Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Vorlesung von

Prof. Dr. Felix Finster

im Sommersemester 2012

Überarbeitung und Textsatz in LyX von

Andreas Völklein

Stand: 5. November 2013

ACHTUNG

Diese Mitschrift ersetzt *nicht* die Vorlesung.
Es wird daher *dringend* empfohlen, die Vorlesung zu besuchen.

Links

Der Text der „GNU Free Documentation License“ kann auch auf der Seite

`https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.de.html`

nachgelesen werden.
Eine transparente Kopie der aktuellen Version dieses Dokuments kann von

`https://github.com/andiv/analysisMFK`

heruntergeladen werden.

Literatur

- Standardlehrbücher zur *Analysis*:
  - Herbert Amann, Joachim Escher
  - Konrad Königsberger
  - Theodor Bröcker
  - Stefan Hildebrandt

- Michael Spivak: *Calculus on manifolds*, Perseus Books, 1998
  ISBN: 0-8053-9021-9
  besonders gut: Satz von Stokes, Differentialformen
  deckt nicht alles ab

- André Lichnerowicz: *Einführung in die Tensoranalysis,* Bibliographisches Institut, 1966
  einfach zugänglich
  Kapitel zur Allgemeinen Relativitätstheorie

- Albrecht Dold: *Lectures on algebraic topology*, Springer, 1995

Differentialtopologie:

- Bröcker, Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*

- Jänich: *Vektoranalysis*

Distributionen:

- J. Rauch: *Partial Differential Equations*, Anhang: *A crash course in distribution theory*

- L. Schwartz: *Theory of Distributions*

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiele und grundlegende Definitionen

1.1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Beispiel (Einheitssphäre)

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist die zweidimensionale Einheitssphäre.
Diese kann als Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

charakterisiert werden.
Günstiger ist es, wenn man S^2 als die Nullstellenmenge einer Funktion F auffasst:

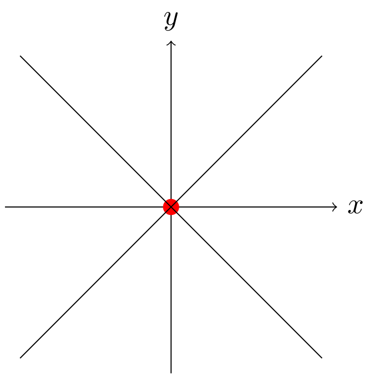
$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{aligned}$$

Bemerkung

Im Allgemeinen ist die Nullstellenmenge einer glatten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *keine* Untermannigfaltigkeit. Betrachte zum Beispiel:

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2$$

$$F(x,y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y$$



Die Nullstellenmenge besteht aus zwei Hyperebenen, die sich auf der Geraden $x = 0 = y$ schneiden. Analytisch liegt das daran, dass die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{D}F\big|_{(0,0,z)} = (2x, -2y, 0)\,\big|_{(0,0,z)} = 0$$

verschwindet.

Zurück zu S^2

Überprüfe, dass $\mathrm{D}F$ auf S^2 maximalen Rang hat. Es gilt

$$\mathrm{D}F\big|_{(x,y,z)}v = \left\langle \operatorname{grad}(F)\big|_{(x,y,z)}, v \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

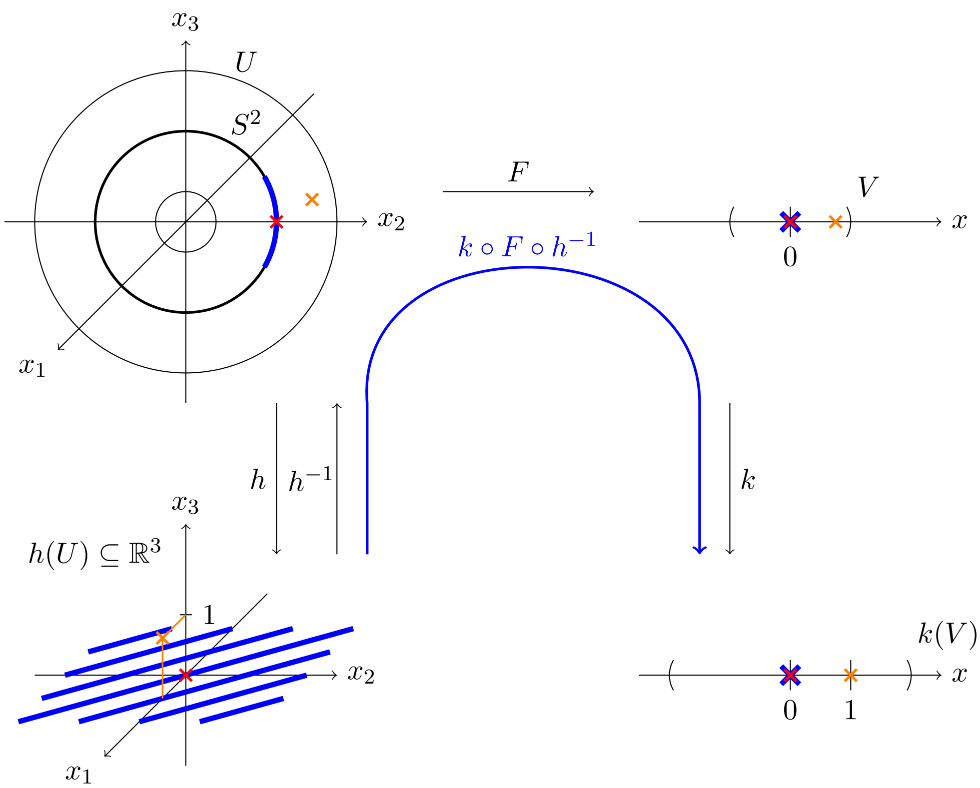
$$\operatorname{grad}(F)\big|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in S^2$, denn wegen $x^2+y^2+z^2=1$ ist $(0,0,0) \notin S^2$.
Wende nun das Rangtheorem 1.1.7 an:
Sei $F \in C^1\left(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ und $\mathrm{D}F\big|_p$ habe Rang eins für alle $p \in \Omega$.
Dann gibt es zu jedem $p \in \Omega$ eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von p und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}$ von $F(p)$ und Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} h &: U \to \mathbb{R}^3 && \text{mit} && h(p) = 0 \\ k &: V \to \mathbb{R} && \text{mit} && k(F(p)) = 0 \end{aligned}$$

