Analysis III

Vorlesung von
Prof. Dr. Felix Finster
im Wintersemester 2011/2012
Überarbeitung und Textsatz in LyX von
Andreas Völklein

Stand: 6. Januar 2012

ACHTUNG

Diese Mitschrift ersetzt *nicht* die Vorlesung.
Es wird daher *dringend* empfohlen, die Vorlesung zu besuchen.

Links

Der Text der „GNU Free Documentation License“ kann auch auf der Seite

`https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.de.html`

nachgelesen werden.
Eine transparente Kopie der aktuellen Version dieses Dokuments kann von

`https://github.com/andiv/analysisIII`

heruntergeladen werden.

Literatur

Maßtheorie

- Theodor Bröcker: *Analysis II*, Spektrum Akad. Verl., 1995, ISBN 3-86025-418-9; Kap. I-III (recht knapp)
- Walter Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 2009, ISBN 978-0-07-054234-1; Kap. I-III

Funktionentheorie

- Klaus Jänich: *Funktionentheorie*, Springer, 2011, ISBN 978-3-540-20392-6
- Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979, ISBN 0-07-000657-1; (ausführlich)

Inhaltsverzeichnis

1 Integrationstheorie

Motivation und Überblick

Riemann-Integral

Das *Riemann-Integral* haben wir schon kennen gelernt.
Sei $I = [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
TODO: Funktionsplot einfügen
Bilde eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $x_0 = a, x_n = b$ und $x_{k-1} < x_k \in \mathbb{R}$ in die Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Mit $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ ist die Feinheit:

$$\Delta Z := \max_{1 \leq k \leq n} |I_k|$$

Wähle Zwischenpunkte $\zeta_k \in I_k$ und definiere die Riemannsche Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot |I_k|$$

f heißt Riemann-integrierbar (Abkürzung: R-integrierbar), falls der Limes

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot |I_k| =: \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenpunkte existiert.
Bezeichne die Menge der auf dem Intervall I Riemann-integrierbaren Funktionen mit $\mathcal{R}(I)$.
Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, das heißt $C^0(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Nachteile des Riemann-Integrals	Vorteile des Lebesgue-Integrals
Es ist nicht einfach zu entscheiden, welche Funktionen Riemann-integrierbar sind.	Die Lebesgue-integrierbaren Funktionen sind „schön“ charakterisiert.
Viele nicht-stetige Funktionen sind nicht Riemann-integrierbar, zum Beispiel: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	Man kann allgemeine Funktionen integrieren: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
Uneigentliche Integrale müssen gesondert betrachtet werden: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{l\to\infty} \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$	Uneigentliche Integrale sind einfach handhabbar.
Konvergiere $f_n \to f$, gegen was konvergiert das Integral? $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \,?$	Diese Frage ist mit den Lebesgueschen Integrationssätzen einfach zu entscheiden.
Funktionenräume $\mathcal{R}(I)$ Führe *Norm* ein: $\lvert\lvert f(I)\rvert\rvert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$ Aber $(\mathcal{R}(I), \lvert\lvert.\rvert\rvert)$ ist nicht vollständig.	L^p-Räume sind vollständig, also Banachräume. Zum Beispiel: $L^1([0,1]) =$ $= \left\{ f \text{ ist L.-intbar. } \wedge \int_0^1 \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$ Für die L^1-Norm gilt: $\lvert\lvert f\rvert\rvert \geq 0$ $\lvert\lvert f\rvert\rvert = 0 \Rightarrow \; f = 0$ $\lvert\lvert f+g\rvert\rvert \leq \lvert\lvert f\rvert\rvert + \lvert\lvert g\rvert\rvert$ Aber: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = ?$

Historischer Ursprung

Das Riemann-Integral geht auf Newton zurück, der sich mit folgender Thematik beschäftigte:

TODO: Bild: Sonne-Erde-Potential einfügen

Berechnung des Gravitationspotential der Sonne als Summe infinitesimal kleiner Punktquellen:

$$\Phi = \lim_{i\to\infty} \sum_i \frac{\Delta Q_i}{r_i}$$

Dieses Vorgehen wurde von Riemann mathematisch präzise gefasst und lieferte in der Mitte des 19. Jahrhunderts das Riemannsche Integral.

Borel und Lebesgue wählten am Anfang des 20. Jahrhunderts einen anderen Ansatz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, also $f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zerlege den Bildbereich in Streifen, also $y_0, \dots, y_n$ mit $y_0 = \alpha, y_n = \beta$ und $y_{k-1} < y_k$ sowie $J_k := [y_{k-1}, y_k]$ für $1 \leq k \leq n$.

TODO: Abbildung: Funktion mit Streifen

Es ist $f^{-1}(J_k) \in \mathbb{R}$ und man definiert ein „Maß“ $\mu\left(f^{-1}(J_k)\right)$ dieser Menge. („Volumen“ oder „Länge“ des Intervalls)

Für stetige Funktionen liefert dies das Gleiche wie das Riemann-Integral, ist aber allgemeiner und hat viele Vorteile.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge so ist

$$\mu : M \to \mathbb{R}_0^+$$

eine Abbildung, für die

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mu\left(f^{-1}(J_k)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

gegen das Lebesgue-Integral konvergiert.

Sie werden sich fragen: Für welche Mengen kann man sinnvoll ein Maß definieren? Wie geht das?

Für ein Intervall $K = [x_0, x_1]$ sollte gelten:

$$\mu(K) = |K| = x_1 - x_0$$

Für paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_l$ mit $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und

$$J = \dot{\bigcup_{k=1}^{l}} I_k$$

sollte gelten:

$$\mu(J) = \sum_{k=1}^{l} \mu(I_k)$$

Geht das auch für beliebige, also unendliche Vereinigungen?

Sei I eine beliebige Indexmenge.

$$A := \dot{\bigcup_{\alpha \in I}} I_\alpha$$

Vermutung:

$$\mu(A) = \sum_{\alpha \in J} \mu(I_\alpha)$$

Beispiel: $A = [0, 1]$

Dann soll $\mu(A) = 1$ gelten.

Sei $I = A$. Für $x \in I$ wähle $I_x := \{x\} = [x, x]$ und es gilt:

$$\mu(I_x) = |I_x| = 0$$

Aber:

$$A = \dot{\bigcup_{x \in I}} I_x$$

$$1 = \mu(A) \stackrel{?}{=} \sum_{x \in I} \mu(I_x) = \sum_{x \in I} 0 = 0$$

Dies geht also nicht. Das Problem liegt bei der überabzählbaren Summe.
Um solche grundsätzlichen Probleme zu vermeiden, arbeitet man in der Maßtheorie immer nur mit *abzählbaren* oder endlichen Mengenoperationen.
Mit diesen Dingen im Hinterkopf führen wir nun einige abstrakte Begriffe ein.

1.1 Maßräume, Maße

1.1.1 Definition (σ-Algebra, Maßraum, messbare Menge)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge (zum Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^n$).
Eine *σ-Algebra $\mathcal{M}$ über X* ist eine Menge von Teilmengen von X, so dass gilt:

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \complement A := X \setminus A \in \mathcal{M}$

iii) Ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Mengen in $\mathcal{M}$, so ist auch ihre Vereinigung
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$$
ein Element von $\mathcal{M}$.

„σ“ steht für abzählbar.
(X, μ) heißt *Maßraum* (Messraum, measurable space).
Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen *messbare Mengen*.

1.1.2 Bemerkung

- Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ gegeben, so bilde:
$$(B_k)_{k \in \mathbb{N}} := (A_1, \ldots, A_n, A_n, \ldots)$$
Nach iii) gilt:
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \in \mathcal{M}$$
Damit sind *endliche* Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{M}$ wieder messbar.

- Seien $A_k \in \mathcal{M}$ messbar für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann folgt:
$$\complement \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\complement A_k}_{\in \mathcal{M} \text{ (wg. ii))}} \Bigg)}_{\in \mathcal{M} \text{ (wg. iii))}}$$
Also gilt:
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \complement \left(\complement \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \complement \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\complement A_k) \right) \in \mathcal{M}$$
Damit sind *abzählbare* Schnitte messbarer Mengen wieder messbar.

1.1.3 Beispiele (Erzeugnis, offene Menge, Topologie, Borelalgebra)

a) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ ist die kleinste σ-Algebra über X.

Die Potenzmenge $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ ist als „Menge aller Teilmengen" die größte σ-Algebra über X.

Beide sind im Folgenden nicht interessant.

b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges System von Teilmengen.

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ als Teilmenge enthält, und heißt *das Erzeugnis von $\mathcal{A}$*.

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}\}$$

c) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Definiere:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls für alle $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$ gibt.

$$\mathcal{O} = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\}$$

heißt *Topologie*.

Führe jetzt *die von der Topologie erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{M}(\mathcal{O})$, die Borelalgebra* ein. Man kann also auf jedem topologischen Raum eine kanonische σ-Algebra einführen.

Ein $A \in \mathcal{B}$ heißt *Borelmenge*.

Wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ ist jede offene Menge eine Borelmenge.

Jede abgeschlossene Menge A ist eine Borelmenge, denn $\complement A$ ist offen, also ist $\complement A$ eine Borelmenge und damit nach 1.1.1 ii) auch $A = \complement(\complement A)$.

Es gibt Borelmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, zum Beispiel ist die abgeschlossene Menge $[0,1] \in \mathcal{B}$ und auch die offene Menge $(2,3) \in \mathcal{B}$ und daher auch deren Vereinigung $[0,1] \cup (2,3) \in \mathcal{B}$, die aber weder offen noch abgeschlossen ist.

Anderes Beispiel: $[0,1] \cup (1,2) = [0,2) \in \mathcal{B}$

d) Betrachte für $z \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ die offenen Würfel:

$$W_{z,k} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \frac{z_j - 1}{2^{k+1}} < x_j < \frac{z_j + 1}{2^{k+1}} \right\}$$

$$\mathcal{A} := \{W_{z,k} | z \in \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

TODO: Abbildung Würfel

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist die von den Würfeln erzeugte σ-Algebra und wieder die Borelalgebra, denn sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

Schöpfe Ω durch abzählbar viele Würfel aus, also

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \in \mathcal{A}$$

mit $W_n \in \mathcal{A}$.

TODO: Abbildung Ausschöpfung

Da eine σ-Algebra unter abzählbaren Mengenoperationen abgeschlossen ist, folgt $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Es liegen also alle offenen Mengen in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Da $\mathcal{B}$ die *kleinste* σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen enthält, folgt $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Genauer in einer Dimension:

Sei $X = \mathbb{R}$. Ist $k \in \mathbb{N}$ gegeben, so bilde das Gitter:

$$2^{-k+1} \cdot \mathbb{Z} = \left\{ \frac{l}{2^{k+1}} \middle| l \in \mathbb{Z} \right\}$$

Für $l \in \mathbb{Z}$ definiere:

$$W_{l,k} = \Big((l-1) \cdot 2^{-k+1}, (l+1) \cdot 2^{-k+1} \Big)$$

TODO: Abbildung eindimensionales Gitter

Dann ist

$$W_k = \{ W_{l,k} | l \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

abzählbar und auch

$$W := \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$$

ein abzählbares Mengensystem.

Behauptung

Die Würfel erzeugen bereits die gesamte Borelalgebra:

$$\mathcal{M}(W) = \mathcal{B}$$

Beweis

Offensichtlich ist $\mathcal{M}(W) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

Zu zeigen ist, dass $\mathcal{M}(W)$ alle offenen Mengen enthält.

Sei also $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist

$$A = \bigcup \{ U \subseteq \Omega | U \in W \}$$

ist eine abzählbare Vereinigung von Würfeln, also ist $A \in \mathcal{M}(W)$.

Es gilt:

$$A = \Omega$$

$A \subseteq \Omega$ ist klar, da $U \subseteq \Omega$ ist.

Umgekehrt ist $A \supseteq \Omega$, denn für $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \Omega$.

Wähle k so groß, dass $2^{-k} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ ist.

TODO: Abbildung Zahlenstrahl

Dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $x \in W_{l,k}$, also ist $A = \Omega$.

