f_1(a) + (z-a) \cdot f_2(z)$$

Es gibt eine holomorphe Funktion $f_3 : \Omega \to \mathbb{C}$ mit:

$$f_2(z) = f_2(a) + (z-a) \cdot f_3(z)$$

...
Es gibt eine holomorphe Funktion $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ mit:

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a) \cdot f_n(z)$$

Zusammengesetzt ergibt das:

$$f(z) = f(a) + (z-a) f_1(a) + \ldots + (z-a)^{n-1} f_{n-1}(a) + (z-a)^n f_n(z)$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, leiten wir k-mal (mit $k \in \mathbb{N}$) nach z ab:

$$f^{(k)}(z) = k! \cdot f_k(a) + \frac{(k+1)!}{1!}(z-a) f_{k+1}(a) + \ldots + \frac{n!}{(n-k)!}(z-a)^{n-k} f_n(a)$$

Werte nun an der Stelle a aus:

$$f^{(k)}(a) = k! \cdot f_k(a)$$
$$f_k(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Setze dies ein und erhalte:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n f_n(a)$$

Bestimme nun das Restglied:
Da f_n holomorph ist, gilt:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Setze nun $z = \zeta$ in die Taylorreihe ein und löse nach $f_n(\zeta)$ auf:

$$f_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f(a)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f'(a)}{(\zeta-a)^{n-1}} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(\zeta-a)}$$

Setzt man dies in das Integral ein, so erhält man:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f(a)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f'(a)}{(\zeta-a)^{n-1}} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(\zeta-a)} \right) \mathrm{d}\zeta$$

Es bleibt zu zeigen, dass für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \oint_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n-l}} = 0$$

Zeige dies induktiv:
Setze $\nu := n - k \in \{1, \ldots, n\}$ und:

$$F_\nu(a) := \oint_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^\nu}$$

Zu zeigen ist also $F_\nu(a) = 0$.
Es folgt mit einer Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} F_1(a) &= \oint_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)} = \oint_C \mathrm{d}\zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - a}\right) \cdot \frac{1}{z - a} \mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{z - a}(2\pi\mathbf{i} - 2\pi\mathbf{i}) = 0 \end{aligned}$$

Denn sowohl z, als auch a liegen im Inneren $B_\varepsilon(a)$ der Kurve C.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} F_\nu(a) = \oint_C \mathrm{d}\zeta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - a)^\nu}\right) = \nu \cdot \oint_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^{\nu+1}} = \nu \cdot F_{\nu+1}(a)$$

Da $F_1(a) = 0$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} F_1'(a) &= 0 & F_1'(a) &= F_2(a) \\ F_2'(a) &= 0 & F_2'(a) &= 2 \cdot F_3(a) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also gilt $F_\nu(a) = 0$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. $\square_{2.13.2}$

2.13.3 Bemerkung und Definition (Taylorformel, Taylorreihe)

Die Schreibweise

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} \cdot (z - a)^k + f_n(z) \cdot (z - a)^n$$

wird als *Taylorformel* bezeichnet.
Die Frage ist nun, wann die *Taylorreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} \cdot (z - a)^k$$

konvergiert, das heißt, wann das Restglied konvergiert, also wann gilt:

$$f_n(z) \cdot (z - a)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

2.13.4 Theorem

Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \Omega$ und $\overline{B_r(a)} \subseteq \Omega$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$.
Dann konvergiert die Taylorreihe um a in $B_r(a)$ absolut und stimmt mit f überein, es gilt also:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n$$

TODO: Abbildung $\overline{B_r(a)} \subseteq \Omega$ einfügen
Dabei ist $C := \partial B_r(a)$ und $\delta = \inf_{\zeta \in C} |z - \zeta| > 0$, denn es gilt $z \notin \partial B_r(a)$.

Beweis

$$f_n(z) \cdot (z-a)^n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \cdot \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)} (z-a)^n \,\mathrm{d}\zeta$$

Schätze dies ab:

$$\begin{aligned} |f_n(z)(z-a)^n| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_C(|f|) \cdot \frac{1}{r^n} \cdot |z-a|^n \cdot \underbrace{\oint_C \frac{|\mathrm{d}z|}{|\zeta-z|}}_{\leq \frac{2\pi r}{\delta}} \leq \\ &\leq \frac{\sup_C(|f|)}{\delta} \cdot r \cdot \left(\underbrace{\frac{|z-a|}{r}}_{<1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt die Konvergenz der Taylorreihe und die Gleichheit mit f.
Zeige nun die absolute Konvergenz:
Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n$$

habe den Konvergenzradius:

$$R := \left(\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\right)^{-1}$$

Wir wissen wegen der Konvergenz in $B_r(a)$, dass $R \geq r$ ist.
Also gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < r$ schon absolute Konvergenz, da die Potenzreihe im Inneren absolut konvergiert. $\square_{2.13.4}$

2.13.5 Beispiel

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{\sin(z)} \end{aligned}$$

ist holomorph, denn die Nullstellen von

$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right)$$

sind gerade $\pi\mathbb{Z}$.
TODO: Abbildung einfügen
Die Taylorreihe um z konvergiert auf $B_r(a)$, falls $\overline{B_r(a)} \cap \pi\mathbb{Z} = \emptyset$ ist.
Falls $B_r(a) \cap \pi\mathbb{Z} \neq \emptyset$ ist, konvergiert die Taylorreihe im Allgemeinen nicht.

2.14 Nullstellen und Pole

Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \Omega$.
Es gilt also für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

2.14.1 Satz

Ist Ω zusammenhängend und gilt $f^{(n)}(a) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

Beweis

Definiere:

$$E_1 := \left\{ \zeta \in \Omega \middle| \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} : f^{(n)}(\zeta) = 0 \right\}$$
$$E_2 := \left\{ \zeta \in \Omega \middle| \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} : f^{(n)}(\zeta) \neq 0 \right\}$$

Dann ist $\Omega = E_1 \dot\cup E_2$.
E_1 ist offen, denn für $\zeta \in E_1$ und $z \in B_\delta(\zeta)$ gilt:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} (z-\zeta)^n = f(z)$$

Also ist $f^{(n)}(z) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $z \in E_1$.
E_2 ist offen, denn für $\zeta \in E_2$ und $z \in B_\delta(\zeta)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f^{(n)}(\zeta) \neq 0$ ist. Also ist $f^{(n)}(z) \neq 0$ und daher $z \in E_2$.
Da $a \in E_1$ ist und Ω zusammenhängend ist, folgt $E_2 = \emptyset$, also $f = 0$. $\square_{2.14.1}$

2.14.2 Satz

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f \neq 0$, $a \in \Omega$ und $f(a) = 0$.
Dann gibt es ein $n > 0$ und eine holomorphe Funktion $f : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{C}$ mit $f_n(a) \neq 0$, sodass gilt:

$$f(z) = (z-a)^n f_n(z)$$

Beweis

Nach Satz 2.14.1 gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $f^{(n)}(a) \neq 0$ und wir können dieses minimal wählen.
Betrachte nun die Taylorformel mit $f^{(1)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (z-a)^n + (z-a)^n \cdot f_n(z) = (z-a)^n \cdot f_n(z)$$

Zudem gilt:

$$f_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$$

$\square_{2.14.2}$

2.14.3 Satz und Definition (isoliert)

Die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f \neq 0$, die nicht identisch verschwindet, sind *isoliert*, das heißt falls $f(a) = 0$ ist, so gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ und $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$.