sodass $h(U)$ und $k(V)$ offen sind und dass gilt:

$$\left(k \circ F \circ h^{-1}\right)(x_1, x_2, x_3) = x_3$$



h^{-1} bildet die Flächen parallel zur x_1-x_2-Ebene auf Flächen ab, auf denen F einen konstanten Wert hat. k bildet diesen Wert auf die ursprüngliche Höhe x_3 ab.
$F(x) = 0$ beschreibt Punkte auf S^2. Wähle x auf der Sphäre, also $F(x) = 0$.

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k \circ F)(x) = 0$$

Also gilt:

$$\left(k \circ F \circ h^{-1}\right)(x_1,x_2,0) = 0$$

Daher liegt auch $h^{-1}(x_1,x_2)$ auf S^2.

$$h : U \to h(U) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$U' := h(U)$ ist offen und $h\left(U \cap S^2\right) = h(U) \cap \mathcal{H}$ mit:

$$\mathcal{H} := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_3 = 0\right\}$$

Man erhält also eine *Karte* $h : U \to U'$.

$$h\left(U \cap S^2\right) = U' \cap \left(\mathbb{R}^2 \times \{0\}\right)$$

1.1.2 Definition (Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, Karte, Atlas)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l*, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^l-Diffeomorphismus

$$h : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$$

besitzt, sodass $h(U \cap M) = U' \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right)$ gilt.
(h,U) heißt *Karte*. Eine Familie $(h_\lambda,U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Karten heißt *Atlas*, falls die $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M bilden.

1.1.3 Definition (regulärer Punkt)

Sei $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ mit $q \leq n$ von der Klasse C^l.
Ein Punkt $u \in \Omega$ heißt *regulärer Punkt*, falls $\mathrm{D}g\big|_u$ Höchstrang (also Rang q) hat.
Ein $x \in \mathbb{R}^q$ heißt *regulärer Wert*, falls jedes $u \in g^{-1}(x)$ ein regulärer Punkt ist.
Gilt diese Bedingung nicht, so nennt man den Punkt beziehungsweise den Wert *singulär*.

1.1.4 Theorem (Satz vom regulären Wert)

Ist w ein regulärer Wert von $g \in C^l(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\mathbb{R}^q)$, so ist $M := g^{-1}(w)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-q$ der Klasse C^l.

Beweis

Für den Beweis verwendet man das folgende Theorem. $\square_{1.1.4}$

1.1.5 Theorem (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit)

Sei $f \in C^l(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{D}f\big|_{x_0}$ ist invertierbar.
Dann ist f lokal invertierbar, das heißt es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von x_0, sodass $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\big|_U : U \to f(U)$ ein C^l-Diffeomorphismus ist.

Beweis

Siehe Analysis 2. $\square_{1.1.5}$

1.1.6 Theorem (Satz über implizite Funktionen)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^l(\Omega \times V, \mathbb{R}^m)$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\mathrm{D}_2 f\big|_{(x_0, y_0)}$, also der rechte $m \times m$ große Block der Jacobi-Matrix, sei invertierbar.
Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von x_0 und ein $\varphi \in C^l(U, V)$, sodass $\varphi(x_0) = y_0$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.

Beweis

Siehe Analysis 2. $\square_{1.1.6}$

1.1.7 Theorem (Rangtheorem)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^l(U, V)$ und $\mathrm{D}f\big|_u$ habe Rang $r \in \mathbb{N}$ für alle $u \in U$.
Sei $p \in U$ und $q := f(p) \in V$.
Dann gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von p und $V_1 \subseteq V$ von q sowie Diffeomorphismen h und k mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h &: U_1 \to \mathbb{R}^n & \qquad h(p) &= 0 \\ k &: V_1 \to \mathbb{R}^m & \qquad k(q) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(k \circ f \circ h^{-1}\right) : h(U_1) &\to k(V_1) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Beweis

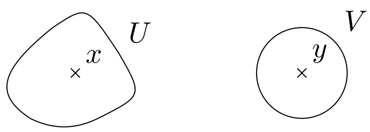
Siehe Analysis 2. $\square_{1.1.7}$

1.2 Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Zunächst zu den topologischen Vorbereitungen:
Sei $(M, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dabei sind die Elemente $\Omega \in \mathscr{O}$ die offenen Mengen.