Daher ist $A = \Omega \in \mathcal{M}(W)$ und somit folgt

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{M}(W) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O})$$

Also ist $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(\mathcal{O})$.

$\square_{\text{Behauptung}}$

Alle Borelmengen sollten also messbar sein.

Betrachte auf topologischen Räumen, sofern nichts anderes gesagt wird, stets die Borelalgebra als σ-Algebra.

1.1.4 Definition (Erzeugendensystem, messbare Abbildung)

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ heißt *Erzeugendensystem* von $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$ ist.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Maßräumen (X, M) und (Y, M') heißt *messbar*, falls das Urbild messbarer Mengen messbar ist.

Bemerkung

Die Definition der Messbarkeit hat Ähnlichkeit mit der Definition der Stetigkeit:

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, falls das Urbild *offener* Mengen *offen* ist.

1.1.5 Beispiel

- W ist ein Erzeugendensystem der Borelalgebra von $\mathbb{R}$.
- Nach Definition ist jede stetige Funktion automatisch messbar, denn es gilt:
  Sei $f : X \to Y$ stetig, dann ist für jede offene Menge Ω nach Definition auch $f^{-1}(\Omega)$ offen.
  Beachte für Mengen $V, V_j \subseteq Y$ mit $j \in \mathbb{N}$:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(V_j)$$
$$f^{-1}(\complement V) = \complement f^{-1}(V)$$

  Die Mengenoperatoren sind also mit dem Bilden des Urbilds verträglich.
  Sei $\mathcal{A} \subseteq Y$ messbar, also in $\mathcal{B}(Y)$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{B}(X)$, also ist f tatsächlich messbar.

1.1.6 Satz

Seien X ein Maßraum und Y, Z topologische Räume mit zugehöriger Borelalgebra.

Ist $f : X \to Y$ messbar und $g : Y \to Z$ messbar, so ist $g \circ f : X \to Z$ messbar.

Beweis

Zu zeigen ist, dass für alle messbaren $A \subseteq Z$ schon $(g \circ f)^{-1}(A)$ messbar ist.
Es genügt wieder A in einem Erzeugendensystem zu betrachten. Wähle als solches die offenen Mengen.
Sei also $A \in \mathcal{O}$, dann ist $g^{-1}(A)$ messbar, weil g messbar ist und daher auch

$$f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(A) = (g \circ f)^{-1}(A)$$

messbar, weil f messbar ist.
Insgesamt ist also $g \circ f$ messbar.

$\square_{1.1.6}$

1.1.7 Bemerkung

Betrachte im Folgenden $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ oder *die Kompaktifizierung der reellen Zahlen* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

$$\mathcal{O} = \langle \{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty] | a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \rangle$$

Dies ist die von diesen Mengen erzeugte Topologie.
Konkreter: Bilde die Bijektion

$$\begin{aligned} \phi : \overline{\mathbb{R}} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \tanh(x) & x \in \mathbb{R} \\ +1 & x = +\infty \\ -1 & x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

TODO: Abbildung Kompaktifizierung
Betrachte auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Topologie, die von ϕ induziert wird, also ist $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ genau dann offen, wenn $\phi(\Omega) \subseteq [-1, 1]$ offen ist.

1.1.8 Satz

Sei X ein Maßraum.

i) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die Mengen mit $\{x | f(x) > a\}$ messbar sind.

ii) $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ihre Komponenten messbar sind.

iii) Die messbaren Abbildungen $X \to \mathbb{R}^n$ bilden einen Vektorraum.

iv) Ist $f : X \to \mathbb{R}^n$ messbar, so ist auch $|f| : X \to \mathbb{R}_0^+$.
Sind $g, h : X \to \mathbb{R}$ messbar, so auch ihr Produkt $g \cdot h : X \to \mathbb{R}$.

Beweis

i) „⇒“: Ist klar, da $\{x|f(x) > a\} = f^{-1}((a,\infty])$ als Urbild einer messbaren Menge messbar ist.

„⇐“: Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten wir die Borelalgebra, die von den offenen Intervallen und $(a,\infty], [-\infty, a)$ erzeugt wird.

Wir betrachten ein möglichst einfaches Erzeugendensystem:

$$\mathcal{E} = \{(a,\infty]|a \in \mathbb{R}\}$$

Es ist $[-\infty, a] \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Komplemente gebildet werden können.

Es ist $[-\infty, a) = [-\infty, a-1] \cup (a-2, a) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Vereinigungen gebildet werden können.

Es ist $(a,b] = [-\infty, b] \cap (a,\infty) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ und $(a,b) = [-\infty, b) \cap (a,\infty) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, da Schnitte gebildet werden können.

Also ist $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.

Betrachte nun $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} = \{(a,\infty]|a \in \mathbb{Q}\}$.

Behauptung

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$$

Beweis

Man muss zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ist.
Sei also $(a,\infty]$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so wähle eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \searrow a$.

$$(a,\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n,\infty]}_{\in \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}})$$

$\square_{\text{Behauptung}}$

Weil für $V, V_j \in \overline{\mathbb{R}}$ für $j \in \mathbb{N}$ schon

$$f^{-1}\left(\bigcup_j V_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(V_j)$$
$$f^{-1}(\complement V) = \complement f^{-1}(V)$$

gilt, brauchen wir die Messbarkeit von $f^{-1}(\Omega)$ nur für alle Ω eines Erzeugendensystems zeigen.

$$f^{-1}((a,\infty]) = \{x|f(x) > a\}$$

ist aber nach Voraussetzung messbar, also f messbar.

$\square_{\text{i)}}$

ii) „$\Leftarrow$“: Es genügt wieder ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ zu betrachten.

Sei $z \in \mathbb{Z}^n$, dann ist

$$W_{z,k} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \frac{z_l - 1}{2^{k+1}} < x_l < \frac{z_l + 1}{2^{k+1}}, l \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein Würfel mit der Kantenlänge 2^{-k}.

$$f^{-1}(W_{z,k}) = \{x \in X | f(x) \in W_{z,k}\} = \left\{ x \in X \middle| \frac{z_l - 1}{2^{k+1}} < f_l(x) < \frac{z_l + 1}{2^{k+1}}, l \in \{1, \dots, n\} \right\} =$$
$$= \bigcap_{l=1}^{n} \left\{ x \in X \middle| f_l(x) \in \left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right\} = \bigcap_{l=1}^{n} f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right)$$

Nehme an, die $f_l : X \to \mathbb{R}$ sind messbar. Dann ist

$$f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right)$$

messbar und somit auch:

$$\bigcap_{l=1}^{n} f_l^{-1}\left(\left(\frac{z_l - 1}{2^{k+1}}, \frac{z_l + 1}{2^{k+1}} \right) \right) = f^{-1}(W_{z,k})$$

Daher ist $f : X \to \mathbb{R}^n$ messbar.

„$\Rightarrow$“: Sei f messbar. Dann ist

$$f_l^{-1}((a,b)) = f^{-1}\big(\overbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{(a,b)}_{l\text{-tes Argument}} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{\text{ist offen in } \mathbb{R}^n}\big)$$

messbar, da f messbar ist.

$\square_{\text{ii)}}$

iii) Für messbare Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ ist auch

$$\begin{aligned} (f,g) : X &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

messbar und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle + \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

stetig, also insbesondere messbar. Nach 1.1.6 ist dann auch die Verkettung

$$\begin{aligned} \langle + \rangle \circ (f,g) : X &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \alpha f(x) + \beta g(x) \end{aligned}$$

messbar.

$\square_{\text{iii)}}$

iv) Es folgt mit 1.1.6 analog zu iii) für messbare Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}^n$ und $g, h : X \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f| : X &\overset{\text{messbar}}{\to} \mathbb{R}^n \overset{\text{stetig}}{\to} \mathbb{R} \\ x &\overset{\text{messbar}}{\mapsto} f(x) \overset{\text{stetig}}{\mapsto} |f(x)| \\ g \cdot h : X &\overset{\text{messbar}}{\to} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\text{stetig}}{\to} \mathbb{R} \\ x &\overset{\text{messbar}}{\mapsto} (g(x), h(x)) \overset{\text{stetig}}{\mapsto} g(x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

$\square_{1.1.8}$

Bemerkung

ii) ist sehr nützlich, weil wir uns daher im Folgenden oft auf reelle Funktionen beschränken können.
Schön ist, dass Messbarkeit sich auf Grenzwerte überträgt.

1.1.9 Satz

i) Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen, so sind auch die punktweise definierten Funktionen

$$\sup_n f_n, \ \inf_n f_n, \ \limsup_n f_n, \ \liminf_n f_n$$

messbar.

ii) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, so ist f auch messbar.

Beweis

i) Zu zeigen ist nach 1.1.8 i), dass für jedes $a \in \mathbb{Q}$ schon $\{x | (\sup_n f_n)(x) > a\}$ messbar ist. Die Menge

$$\left\{x \middle| \left(\sup_n f_n\right)(x) > a\right\} = \left\{x \middle| \sup_n (f_n(x)) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x | f_n(x) > a\}}_{\text{messbar, da } f \text{ messbar ist}}$$

ist als Vereinigung messbarer Mengen wieder messbar.

Für $\inf_n f_n$ folgt analog:

$$\left\{x \middle| \left(\inf_n f_n\right)(x) > a\right\} = \left\{x \middle| \inf_n (f_n(x)) > a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x | f_n(x) > a\}}_{\text{messbar, da } f \text{ messbar ist}}$$

Dieser Schnitt messbarer Mengen ist wieder messbar.

Außerdem ist

$$\limsup_n f_n = \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq j} f_n$$

als Verkettung von messbaren Funktionen messbar.

Für den Limes inferior folgt die Behauptung analog.

$\square_{\text{i)}}$

ii) Sei f_n punktweise konvergent. Dann ist

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

nach i) messbar.

$\square_{1.1.9}$

1.1.10 Definition (Stufenfunktion)

Eine messbare Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt, heißt *Stufenfunktion*.
TODO: Abbildung Stufenfunktion einfügen

1.1.11 Satz

Ist $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ messbar, so gibt es eine aufsteigende Folge von Stufenfunktionen φ_n, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} (k-1)\cdot 2^{-j} & \text{falls } \exists_{k\in\mathbb{N}_{<j\cdot 2^j}} : (k-1) \le f(x)\cdot 2^j \le k \\ j & f(x) > j \end{cases}$$

hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.
Die punktweise Konvergenz $\varphi_j \to f$ ist klar.
TODO: Skizze erstellen

Bemerkung

Der Limes ist sogar gleichmäßig.

$\square_{1.1.11}$

1.1.12 Korollar

$f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn f punktweiser Limes von Stufenfunktionen ist.

Beweis

„$\Leftarrow$“: Diese Aussage folgt direkt aus Satz 1.1.9 ii).
„$\Rightarrow$“: Nach Satz 1.1.8 ii) genügt es den Fall $n = 1$ zu betrachten. Setze:

$$f_+ := \max(f, 0) \qquad\qquad f_- := \max(-f, 0)$$

Dann ist $f = f_+ - f_-$.

f_+ und f_- sind analog zu 1.1.8 iv) messbar, da gilt:

$$f_+ = \frac{1}{2}\left(f + |f|\right)$$
$$f_- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$$

Approximiere sie nun gemäß Satz 1.1.11 durch Stufenfunktionen.

$\square_{1.1.12}$

1.1.13 Definition (Maß)

Ein *Maß* auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M})$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Ist $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen, so gilt:

$$\mu\Bigg(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}_{\in\mathcal{M}}\Bigg) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$$

Diese Eigenschaft nennt man σ-Additivität.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt auch Messraum mit Maß.