Beweis

Verwende die Darstellung

$$f(z) = (z-a)^n \cdot f_n(z)$$

mit:

$$f_n(a) \neq 0$$

Da f_n stetig ist, folgt $f_n(z) \neq 0$ auf $B_\varepsilon(a)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. $\square_{2.14.3}$

2.14.4 Satz

Seien $f,g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, Ω zusammenhängend und $f(z) = g(z)$ auf einer Menge, die *in* Ω einen Häufungspunkt besitzt.
Dann gilt $f = g$.

Beweis

Betrachte $h(z) := f(z) - g(z)$. Sei $a \in \Omega$ der Häufungspunkt.
Dann ist $h(a) = 0$, aber a ist keine isolierte Nullstelle von h, weswegen $h = 0$ ist. $\square_{2.14.4}$

2.14.5 Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= n\pi \\ x &= \frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Analog im Komplexen: Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

ist holomorph und hat die Nullstellen $z_n = \dfrac{1}{n\pi}$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Häufungspunkt $z = 0$.
Aber da 0 nicht im Definitionsbereich von f liegt, gibt es keinen Widerspruch zu Satz 2.14.4.
Wir sehen (vergleiche Definition 2.14.7):

- 0 ist keine hebbare Singularität.
- 0 ist eine *wesentliche* Singularität (kein Pol!).

TODO: Abbildung $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ einfügen

2.14.6 Beispiel

Die Singularitäten sind im Allgemeinen nicht isoliert.

Beweis

Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n\pi} | n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}\right)$.
f ist als Verkettung holomorpher Abbildungen auf Ω holomorph.
TODO: Abb2 einfügen
0 ist ein Häufungspunkt der Singularitäten, also eine nicht isolierte Singularität.

2.14.7 Definition (isolierte, hebbare, wesentliche Singularität, Pol)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion.
Dann heißt a *isolierte Singularität von* f, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$ – das als eine Teilmenge von Ω gewählt werden kann, da Ω offen ist – gibt, sodass

$$f : B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$$

holomorph ist, es also in $B_\varepsilon(a)$ keine weitere Singularität gibt. Sei a eine isolierte Singularität von f.

- Falls $\lim\limits_{a\neq z\to a} (z-a) f(z) = 0$ gilt, so heißt die Singularität *hebbar*.
- Falls $\lim\limits_{a\neq z\to a} f(z) = \infty$ gilt, so heißt a ein *Pol* von f.
  (∞ ist auf der Riemannschen Zahlenkugel.)
- Ist a weder hebbar noch ein Pol, so heißt a eine *wesentliche Singularität.*
  TODO: Abb2 einfügen ??

Beachte

Nach unserer Konvention hat man diese Begriffe nur für isolierte Singularitäten.

2.14.8 Satz und Definition (Ordnung eines Pols)

In einer Umgebung $B_\varepsilon(a)$ jeder Polstelle kann f dargestellt werden als

$$f(z) = (z-a)^{-n} f_n(z)$$

mit einer holomorphen Funktion f_n mit $f_n(a) \neq 0$.
$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ heißt *die Ordnung* des Pols.

Beweis

Sei a ein Pol von f. Also gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass f auf $B_\varepsilon(a)$ keine Nullstelle hat.
Dann folgt mit den Konvergenzsätzen:

$$\begin{aligned} f :& B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C} \text{ ist holomorph} & \qquad \lim_{a \neq z \to a} f(z) &= \infty \\ g := \frac{1}{f} :& B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C} \text{ ist holomorph} & \qquad \lim_{a \neq z \to a} g(z) &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{a \neq z \to a} (z-a)\, g(z) = 0$ und daher ist a eine hebbare Singularität von g.
Also kann g holomorph fortgesetzt werden:

$$g : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{C} \text{ ist holomorph}$$

Stelle g dar in der Form:

$$g(z) = (z-a)^n \cdot g_n(z)$$

mit $g_n(a) \neq 0$. Damit folgt:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} f_n(z)$$

Dabei ist

$$f_n(z) = \frac{1}{g_n(z)}$$

holomorph. $\square_{2.14.8}$

2.14.9 Definition (meromorphe Funktion)

Eine Funktion, die nur isolierte Singularitäten $(a_n)_{n \in A \subseteq \mathbb{N}}$ besitzt, die alle Pole sind, und die auf $\mathbb{C} \setminus \{a_n | n \in A\}$ holomorph sind, heißt *meromorphe Funktion*.

Beispiele

Rationale Funktionen $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und Quotienten von Polynomen von diesen, also zum Beispiel $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

2.14.10 Beispiel

$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ hat bei $z = 0$ eine Singularität, die nicht isoliert ist, also auch keine wesentliche Singularität ist.
Nun zu den wesentlichen Singularitäten:
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

Also ist 0 eine isolierte Singularität.
$f(z)$ ist *nicht* in der Form

$$f(z) = \frac{1}{z^n} g(z)$$

darstellbar mit

$$g : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$$

holomorph, da in f beliebig hohe Polordnungen auftreten.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\overline{z}}{|z|^2}} = \exp\left(\frac{\operatorname{Re}(z) - \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im}(z)}{|z|^2}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{\mathbf{i} \cdot \operatorname{Im}(z)}{|z|^2}\right)}_{\text{Phasenfaktor}}$$

TODO: Abb3 einfügen
Auf der imaginären Achse ist $\operatorname{Re}(z) = 0$, also ist

$$f(z) = \exp\left(\text{-} \frac{\mathbf{i} \cdot \operatorname{Im}(z)}{|z|^2}\right)$$

und daher ist $|f(z)| = 1$, aber f „oszilliert immer schneller“.
Auf der reellen Achse ist $\operatorname{Im}(z) = 0$, also gilt:

$$f(z) = \exp\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}\right) \xrightarrow{z \to 0} \infty$$

Betrachtung

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Das Bild von $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ ist *dicht in* $\mathbb{C}$.

2.14.11 Satz

Eine holomorphe Funktion $f : B_{\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ kommt in jeder Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Beweis

Ansonsten gäbe es ein $A \in \mathbb{C}$ mit $\kappa,\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt für $z \neq a$ gilt:

$$|z-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(z) - A| > \kappa$$

TODO: Abb4 einfügen

Dann würde gelten:

$$\lim_{a \neq z \to a} \left| \frac{1}{z-a} (f(z) - A) \right| = \lim_{a \neq z \to a} \underbrace{\frac{1}{|z-a|}}_{=\infty} \underbrace{|f(z) - A|}_{>\kappa} = \infty$$

Daher folgt:

$$\lim_{a \neq z \to a} \underbrace{\frac{1}{z-a} (f(z) - A)}_{=:g(z)} = \infty$$

(∞ in der Riemannschen Zahlenkugel.)

$$g(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot g_n(z) = \frac{1}{z-a} (f(z) - A)$$

Dabei ist $g_n(z)$ holomorph auf $B_\varepsilon(a)$.