1.2.1 Definition (Hausdorffsch, Basis, separabel)

i) Die Topologie heißt *Hausdorffsch*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen U von x und V von y gibt.



ii) Eine Mengenfamilie $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von offenen Mengen heißt *Basis der Topologie*, falls jede offene Menge als Vereinigung von G_λ's geschrieben werden kann.

iii) Ein topologischer Raum heißt *separabel*, falls es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

1.2.2 **Satz** (metrischer Raum ist Hausdorffsch)

Jeder metrischer Raum ist Hausdorffsch.

Beweis

Seien $x,y \in M$. Setze $d := d(x,y)$, $U = B_{\frac{d}{3}}(x)$ und $V = B_{\frac{d}{3}}(y)$.
Dann ist nach der Dreiecksungleichung $U \cap V = \emptyset$ und U,V sind offene Umgebungen von x beziehungsweise y. $\square_{1.2.2}$

1.2.3 **Beispiel**

i) Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie. Die Menge

$$\Lambda = \left\{(x,\varrho) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}^n, \varrho \in \mathbb{Q}_{>0}\right\}$$

ist als Produkt abzählbarer Mengen abzählbar. Zu $(x,\varrho) \in \Lambda$ definieren wir nun:

$$G_{(x,\varrho)} := B_\varrho(x)$$

Die $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bilden eine Basis der Topologie, denn eine beliebige offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kann man als

$$\Omega = \bigcup_{G_\lambda \subseteq \Omega} G_\lambda$$

schreiben, denn:
$\bigcup_{G_\lambda\subseteq\Omega} G_\lambda \subseteq \Omega$ ist klar. Zeige nun $\Omega \subseteq \bigcup_{G_\lambda\subseteq\Omega} G_\lambda$:
Sei $x \in \Omega$. Da Ω offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$.
In $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ liegt ein $y \in \mathbb{Q}^n$. Wähle $\varrho \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\varepsilon}{3} < \varrho < \frac{2\varepsilon}{3}$.
Also ist $B_\varrho(y) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$ und $x \in B_\varrho(y)$. $\square_{1.2.3}$

ii) Betrachte $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, das heißt alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen. Dann gibt es keine abzählbare Basis der Topologie.

1.2.4 **Definition** (topologische Mannigfaltigkeit, differenzierbare Struktur)

i) Eine *topologische Mannigfaltigkeit* (Abkürzung: MFK) der Dimension n ist ein separabler Hausdorffraum $(M,\mathscr{O})$, also ein separabler, Hausdorffscher topologischer Raum, der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, das heißt für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $x : U \to V$, das heißt x ist bijektiv und x und x^{-1} sind stetig.

ii) (x,U) heißt *Karte* um p. Eine Familie von Karten $(x_\lambda,U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *Atlas* und wir schreiben auch:

$$\mathcal{A} = \left\{(x_\lambda,U_\lambda)\,\middle|\,\lambda \in \Lambda\right\} = \{(x,U)\}$$

TODO: Abb1 einfügen

$x \circ (x')^{-1}$ heißt *Kartenwechselabbildung*. Genauer sind $x\,(U \cap U') \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x'\,(U \cap U')$ offen und

$$x \circ \left(x'\right)^{-1} : x'\left(U \cap U'\right) \to x\left(U \cap U'\right)$$

ist ein Homöomorphismus.

Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(x,U)\}$ heißt C^l-Atlas mit $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, falls gilt:

a) $\left\{U \middle| \,(x,U) \in \mathcal{A}\right\}$ bildet eine Überdeckung von M.
b) Sind $(x,U)\,,(y,V) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist

$$\left(x \circ y^{-1}\right) : y\,(U \cap V) \to x\,(U \cap V)$$

von der Klasse C^l.

iii) Sei $\mathcal{A}$ ein C^l-Atlas von M. Eine Karte (x,U) heißt *mit $\mathcal{A}$ verträglich*, falls $\mathcal{A} \cup \{(x,U)\}$ ebenfalls ein C^l-Atlas ist.

Für zwei C^l-Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ kann man definieren:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(x,U)\in\mathcal{A}}{\forall} : (x,U) \in \mathcal{A}'$$

Mit Hilfe des Lemmas von Zorn kann man zeigen:

Sei $\mathcal{A}$ ein C^l-Atlas. Dann gibt es einen maximalen C^l-Atlas $\mathcal{A}'$, der $\mathcal{A}$ erweitert, also mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Einen solchen maximalen Atlas nennt man *differenzierbare Struktur*.