1.1.14 Beispiele

i) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) \in [0, \infty]$ kann beliebig gewählt werden, zum Beispiel $\mu(X) = 1$.

ii) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$; Sei $p \in X$.

$$\mu_p(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist das sogenannte Dirac-Maß $\delta(x - p)\,\mathrm{d}x$.

iii) Sei $X = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Menge und $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Verwende das Zählmaß:

$$\mu(A) := \#A$$

1.1.15 Satz

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $A_n \in \mathcal{M}$.

a) Ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so folgt die Additivität:
$$\mu(A_1 \dot\cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

b) Monotonie:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

c) Für eine aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ messbarer Mengen gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Beweis

a) Setze $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$. Aus der σ-Additivität folgt:
$$\mu(A_1 \dot\cup A_2) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

$\square_{\text{a)}}$

b) Setze $B_1 = A_1$ und für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:
$$B_n := A_n \setminus \{A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}\}$$

TODO: Abbildung von B_n einfügen

Die B_n sind nach Konstruktion paarweise disjunkt und es gilt:
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Letzteres folgt, da gilt:
$$\mu(A_n) = \mu(B_n \dot\cup A_n \setminus B_n) \overset{\text{a)}}{=} \mu(B_n) + \underbrace{\mu(A_n \setminus B_n)}_{\geq 0} \geq \mu(B_n)$$

$\square_{\text{b)}}$

c) Setze B_n wie in b), so folgt wegen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ schon $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Es folgt:
$$\mu(A_n) = \mu(B_1 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$$

$(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton steigende Folge, womit folgt:
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$\square_{1.1.15}$

1.2 Konstruktion des eindimensionalen Lebesgue-Maßes

TODO: Rest überarbeiten

Henri Leon Lebesgue: Doktorarbeit (1902)

Borel, ...

Caratheodory: Maßerweiterungen; „unser Zugang“ (1918):

Beginne mit „einfachen“ Mengensystemen $\mathcal{A}$: endliche Vereinigung beschränkter Intervalle, also $A \in \mathcal{A}$ ist darstellbar als eine disjunkte Vereinigung beschränkter Intervalle:

$$A = I_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} I_n$$

Führe ein:

$$\mu(A) = |I_1| + \ldots + |I_n|$$

Beachte: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist *kein* Maßraum, da $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist.

TODO: Rest einfügen

1.3 Konstruktion des Integrals

TODO: Rest einfügen

1.3.1 Definition

TODO: Rest einfügen

1.3.2 Lemma

Sei (φ_n) eine L^1-Cauchy-Folge in $\mathcal{T}(X)$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\left(\varphi_{n_j}\right)$, die fast überall punktweise konvergent ist, also:

$$\varphi_{n_j}(x) \mapsto \varphi(x) \qquad \text{für fast alle } x \in X$$

Zusätzlich

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{Z\subseteq X}{\exists} \text{ mit } \mu(Z) < \varepsilon$$

sodass

$$\varphi_{n_j}\Big|_{X\setminus Z} \rightrightarrows \varphi\Big|_{X\setminus Z}$$

TODO: Beweis einfügen....

Beachte: Für eine L^1-C.F. (φ_n), $\varphi_n \in \mathcal{T}(X)$ ist

$$Z_N := \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

eine Folge reeller Zahlen.

Diese Folge (z_n) ist auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, weil:

$$|z_n - z_m| = \left| \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu - \int_X \varphi_m \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (\varphi_n - \varphi_m)\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |\varphi_n - \varphi_m|\, \mathrm{d}\mu$$

Wir können also bilden:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

1.3.3 Definition

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt (lebesgue-)integrabel, wenn es eine L^1-Cauchy-Folge (φ_n) von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Die Zahl

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

heißt das *Integral* von f über X. Für $Y \subseteq X$ messbar setzt man

$$\int_Y f \mathrm{d}\mu = \int \chi_Y \cdot f \mathrm{d}\mu$$

wobei

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in Y \\ 0 & \text{falls } x \notin Y \end{cases}$$

die charakteristische Funkiton von Y ist.
Beachte, dass $\chi_Y \cdot \varphi_n \to \chi_Y \cdot \varphi$ fast überall.

1.3.4 Lemma

Seien (φ_n) und (ψ_n) zwei L^1-Cauchy-Folgen von Treppenfunktinen, die beide fast überall punktweise gegen eine FUnktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \psi_m|| = 0$$

Also ist:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n \mathrm{d}\mu$$

Beweis

Setze $\tau_n := \varphi_n - \psi_n$. Dann ist $\tau_n \in \mathcal{T}(X)$, (τ_n) ist L^1-Cauchy-Folge und $\tau_n \to 0$ fast überall punktweise konvergent.
Zu zeigen ist: $\tau_n \to 0$ in L^1, also $||\tau_n||_1 \to 0$

- Es genügt, dies für eine Teilfolge zu zeigen, denn nehme an, dass $\left|\left|\tau_{n_j}\right|\right| \to 0$.
  Sei $\varepsilon > 0$. Da (τ_n) eine L^1-Cauchy-Folge sind, gibt es ein N mit $||\tau_n - \tau_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
  Da $\left|\left|\tau_{n_j}\right|\right| \to 0$ gibt es ein $K > N$ mit $||\tau_K|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

  $$\Rightarrow \quad ||\tau_n|| \leq ||\tau_n - \tau_K|| + ||\tau_K|| \leq \varepsilon \qquad \underset{n \geq N}{\forall}$$

- Sei $\varepsilon > 0$ und k fest gewählt. Wähle die Teilfolge (die wir zur Einfachheit wieder mit (τ_n) bezeichnen) so, dass:

  $$||\tau_n - \tau_k|| \leq \varepsilon \qquad \underset{n \geq k}{\forall}$$

  τ_n konvergiert gleichmäsig auf $X \setminus Z$ und $\mu(Z) < \dfrac{\varepsilon}{||\tau_k||_\infty}$.
  (genau wie in Lemma **??**)

  $$||\tau_k||_\infty = \sup(\tau_k) < \infty$$

  da τ_k als Treppenfunktion nur endlich viele Funktionswerte annimmt. Setze:

  $$M = \{x | \tau_k(x) \neq 0\} \qquad \text{(wieder für unser festes } k\text{)}$$

  $$||\tau_n||_1 = \int_X |\tau_n \mathrm{d}\mu| \leq \int_Z |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu + \int_{M \setminus Z} |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus M} |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu$$

  $$\int_Z |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_Z |\tau_n - \tau_k| + \int_Z |\tau_k| \leq ||\tau_n - \tau_k||_1 + \underbrace{\sup|\tau_k| \cdot \mu(Z)}_{<\varepsilon \text{ nach Konstruktion von } Z \text{ auf } M \setminus Z} \leq$$

  $$\leq ||\tau_n - \tau_k||_1 + \varepsilon$$

  $$\int_{M \setminus Z} |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{M \setminus Z} |\tau_n| \cdot \underbrace{\mu(M)}_{<\infty, \text{ da } \tau_k \text{keine TF}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{da } \tau_n \rightrightarrows 0$$

  $$\int_{X \setminus M} |\tau_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus M} ||\tau_n - \tau_k|| \,\mathrm{d}\mu \leq ||\tau_n - \tau_k||$$

  (Da $\tau_k = 0$ auf $X \setminus M$)
  Also insgesamt:

  $$||\tau_n||_1 \leq 2\,||\tau_n - \tau_k||_1 + \varepsilon + \varepsilon \qquad \text{falls } n > N(\varepsilon)$$

  Indem wir k genügend groß wählen können wir erreichen, dass $||\tau_n - \tau_k||_1 < \varepsilon$.

  $$\Rightarrow \quad ||\tau_n||_1 \leq 4\varepsilon \qquad \underset{n > N(k)}{\forall}$$

$\square_{1.3.4}$

1.3.5 Satz (Regeln für Integral)

i) Die integrablen Funktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mu)$. Das Integral ist darauf eine lineare Abbildung:

$$\int : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$$

ii) $f, g \in \mathcal{L}^1$ und $f \geq g$ fast überall. $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \mathrm{d}\mu$ (Monotonie)

iii) Sei $Y \in X$ messbar und von endlichem Maß.

$$\Rightarrow \qquad \int_X \chi_Y \mathrm{d}\mu = \int_Y \mathrm{d}\mu = \mu(Y)$$

iv) Sind Y, Z messbar und disjunkt. Ist außerdem $f : Y \cup Z \to \mathbb{R}$ integrable, dann sind $f\Big|_Y$ und $f\Big|_Z$ integrabel und es gilt:

$$\int_{Y \cup Z} f \mathrm{d}\mu = \int_Y f \mathrm{d}\mu + \int_Z f \mathrm{d}\mu$$

v) Ist f integrabel, so auch $|f|$ und es gilt:

$$\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu$$

vi) Die L^1-Norm ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$. Das Integral ist stetig.

vii) Ändert man eine integrable FUnktion auf einer Nullmenge ab, so ist die neue Funktion wieder integrabel und das Integral ändert sich nicht.

Beweis

Sei $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$. Wähle L^1-Cauchy-Folge. (φ_n),(γ_n) von Treppenfunktionen, so dass:

$$\begin{aligned} \varphi_n &\to f && \text{fast überall} \\ \gamma_n &\to f && \text{fast überall} \end{aligned}$$

Wir wissen dann, dass $\displaystyle\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu, \int_X \gamma_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu.$

Es genügt deshalb, die Rechenregeln für Treppenfunktionen zu überprüfen, gehe dann zum Limes über. z. B.: $\varphi_n + \gamma_n$ ist L^1-Cauchy-Folge

$$\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \gamma_n)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu + \int_X \gamma_n \mathrm{d}\mu\right) \overset{\text{Konvergenzsätze für Folgen}}{=} \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$$

TODO: Rest einfügen

1.3.6 Satz

TODO: Rest einfügen

1.3.7 **Satz** (Normkonvergenzsatz)

Sei (f_n) eine L^1-Cauchy-Folge integrabler Funktionen (nicht notwendigerweise Treppenfunktionen!).
TODO: Rest einfügen
Dann konvergiert eine Teilfolge fast überall punktweise,

$$f_{n_j} \to f \quad \text{fast überall}$$

$f : X \to \mathbb{R}$ ist wieder integrabel und

$$\left|\left|f_{n_j} - f\right|\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

1.3.8 **Korollar**

TODO: Rest einfügen

1.4 Die Konvergenzsätze

TODO: Rest einfügen

1.4.1 **Beispiel**

TODO: Rest einfügen

1.4.2 **Theorem** (monotone Konvergenz; Beppo-Levi)

(f_n), $f_n \in L^1(X)$ und f ist fast überall aufsteigend (also $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ für fast alle x und alle n) und $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq C < \infty \quad \forall_n$.
$\Rightarrow f_n \to f$ fast überall und $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$

1.4.3 **Theorem** (dominierte Konvergenz)

$(f_n), f_n \in L^1$, $|f_n| \leq g \in L^1$ und $f_n \to f$ fast überall $\Rightarrow f \in L^1$ und $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$
TODO: Rest einfügen

1.5 Integration nicht-negativer Funktionen

Sei $f : X \to [0,\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ messbar (muss nicht in L^1 sein!). Setze:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \text{ mit } \varphi \text{ Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\} \qquad (*) \qquad (1.1)$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,\mu)$ alle integrablen Funktionen. $\mathcal{N} = \{f \in \mathbb{L}$ mit $||$ $\mathcal{L}$ Untervektorraum $f \sim \tilde{f}$ falls $f - \tilde{f} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \left|\left|f - \tilde{f}\right|\right|_1 = \int_X \left|f - \tilde{f}\right| \mathrm{d}\mu$ $0 \Leftrightarrow f - \tilde{f} = 0$ fast überall $L^1 = \mathcal{L}/\mathcal{N}$ Äquivalenzklassen, $\left(L^1, ||.||_1\right)$ ist ein Banachraum. Gegenbeispiel TODO Abb 1, $f_n(x) \to 0$ punktweise, $\int f_n \mathrm{d}\mu = A \neq \int \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ $g \notin L^1$ (denn $\int g \mathrm{d}\mu = +\infty$)

Definition

φ ist eine Stufenfunktion, falls $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\#\varphi(X) < \infty$.
φ ist eine Treppenfunktion, falls φ Stufenfunktion und $\mu\left(\varphi^{-1}(c)\right) < \infty$ für alle $c \neq 0$.
z. B. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ ist eine Stufenfunktion, aber keine Treppenfunktion.