Löse nach $f(z)$ auf:

$$f(z) = \frac{g_n(z)}{(z-a)^{n-1}} + A$$

Also ist a ein Pol von f der Ordnung $n-1$.

Wir haben also eine hebbare Singularität ($n = 1$) oder einen Pol ($n > 1$), aber keine wesentliche Singularität. $\square_{2.14.11}$

2.15 Die Laurententwicklung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $r,R \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\Omega \supseteq \mathcal{R} := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| r < |z| < R \right\}$$

TODO: Abb5 einfügen

2.15.1 Definition (Laurent-Reihe)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

heißt *Laurent-Reihe*. Die Laurent-Reihe heißt (absolut) konvergent, falls die Reihen

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

und

$$H(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

beide (absolut) konvergieren.
$H(z)$ heißt *der Hauptteil* und $N(z)$ heißt *der Nebenteil* der Laurent-Reihe.

2.15.2 Theorem

Jede auf Ω holomorphe Funktion f ist in $\mathcal{R}$ in einer Laurent-Reihe darstellbar, also:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Das heißt es gibt $c_n \in \mathbb{C}$, sodass die Laurent-Reihe konvergiert und mit f übereinstimmt.

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta & \text{falls } n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

Beweis

TODO: Abb6 einfügen
Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ 0 &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Bemerkung: Wir müssen die Kontur C_l so wählen, dass $C_l \subseteq \Delta := B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$.
TODO: Abb7 einfügen
$f(\zeta)$ ist im Innern von C_2 holomorph.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

$f_1(z)$ ist für alle $z \in B_R(0)$ wohldefiniert und holomorph.

Beachte: Im Allgemeinen ist $f_1 \neq f$, denn f_1 ist holomorph auf $B_R(0)$, aber f ist nur holomorph auf $\mathcal{R}$ und im Allgemeinen nicht holomorph fortsetzbar auf $B_R(0)$.
f_1 kann im Folgenden entwickelt werden, definiert

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

den Nebenteil der Laurent-Reihe.
Betrachte $|\zeta| = R$ und $|z| < R$, also $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$. Etwas expliziter und eleganter:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right) = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\oint_{\partial B_R(0)} f(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \cdot \frac{1}{\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)}_{=:c_n}$$

Für f_2 folgt analog mit $|\zeta| = r$ und $|z| > r$, also $\left|\frac{z}{\zeta}\right| > 1$.

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}\right) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

Also folgt:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\oint_{\partial B_r(0)} f(\zeta)\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k\right)\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\oint_{\partial B_r(0)} f(\zeta)\cdot\zeta^k \mathrm{d}\zeta\right)}_{=c_{-(k+1)}}$$

Dabei darf man das Integral und die unendliche Summer vertauschen, weil die geometrische Reihe gleichmäßig in ζ absolut konvergiert. $\square_{2.15.2}$

2.15.3 Satz

Die Laurent-Reihe

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

sei auf $\mathcal{R} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| r \leq |z| \leq R\right\}$ konvergent und stelle f dar.
Dann gilt für jedes $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $r < \varrho < R$:

$$c_n := \frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\oint_{\partial B_\varrho(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

Beweis

Da die Laurent-Reihe nach Voraussetzung absolut und gleichmäßig in z mit $|z| = \varrho$ konvergiert, kann man die Summe und das Integral vertauschen, womit folgt:

$$\oint_{\partial B_\varrho(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \oint_{\partial B_\varrho(0)} z^{k-n-1} \mathrm{d}z$$

Falls $k \geq n+1$ oder $k < n$ ist, ist $F(z) = \dfrac{1}{k-n} z^{k-n}$ eine holomorphe Stammfunktion und es gilt:

$$\oint_{\partial B_\varrho(0)} z^{k-n-1} \mathrm{d}z = 0$$

Falls $k = n$ ist, gilt:

$$\oint_{\partial B_\varrho(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathbf{i}$$

$\square_{2.15.3}$

2.16 Der Residuenkalkül

Seien $S := \left\{a_n \middle| n \in A \subseteq \mathbb{N}\right\}$ die Menge der Singularitäten, $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph und S habe keinen Häufungspunkt.

Bemerkung

Die Punkte in S sind isoliert, aber wesentliche Singularitäten sind möglich. Wäre alle a_n Pole, so wäre f meromorph, was wir aber für das Folgende nicht voraussetzen wollen.

2.16.1 Definition

Sei $z_o \in S$. Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $B_\varepsilon(z_0) \cap S = \{z_0\}$ ist. Dann heißt

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} f(z)\, \mathrm{d}z$$

das Residuum von f an der Stelle z_0.
Diese Definition ist unabhängig von ε.
Um dies zu sehen, entwickelt man f in einer Laurent-Reihe auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

Also ist das Residuum

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}$$

und damit wohldefiniert sowie leicht berechenbar.

2.16.2 Beispiel

a) Betrachte die reziproke Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) := \frac{1}{\sin z} \end{aligned}$$

Berechne das Residuum in $z_0 = 0$:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Nun gilt:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{=:g(z)}$$

Die Funktion $g(z)$ hat in $z = 0$ eine hebbare Singularität und es gilt:

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Damit folgt:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} z^n}_{\text{Nebenteil}}$$

Also ist $\operatorname{Res}_0(f) = 1$.

b) Betrachte die rationale Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathbf{i}\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) := \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}$$

Berechne das Residuum in $z_0 = \mathbf{i}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \left(\frac{1}{z+\mathbf{i}} - \frac{1}{z-\mathbf{i}} \right)$$

Da $\dfrac{1}{z+\mathbf{i}}$ in $B_\varepsilon(\mathbf{i})$ für $\varepsilon < 2$ holomorph ist, gilt:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{i}}(f) = -\frac{1}{2\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}}{2}$$

2.16.3 Theorem (Residuensatz)

Sei γ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{S\}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in S} n(\gamma,a) \cdot \operatorname{Res}_a(f)$$

Beweis

TODO: Abbildung der Kurve einfügen

Wähle R so groß, dass die Kurve γ ganz in $\Delta = B_R(0)$ liegt.

$\Delta \cap S$ ist endlich, denn ansonsten hätte S einen Häufungspunkt in $\overline{\Delta}$, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht.

Also gilt:

$$\Delta \cap S = \{a_1, \dots, a_n\}$$

Wähle ε so, dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ schon $B_\varepsilon(a_k) \cap S = \{a_k\}$ und $B_\varepsilon(a_k) \cap \mathrm{im}(\gamma) = \emptyset$ gilt.

Betrachte nun die Laurent-Reihe um a_k:

$$\begin{aligned} f &= h_{a_k} + g_{a_k} \\ h_{a_k}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n,a_k} (z - a_k)^n && \leftarrow \quad \text{Hauptteil} \\ g_{a_k}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,a_k} (z - a_k)^n && \leftarrow \quad \text{Nebenteil} \end{aligned}$$

Der Hauptteil ist konvergent auf $\Delta \setminus \{a_k\}$ und gleichmäßig konvergent auf $\Delta \setminus B_\varepsilon(a_k)$ und der Nebenteil ist holomorph.