Im Folgenden betrachten wir meist C^∞-Strukturen, das heißt eine differenzierbare Struktur mit maximalem C^∞-Atlas.
Solche Mannigfaltigkeiten nennt man *glatt*.

1.2.5 Beispiel

i) Jede C^l-Untermannigfaltigkeit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit.

TODO: Abb2 einfügen

$x = \pi \circ \phi\big|_{V\cap M} : U \to \mathbb{R}^k$ und (x,U) ist eine Karte von M.

ii) Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

1.2.6 Beispiel

i) Betrachte $M = \mathbb{R}^n$ mit Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathrm{id},\mathbb{R}^n)\}$ ist ein C^∞-Atlas.

Die zugehörige differenzierbare Struktur ist die „übliche differenzierbare Struktur des $\mathbb{R}^n$“.

(Das bedeutet, dass genau die Abbildungen stetig differenzierbar sind, die üblicherweise stetig differenzierbar sind.)

ii) Betrachte die Einheitssphäre $S^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, \|x\| = 1\right\}$.

TODO: Abb3 einfügen

$$\begin{aligned} \pi_+ : S^n \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (\pi_{+,i}(p))_{1\le i\le n} = \left(\frac{p_i}{1-p_{n+1}}\right)_{1\le i\le n} \\ \pi_- : S^n \setminus \{S\} &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (\pi_{-,i}(p))_{1\le i\le n} = \left(\frac{p_i}{1+p_{n+1}}\right)_{1\le i\le n} \end{aligned}$$

$$\pi_+ \circ \pi_-^{-1} : \pi_-(S^n \setminus \{N,S\}) \to \pi_+(S^n \setminus \{N,S\}) \in C^\infty$$

Damit ist

$$\mathcal{A} = \{(\pi_+, S^n \setminus \{N\}), (\pi_-, S^n \setminus \{S\})\}$$

ein C^∞-Atlas.

iii) Man kann auf $\mathbb{R}$ verschiedene differenzierbare Strukturen einführen. $\mathcal{A}_1 = \{(\mathrm{id},\mathbb{R})\}$ ist ein C^∞-Atlas.

TODO: Abb4 einfügen

Definition: $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ X^{-1}$ differenzierbar ist.

$\mathcal{A} = \{(\varphi,\mathbb{R})\}$ mit:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = t^3 \end{aligned}$$

φ ist ein Homöomorphismus und differenzierbar, aber φ^{-1} ist *nicht* differenzierbar.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{falls } x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

TODO: Abb5 einfügen

Da alle Kartenwechselabbildungen die Identität sind $\left(\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}\right)$, sind alle Kartenwechselabbildungen glatt. Also ist $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas.

Eine Funktion $f : M = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar bezüglich der differenzierbaren Struktur von $\mathcal{A} = \{(\varphi,\mathbb{R})\}$, wenn $f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist.

$f(x) = x$	ist nicht differenzierbar
$f(x) = x^3$	ist differenzierbar wegen $\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(x) = x$

1.2.7 Definition (differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten)

Seien M^n und N^k differenzierbare Mannigfaltigkeiten, also mit Atlanten mit differenzierbaren Kartenwechselabbildungen, und $\Omega \subseteq M$ offen.

TODO: Abb6 einfügen

Eine Abbildung $f : \Omega \to N$ heißt *differenzierbar von der Klasse* C^l, falls $y \circ f \circ x^{-1}$ von der Klasse C^l für beliebige Karten $(x,U) \in \mathcal{A}_M$ und $(y,V) \in \mathcal{A}_N$ ist.

f heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv und f und f^{-1} differenzierbar sind.

1.2.8 Bemerkung

Ist $\Omega \subseteq M^n$ offen, $f : \Omega \to N^k$ ein Diffeomorphismus und $f(\Omega) \subseteq N^k$ offen, so ist $n = k$.

Beweis

Betrachte die Abbildung

$$y \circ f \circ x^{-1} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^k$$

mit offen Mengen U,V. Dies ist nach der Definition ein Diffeomorphismus. Aus dem Rangtheorem folgt die Behauptung. $\square_{1.2.8}$

Wenn f ein Homöomorphismus ist, ist diese Aussage immer noch richtig, aber für den Beweis braucht man algebraische Topologie. (vergleiche [Dold])

1.2.9 Definition (Untermannigfaltigkeit)

Sei M^n eine Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, falls es um jeden Punkt $p \in N$ eine differenzierbare Karte

$$x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

von M gibt, sodass gilt:

$$x(U \cap N) = U' \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right)$$

TODO: Abb7 einfügen

1.3 Die Partition der Eins

Sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ sei glatt, also $f \circ x^{-1} : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist glatt für jede Karte $(x,U) \in \mathcal{A}$.

Ziel ist es, das Integral $\int_M f \mathrm{d}\mu_M$ zu definieren.