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \varphi(x)} y \cdot \mu\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$

Treppenfunktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$: $y \in \mathbb{R}$, $\mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) < \infty \Rightarrow \int_X \varphi \mathrm{d}\mu < \infty$.
Stufenfunktion: $\varphi : X \to [0, \infty]$: $y \in [0, \infty]$, $\mu\left(\varphi^{-1}(y)\right) \leq \infty \Rightarrow \int_X \varphi \mathrm{d}\mu \leq \infty$ ist wohldefiniert.

1.5.1 Satz

Ist $f \in L^1$, so stimmt $(*)$ tatsächlich mit der früheren Integral-Definition (von Definition **??**1.3.3) überein.

Beweis

Sei $f \in L^1$. Wegen der Monotonie gilt:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \mathrm{d}\mu \qquad \underset{\varphi}{\forall} \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq f$$

Gehe zum Supremum über

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \geq \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu | \varphi \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

Umgekehrt gibt es nach Satz **??**1.1.8 eine aufsteigende Folge (φ_n) von Treppenfunktionen (also auch Stufenfunktionen), die fast überall gegen f konvergieren. Nach dem Theorem von der monotonen Konvergenz ist dann:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu | \varphi \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

$\square_{1.5.1}$

$f : X \to [0, \infty]$ messbar.

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu | \varphi \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ \infty & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\mu = +\infty$$

Denn:
TODO Abb 2

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \mathrm{d}\mu = n^2 \cdot \frac{2}{n} = 2n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

Die Rechenregeln für Integrale übertragen sich alle, wenn man (konsequent) $0 \cdot \infty = 0$ als Regel verwendet.
z. B.

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f : [0,1] \to [0,\infty]$$

$\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$, da jede Stufenfunktion φ mit $0 \leq \varphi \leq f$ identische verschwindet.

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{y \in f(x)} y \cdot \mu\left(f^{-1}(y)\right) = \infty \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0 \cdot \mu((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) = \infty \cdot 0 + 0 \cdot \infty = 0$$

1.5.2 Theorem (monotone Konvergenz)

Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine monoton aufsteigende Folge messbarer Funktionen mit:

$$f(x) = \sup_n f_n(x)$$

Dann ist:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$$

Beweis

Ist die linke Seite endlich, so sind alle f_n fast überall endlich, wende Theorem **??**1.4.2 an.
Ist die linke Seite unendlich, so wegen der Monotonie auch die rechte Seite.

$\square_{1.5.2}$

1.6 Zusammenhang zum Riemann-Integral

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_{k+1}\}$ mit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} = b$
Feinheit $\Delta(Z) = \max_{j=0,\ldots,k}(x_{j+1} - x_j)$

$$\overline{S}_Z = \sum_{j=0}^{k} \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \cdot |x_{j+1} - x_j|$$
$$\underline{S}_Z = \sum_{j=0}^{k} \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \cdot |x_{j+1} - x_j|$$

Definition:

f ist R-integrierbar, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt, mit:

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z \leq \varepsilon$$

Satz:

f ist R-integrierbar $\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists}$ mit $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z \leq \varepsilon \underset{Z}{\forall}$ mit $\Delta(Z) < \delta$
$R - \int_y f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_Z \underline{S}_Z(f)$

1.6.1 Satz

Jede R-integrierbar Funktion ist Lebesgue-integrabel und:

$$R - \int_Y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_Y f\mathrm{d}\mu$$

(Insbesondere: Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist integrabel)

Beweis

Sei f R-integrierbar. Es gibt dann eine absteigende Familie von Treppenfunktionen ψ_n und eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen φ_n mit:

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

und:

$$||\psi_n - \varphi_n|| \to 0$$

Genauer: Betrachte Z_n mit $\Delta(Z_n) < \frac{1}{n}$ und $Z_{n+1} \supset Z_n$ (also Z_{n+1} ist eine Verfeinerung von Z_n)

$$\psi_n|_{[x_j, x_{j+1})} = \sup_{[x_j, x_{j+1})} f$$
$$\varphi_n|_{[x_j, x_{j+1})} = \inf_{[x_j, x_{j+1})} f$$

TODO: Abb 4

$$||\psi_n - \varphi_n||_1 = \int_X |\psi_n - \varphi_n| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{k} \left(\sup_{[x_j, x_{j+1})} f - \inf_{[x_j, x_{j+1})} f \right) \cdot |x_{j+1} - x_j| \overset{\Delta(Z) \to 0}{\to} 0$$

Da $|\varphi_n| \leq |\psi_1| + |\varphi_1|$ und $|\psi_1| + |\varphi_1| \in L^1$, kann man den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhält:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \mathrm{d}\mu \quad \text{und } \varphi_n \to \varphi \text{ fast überall}$$

Genauso ist $|\psi_n| \leq |\psi_1| + |\varphi_1|$ und $|\psi_1| + |\varphi_1| \in L^1$, also nach der dominierten Konvergenz:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \psi_n \mathrm{d}\mu = \int_X \psi \mathrm{d}\mu \quad \text{und } \psi_n \to \psi \text{ fast überall}$$

Da

$$\int \psi_n \mathrm{d}\mu = R - \int \psi_n \mathrm{d}\mu \to R - \int_Y f \mathrm{d}x$$
$$\int \varphi_n \mathrm{d}\mu = R - \int \varphi_n \mathrm{d}\mu \to R - \int_Y f \mathrm{d}x$$

folgt:

$$\int |\varphi - \psi| \,\mathrm{d}\mu = 0 = ||\varphi - \psi||_1$$

Also gilt $\varphi = \psi$ fast überall. Da $\varphi \leq f \leq \psi$ folgt f ist Lebesgue-integrabel und $\int_Y f \mathrm{d}\mu = R - \int_Y -f \mathrm{d}x$.

$\square_{1.6.1}$

1.6.2 Beispiele

i) $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ ist fast überall 0, also ist f Lebesgue-integrabel und $\int_{[0,1]} f \mathrm{d}\mu = 0$ aber $\overline{S}_f - \underline{S}_f \geq 1$ für beliebige Zerlegungen, also ist f *nicht* R-integrabel.

ii) Konstruiere Funktion f, die Lebesgue-integrabel ist, die aber nicht R-integrabel ist, selbst wenn man sie auf einer Nullmenge beliebig abändert $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. Setze $U_n = B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(q_n)$ mit $0 < \varepsilon < 1$. $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \leq \sum_n \mu(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$
Setze $f = \chi_U$, dann ist $f|_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = 1$.

$$\int f \mathrm{d}\mu = \mu(U) < \varepsilon$$

TODO: Rest einfügen

1.7 Die Räume L^p

TODO: Rest einfügen

Einschub

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.
Frage: Wann ist die Funktion integrierbar?

Definition

f ist integrierbar, falls es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen gibt, die

- L^1-Cauchy-Folge ist und
- $\varphi_n \to f$ fast überall punktweise gilt.

$$\int_X \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

Einfacher ist folgende Methode:
$|f| : X \to [0, \infty)$ ist wieder messbar und

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \mathrm{d}\mu \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq f \text{ und } \varphi \text{ Stufenfunktion} \right\} \in [0, \infty]$$

ist wohldefiniert.
Falls (X, μ) schon σ-endlich ist, kann man hier „Stufenfunktion" durch „Treppenfunktion" ersetzen.
Stufenfunktion: $\#\varphi(X) < \infty$ und φ messbar:

$$\varphi(x) = \sum_{y \in \varphi(X)} y \cdot \chi_{\varphi^{-1}(y)}(x) \geq 0$$

Betrachte $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ mit $\bigcup A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$.

$$\varphi_n(x) = \sum_{y \in \varphi(X)} y \cdot \chi_{A_n \cap \varphi^{-1}(y)}(x)$$

$\varphi_n \overset{n\to\infty}{\to} \varphi$ punktweise und φ_n aufsteigend.
Die φ_n sind dann Treppenfunktionen und nach monotoner Konvergenz ist:

$$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$$

Also ist

$$\sup \left\{ \int_X \varphi \mathrm{d}\mu \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq f \text{ Stufenfunktion} \right\}$$
$$\sup \left\{ \int_X \varphi \mathrm{d}\mu \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq f \text{ Treppenfunktion} \right\}$$

1. Fall: $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = +\infty$. Dann ist f nicht integrierbar$\left(\notin L^1\right)$, weil die L^1-Norm $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ nicht endlich ist.

2. Fall: $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$
   Dann ist f tatsächlich integrierbar, wie man folgendermaßen sieht:
   Zerlege $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = \max\{-f, 0\}$.
   Die Funktionen $f_\pm$ sind messbar und nicht-negativ, außerdem $f_\pm \leq |f|$. Damit folgt:

$$\int_X f_+ \mathrm{d}\mu, \int_X f_- \mathrm{d}\mu < \infty$$

   Nach Satz ??1.1.8 gibt es Treppenfunktionen $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ mit $\varphi_n^+ \overset{\text{steigender Pfeil}}{\rightarrow} f_+$ und $\varphi_n^- \overset{\text{steigender Pfeil}}{\rightarrow} f_-$.
   Setze $f_n; = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$. Dann ist $f_n \to f$ und $|f_n| \leq |f|$.
   Nach dominierter Konvergenz ist dann f integrierbar und:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

1.7.1 Theorem

$L^p(X)$ ist ein normierter Raum.

Beweis

$||.||_p$ ist eine Norm:

- Homogenität:

$$||\lambda f||_p = \left(\int_X |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, ||f||_p$$
$$||\lambda f||_\infty = \operatorname{supess} |\lambda f| = \operatorname{supess} |\lambda| \, |f| = |\lambda| \, ||f||_p$$

- Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||f+g||_p &\overset{\text{Monotonie}}{\leq} |||f| + |g|||_p \\ &\overset{\text{Minkowski}}{\leq} |||f|||_p + |||g|||_p = ||f||_p + ||g||_p \end{aligned}$$

- Definitheit: $||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0$
  Sei $0 = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, also folgt:

$$\begin{aligned} &\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \\ \Rightarrow \quad & |f|^p = 0 \text{ fast überall} \\ \Rightarrow \quad & f = 0 \text{ fast überall} \\ \Rightarrow \quad & f = 0 \text{ in } L^p(X) \end{aligned}$$

  Sei $||f||_\infty = 0$, dann folgt: $\operatorname{supess} |f| = 0$, also $|f| = 0$ fast überall, also $|f| \leq \varepsilon$ fast überall für alle $\varepsilon > 0$. Damit folgt $|f| = 0$ fast überall, also $f = 0$ in L^∞.