Man kann nun gliedweise integrieren:

$$\oint_\gamma h_{a_k}(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n,a_k} \oint_\gamma (z - a_k)^n = 2\pi\mathbf{i} \cdot c_{-1,a_k} \cdot n(\gamma, a_k)$$

Letzteres gilt, da für $n \neq -1$ eine holomorphe Stammfunktion existiert und für $n = -1$ dies gerade die Definition der Umlaufzahl ist. Somit folgt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma h_{a_k}(z)\,\mathrm{d}z = n(\gamma, a_k) \cdot \mathrm{Res}_{a_k}(f)$$

Betrachte nun die Funktion:

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} h_{a_k}(z)$$

Diese ist auf $\Delta \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ holomorph und die Singularitäten bei den a_k sind hebbar, sodass es eine analytische Fortsetzung gibt.

Das Cauchysche Theorem 2.11.3 liefert nun:

$$0 = \oint_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z) - \sum_{k=1}^{n} h_{a_k}(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \oint_\gamma h_{a_k}(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_\gamma h_{a_k}(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k) \cdot \mathrm{Res}_{a_k}(f)$$

Für alle Singularitäten $a \in S \setminus \Delta$ ist $n(\gamma, a) = 0$, da γ ganz in S liegt.

Also folgt die Behauptung. $\square_{2.16.3}$

2.16.4 Beispiel

TODO: Abb1, Abb2 einfügen

Betrachte die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Es gilt:

$$\lim_{0 \neq z \to 0} z \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = 0$$

Also ist 0 eine hebbare Singularität, aber es gilt auch:

$$\lim_{0 \neq z \to 0} \frac{1}{\sqrt{z}} = \infty$$

Also ist $\frac{1}{\sqrt{z}}$ auch ein Pol!

Das Problem dabei ist, dass $\frac{1}{\sqrt{z}}$ nicht in $B_\varepsilon(0) \backslash \{0\}$ holomorph, also 0 keine isolierte Singularität ist.

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\log(z)}$$

Dies ist nur holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Betrachte nun Integrale über die ganze reelle Achse:

2.16.5 Proposition

Sei $K(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse hat und im Unendlichen wenigstens quadratisch abfällt. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{a \text{ Pol} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a(K)$$

Beweis

TODO: Abb3 einfügen

TODO: C_1,C_2 definieren

Die Funktion K hat endlich viele Pole in $\mathbb{C}$, die alle Nullstellen des Nenners $Q(z)$ sind. Wähle den Radius R so groß, dass alle Pole in $B_R(0)$ liegen, womit folgt:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1 \cup C_2} K(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{a \text{ Pol} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \underbrace{n(C_1 \cup C_2, a)}_{=1} \cdot \mathrm{Res}_a(f) = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{a \text{ Pol} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a(K) \\ &= \int_{-R}^{R} K(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} K(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Denn es gilt:

$$\left|\int_{C_2} K(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \underbrace{\sup_{z\in C_2} |K(z)|}_{\leq \frac{C}{R^2} \text{ da } K\text{quadratisch abfällt}} \cdot \pi R \leq \frac{C\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square_{2.16.5}$

2.16.6 Beispiel

Berechnung des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathbf{i}\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

hat einen Pol, falls $1 + z^2 = 0$, also $z = \pm\mathbf{i}$ ist. Außerdem fällt f im Unendlichen quadratisch ab.

Nach der Proposition 2.16.5 gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\pi\mathbf{i} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{i}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Berechne das Residuum:

$$f(z) = \left(\frac{1}{z+\mathbf{i}} - \frac{1}{z-\mathbf{i}}\right) \cdot \frac{\mathbf{i}}{2} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{z-\mathbf{i}} + \underbrace{\frac{\mathbf{i}}{2} \cdot \frac{1}{z+\mathbf{i}}}_{\text{holomorph in } B_\varepsilon(\mathbf{i})}$$

Damit folgt:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{i}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\mathbf{i}}{2}$$

Also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\pi\mathbf{i} \cdot \frac{-\mathbf{i}}{2} = \pi$$

Eine andere Möglichkeit ist die Taylorentwicklung des Nenners:

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 + z^2 = g(\mathbf{i}) + g'(\mathbf{i})(z-\mathbf{i}) + \mathcal{O}\left((z-\mathbf{i})^2\right) = \\ &= 0 + 2\mathbf{i}(z-\mathbf{i}) + \mathcal{O}\left((z-\mathbf{i})^2\right) \\ g'(z) &= 2z \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{2\mathbf{i}(z-\mathbf{i}) + \mathcal{O}\left((z-\mathbf{i})^2\right)} = \frac{1}{2\mathbf{i}(z-\mathbf{i})}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\mathcal{O}(z-\mathbf{i})}\right)}_{=:h(z)}$$

Wegen

$$\lim_{z\to\mathbf{i}} h(z) = 1$$

ist die Singularität bei $z = \mathbf{i}$ hebbar und daher h holomorph fortsetzbar und als Taylorreihe darstellbar. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z-\mathbf{i})^k \\ c_k &= \frac{1}{2\mathbf{i}} \frac{h^{(k+1)}(\mathbf{i})}{(k+1)!} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2\mathbf{i}} \cdot \frac{h(\mathbf{i})}{1} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{i}}(f) = \frac{1}{2\mathbf{i}}$$

2.16.7 Proposition

Sei $K(x)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse habe und im Unendlichen wenigstens quadratisch abfällt.
TODO: Reicht hier schon, dass die Funktion wie $\frac{1}{z}$ abfällt?
Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}x} \cdot K(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\substack{a \text{ Pol} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a\left(e^{\mathbf{i}z} K(z)\right)$$

Beweis

TODO: Abb4 einfügen
Es gilt:

$$\left|e^{\mathbf{i}z}\right| = e^{\mathrm{Re}(\mathbf{i}z)} = e^{-\overbrace{\mathrm{Im}(z)}^{\geq 0}} \leq 1$$

$$\int_{C_2} e^{\mathbf{i}z} K(z)\,\mathrm{d}z \leq \sup_{z\in C_2} \left|e^{\mathbf{i}z} K(z)\right| \cdot \pi R = \underbrace{\left|e^{\mathbf{i}z}\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\sup_{z\in C_2} |K(z)|}_{\leq \frac{C}{R^2} \text{ da } K \text{quadratisch abfällt}} \cdot \pi R \leq \frac{C\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square_{2.16.7}$

2.16.8 Erinnerung (Hauptwertintegrale)

Das Hauptwertintegral (engl. „principal value“) einer in $c \in \mathbb{R}$ divergierenden Funktion ist definiert als:

$$\text{PV-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

2.16.9 Proposition

Die rationale Funktion $f(x)$ habe einfache Pole bei $p_1 < \ldots < p_n$ und besitze sonst keine weiteren Pole auf der reellen Achse.
Außerdem falle $f(x)$ im Unendlichen wenigstens quadratisch ab. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\text{PV-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &:= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus([p_1-\varepsilon_1,p_1+\varepsilon]\cup\ldots\cup[p_n-\varepsilon_1,p_n+\varepsilon])} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\mathbf{i}\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)>0}}\operatorname{Res}_a(f) + \pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{p_k}(f)\end{aligned}$$

Beweis

TODO: Abb5 einfügen

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)>0}}\operatorname{Res}_a(f)$$