Ein Zwischenschritt wird sein:

$$\int_{x(U)} \left(f \circ x^{-1}\right) \mathrm{d}^n x = \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \ldots \int \mathrm{d}x_n \left(f \circ x^{-1}\right)(x_1, \ldots, x_n)$$

Es wäre wünschenswert, dass für den *Träger* von f, also die abgeschlossene Menge

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$$

schon $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ gilt, das heißt es gilt $f \equiv 0$ außerhalb des Trägers.
TODO: Abb8 einfügen
Wir wollen glatte Funktionen

$$\varphi_\nu : M \to \mathbb{R}$$

mit $\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subseteq U_\nu$ und $\sum_\nu \varphi_\nu(x) = 1$ für alle $x \in M$ wählen.
Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ betrachten wir $(\varphi_\nu \cdot f)$, integrieren dies und bilden am Ende die Summe:

$$\sum_\nu \int_M (\varphi_\nu f) \,\mathrm{d}\mu_m$$

1.3.1 **Definition** (Zerlegung der Eins)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von X.
Eine der Überdeckung $\mathfrak{U}$ untergeordnete *Zerlegung der Eins* ist eine Familie $(\varphi_\nu)_{\nu \in L}$ von Funktionen $\varphi_\nu : X \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Jeder Punkt $p \in X$ besitzt eine Umgebung V, sodass $\varphi_\nu\big|_V = 0$ außer für endliche viele $\nu \in L$. (Die Zerlegung ist *lokal endlich.*)

ii) $\sum_{\nu \in L} \varphi_\nu = 1$; Beachte, dass diese Summe wegen i) endlich ist.

iii) Jeder Träger $\operatorname{supp}(\varphi_\nu)$ liegt in einer der U_λ.

Sind die φ_ν stetig (beziehungsweise glatt) so heißt die Partition der Eins stetig (beziehungsweise glatt).
Ist L abzählbar, so heißt die Partition der Eins abzählbar.

1.3.2 **Definition** (kompakte Ausschöpfung, parakompakt)

Eine *kompakte Ausschöpfung* von M ist eine Folge kompakter Mengen $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sodass $K_i \subseteq K_{i+1}$ und

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = M$$

Gibt es eine kompakte Ausschöpfung eines topologischen Raumes $(M,\mathscr{O})$, so heißt M *parakompakt.*

Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $K_i := \overline{B_i(0)}$. Dann ist $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung.

1.3.3 **Satz** (Mannigfaltigkeit ist parakompakt)

Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis

Um jeden Punkt p gibt es eine Karte (x,U). Durch Komposition mit einer Verschiebung kann man erreichen, dass $x(p) = 0$ ist.

TODO: Abb1 einfügen

Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $B_{2\varepsilon}(0) \subseteq x(U)$ ist und $\Omega_p := x^{-1}(B_\varepsilon(0))$.

$B_\varepsilon(0)$ ist relativ kompakt, das heißt $\overline{B_\varepsilon(0)}$ ist in $\mathbb{R}^n$ kompakt.

Also ist Ω_p relativ kompakt in M.

Die $(\Omega_p)_{p\in M}$ sind alle relativ kompakt und bilden eine offene Überdeckung von M. Da $(M,\mathscr{O})$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Basis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der offenen Mengen, das heißt jedes offene $\Omega \subseteq M$ kann dargestellt werden als:

$$\Omega = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ U_n\subseteq\Omega}} U_n$$

Wähle jetzt diejenigen U_n aus, die in einer der Mengen Ω_p enthalten sind. Dann gilt:

a) Jedes U_n ist in einem der Ω_p enthalten.

b) $\Omega_p = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ U_n\subseteq\Omega_p}} U_n$

Die U_n sind dann relativ kompakt, da $U_n \subseteq \Omega_{p(0)}$ und $\Omega_{p(0)}$ relativ kompakt ist, und bilden eine offene Überdeckung, denn es gilt:

$$p \in \Omega_p \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

Setze nun $K_0 := \overline{U_0}$, $K_1 := \overline{U_0 \cap U_1}$, allgemein:

$$K_n := \overline{\bigcap_{k=0}^{n} U_k}$$

Die K_n bilden eine kompakte Ausschöpfung von M. $\square_{1.3.3}$

1.3.4 **Satz** (Existenz eines abzählbaren Atlanten)

Sei $U = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M^n.

Dann gibt es einen abzählbaren Atlas $\mathcal{A} := (x_k,V_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass gilt:

i) $x_k(V_k) = B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

ii) Die Mengen V_k sind lokal endlich, das heißt für alle $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung W, sodass $W \cap V_k = \emptyset$ außer für endlich viele k gilt, und jedes V_k liegt in einer der Mengen U_{λ_0}.

iii) Die Mengen $W_k := x_k^{-1}(B_1(0))$ bilden eine offene Überdeckung von M.

TODO: Abb2

Beweis

Zunächst gilt:

Behauptung Für jedes $p \in M$ gibt es eine Karte (x_p, V_p) mit $x_p(V_p) = B_\varepsilon(0)$ und $V_p \subseteq U_{\lambda_0}$ für ein $\lambda_0 \in \Lambda$.