$\square_{1.7.1}$

1.7.2 Theorem

$L^p(X)$ ist vollständig. $(1 \leq p \leq \infty)$

Beweis

1. Zunächst der Fall $p = \infty$:
   Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in L^∞, also $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}}$ mit $||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \, \forall_{n,m\in\mathbb{N}_{>N}}$.

   $$f_k(x) \leq ||f_k||_\infty \text{ fast überall, also mit Ausnahme einer Nullmenge } A_k$$

   Entsprechend:

   $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \text{ fast überall, also mit Ausnahme einer Nullmenge } B_{nm}$$

   Die Menge

   $$E := \bigcup_k A_k \cup \bigcup_{m,n} B_{mn}$$

   ist als Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge.
   Wir wissen $\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}}$ und für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

   $$|f_k(x)| \leq ||f_k||_\infty \quad \forall_{x\in X\setminus E}$$
   $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \quad \forall_{x\in X\setminus E}$$

   Also $f_n \rightrightarrows f$ auf $X \setminus E$.
   (Wobei $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ durch diesen Grenzwert definiert)
   Setze $f = 0$ auf E.
   Dann ist $f \in L^\infty(x)$ und $||f_n - f|| = \text{supess}_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \text{supess}_{x\in X\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

2. Fall $p < \infty$:
   Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in L^p. wähle eine Teilfolge (zur Einfachheit wieder mit (f_n) bezeichnet), so dass $||f_{n+1} - f_n|| < 2^{-n}$.
   Setze:

   $$g_n = \sum_{i=1}^{n} |f_{i+1} - f_i| \qquad\qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{i+1} - f_i|$$

   (a) Fall a): Reihe konvergiert: $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_n g_n(x)$.
   (b) Fall b): Reihe divergiert: $g(x) = \infty$ und $g_n(x)$ ist unbeschränkt, also $g(x) = \sup_n g_n(x)$.

   $$||g_n|| = |||f_2 - f_1| + |f_3 - f_2| + \ldots + |f_{n+1} - f_n|||_p \leq$$
   $$\leq ||f_2 - f_1||_p + ||f_3 - f_2||_p + \ldots + ||f_{n+1} - f_n||_p \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < 1$$

Also gilt $\int_X |g_n|^p \,\mathrm{d}\mu = ||g_k||^p \leq 1$.
Also $g_n \nearrow (TODO : arrow)$ und $g(x) = \sup_n g_n(x)$.
Nach monotoner Konvergenz (Theorem **??**1.5.2) folgt:

$$\int_X g^p \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p \mathrm{d}\mu \leq 1$$

Also ist $g \in L^p$ und $||g||_p \leq 1$. Insbesondere ist g fast überall endlich.
Das heißt, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ für fast alle x konvergiert.

$$f_{n+1} = f_1 + \sum_{i=1}^{n} (f_{i+1} - f_i)$$

$$f(x) := f_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$

$f(x)$ ist fast überall wohldefiniert, weil die Reihe fast überall absolut konvergiert.
Für alle x, für welche die Reihe *nicht* absolut konvergiert, setzen wir $f(x) := 0$.
$f_n \to f$ fast überall. Also auch $|f_n - f|^p \to 0$ fast überall.

$$|f_n - f|^p \leq \left| \underbrace{f_1}_{\in L^p} + \underbrace{g}_{\in L^p} \right| \in L^1$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt: $\int_X |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \overset{n\to\infty}{\to}$, also $f_n \to f$ in L^p.

$\square_{1.7.2}$

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} | f(x) \leq \alpha \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \right\} = 1$$
$$\operatorname{supess}_{\mathbb{R}} f = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} | f(x) \leq \alpha \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R} \} = 0$$

1.8 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Ziel: Konstruiere das n-dimensionale Lebesgue-Maß induktiv aus dem eindimensionalen.
Gebe vor: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maße.
Zum Beispiel: $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ und $\mu = \nu$ Lebesgue-Maß.
$X \times Y = \{(x; y) | x \in X, y \in Y\}$
Wir wollen auf $X \times Y$ ein Maß konstruieren, das sogenannte *Produktmaß*.

Definition

$A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ nenne „Rechteck“.
TODO: Abb1
$\mu(A) \cdot \mu(B)$ liefert darauf einen sinnvollen „Volumenbegriff“.
$A \times B \in \mathcal{P}(X \times Y)$
$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \left\{ \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k \times B_k | A_k \in \mathcal{A}, B_k \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichnet die von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra.

1.8.1 Satz

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist eine Mengenalgebra.

Beweis

Zeige, dass Schnitte und Komplemente von Elementen aus $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ wieder in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ liegen.
TODO: Abb2

$$
\begin{aligned}
(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \\
\complement (A \times B) &= R_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} R_2 = (\complement A) \times B \dot{\cup} A \times (\complement B) \dot{\cup} (\complement A) \times (\complement B) \\
R_1 \dot{\cup} R_5 &= (\complement A) \times B \\
R_3 \dot{\cup} R_7 &= A \times (\complement B)
\end{aligned}
$$

$\square_{1.8.1}$

TODO: Rest einfügen

1.8.2 Satz

TODO: Rest einfügen

1.8.3 Definition

TODO: Rest einfügen

1.8.4 Lemma

TODO: Rest einfügen

1.8.5 Lemma

TODO: Rest einfügen

1.8.6 **Satz** (Cavalierisches Prinzip)

TODO: Rest einfügen
Bonaventura Cavalieri 1598-1647
TODO: Abb1
(gleiche Schnittflächen, gleiche Volumina)

1.8.7 Satz

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, das sogenannte *Produktmaß*.

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(M) &= \int_X \left(\int_Y \chi_M(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_Y \underbrace{\left(\int_X \chi_M(x, y) \, \mathrm{d}x \right)}_{=\mu(M)} \mathrm{d}y\end{aligned}$$

1.8.8 **Definition** (monotones Mengensystem)

Sei $A_i \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots &\Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{M} \\ A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots &\Rightarrow \bigcap_i A_i \in \mathcal{M}\end{aligned}$$

1.8.9 Satz

Ist $\mathcal{M}$ das kleinste monotone Mengensystem, das $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ enthält, so ist $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

1.8.10 Lemma

Sei $M \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Dann gilt:

i) $\chi_M(X, .)$ ist $\mathcal{B}$-messbar.

ii) $x \mapsto \int \chi_M(x, y) \, \mathrm{d}y$ ist $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ das Mengensystem, das (i) und (ii) erfüllt.

- $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ ist ein monotones Mengensystem.
  Sei χ_{M_n} messbar $\Rightarrow \sup \chi_{M_n}$, $\inf \chi_{M_n}$, punktweiser Limes wieder messbar
- monotone Konvergenz
- dominierte Konvergenz $\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Beweis von Satz ??*I* 8.6

Definiere $(\mu \otimes \nu)(M) := \int_X \left(\int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$ wohldefiniert und σ-additiv.
Seien $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_n \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ paarweise disjunkt, $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n} = \chi_{M_1 \cap \ldots \cap M_n} \nearrow \chi_n$ ist eine aufsteigende Folge messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert.
Nach monotoner Konvergenz folgt

$$g_N(x) := \int_Y \chi_{M_1 \cap \ldots \cap M_N}(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

und $g_N(x)$ ist aufsteigend (also $g_{N+1}(x) \geq g_N(x)$).
Nochmals monotone Konvergenz liefert:

$$\int_X g_N(x)\,\mathrm{d}x \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_X g(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = (\mu \otimes \nu)(M)$$

$$(\mu \otimes \nu)(M_1 \cup \ldots \cup M_N) = \int_X \underbrace{\left(\int_Y \chi_{M_1 \cup \ldots \cup M_N}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)}_{=g_N(x)}\mathrm{d}x$$

Also $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu)(M_n) = (\mu \otimes \nu)(M)$. Also ist $\mu \otimes \nu$ ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
Eindeutigkeit:
$\mu \otimes \nu|_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$ ist ein Prämaß auf der Mengenalgebra $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, weil die σ-Additivität bei Einschränkung auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erhalten bleibt.
Nach dem Satz von Hahn ist die Erweiterung von $\mu \otimes \nu|_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$ zu einem Maß auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eindeutig.

$\square_{1.8.10}$

1.8.11 Korollar

Sei $f : X \to [0,\infty]$ messbar.
Betrachte das Produktmaß $\mu \otimes \lambda$ auf $X \otimes \mathbb{R}$, wobei λ das 1-dimensionale Lebesguemaß ist.
Dann ist die Menge

$$M^f := \{(x,t)\,|0 \leq t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

messbar und:

$$(\mu \otimes \lambda)\left(M^f\right) = \int_X f\mathrm{d}y$$

TODO: Abb2

Beweis

Die Funktion $\varphi : (x,t) \mapsto f(x) - t$ ist messbar, also ist auch $M^f = \varphi^{-1}((0,\infty]) \cap X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach dem Cavalierischen Prinzip ist ($\chi_{M^f}(x,t) = \chi_{[0,f(x))}$):

$$(\mu \otimes \lambda)\left(M^f\right) = \int_X \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{M^f}(x,t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\int_0^{f(x)}\mathrm{d}t = f(x)} \mathrm{d}x = \\ = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\square_{1.8.11}$

Seien nun X, Y zwei σ-endliche Maßräume und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbar.

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \stackrel{?}{=} \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

1.8.12 Theorem (Fubini)

a) Ist $f \geq 0$, so gilt:

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \in [0,\infty] \qquad (X) \tag{1.2}$$

b) Ist f integrierbar(, das heißt $\int_{X\times Y} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty$), so ist

$$\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

für fast alle $y \in Y$ definiert, ist eine integrierbare Funktion und (X) gilt (mit Werten in $\mathbb{R}$).

Beweis

a) $\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x = (\mu \otimes \lambda)\left(M_y^f\right)$ und $M_y^f = \{(x,t)\,|0 \leq t < f(x,y)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$.

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \underbrace{(\nu \otimes (\mu \otimes \lambda))}_{=\nu\otimes\mu\otimes\lambda}\left(M^f\right) = \nu \otimes \mu \otimes \lambda\left(M^f\right) = \\ = \int_Y \mu \otimes \lambda\left(M^f\right)\mathrm{d}y = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

nach letztem Korrolar. (Man kann beliebig assoziativ Klammern, weil das Produktmaß eindeutig ist.)

b) Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar.

Schreibe $f = f^+ - f^-$ mit $f_+ = \max(f,0)$ und $f_- = \max(-f,0)$. $f_\pm$ sind nicht-negativ und messbar.

Ist f außerdem integrierbar, so ist:

$$\begin{aligned} &\int_{X\times Y} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty \\ \geq &\int_{X\times Y} f_\pm(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \end{aligned}$$

Nach a) gilt:

$$\int_{X\times Y} f_+(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f_+(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$
$$\int_{X\times Y} f_-(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f_-(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y < \infty$$

Guido Fubini (1879-1943)
Beppo Levi (1875-1961)
Die Bedingung f integrierbar ist notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt:

1.8.13 Beispiel

$$g_n(t) := \begin{cases} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}, & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Abb 3
$\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(g_n(x) - g_{n+1}(x))\,g_n(y)$$
$$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{messbar}$$

[[mit $a_n - a_{n-1} = 2^{-n}$]]
TODO: Abb4

- $$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int n\cdot(g_n(x) - g_{n+1}(x))\,g_n(y)$$

  Dabei ist n so gewählt, dass $\dfrac{1}{n+1} \leq y < \dfrac{1}{n}$.

  $$\int f(x,y)\,\mathrm{d}x = n\cdot g_n(y)\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_n(x)}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_{n+1}(x)}_{=1}\right) = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0$$

- Mit $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$:

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = g_n(x) \int (n \cdot g_n(y) - (n-1)\, g_{n-1}(y))\,\mathrm{d}y =$$
$$= g_n(x) \Big(n \cdot \underbrace{\int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y}_{=1} - (n-1) \underbrace{\int_0^1 g_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y}_{=1} \Big) = g_n(x)\,[[\cdot 2^{-n}]]$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \sum_n \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = +\infty [[= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1]]$$

Also $0 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = +\infty$.
Grund: $\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = +\infty$, also nicht integrierbar.

- [[Man kann erreichen, dass $0 = \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1$. Auch hier gilt:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = +\infty$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int \left(\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

]]

Wichtigster Fall:
$\mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}\nu$ ist jeweils das 1-dimensionale Lebesguemaß.
$\underbrace{\mathrm{d}\mu \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}\mu}_{n \text{ Faktoren}}$ ist das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.
Was ist eine Lebesguesche Nullmenge?

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(\mu \otimes \mu)(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mu(\{0\}) \cdot \mu(\mathbb{R}) = \text{„}0 \cdot \infty\text{“} = 0$$

Beweis

$A := \{0\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\{0\} \times [n, n+1)}_{=:A_n} = \dot{\bigcup}_{n=-\infty}^{\infty} A_n$

Wegen σ-Additivität folgt:

$$\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0 \cdot 1) = 0$$

1.8.14 Beispiel

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}-y^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Der Integrand ist nicht-negativ. Darum können wir die Integrale nach Fubini vertauschen. Wir können $x, y > 0$ annehmen.