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)\geq 0}}\operatorname{Res}_a(f)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathbf{i}\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)\geq 0}}\operatorname{Res}_a(f) + \mathbf{i}\pi\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)\geq 0}}\operatorname{Res}_a(f) = \\ &= \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to 0 \text{ für } R\to\infty} + \underbrace{\int_{[-R,R]\setminus([p_1-\varepsilon_1,p_1+\varepsilon]\cup\ldots\cup[p_n-\varepsilon_1,p_n+\varepsilon])} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to \text{PV-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} + \sum_{k=1}^{n}\int_{D_k\cap D_k'} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Im Limes $R\to\infty$ und dem anschließenden Limes $\varepsilon\to 0$ erhalten wir:

$$2\pi\mathbf{i}\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)>0}}\operatorname{Res}_a(f) + \mathbf{i}\pi\sum_{\substack{a \text{ Pol}\\ \operatorname{Im}(a)\geq 0}}\operatorname{Res}_a(f) = \text{PV-}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k\cup D_k'} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Es ist noch zu zeigen:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k\cup D_k'} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Da f nur einen einfachen Pol hat, können wir f um p_k durch

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-p_k} + g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion $g(z)$ darstellen.

$$\left|\int_{D_k\cup D_k'} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \underbrace{\sup_{\partial B_\varepsilon(p_k)}|g|}_{\leq C}\cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

TODO: Abb6 einfügen

$$\int_{D_k \cup D'_k} \frac{\mathrm{d}z}{z - p_k} = \log(z - p_k)\Big|_{z=p_k-\varepsilon+\mathbf{i}\cdot 0}^{z=p_k+\varepsilon} + \log(z - p_k)\Big|_{z=p_k-\varepsilon-\mathbf{i}\cdot 0}^{z=p_k+\varepsilon} =$$
$$= \log(\varepsilon) - (\log(\varepsilon) + \mathbf{i}\pi) + \log(\varepsilon) - (\log(\varepsilon) - \mathbf{i}\pi) = \mathbf{i}\pi - \mathbf{i}\pi = 0$$

$\square_{2.16.9}$

2.16.10 Beispiel (Integral über ein Intervall)

Dies geht typischerweise immer dann, wenn der Integrand periodisch ist und man über eine oder mehrere Perioden integriert.
In diesem Fall kann man das Integral als Konturintegral mit Hilfe von $e^{\mathbf{i}\varphi}$ umschreiben.
Mit der Transformation $z := e^{\mathbf{i}\varphi}$ und der Beziehung

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}\varphi} + e^{-\mathbf{i}\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

folgt

$$\mathrm{d}z = e^{\mathbf{i}\varphi} \cdot \mathbf{i}\mathrm{d}\varphi = \mathbf{i}z\mathrm{d}\varphi$$

und somit:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(\varphi) + \mathbf{i}} \mathrm{d}\varphi = \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\cos(\varphi) + \mathbf{i}} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z} =$$
$$= \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \mathbf{i}} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z} = \frac{2}{\mathbf{i}} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2\mathbf{i}z + 1}$$

Berechne die Pole:

$$z^2 + 2\mathbf{i}z + 1 = 0$$
$$z = -\mathbf{i} \pm \sqrt{(\mathbf{i})^2 - 1} = -\mathbf{i} \pm \sqrt{-2} = -\mathbf{i} \pm \sqrt{2}\mathbf{i}$$

Wegen

$$\left|-\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{i}\right| = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4 < 1$$
$$\left|-\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{i}\right| = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}4 > 1$$

geht nur das Residuum des ersten Pols in das Integral ein.
TODO: Abb7 einfügen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(\varphi) + \mathbf{i}} \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\mathbf{i}} \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot \mathrm{Res}_{-\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{i}}\left(\frac{1}{z^2 + 2\mathbf{i}z + 1}\right) =$$
$$= 4\pi \cdot \mathrm{Res}_{-\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{i}}\left(\frac{1}{(z + \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{i})(z + \mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{i})}\right) =$$
$$= 4\pi \cdot \frac{1}{-\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{i}} = 4\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\mathbf{i}} = -\sqrt{2}\pi\mathbf{i}$$

2.16.11 Beispiel (Integral über die positive reelle Halbachse)

Einfach lässt sich bei Funktionen argumentieren, die zur y-Achse symmetrisch sind:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Schwieriger ist es, wenn keine Symmetrie ausgenutzt werden kann, beispielsweise für das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

Benutze den entlang der positiven reellen Achse geschlitzen Logarithmus:

$$\ln(z) := \begin{cases} \log(z) & \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ \log(z) - 2\pi\mathbf{i} & \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

TODO: Abbildung der Kurve
Es gilt für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\lim_{y \searrow 0}(\ln(x+\mathbf{i}y)) - \lim_{y \nearrow 0}(\ln(x+\mathbf{i}y)) = 2\pi\mathbf{i}$$

Es folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_C \frac{\ln(z)\,\mathrm{d}z}{1+z+z^2}$$

Man kann nun die Kurve „im Unendlichen schließen“...

2.16.12 Proposition

Seien $\lambda \in [0,1]$ und $R(z)$ eine rationale Funktion ohne Pole auf der positiven reellen Halbachse, die bei 0 holomorph ist und im Unendlichen wenigstens quadratisch abfällt. Dann gilt:

$$\int_0^\infty x^\lambda R(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathbf{i}}{1-e^{2\pi\mathbf{i}\cdot\lambda}}\sum_{a\neq 0}\operatorname{Res}_a\left(z^\lambda \cdot R(z)\right)$$

Beweis

TODO: Beweis einfügen

$\square_{2.16.12}$

2.17 Das Null- und Polstellen zählende Integral

2.17.1 Theorem

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph, $f \neq 0$ und γ eine geschlossene Kurve, die die Nullstellen und Pole von f nicht schneidet und ganz in einem Gebiet $\Delta \subseteq \Omega$ liegt. $z_1,\ldots,z_k$ seien Null- oder Polstellen in Δ mit jeweiliger Ordnung $\pm n_j$, von denen es nur endlich viele gibt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^k n_j \cdot n(\gamma,z_j)$$

Beweis

Da $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph und $f \neq 0$ ist, liegen die Null- und Polstellen also isoliert.
Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{Z}$ und eine meromorphe Funktion $f_1(z)$, die in einer Umgebung von z_1 holomorph ist mit $f_1(z_1) \neq 0$ und:

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \cdot f_1(z)$$

Ist $n_1 > 0$, so ist dies die Ordnung der Nullstelle und für $n_1 < 0$ ist $-n_1$ die Ordnung des Pols.
Konstruiere induktiv weiter:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= (z - z_2)^{n_2} \cdot f_2(z) \\ &\vdots \\ \Rightarrow \quad f(z) &= (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k} g(z) \end{aligned}$$

Dabei ist $g(z)$ in Δ holomorph und hat darin keine Nullstelle. Daher ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{n_k}{z - z_k} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{holomorph}}$$

meromorph. Integriere nun längs γ und wende den Residuensatz an. $\square_{2.17.1}$

Die wichtigste Anwendung ist $\gamma = \partial\Delta$ für eine Kreisscheibe $\Delta \subseteq \Omega$. Dann sind alle Windungszahlen 1 und man erhält:

2.17.2 Korollar und Definition (Null- und Polstellen zählende Integral)

Sei N_Δ die Anzahl der Nullstellen und P_Δ die Anzahl der Pole von f in Δ jeweils mit Ordnung gezählt, dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\partial\Delta} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N_\Delta - P_\Delta$$

Man nennt dieses Integral auch *das Null- und Polstellen zählende Integral.*

Beweis

Dies folgt direkt aus dem Theorem 2.17.1. $\square_{2.17.2}$

2.17.3 Bemerkung

Falls f nur Nullstellen hat, kann man eine geometrische Betrachtung durchführen.
TODO: Abbildung einfügen
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\Gamma := f \circ \gamma$. Dann gilt nach der Definition des Kurvenintegrals:

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_a^b \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} \mathrm{d}\tau = \int_a^b \frac{f'(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)}{f(\gamma(\tau))} \mathrm{d}\tau = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$$

Also gilt:

$$n(\Gamma,0) = \sum_j n_j \cdot n(\gamma,z_j)$$

Die Bedeutung von

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

liegt darin, dass dieses Integral ganzzahlig, also ein Index ist und sich daher bei stetigen Deformationen nicht ändert.

2.17.4 Beispiel

Betrachte für eine Funktion $f(z)$ und eine Konstante $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $g(z) := f(z) - a$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z$$

unabhängig von a, solange $f(z) - a$ auf γ keine Nullstelle hat.
Die „Gesamtzahl“ der Nullstellen und Pole kann also anders als bei reellen Funktionen nicht verändert werden.
Etwas allgemeiner gilt:

2.17.5 Theorem (Satz von Rouché)

Seien $f,g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma = \partial\Delta$ mit $\Delta \subseteq \Omega$ und $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \gamma$.
Dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen in Δ.

Beweis

Betrachte die Familie $h_\tau = f + \tau g$ mit $\tau \in [0,1]$. Das Integral

$$\oint_\gamma \frac{h'_\tau(z)}{h_\tau(z)}\mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f'(z) + \tau g'(z)}{f(z) + \tau g(z)}\mathrm{d}z$$

ist ein Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$ und hängt stetig von τ ab, ist also konstant.
Wegen $|g(z)| < |f(z)|$ auf γ kann keine Nullstelle auf γ entstehen und es folgt die Behauptung.
$\square_{2.17.5}$

2.17.6 Beispiel

Betrachte die Funktionen $f(z) = z^n$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und die Kurve $\gamma = \partial B_R(0)$, wobei $R \in \mathbb{R}$ so groß gewählt ist, dass $|g(z)| < |f(z)|$ auf γ gilt, was stets möglich ist, da z^n unbeschränkt und schneller als z^{n-1} wächst.
Offenbar ist die Nullstellenzahl von $f(z)$ gleich n und somit auch die von $g(z)$.
Dies ist der Fundamentalsatz der Algebra.

2.18 Familien holomorpher Funktionen

Betrachte eine Familie, das heißt eine Folge, holomorpher Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

2.18.1 Definition

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen f, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ schon $f_n\big|_K$ gleichmäßig gegen $f\big|_K$ konvergiert.

Wir erhalten sofort, dass f stetig ist.

Für reelle Funktionen bräuchte f nicht differenzierbar zu sein.

Für holomorphe Funktionen ist die Situation besser, weil wird die Ableitungen von f mit dem Cauchyschen Integralsatz ausdrücken können.

2.18.2 Theorem (Weierstraß)

Konvergiert eine Familie holomorpher Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen f, so ist f holomorph und $f_n'(z)$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f'(z)$.

Beweis

Sei $z \in \Omega$, so wähle ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\overline{B_r(z)} \subseteq \Omega$ und $\gamma = \partial\overline{B_r(z)}$. Dann gilt:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Wende nun im Limes $n \to \infty$ die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B_r(z)}$ an:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Also ist f holomorph.

Entsprechend gilt:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta \xrightarrow{n\to\infty} f'(z)$$

$\square_{2.18.2}$

2.18.3 Bemerkung

Die ursprüngliche Formulierung von Weierstraß lautet:

Falls eine Reihe analytischer Funktionen $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots$ in Ω lokal gleichmäßig konvergiert, so ist $f(z)$ analytisch und man darf gliedweise differenzieren.

Nach dem Maximumprinzip genügt es, die gleichmäßige Konvergenz auf $\partial\Omega$ zu zeigen.

Wir kombinieren nun den Satz von Weierstraß mit dem Nullstellen zählenden Integral. Wir brauchen dies beim Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes.

2.18.4 Theorem (Hurwitz)

Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen ohne Nullstellen und f_n konvergiere lokal gleichmäßig gegen f.

Dann ist f entweder identisch 0 oder hat keine Nullstelle in Ω.

Beweis

Nehme an, dass $f \neq 0$ ist, aber eine Nullstelle $z_0 \in \Omega$ habe.
Da die Nullstellen von f isoliert sind, gibt es ein $r > 0$, so dass f auf $B_r(z_0)$ holomorph ist und keine weitere Nullstelle besitzt. Wegen $\frac{1}{|f(z)|} > C$ auf $\partial B_r(z_0)$ konvergiert $\frac{1}{f_n}$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$ auf $\partial B_r(z_0)$. Die Ordnung n der Nullstelle ist gegeben durch:

$$0 \neq n = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \lim_{n \to \infty} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \mathrm{d}z = 0$$

Dies ist ein Widerspruch, der die Behauptung zeigt. $\square_{2.18.4}$

2.19 Der Satz von Mittag-Leffler

Bei rationalen Funktionen hat man die Partialbruchzerlegung:

$$R(z) = \underbrace{h_1(z) + \ldots + h_r(z)}_{\text{Hauptteile}} + \underbrace{P(z)}_{\text{holomorph}}$$

Bei meromorphen Funktionen hat man im Allgemeinen unendlich viele Polstellen. Die unendliche Summe der Hauptwerte wird im Allgemeinen nicht konvergieren.
Haben aber f und g die gleichen Pole und an jedem Pol den gleichen Hauptteil der Laurententwicklung, so ist $f - g$ holomorph, also alle Singularitäten hebbar.
Man kann eine Äquivalenzrelation einführen:

$$f \sim g \quad \text{falls } f - g \text{ holomorph ist.}$$

Die Äquivalenzklassen sind durch die Hauptteile charakterisiert.
Die Frage ist nun, ob es zu vorgegebenen Hauptteilen immer eine meromorphe Funktion, also stets einen Repräsentanten gibt.
Die Antwort in der komplexen Ebene lautet ja.

2.19.1 **Theorem** (Satz von Mittag-Leffler für die Ebene)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{C}$, die keine Häufungspunkte besitzt.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n(z)$ ein Polynom positiven Grades ohne konstanten Term.
Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{C}$, die genau an den Stellen a_n Pole mit den Hauptteilen $h_n(z)$ hat, für die gilt:

$$h_n(z) = P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

Beweis

Die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n(z)$ wird im Allgemeinen nicht konvergieren.

Wähle zu jedem $h_n(z)$ ein (Taylor-)Polynom $T_n(z)$ mit $|h_n(z) - T_n(z)| \leq 2^{-n}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2} \cdot |a_n|$.