Beweis p liegt in einem U_{λ_0}, da die $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von M bilden. Da U_{λ_0} offen ist, ist $\Omega := U_{\lambda_0} \cap V$ eine offene Umgebung von p mit $\Omega \subseteq U_{\lambda_0}$. $\left(x\big|_\Omega, \Omega\right)$ ist eine Karte um p mit $\Omega \subseteq U_{\lambda_0}$ und $x(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen. Durch Verschiebung und zentrische Streckung kann man erreichen, dass $x(\Omega) = B_\varepsilon(0)$ und $x(0) = 0$.
TODO: Abb3
$V_p := x^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subseteq \Omega \subseteq M$ ist offen und $\left(x_p := x\big|_V, V_p\right)$ ist dann die gewünschte Karte. $\square_{\text{Behauptung}}$

Für jedes $p \in M$ ist die Menge $U(p) := x_p^{-1}(B_1(0)) \subseteq M$ ist offen. Betrachte eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von M. Die Menge $\mathcal{U}_1 := \left\{U(p) \,\middle|\, p \in K_1\right\}$ ist eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U(p_1), \ldots, U(p_{k_1})$.

Nun bildet $\mathcal{U}_2 := \{U(p) \,|\, p \in K_2 \setminus K_1^\circ\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K_2 \setminus K_1^\circ$ und wir können eine endliche Teilüberdeckung $U(p_{k_1+1}), \ldots, U(p_{k_2})$.

Dies kann man induktiv fortführen, indem man eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}_n := \left\{U(p) \setminus K_{n-2} \,\middle|\, p \in K_n \setminus K_{n-1}^\circ\right\}$ wählt.
Man erhält dann eine *abzählbare* Familie U_{p_i}, die jedes K_n überdecken und lokal endlich ist, da für ein $m \in K_n$ höchstens die endlich vielen U_{p_i}, die in einem $\mathcal{U}_l$ für $l \leq n+1$ enthalten sind, m enthalten können.

Da die $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von M bilden, sind die U_{p_i} dann auch eine Überdeckung von M. Die zugehörigen Karten $\left(x\big|_{U_{p_i}}, U_{p_i}\right)$ bilden dann den gewünschten Atlas. $\square_{1.3.4}$

1.3.5 Theorem (Existenz einer glatten Partition der Eins)

Auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine glatte Partition der Eins, die der Überdeckung untergeordnet ist.

Beweis

Sei $\mathfrak{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gegeben. Wähle nun einen abzählbaren Atlas $\mathcal{A}$ wie in Satz 1.3.4.
Wähle zu jeder Karte $(x_n, V_n) \in \mathcal{A}$ ein $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\gamma) \subseteq B_3(0)$, zum Beispiel:

$$\gamma(y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{4 - \|y\|^2}\right) & \text{falls } \|y\| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Abb4-Plot von γ einfügen
Dann ist die Abbildung

$$\varphi_n = \gamma \circ x_n : V_n \to \mathbb{R}$$

eine C^∞-Abbildung.
TODO: Abb5 einfügen

Die φ_n sind nach Konstruktion lokal endlich und, da die $x_n^{-1}(B_1(0))$ eine Überdeckung bilden, ist $\sum_n \varphi_n(p) > 0$ für alle $p \in M$. Nun definieren wir:

$$\psi_n(p) := \frac{\varphi_n(p)}{\sum_n \varphi_n(p)}$$

Dann sind die ψ_n die gesuchte Partition der Eins. $\square_{1.3.5}$

2 Mehrfachintegrale, die Transformationsformel

Betrachte zunächst nur stetige Funktionen mit kompakten Träger, also $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
Später betrachten wir vektorwertige Funktionen komponentenweise und Funktionen $h \in C_0^0(M^n,\mathbb{R})$ durch die Verwendung einer Karte.
Für eine Funktion $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ wählen wir eine Partition der Eins, also $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ und $\sum_k \eta_k = 1$. Dann definieren wir das Integral:

$$\int g \mathrm{d}^n x := \sum_k \int \underbrace{g \cdot \eta_k}_{\in C_0^0(\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}^n x$$

2.1 Definition (Mehrfachintegral)

Für eine Funktion $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ setzen wir das Integral:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}^n x &:= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n f(x_1,\ldots,x_n) = \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

2.2 Lemma

Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Dann ist für jedes $k \in \{0,\ldots,n\}$ das iterierte eindimensionale Riemann-Integral

$$g(x_1,\ldots,x_{n-k}) := \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{n-k+1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n}_{k \text{ Integrale}} f(x_1,\ldots,x_n) \tag{2.1}$$

wohldefiniert und stetig in den Variablen $x_1,\ldots,x_{n-k}$.
Im Spezialfall $k = 1$ ist dadurch garantiert, dass die Integrale in Definition 2.1 wohldefiniert und endlich sind.

Erinnerung

Da $\operatorname{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist $\operatorname{supp}(f)$ beschränkt, also gibt es ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ mit:

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L,L]^n$$

Wegen $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ ist f schon Riemann-integrabel und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

TODO: Abb6 einfügen

Außerdem ist f gleichmäßig stetig, das heißt es gibt zu jedem $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $x,y \in \mathbb{R}$ mit $\|x-y\| < \delta$ schon

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt. Wichtig dabei ist, dass δ unabhängig von x und y gewählt werden kann.