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}-y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} \mathrm{d}x = e^{-y^2} \left(-y e^{-\frac{x}{y}} \right) \Big|_0^\infty = e^{-y^2} \cdot y$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \cdot y \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(e^{-y^2} \right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}$$

1.9 Die Transformationsformel

1-dimensionale Variablentransformation

$$\varphi : [a, b] \to [\varphi(a), \varphi(b)] \in C^1$$

und (streng) monoton steigend.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, \mathrm{d}u = \left\{ \begin{array}{c} u = \varphi(t) \\ \mathrm{d}u = \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right\} = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \left| \varphi'(t) \right| \mathrm{d}t$$

In höherer Dimension: $V = \varphi(U)$ und $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus.

$$\int_{V \subseteq \mathbb{R}^n} f(y) \, \mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x)) \cdot \left| \det \underbrace{D\varphi}_{\text{Jacobi-Matrix}} \right| \mathrm{d}x$$

2 Komplexe Analysis

2.1 Grundlagen, die Riemannsche Zahlenkugel

2.1.1 Definition

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.
TODO: Rest
TODO: Abb1
Riemannsche Zahlenkugel

$$\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$$

bijektiv, stetig, φ^{-1} stetig

$$\varphi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, N \mapsto \infty$$

bijektiv.
Wähle auf $\overline{\mathbb{C}}$ die Topologie $\mathcal{O} := \left\{\varphi(\Omega) \,|\, \Omega \subseteq S^2 \text{ offen}\right\}$.
$S^2 \subseteq S^3$ ist ein kompakter topologischer Raum. Also auch $\overline{\mathbb{C}}$.
$\overline{\mathbb{C}}$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.
1-Punkt-Kompaktifizierung (denn nur ein Punkt ∞ wurde hinzugenommen)
Andere Beispiele von Kompaktifizierungen:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

2-Punkt-Kompaktifizierung
$\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ (zum Beispiel $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$) Homomorphismus.
Erweitere nun:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ 1 \mapsto +\infty \\ -1 \mapsto -\infty \end{aligned}$$

Wähle auf $\mathbb{R}$ die Topologie:

$$\mathcal{O} := \{\varphi(\Omega) \,|\, \Omega \text{ offen in } [-1,1] \text{ bezüglich der Relativtopologie}\}$$

Beispiel für eine andere Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.
TODO: Abb2

$\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup S^1$
erweitere φ:

$$\varphi : \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \dot{\cup} S^1 \to \tilde{\mathbb{C}}$$
$$x \in S^1 \to x \in S^1$$

Sei (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge. Betrachte $x_n \in \mathcal{H}$ mit $\varphi(x_n) = z_n$. (x_n) besitzt Häufungspunkt $x \in \overline{\mathcal{H}}$.
Falls $x \in \mathcal{H}$, dann folgt $\varphi(x)$ ist Häufungspunkt von (z_n).
Falls $x \in S^1$, dann folgt $\varphi(x) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{C}}$.

2.2 Analytische Funktionen, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

2.2.1 Definition

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt in $z \in \Omega$ *(komplex) differenzierbar* mit *komplexer Ableitung* f', falls der Limes

$$\lim_{z \to z', z' \neq z} \frac{\overbrace{f(z') - f(z)}^{\in \mathbb{C}}}{\underbrace{z' - z}_{\in}} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

existiert. Ist f für jedes $z \in \Omega$ differenzierbar, so heißt f in Ω *holomorph*.

2.2.2 Beispiele

a) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ komplexes Polynom, das heißt $a_k \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(z') - f(z) &= a_n \left(z'^n - z^n\right) + a_{n-1}\left(z'^{n-1} - z^{n-1}\right) + \ldots + a_1 \left(z' - z\right) = \\ &= \left(z' - z\right)\left(a_n \left(\left(z'\right)^{n-1} + \left(z'\right)^{n-2} \cdot z + \left(z'\right)^{n-3} z^2 + \ldots + z^{n-1}\right) + \ldots + a_1\right) \end{aligned}$$

Dividiere durch $z' - z$ und bilden den Limes $z' \to z$:

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1$$

Dies ist dasselbe wie die Ableitung eines reellen Polynoms.

b) Nehme an, $f(z)$ ist reellwertig (zum Beispiel $f(z) = |z|^2$) und komplex differenzierbar. Das heißt

$$f'(z) = \lim_{z' \to z, z' \neq z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

existiert. Betrachte speziell $z' = z + h$ mit $h \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Dann ist

$$f'(z) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\overbrace{f(z+h)}^{\in\mathbb{R}} - \overbrace{f(z)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{h}_{\in\mathbb{R}}} \in \mathbb{R}$$

reell.

Betrachte nun $z' = z + \mathbf{i}h$ mit $h \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\overbrace{f(z+h)}^{\in\mathbb{R}} - \overbrace{f(z)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{\mathbf{i}\ h}_{\in\mathbf{i}\mathbb{R}}} \in \mathbf{i}\mathbb{R}$$

rein imaginär.

Insgesamt folgt $f'(z) = 0$.

Was heißt komplex differenzierbar?
Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathbf{i}y \in \Omega$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $f = u + \mathbf{i}v$, $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$.

$$f : \Omega \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, was *reell* differenzierbar bedeutet, nämlich:

$$f(x+h_1, y+h_2) = f(x,y) + A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h)$$

$g \in o(h)$ heißt:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{g(h)}{||h||} = 0$$

Dabei ist $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ und $||h|| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Außerdem ist $A \in L(\mathbb{R}^2)$ die Jacobi-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Satz

f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn f in (x,y) reell differenzierbar ist und die sogenannte *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Günstige Notation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Dann kann man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Realteil:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Imaginärteil:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beweis

Die Bedingung von komplexer Differenzierbarkeit kann man auch mit einer „Approximationsformel“ schreiben:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\,h + o(h)$$

$h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ mit:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{o(h)}{|h|} = 0$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Diese Approximationsformel ist also tatsächlich äquivalent zur Existenz des Limes des Differenzenquotienten.
Schreibe nun den Real- und Imaginärteil aus.

$$\left.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|_{(x+h_1, y+h_2)} = \left.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|_{(x,y)} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(f'(z)) & -\mathrm{Im}\,(f'(z)) \\ \mathrm{Im}\,(f'(z)) & \mathrm{Re}\,(f'(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h)$$

$$\mathrm{Re}\left(f'(z)\cdot h\right) = \mathrm{Re}\left(f'(z)\right)\cdot \mathrm{Re}\,(h) - \mathrm{Im}\left(f'\right)\cdot \mathrm{Im}\,(h)$$
$$\mathrm{Im}\left(f'(z)\cdot h\right) = \mathrm{Re}\left(f'(z)\right)\cdot \mathrm{Im}\,(h) + \mathrm{Im}\left(f'\right)\cdot \mathrm{Re}\,(h)$$

$h_1 = \mathrm{Re}\,(h)\,, h_2 = \mathrm{Im}\,(h)$
Hierin sieht man folgendes:

1. Ist $f$komplex differenzierbar, so auch reell differenzierbar und:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(f'(z)\right) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \operatorname{Im}\left(f'(z)\right) &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

   Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

2. Ist f reell differenzierbar und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt.
   Dann erfüllt $\alpha := \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x} \in \mathbb{C}$ die Approximationsformel:

$$f(z+h) = f(z) + \alpha h + o(h)$$

   Denn:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha h) \\ \operatorname{Im}(\alpha h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) & -\operatorname{Im}(\alpha) \\ \operatorname{Im}(\alpha) & \operatorname{Re}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h) \\ \operatorname{Im}(h) \end{pmatrix}$$

$\square_{2.2.3}$

Beispiel und Definition

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1) \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Nehme an, dass u und v zweimal stetig reell differenzierbar sind. Dann folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \overset{(1)}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \overset{(2)}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{!}{=} 0$$

Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man auch *harmonisch.*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \overset{(2)}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \overset{(1)}{=} -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

u und v sind durch die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen miteinander verknüpft.
Man sagt dazu auch: u und v sind zueinander *konjugierte harmonische Funktionen.*

Hilfreich: $z = x + \mathbf{i}y$ und $\overline{z} = x - \mathbf{i}y$. Fasse x und y als komplexe Zahlen auf. Dann sind z und $\overline{z}$ zwei unabhängige komplexe Variablen.

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x,y) = f(z,\overline{z})$$

$z = x + \mathbf{i}y$ also:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad y = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \overline{z})$$

TODO: Rest
Wiederholung:

- Rationale Funktionen für Polynome P, Q:

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- **Satz 2.4.1** (Partialbruchzerlegung)
  Sei $Q(z) = (z - \zeta_1) \cdot \ldots \cdot (z - \zeta_n)$, dann $\exists_{G,G_j}$ so dass

$$R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{n} G_j\left(\frac{1}{z - \zeta_j}\right)$$

  $\rightsquigarrow$ in Argumenten z, $\frac{1}{z-\zeta_j}$

ENDE: Wiederholung
Dies führt einen dazu, die Transformationen $z \mapsto \dfrac{1}{z - \zeta}$ zu betrachten. Etwas allgemeiner:

2.2.4 Definition

Eine rationale Funktion

$$\zeta(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - cb \neq 0$ heißt *Möbiustransformation.*

Bemerkung

Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ bedeutet gerade, dass die Nullstellen von Zähler und Nenner verschieden sind, denn:

$$z_{\text{Nenner}} = -\frac{d}{c} \neq -\frac{b}{a} = z_{\text{Zähler}}$$

Somit:

$$s \not\equiv 0$$

S ist eine Abbildung:

$$S : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{C}$$

Erweitere durch die Vorschrift:

$$S(\infty) := \frac{a}{c} \qquad S\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

zu

$$S : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

bijektiv, stetig und hat stetige Inverse, dies nennt man *Homöomorphismus der Riemannschen Zahlenkugel*.
Betrachte nun *homogene Koordinaten*:

$$z =: \frac{z_1}{z_2} \qquad w =: \frac{w_1}{w_2}$$

(Beachte: $w_j, z_j \in \mathbb{C}$ sind nicht eindeutig bestimmt, da nur der Quotient von Bedeutung ist.)
Die Möbiustransformation lässt sich dann schreiben als

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Die Möbiustransformationen bilden also eine Gruppe unter der Matrixmultiplikation, da S^{-1} existiert, weil die Determinante $\det(S) = ad - cb \neq 0$ nicht verschwindet).
Dies ist die sogenannte *Projektive Gruppe*:

$$P(1, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C})$$

Jede Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann als Produkt folgender Faktoren mit $\alpha, h \in \mathbb{C}$ und $h \neq 0$ geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{1.}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2.}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3.}$$

Bedeutung:

1. $S(z) = z + \alpha$ (Parallelverschiebung)
2. $S(z) = k \cdot \alpha$ (Rotation falls $|k| = 1$, zentrische Streckung falls $k > 1$)
3. $S(z) = \frac{1}{z}$ (Inversion am Einheitskreis)

Beachte: Diese Abbildungen sind winkeltreu.

2.3 Potenzreihen, der Konvergenzsatz von Abel

Erinnerung

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n, z \in \mathbb{C}$
Konvergenzradius:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Satz (aus der Analysis I)

i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
   Für jedes $0 < \varrho < R$ ist die Konvergenz auf $B_\varrho(0)$ gleichmäßig.

ii) Falls $|z| > R$ ist, divergiert die Potenzreihe.

Gleichmäßige Konvergenz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definierten Funktionen mit $f_n \rightrightarrows f$ (das heißt f_n konvergiert gleichmäßig gegen f), wenn:

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} |f_n(z$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz kann man im Innern des Konvergenzradius gliedweise differenzieren.

2.3.1 Satz

Auf $\Omega = \{|z| < R\}$ ist die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorph und $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Beweis

Definiere die Polynome:

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
$$g_n := f_n'$$

Sei nun $z \in \Omega$, so wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(z) \subseteq \Omega$.
TODO: Abb1
Auf $B_\varepsilon(z)$ gilt dann:

$$f_n \rightrightarrows f \qquad\qquad g_n \rightrightarrows g$$

g existiert, da der Konvergenzradius von g gegeben ist durch:

$$\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\,|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}} = R$$

Denn:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{\log k}{k}} = 1$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz und der Konvergenz der Ableitung folgt allgemein, dass man Differentiation und Summation vertauschen kann. Zur Deutlichkeit im Detail:

Schreibe: $f = f_n + R_n$ mit $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$

Dann ist:

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - g(z) = \left(\frac{f_n(z') - f_n(z)}{z' - z} - g_n(z)\right)^{1.} - (g(z) - g_n(z))^{2.} + \left(\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z}\right)^{3.}$$

Zeige nun, dass alle Terme im Limes $z' \to z$ verschwinden (für hinreichend großes n).