TODO: Was ist mit $a_n = 0$? Dann kann man die Taylorreihe um 0 nicht bilden.

TODO: Abbildung h_n,a_n,$B_{\frac{|a_n|}{2}}(0)$ einfügen

$h_n(z)$ hat in a_n einen Pol, aber die Taylorreihe konvergiert für $|z| < \frac{1}{2} \cdot |a_n|$ gleichmäßig.

Nun betrachte für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt hat und somit $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ ist, gibt es ein n_0 mit $r \leq \frac{|a_n|}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

Nun gilt für $z \in \overline{B_r(0)}$:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |h_n(z) - T_n(z)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2$$

Daher konvergiert $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (h_n - T_n)$ auf $\overline{B_r(0)}$ absolut und lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Dann ist aber

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - T_n(z)) = \sum_{n=0}^{n_0-1} (h_n(z) - T_n(z)) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (h_n(z) - T_n(z))$$

auf $\overline{B_r(0)}$ eine meromorphe Funktion mit den Polen $(a_n)_{0\leq n<n_0}$ mit den Hauptteilen h_n.

Da dies für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, konvergiert diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig in z.

Die Grenzfunktion ist nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß holomorph. Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (h_n - T_n)$ meromorph. $\square_{2.19.1}$

2.19.2 **Beispiel** (Partialbruchzerlegung)

Wir wollen die Partialbruchzerlegung von $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2}$ berechnen.

Diese Funktion hat ihre Pole genau an den Punkten $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

Der Hauptteil bei 0 ist $h_0 := z^{-2}$, denn es gilt

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2} = \frac{\pi^2}{(\pi z)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi z)^{2k}}{(2k+1)!}\right)^2}$$

und:

$$\lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi z)^{2k}}{(2k+1)!} = 1$$

Aus der Periodizität folgt für den Hauptteil bei $n \in \mathbb{Z}$:

$$h_n := \frac{1}{(z-n)^2}$$

Nun ist

$$\sum_{|n|>r} \frac{1}{(z-n)^2}$$

für jedes feste $r \in \mathbb{R}_{>0}$ auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ lokal gleichmäßig konvergent. Daher definiert

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine meromorphe Funktion mit denselben Polen und Hauptteilen wie $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2}$. Die Differenz

$$g(z) := \frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

ist somit eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.
Da $g(z)$ eine Differenz von Funktionen mit Periode 1 ist, hat sie ebenfalls die Periode 1.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x+\mathbf{i}y) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}x}e^{-y} - e^{-\mathbf{i}x}e^{y}\right) \\ \lim_{|y|\to\infty} |\sin(x+\mathbf{i}y)| &= \infty \end{aligned}$$

Daher konvergiert

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi(x+\mathbf{i}y)))^2} \xrightarrow{|y|\to\infty} 0$$

gleichmäßig in y.
Zeigen wir die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ gegen Null, so ergibt sich mit dem Satz von Liouville, dass die Differenz $g(z)$ konstant und damit Null ist.
Wegen der Periodizität genügt es, den Streifen $A := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\right\}$ zu betrachten.
TODO: Abbildung Dreieck einfügen
Es gilt für $z \in A$:

$$\begin{aligned} |z-n| &\geq \frac{1}{2}(|y|+n-1) && \text{für } n \geq 1 \\ |z-m| &\geq \frac{1}{2}(|y|+|m|) && \text{für } m \leq 0 \end{aligned}$$

Für $|y| \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|z-(-m)|^2} \leq \\ &\leq 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(|y+n-1|)^2} + 4\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(|y|+m)^2} = 8\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(|y|+n)^2} \leq \\ &\leq 8\sum_{n\geq|y|} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{|y|\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Also gilt $g(z) = 0$.

Resultat

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Folgerung

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{8}\cdot\pi^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^2}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-2n)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2m)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-2n)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\end{aligned}$$

2.20 Die Gamma- und Zetafunktion

2.20.1 Definition (Gammafunktion)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\mathrm{d}x$$

heißt *Gammafunktion*.

2.20.2 Bemerkung

Es gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty x^s e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^s\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x}\right)\mathrm{d}x \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^s\right)\cdot e^{-x}\mathrm{d}x = \\ &= s\cdot\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x = s\cdot\Gamma(s)\end{aligned}$$

Vergleiche mit der Fakultät $n! = n\cdot(n-1)!$ für $n\in\mathbb{N}$.
Es gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Also ist die Γ-Funktion eine Fortsetzung der Fakultät.

2.20.3 Lemma

Bezeichne den auf der positiven reellen Achse aufgeschlitzten Logarithmus mit $\ln(z)$. Für $s\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\mathbf{i}(s-1)\pi}}{2\mathbf{i}\cdot\sin((s-1)\pi)}\underbrace{\int_C e^{(s-1)\ln(z)}e^{-z}\mathrm{d}z}_{\text{ist holomorph in } s}$$

Beweis

Schreibe das Integral als Konturintegral um:

$$x^{s-1} = e^{(s-1)\cdot\log(x)}$$

Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x + \mathbf{i}\varepsilon) = \log(x)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x - \mathbf{i}\varepsilon) = \log(x) + 2\pi\mathbf{i}$$

TODO: Abb1 einfügen

Betrachte das Konturintegral:

$$\int_C e^{(s-1)\cdot\ln(z)} e^{-z} \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \left[e^{(s-1)\ln(x-\mathbf{i}\varepsilon)} \cdot e^{-x} - e^{(s-1)\ln(x+\mathbf{i}\varepsilon)} \cdot e^{-x}\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \left(e^{(s-1)\cdot 2\pi\mathbf{i}} - 1\right) \cdot \Gamma(s) = e^{\mathbf{i}\pi(s-1)} \cdot 2\mathbf{i}\sin(\pi(s-1)) \cdot \Gamma(s)$$

Damit folgt die Behauptung. $\square_{2.20.3}$

2.20.4 Bemerkung

TODO: Abb2 einfügen

Man sieht daran, dass $\Gamma(s)$ eine meromorphe Funktion und auf $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ holomorph ist.

Untersuchung der Pole:

TODO: Abb3 einfügen

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \Gamma(z+1) = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} \Gamma(z+n+1)$$

Man erhält:

$\Gamma(s)$ hat einfache Pole bei $s \in \{0, -1, -2, \ldots\}$.

2.20.5 Definition (Riemannschen Zetafunktion)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>1}$. Die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

heißt *Riemannsche Zetafunktion*.