Beweis

Führe eine Induktion über k durch:
Induktionsanfang bei $k = 0$: $g = f$ ist nach Voraussetzung stetig.
Induktionsschritt $k \rightsquigarrow k+1$:

$$g\left(x_1, \ldots, x_{n-(k+1)}\right) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{n-k}\, g\left(x_1, \ldots, x_{n-(k+1)}, x_{n-k}\right)$$

$g(x_1, \ldots, x_{n-k})$ ist nach Induktionsvoraussetzung wohldefiniert und stetig.
Außerdem ist klar, dass $g\left(x_1, \ldots, x_{n-(k+1)}, x_{n-k}\right) = 0$ ist für $|x_{n-k}| > L$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L,L]^n$ ist. Damit ist das Integral in (2.1) wohldefiniert als Riemann-Integral über eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Man kann nun abschätzen:

$$\begin{aligned}
&|g(x_1, \ldots, x_{n-k-1}) - g(y_1, \ldots, y_{n-k-1})| = \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{n-k} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_{n-k-1}, x_{n-k}, \ldots, x_n)\right) \right| \leq \\
&\leq \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x_{n-k} \ldots \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x_n \left| f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_{n-k-1}, x_{n-k}, \ldots, x_n) \right| \leq \\
&\leq (2L)^{k+1} \sup \left| f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_{n-k-1}, x_{n-k}, \ldots, x_n) \right|
\end{aligned}$$

f ist gleichmäßig stetig, das heißt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass gilt:

$$\|x-y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Also gilt

$$|g(x_1, \ldots, x_{n-k-1}) - g(y_1, \ldots, y_{n-k-1})| \leq (2L)^{k+1} \cdot \varepsilon$$

falls gilt:

$$\|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_{n-k-1}, x_{n-k}, \ldots, x_n)\| = \|(x_1 - y_1, \ldots, x_{n-k} - y_{n-k}, 0, \ldots, 0)\| < \delta$$

Also ist $g(x_1, \ldots, x_{n-k-1})$ tatsächlich stetig. $\square_{2.2}$

Fragen

- Kann man die Integrationsreihenfolge vertauschen?

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y f(x,y) \stackrel{?}{=} \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x f(x,y)$$

- Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$ eine Drehmatrix und sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}^n x \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\,\mathrm{d}^n x$$

Allgemeine Frage: Wie verhält sich das Integral unter Diffeomorphismen?
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Für ein $f \in C_0^0(V,\mathbb{R})$, setze f durch $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort, mit $\tilde{f}\big|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\mathrm{d}^n x =: \int_V f(x)\,\mathrm{d}^n x \stackrel{?}{=} \int_U (f \circ \phi)(y)\,\mathrm{d}^n y$$

2.3 **Beispiel** (eindimensionale Variablentransformation)

Seien $U,V \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus.
ϕ ist insbesondere bijektiv, das heißt, dass ϕ entweder monoton steigend oder monoton fallend. Außerdem sind ϕ und ϕ^{-1} stetig differenzierbar. Also ist insbesondere $\phi' \neq 0$ auf U. Bezeichne $U = (a,b)$ und $V = \phi(U) = (\alpha,\beta)$. Sei $f \in C_0^0(V,\mathbb{R})$ so setze f mit $f\big|_{\mathbb{R}\setminus V} = 0$ stetig auf $\mathbb{R}$ fort. Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Führe eine Variablentransformation $x = \phi(y), y = \phi^{-1}(x)$ mit $\mathrm{d}x = \phi'(y)\,\mathrm{d}y$ durch:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} (f \circ \phi)(y)\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_a^b (f \circ \phi)(y)\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y & \text{falls } \phi' > 0 \\ \int_b^a (f \circ \phi)(y)\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y & \text{falls } \phi' < 0 \end{cases} \\ &= \int_a^b (f \circ \phi)(y)\,\left|\phi'(y)\right|\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ \phi)(y)\,\left|\phi'(y)\right|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

2.4 **Lemma** (Vertauschen der Integrationsvariablen)

Für $\varphi \in C_0^0\left(\mathbb{R}^2\right)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \varphi(x,y)$$

Beweis

Wähle L so, dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-L,L]^2$ ist.
TODO: Abb2 einfügen
Zerlege $[-L,L]^2$ in kleine quadratförmige Zellen Z der Kantenlänge δ. Da φ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle Zellen Z gilt:

$$\max_Z \varphi - \min_Z \varphi < \varepsilon$$

Wähle eine Treppenfunktion T, also eine Funktion, die auf jeder Zelle konstant ist, so dass für alle x gilt:

$$|\phi(x) - T(x)| < \varepsilon$$

Wähle zum Beispiel für jede Zelle einen Punkt $z \in Z$ und setze $T\big|_Z = f(z)$. Sei $y \in [-L,L]$, so gilt für alle $x \in [-L,L]$:

$$\int \underbrace{|\varphi(x,y) - T(x,y)|}_{\leq \varepsilon} \mathrm{d}x \leq 2L \cdot \varepsilon$$