1. Term verschwindet, da Polynome differenzierbar sind und wegen der Definition von g_n.
2. Term verschwindet, da die Potenzreihe g_n in z konvergiert, denn:

$$g(z) - g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.

$$\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z'^k - z^k}{z' - z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(z'^{k-1} + z'^{k-2} z + \ldots + z^{k-1}\right)$$

Sei $0 < \varrho < R$ so gewählt, dass $z \in B_\varrho(0)$, dann folgt:

$$\left|\frac{R_n(z') - R_n(z)}{z' - z}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k \varrho^{k+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Induktiv folgt sofort, dass $f = \sum\limits_{n} a_n z^n$ innerhalb des Konvergenzradius beliebig oft differenzierbar ist und:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \\ f'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) &= k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \ldots \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Einsetzen liefert dann sofort die Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{n!} z^n$$

2.3.2 Beispiel

Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$

lässt sich für $|z| < 1$ als geometrische Reihe umschreiben

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n$$

geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z$$

für $|z| < 1$.

Konvergenzradius $R = 1$
Pole von f: $z = \pm i$
TODO: Abb2
Dieses Beispiel haben wir schon früher als reelle Funktion betrachtet.
Wir verstehen jetzt, warum den Konvergenzradius 1 ist, denn f hat Pole in der komplexen Ebene, deren Betrag 1 ist.
Wir überlegen nun, was auf dem Rand des Konvergenzgebiets passiert:

2.3.3 Theorem (Satz von Abel)

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius 1.
Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist für jedes $k > 0$:

$$f(1) = \lim_{z \to 1} f(z)$$

mit $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq k$.
TODO: Abb3
Geometrische Bedeutung: z muss im „Kegel" liegen.
Beachte:

- Konvergenzradius 1 ist keine Einschränkung (reskaliere sonst).
- $\sum a_n$ braucht *nicht* absolut zu konvergieren.
- Es gilt auch $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, für $|z_0| = 1$ mit $\frac{|z-z_0|}{1-|z|} \leq K$. (von Vertretung)

Beweis

Ohne Einschränkung gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

(Ansonsten addiere eine Konstante zu a_0.)
Setze:

$$\begin{aligned}
S_n &:= a_0 + \ldots + a_n \\
S_n(z) &:= a_0 + a_1 z \ldots + a_n z^n = \\
&= S_0 + (S_1 - S_0) z + \ldots + (S_n - S_{n-1}) z^n = \\
&= S_0 (1-z) + S_1 \left(z - z^2\right) + \ldots + S_{n-1} \left(z^{n-1} - z^n\right) + S_n z^n = \\
&= (1-z) \left(S_0 + S_1 z + \ldots + S_{n-1} z^{n-1}\right) + S_n z^n
\end{aligned}$$

Es gilt $S_n z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, da $S_n \to 0$ und z^n beschränkt ist.
Somit ist $f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$
Wir nehmen an, dass $|1-z| \leq K(1-|z|)$, und zudem gilt $S_n \to 0$.
Wähle N so groß, dass $S_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann folgt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |S_n z^n| \leq \varepsilon \frac{|z|^N}{1-|z|} < \frac{\varepsilon}{1-|z|} \leq \frac{K\varepsilon}{|1-z|}$$

Und es ergibt sich:

$$|f(z)| \leq |1-z| \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_k z^k \right| + K\varepsilon \overset{z\to 1}{\longrightarrow} K\varepsilon$$

Also gilt:

$$f(z) \overset{z\to 1}{\longrightarrow} 0$$

$\square_{2.3.3}$

2.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.4.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius ∞, ist also holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z$$

Mit der Cauchy-Produktformel folgt:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1 + z_2)}$$

Bereits in Analysis I wurde gezeigt:

$$\begin{aligned}
e^z &= r e^{i\varphi} && \text{Polardarstellung mit } r = e^{\mathrm{Re}(z)},\ \varphi = \mathrm{Im}(z) \\
e^{\mathbf{i}\varphi} &= \cos(\varphi) + \mathbf{i} \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Dies erlaubt es, die trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente zu erweitern.

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}\right)$$
$$\sin(z) := \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right)$$

Diese sind als Linearkombination holomorpher Funktionen holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und können als Potenzreihe Dargestellt werden.
Periodizität:

$$\cos(2\pi) = 1 \qquad \sin(2\pi) = 0$$

Oder:

$$e^{2\pi\mathbf{i}} = 1$$

Allgemeiner für ein $a \in \mathbb{Z}$:

$$e^{z+2\pi a\mathbf{i}} = e^{z} \tag{2.1}$$

2.4.2 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Bestimmungsgleichung:

$$e^{\log(z)} = z$$

Man sieht sofort:

- Diese Gleichung ist nur für $z \neq 0$ lösbar und
- nur bis auf ein Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$ bestimmt. (Wegen (2.1))

Betrachte Absolutbetrag $\left|e^{\log(x)}\right| = e^{\mathrm{Re}(\log(z))} = |z|$.
Daher ist $\mathrm{Re}(\log(z))$ eindeutig bestimmt.
Für $n \in \mathbb{Z}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ folgt mit der Argumentfunktion $\arg(z) := \varphi = 2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) \in [\theta, \theta + 2\pi)$, für $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi} = x + \mathbf{i}y$:

$$\mathrm{Im}(\log(z)) = \arg(z) + 2\pi n$$

$$\log(z) = \log(|z|) + \mathbf{i}\arg(z) \tag{2.2}$$

Also ist die Bestimmungsgleichung für log mehrdeutig lösbar.
Die Gleichung (2.2) definierte einen eindeutigen Logarithmus.
Problem: log ist unste tig an $L_\theta := \left\{te^{\mathbf{i}\theta} | t \geq 0\right\}$.
Lösung: „Schneide die komplexe Ebene auf.“, zum Beispiel so:
TODO: Abb1
$L_\theta := \left\{te^{\mathbf{i}\theta} | t \geq 0\right\}$
Dann ist $\log : \mathbb{C}|_{L_\varphi} \to \mathbb{C}$ stetig.

2.5 Kurven, Konformität

2.5.1 Definition (Kurve)

Seien $I := [a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.
Eine *Kurve* γ ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{C}$.

- $\gamma(a)$ heißt der *Anfangspunkt.*
- $\gamma(b)$ heißt der *Endpunkt.*
- Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt γ *geschlossene Kurve.*
- $\tau \in I$ heißt *Parameter der Kurve* $(\tau \mapsto \gamma(\tau))$
- Falls die (reelle) Ableitung $\gamma'(\tau) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\gamma(\tau + h) - \gamma(\tau)}{h}$ existiert und stetig ist, heißt γ *stetig differenzierbar.*
- γ heißt *regulär*, falls γ stetig differenzierbar ist und für alle $\tau \in I$ schon $\gamma'(\tau) \neq 0$ gilt.
- γ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar*, falls γ stetig auf I ist und es Intervalle I_j gibt, so dass $\gamma|_{I_j^\circ}$ stetig differenzierbar ist, und $I = I_1 \dot\cup \ldots \dot\cup I_n$ gilt.

Beispiel und Definition

Betrachte die holomorphe Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und die reguläre Kurve $x : I \to \Omega$.
Ziel: Gewinne geometrische Informationen über f, indem man das Bild der Kurve betrachtet.
TODO: Abb2
$f \circ \gamma$ ist eine Kurve in $f(\Omega)$.
TODO: Abb3 ändere u in v, $\tilde{u}$ in $\tilde{v}$
$v := \gamma'(\tau)$ ist die Tangente an γ in z_0.

$$\tilde{v} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ \gamma)(\tau_0) = f'(\gamma(\tau_0)) \cdot \gamma'(\tau_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\in \mathbb{C}} \cdot v$$

Schreibe nun Real- und Imaginärteil aus:

$$v = v_1 + \mathbf{i} v_2 \qquad\qquad \tilde{v} = \tilde{v}_1 + \mathbf{i} \tilde{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Determinante:

$$\det(A) = a^2 - b \cdot (-b) = a^2 + b^2 \geq 0$$

Also erhält A die Orientierung („Drehstreckung“ einschließlich Achsenstreckung).

- Es gilt:

$$\underbrace{A^*}_{=A^T} A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2\right) \cdot E_2$$

Eine unitäre Matrix U erfüllt:

$$U^* U = E$$

Dies ist eine Drehung.
Also ist A eine Drehung verkettet mit einer zentrischen Streckung. Hierbei bleiben die *Winkel erhalten.*

Statt winkelerhaltend sagt man auch *konform.*
Also beschreibt die Multiplikation mit $f'(z_0)$ eine orientierungs- und winkelerhaltende Transformation der komplexen Ebene.
Genauer: $u, v \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^2}}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{\langle \tilde{u}, \tilde{v}\rangle_{\mathbb{R}^2}}{||\tilde{u}|| \cdot ||\tilde{v}||} = \cos\tilde{\varphi}$$

Nebenrechnung:

$$\tilde{v} = Av \qquad \tilde{u} = Au$$

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v}\rangle = \langle Au, Av\rangle = \langle u, A^* Av\rangle = \left(a^2+b^2\right) \cdot \langle u, v\rangle$$

$$||\tilde{u}||^2 = \langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle = \langle Au, Au\rangle = \langle u, A^* Au\rangle = \left(a^2+b^2\right) \cdot \langle u, u\rangle$$
$$||\tilde{v}||^2 = \langle \tilde{v}, \tilde{v}\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle v, A^* Av\rangle = \left(a^2+b^2\right) \cdot \langle v, v\rangle$$

Analog kann man den Winkel zwischen zwei Kurven betrachten:
TODO: Abb1
Polarzerlegung: $u = |u|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$
$\arg u := \varphi (\bmod) 2\pi \in [0, 2\pi)$ nach der üblichen Konvention.

$$\alpha = \arg u - \arg v = \arg \frac{u}{v}$$

$$\hat{\alpha} = \arg \frac{(f \circ \gamma)'(\tau_0)}{(f \circ \tilde{\gamma})'(\tau_0)} = \arg \frac{f(z_0) \cdot \gamma'(\tau_0)}{f(z_0) \cdot \tilde{\gamma}'(\tau_0)} = \arg \frac{\gamma'(\tau_0)}{\tilde{\gamma}'(\tau_0)} = \arg \frac{u}{v} = \alpha$$

2.5.2 Beispiel

Betrachte Kurvenscharen $\gamma_x(t), \delta_y(t)$.

$$\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto x + \mathbf{i}t$$
$$\delta_y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto t + \mathbf{i}y$$

TODO: Abb2

Betrachte nun die Kurven $\exp \circ \gamma_x$ und $\exp \circ \delta_y$:

$$\begin{aligned}(\exp \circ \gamma_x)(t) &= e^{\gamma_x(t)} = e^{x+\mathbf{i}t} = e^x \cdot e^{\mathbf{i}t} \\ (\exp \circ \delta_y)(t) &= e^{\delta_y(t)} = e^{t+\mathbf{i}y} = e^t \cdot e^{\mathbf{i}y}\end{aligned}$$

TODO: Abb3, Abb4

Die Winkel bleiben erhalten, aber Längen und Flächeninhalte bleiben aber im Allgemeinen *nicht* erhalten.

2.6 Kurvenintegrale, Komplexe Integration

Betrachte wieder Kurve $\gamma : I = [a, b] \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ (Ω offen) sei stetig und stückweise differenzierbar.

TODO: Abb4

Identifiziere zunächst $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$.

Dann kann man die *Bogenlänge* $L(\gamma)$ folgendermaßen einführen:

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau$$

(Nehme hier zur Einfachheit an, dass γ differenzierbar ist, sonst stückweise integrieren und Integrale addieren.)