2.20.6 Lemma

Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,3,5,\ldots)$ die aufsteigende Folge der Primzahlen in $\mathbb{N}$.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})$$

Beweisskizze

$$\left(1 - 2^{-s}\right) \cdot \zeta(s) = \left(1 - 2^{-s}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-s} - (2n)^{-s}\right) = \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} n^{-s}$$

$$\left(1 - 3^{-s}\right)\left(1 - 2^{-s}\right) \zeta(s) = \sum_{n \text{ ist nicht durch 2 oder 3 teilbar}} n^{-s}$$

2.20.7 Komplexe Fortsetzung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \cdot \log(n)}$$

Variablentransformation: $x = nx'$, $\mathrm{d}x = n\mathrm{d}x'$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x = n^s \cdot \int_0^{\infty} x'^{s-1} e^{-nx'} \mathrm{d}x' \qquad / \cdot n^{-s} \\
n^{-s} \cdot \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} \mathrm{d}x \qquad / \sum_{n=1}^{\infty} \\
\zeta(s) \cdot \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{1}{e^x - 1} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x$$

2.20.8 Theorem

$$\zeta(s) = \frac{e^{-\mathbf{i}(s-1)\pi}}{\Gamma(s) \cdot 2\mathbf{i} \sin\left((s-1)\pi\right)} \underbrace{\int_C e^{(s-1)\log(z)} \frac{1}{e^z - 1} \mathrm{d}z}_{\text{ist holomorph auf } \mathbb{C}}$$

Beweis

Schreibe dies wieder als Konturintegral (C wie oben):

$$x^{s-1} \rightsquigarrow e^{(s-1)\ln(z)}$$

Dies ist analog wie bei der Γ-Funktion. $\square_{2.20.8}$

2.20.9 Bemerkung

Dies liefert eine meromorphe Fortsetzung.
Mögliche Pole sind bei $s \in \mathbb{Z}$:

- $s < 0$: Da die Γ-Funktion einen Pol hat, hat ζ keinen Pol.
- $s > 1$: Die ζ-Funktion ist endlich, da die Reihe konvergiert.
- $s = 0$: Es gibt auch keine Probleme.
- $s = 1$: Einfacher Pol mit Residuum 1.

TODO: Abb4 einfügen

Wo liegen die Nullstellen von $\zeta(s)$?

2.20.10 Riemannsche Vermutung

Alle Nullstellen der ζ-Funktion liegen auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$.
(Dies ist ein noch unbewiesenes Millenium-Problem.)

2.21 Der Riemannsche Abbildungssatz

2.21.1 Definition (biholomorph)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen.
Eine Abbildung $f: U \to V$ heißt biholomorph, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind.

2.21.2 Fragestellung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.
Gibt es eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to B := B_1(0)$?
TODO: Abb5 einfügen

a) Der Radius 1 ist keine Einschränkung und auch der Mittelpunkt 0 nicht.

b) Wähle $\Omega = \mathbb{C}$. Gesucht ist eine biholomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to B$.

   Es gilt $|f(z)| \leq 1$. Nach dem Satz von Liouville folgt, dass f konstant, also nicht bijektiv und damit nicht biholomorph ist.

   Also müssen wir $\Omega = \mathbb{C}$ ausschließen.

c) TODO: Abb6 einfügen

   Ω muss wegzusammenhängend sein, denn für $z_1, z_2 \in \Omega$ ist $\overline{f(z_1)\, f(z_2)} \subseteq B$.

   Also ist $f^{-1}\left(\overline{f(z_1)\, f(z_2)}\right)$ eine Kurve in Ω, die z_1 und z_2 verbindet.

d) Ω muss *einfach zusammenhängend* sein, das heißt:
Seien γ eine geschlossene Kurve und $s \in [0,1]$.

$$\gamma_s := s \cdot \gamma$$

$s = 1$ gibt die ursprüngliche Kurve und $s = 0$ liefert den Ursprung.

Man sagt auch, die Kurve ist *0-homotop*.

TODO: Abb8 einfügen

γ ist nicht in einen Punkt „zusammenziehbar".

Beweis

Sei γ eine geschlossene Kurve in Ω. Also ist $\Gamma = f \circ \gamma$ eine geschlossene Kurve in B.

$$\Phi(\tau,s) := s \cdot \Gamma(\tau)$$

ist eine Nullhomotopie. Also ist $f^{-1} \circ \Phi$ eine Nullhomotopie von γ, weswegen Ω einfach zusammenhängend ist. $\square_{2.21.2}$

2.21.3 Definition (einfach zusammenhängend)

Ein topologischer, zusammenhängender Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, falls es für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ eine stetige Funktion $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to X$, sodass $\Phi(t,1) = \gamma(t)$ und $\Phi(t,0) = C \in X$.
Falls $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, so gilt:

- Ω ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.
- Ω ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $n(\gamma,a) = 0$ für alle geschlossene Kurven γ in Ω und $a \notin \Omega$.

2.21.4 Theorem (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.
Dann gibt es eine eindeutige biholomorphe Abbildung $f : \Omega \to B_1(0)$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Riemann hat dies vermutet und Koebe hat es bewiesen.
$f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ sind Normierungsbedingungen.
Beachte, dass für f keine Regularität auf dem Rand vorausgesetzt wurde. f ist im Allgemeinen auf $\partial\Omega$ nicht holomorph.
Bisher war γ oft eine geschlossene Kurve mit $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \Delta \subseteq \Omega$.
Ab jetzt kann man stets $\Delta = B_R(a)$ durch eine einfache zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ ersetzen, die a enthält.

Beweis

(siehe zum Beispiel Jänich, Ahlfors)
TODO: restlichen Beweis (Existenz) einfügen
Eindeutigkeit:
Seien $f_1,f_2 : \Omega \to B$ zwei biholomorphe Abbildungen mit $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$.
Dann ist $g = f_1^{-1} \circ f_2 : B \to B$ eine biholomorphe Abbildung mit $g(0) = 0$.
Wir zeigen nun:

$$g(z) = c \cdot z \qquad\qquad |c| = 1$$

Erstaunlich ist, dass g bis auf einen Phasenfaktor (eine Drehung) eindeutig durch die Biholomorphie festgelegt ist.

$$h(z) := \begin{cases} \frac{g(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ g'(z) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$g(0) = 0$ ist eine einfache Nullstelle. Also ist h holomorph auf B.

Maximumprinzip

> Ist $h : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, dann nimmt $|h|$ im Inneren kein Maximum an.

Damit folgt auf ∂B_1:

$$|h(z)| = \frac{|g(z)|}{|z|} = |g(z)| \leq 1$$

Aus dem Maximumprinzip folgt

$$1 \geq |h(z)| = \frac{|g(z)|}{|z|}$$

in ganz B, also $|g(z)| \leq |z|$.
Analog folgt $|z| = \left|g^{-1}(g(z))\right| \leq |g(z)|$. Also folgt $|g(z)| = |z|$.
Somit ist $|h(z)| = \dfrac{|g(z)|}{|z|} = 1$.
Aus dem Maximumprinzip folgt $h = c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und somit $g = c \cdot z$. $\square_{2.21.4}$

Beweis des Maximumprinzips

TODO: Abb9 einfügen
Nehme an, dass $|h|$ in $z_0 \in \Omega$ ein Maximum hat.

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta$$

Also folgt:

$$|h(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} |h(\zeta)| \, \mathrm{d}\zeta \leq \int_0^1 |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$$

$$\zeta = z + \varepsilon e^{2\pi \mathbf{i} \tau}$$

Da z_0 ein Maximum ist, folgt für $z \in \partial B_\varepsilon(z_0)$:

$$|h(z)| = |h(z_0)|$$

$\square_{2.21.4}$

Anhang

GNU Free Documentation License

0. Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. Applicability and definitions

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. Verbatim copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. Copying in quantity

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. Combining documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. Collections of documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. Aggregation with independent works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. Future revisions of this license

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `https://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. Relicensing

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

Addendum: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME.
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation;
>
> with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

> A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with … Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.