$L(\gamma)$ soll unabhängig von der Parametrisierung sein. Rechne dies nach:

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \tau)(t) \qquad\qquad \tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

τ sei streng monoton steigend und $\tau'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

$$\int_\alpha^\beta \left|\tilde{\gamma}'(t)\right| \mathrm{d}t \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(t) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}}_{>0}\right| \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(t)\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t =$$

$$\underset{t=t(\tau), \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t}{\overset{\text{Substitution}}{=}} \int_\alpha^\beta \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau = L(\gamma)$$

$$\int_\alpha^\beta \gamma'(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_a^b \gamma'(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Sei nun außerdem $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig (wichtigstes Beispiel: f holomorph).

Wir wollen „f längs γ integrieren“:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\int_a^b f(\gamma(\tau)) \left|\gamma'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau$$

Dies wäre eine Möglichkeit, denn dies ist unabhängig von der Parametrisierung.

In der komplexen Analysis ist das Integral

$$\int_a^b f(\gamma(\tau)) \gamma'(\tau) \mathrm{d}\tau$$

interessanter, weil keine komplexe Konjugation eingeht.

2.6.1 Definition (komplexes Integral)

Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ stetig und stückweise differenzierbar und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.
Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

das *komplexe Integral* oder *Konturintegral* von f über γ.

Beachte

Wir integrieren über eine *reelle Variable* $t \in [a, b]$, aber der Integrand ist komplexwertig.
Man kann das auf reellwertige Integrale zurückführen.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + \mathbf{i}\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$$

Riemann- beziehungsweise Lebesgue-Integral im Reellen.
Insbesondere sieht man:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) &= \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\big)\mathrm{d}\tau \\ &\neq \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(\tau))\big)\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

2.6.2 Satz

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis

Sei $t : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ streng monoton steigend, stetig, stückweise differenzierbar.
Dann folgt mit $\tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma \circ t)(\tau)$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f \circ \gamma \circ t)(\tau) \cdot (\gamma \circ t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)(t(\tau)) \cdot \gamma'(t(\tau))\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &\overset{\text{Transformationsformel}}{=} \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\square_{2.6.2}$

2.6.3 Beispiel

i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{C} : t \mapsto t$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^2 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \cdot 1\mathrm{d}t = \left.\frac{-1}{t}\right|_1^2 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

ii) $f(z) = z^n,\ n \geq 0$
Wähle eine Parametrisierung zum Beispiel

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0,1] &\to \mathbb{C}\\ \gamma_1(\tau) &= \tau(1+\mathbf{i})\\ \gamma_1'(\tau) &= (1+\mathbf{i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 ((1+\mathbf{i})\cdot\tau)^n\cdot(1+\mathbf{i})\,\mathrm{d}\tau =\\ &= (1+\mathbf{i})^{n+1}\cdot\int_0^1 \tau^n\mathrm{d}\tau = \frac{1}{n+1}\cdot(1+\mathbf{i})^{n+1}\end{aligned}$$

γ_2: Parametrisiere so:

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0,2] &\to \mathbb{C}\\ \gamma(\tau) &= \begin{cases}\tau & 0\leq\tau\leq 1\\ (1+(\tau-1)\,\mathbf{i}) & 1\leq\tau\leq 2\end{cases}\\ \gamma'(\tau) &= \begin{cases}1 & 0<\tau<1\\ \mathbf{i} & 1<\tau<2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \tau^n\cdot 1\mathrm{d}\tau + \int_1^2 (1+(\tau-1)\cdot\mathbf{i})^n\cdot\mathbf{i}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{n+1} + \mathbf{i}\cdot\frac{1}{(n+1)\,\mathbf{i}}(1+(\tau-1)\,\mathbf{i})^{n+1}\Big|_1^2 =\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big((1+\mathbf{i})^{n+1}-1\Big) = \frac{1}{n+1}\cdot(1+\mathbf{i})^{n+1}\end{aligned}$$

Der Wert des Integrals ist also für beide Integrationswege gleich.

2.6.4 Definition

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$.
Setze

$$-\gamma := \tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C},\ \tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(1-\tau)$$

also „durchlaufe die Kurve rückwärts“.
Sei $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.
Setze dann $\gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ definiert durch:

$$(\gamma_1+\gamma_2)(\tau) = \begin{cases}\gamma_1(\tau) & \tau\in[a,b]\\ \gamma_2(\tau) & \tau\in[b,c]\end{cases}$$

2.6.5 Lemma

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beweis

TODO: Fehlt???

2.6.6 Definition

Setze:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\overline{z} &= \overline{\int_\gamma \overline{f(z)}\mathrm{d}z} \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\overline{z}\right) \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\overline{z}\right)
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}x + \mathbf{i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y$$

Also: „$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathbf{i}\mathrm{d}y$“
Etwas ausführlicher:

$$\begin{aligned}
x + \mathbf{i}y &= z = \gamma(\tau) \\
x(\tau) &:= \operatorname{Re}(\gamma(\tau)) & &\Rightarrow \quad \operatorname{Re}\left(\gamma'(\tau)\right) = x'(\tau) \\
y(\tau) &:= \operatorname{Im}(\gamma(\tau)) & &\Rightarrow \quad \operatorname{Im}\left(\gamma'(\tau)\right) = y'(\tau) \\
\mathrm{d}x &= x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{d}y &= y'(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\overline{z} &= \overline{\int_\gamma \overline{f(z)}\mathrm{d}z} = \int_a^b \overline{\overline{f(\gamma(\tau))}\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\overline{\gamma'(\tau)}\mathrm{d}\tau \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \underbrace{\operatorname{Re}\left(\gamma'(\tau)\right)}_{=x'(\tau)}\mathrm{d}\tau \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \underbrace{\operatorname{Im}\left(\gamma'(\tau)\right)}_{=y'(\tau)}\mathrm{d}\tau \\
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y &= \int_\gamma p\mathrm{d}x + \int_y q\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Später: Setze $p = f$ und $q = \mathbf{i}f$.

2.7 Abhängigkeit vom Integrationsgebiet

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0, z \in \Omega$, $p, q : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und wegzusammenhängend.

Frage

Wann gilt folgende Gleichheit?

$$\int_{\gamma_1} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) = \int_{\gamma_2} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

Seien γ_1, γ_2 zwei differenzierbare Kurven, die z_0 mit z verbinden.
TODO: Abb2

Allgemeine Frage

Wann ist das Integral unabhängig vom Weg?

2.7.1 Theorem

Das Linienintegral

$$\int_{\gamma} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine Funktion $U : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt, so dass:

$$p = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.3}$$

(Frobenius, Poincaré, ...)

Beweis

„⇐“: Nehme an, dass (2.3) gilt, womit folgt:

$$\int_{\gamma} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} x'(\tau)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y} y'(\tau)\,\mathrm{d}y \right) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(U\left(x(\tau), y(\tau) \right) \right) =$$
$$= U\left(x(b), y(b)\right) - U\left(x(a), y(a)\right) = U(z) - U(z_0)$$

Also hängt das Integral tatsächlich nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
„⇒“: Nehmen an, dass das Integral wegunabhängig ist.
$z_0 = (x_0, y_0)$ sei fest, während $z = (x, y)$ variabel.
Wähle als Kurve speziell ein Polygonzug, der parallel zur x- oder y-Achse verläuft.
TODO: Abb3
γ kann durch einen solchen Polygonzug approximiert werden.
Verwende hierbei, dass Ω offen und bogenzusammenhängend ist.
Definiere:

$$U(x, y) := \int_{\gamma} (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y)$$

Dies ist wohldefiniert, weil das Integral nach Voraussetzung wegunabhängig ist.
Berechne $\dfrac{\partial U}{\partial x}$:

Wähle den Polygonzug so, dass er in einer Umgebung von (x, y) horizontal verläuft.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int^x p(\tilde{x}, y)\, \mathrm{d}\tilde{x} + \text{Konstante} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= p(x,y) \end{aligned}$$

Berechne $\dfrac{\partial U}{\partial x}$:
Wähle den Polygonzug so, dass er in einer Umgebung von (x, y) vertikal verläuft.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int^y q(x, \tilde{y})\, \mathrm{d}\tilde{y} + \text{Konstante} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= q(x,y) \end{aligned}$$

Also sind die Differentialgleichungen (2.3) erfüllt.

$\square_{2.7.1}$

Schreibe auch:

$$\begin{aligned} \int p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y &= U \\ p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y &= \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y \; (=: \mathrm{d}U) \end{aligned}$$

Und man nennt $\mathrm{d}U$ das *totale Differential*.
Das totale Differential ist *exakt*, das heißt es kann in obiger Form geschrieben werden.
Zurück zum Konturintegral:

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int \left(\underbrace{f}_{=p} \mathrm{d}x + \underbrace{\mathbf{i}f}_{=q} \mathrm{d}y \right)$$

Nach Theorem 2.7.1 ist das Konturintegral genau dann wegunabhängig, wenn ein $F(z)$ in Ω existiert, so dass gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z) \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \mathbf{i}f(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y}$$

Also erfüllt F die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und $f(z) = F'(z)$.

2.7.2 Korollar

$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = F'(z)$.

Beweis

TODO: ???

2.7.3 Satz

Für jedes Polynom $P(z)$ und jede geschlossene Kurve gilt:

$$\int_\gamma P(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \\ Q(z) &= \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \ldots + a_0 z \end{aligned}$$

$Q(z)$ ist eine holomorphe Stammfunktion, also $Q'(z) = P(z)$.

$\square_{2.7.3}$

2.8 Das Cauchysche Theorem

Betrachte das Rechteck $R : a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. $R \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$
TODO: Abb4

Fragen

Falls $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist,

1. gibt es eine holomorphe Stammfunktion, also $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$?
2. ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ wegunabhängig?

Beginne mit einfachen Integrationswegen und zwar dem Integral längs des Randes von R.

2.8.1 Theorem

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis (nach Goursat)

Zerlege R in vier kongruente Rechtecke $R^{(1)}, \ldots, R^{(4)}$.
TODO: Abb5

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\partial R^{(4)}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dies gilt, da sich die Integrale längs der „inneren Kanten“ wegheben.
Für eines der Rechtecke $R^{(k)}$ gilt und nenne es R_1:

$$\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R} f(z)\right|$$

Wähle induktiv Rechtecke $R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$, so dass gilt:

$$|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\eta(R)|$$

Zudem sind die Kantenlängen von R_n schon 2^{-n} mal die Kantenlängen von R.
Seien Z_n die Mittelpunkte dieser Rechtecke.
Die Folge (z_n) konvergiert gegen $z^* \in R$.
TODO: Abb6
Da f in z^* holomorph ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt für alle $z \in B_\delta(z^*)\backslash\{z^*\}$:

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon$$

Wähle nun n so groß, dass $R_n \subseteq B_\delta(z^*)$ ist.
Dann gilt:

$$\int_{\partial R_n}\left[f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)\right] \overset{2.7.3}{=} 0$$

Beachte dabei, das wir ein Polynom integrieren.

$$|\eta(R_n)| = \left|\int_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial R_n}\Big(\underbrace{f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)}_{|\ldots| \leq \varepsilon |z - z^*|}\Big)\mathrm{d}z\right| \leq \varepsilon\left|\int_{\partial R_n} \underbrace{|z - z^*|}_{\leq 2^{-n}\cdot\max\{b-a,d-c\}} \mathrm{d}z\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot 4^{-n} \cdot \underbrace{d}_{\text{Durchmesser von } R} \cdot \underbrace{L}_{\text{Umfang von } R}$$

Damit folgt:

$$\eta(R) \leq \varepsilon \cdot d \cdot L$$

Da ε beliebig ist, folgt $\eta(R) = 0$.

$\square_{2.8.1}$

Anhang

GNU Free Documentation License

0. Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. Applicability and definitions

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. Verbatim copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. Copying in quantity

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. Combining documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. Collections of documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. Aggregation with independent works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. Future revisions of this license

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `https://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. Relicensing

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

Addendum: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME.
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation;
>
> with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

> A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.