Also folgt

$$\left| \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; \varphi(x,y) - \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; T(x,y) \right| \leq \int \left(\int |\varphi(x,y) - T(x,y)| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \leq (2L)^2 \cdot \varepsilon$$

und:

$$\int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; T(x,y) = \delta^2 \cdot \sum_Z T\big|_Z$$

Vertausche nun x und y und erhalte die entsprechenden Beziehungen, womit folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; \varphi(x,y) - \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \; \varphi(x,y) \right| \leq & \left| \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; \varphi(x,y) - \delta^2 \sum_Z T\big|_Z \right| \\ & + \left| \delta^2 \sum_Z T\big|_Z - \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \; \varphi(x,y) \right| \leq \\ & \leq 2 \cdot (2L)^2 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, folgt die Behauptung. $\square_{2.4}$

2.5 Lemma

Sei $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus.
Zu jedem $p \in V$ gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von p, sodass für alle $g \in C_0^0(W)$ gilt:

$$\int_W g(y) \, \mathrm{d}^n y = \int_{\phi^{-1}(W)} (g \circ \phi)(x) \left| \det \left(\mathrm{D}\phi\big|_x \right) \right| \mathrm{d}^n x$$

TODO: Abb1 einfügen

Beweis

TODO: Abb1-4.5.12 einfügen

Sei $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $q \in U$ mit $\phi(q) = p$.

Da ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist $\mathrm{D}\phi\big|_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, also gilt ohne Einschränkung, da man die Variablen vertauschen kann:

$$\partial_1 \phi^k(q) \neq 0$$

Durch Vertauschen der Komponenten, also die Vertauschung der Zeilen, kann man erreichen, dass gilt:

$$\partial_1 \phi^1(q) \neq 0$$

Setze $\varphi := \phi^1$ und betrachte die Abbildung:

$$\begin{aligned} \psi : U &\to \mathbb{R}^n \\ \left(x^1, \dots, x^n\right) &\mapsto \left(\varphi\left(x^1, \dots, x^n\right), x^2, \dots, x^n\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{D}\psi\big|_q = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi(q) & \partial_2\varphi(q) & \dots & \partial_n\varphi(q) \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det\left(\mathrm{D}\psi\big|_q\right) = \partial_1\varphi(q) \neq 0$ ist ψ also lokal invertierbar und somit ein lokaler Diffeomorphismus. Daher gibt es eine Umgebung $\Omega \subseteq U$ von q, sodass

$$\psi\big|_\Omega : \Omega \to \psi(\Omega) \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus ist. Da $\psi\big|_\Omega$ invertierbar ist, können wir $\phi\big|_\Omega$ schreiben in der Form

$$\phi\big|_\Omega = A \circ \psi\big|_\Omega$$

wobei

$$A := \phi \circ \psi\big|_\Omega^{-1} : \psi(\Omega) \to \phi(\Omega) =: W \subseteq V$$

ein Diffeomorphismus ist. Es gilt für $x = \left(x^1, \dots, x^n\right) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} A\left(\varphi\left(x^1, \dots, x^n\right), x^2, \dots, x^n\right) &= A(\psi(x)) = \left(\phi \circ \psi^{-1} \circ \psi\right)(x) = \\ &= \phi(x) = \left(\phi^1(x), \dots, \phi^n(x)\right) = \left(\varphi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^n(x)\right) \end{aligned}$$

Also gilt für alle $y \in \psi(\Omega)$:

$$A\left(y^1, \dots, y^n\right) = \left(y^1, A^2(y), \dots, A^n(y)\right)$$

Gehe jetzt induktiv in n vor:

Den Induktionsanfang bei $n = 1$ haben wir die Behauptung schon in Beispiel 2.3 behandelt.

Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$: Sei das Lemma schon für die Dimension $n-1$ bewiesen.

Setze g mit $g\big|_{\mathbb{R}^n\setminus W} = 0$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_W g\mathrm{d}^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} g\mathrm{d}^n x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n g\left(x_1, \ldots, x_n\right) \right) = \\
&\overset{A \text{ lässt}}{\underset{\text{1. Komp. fest}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(g \circ A\right)(x) \left|\det\left(\mathrm{D}A\right)\right| \right) = \\
&\overset{2.4}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(g \circ A\right)(x) \left|\det\left(\mathrm{D}A\big|_x\right)\right| \right) = \\
&\overset{\psi \text{ lässt}}{\underset{\text{2. Komp. fest}}{=}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(g \circ A \circ \psi\right)(x) \left|\det\left(\mathrm{D}A\big|_{\psi(x)}\right)\right| \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\psi\big|_x\right)\right| \right) = \\
&\overset{\det(A)\det(B)=\det(AB)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x \left(g \circ A \circ \psi\right)(x) \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}A\big|_{\psi(x)} \cdot \mathrm{D}\psi\big|_x\right)\right| = \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x \left(g \circ A \circ \psi\right)(x) \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\left(A \circ \psi\right)\big|_x\right)\right| = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(g \circ \phi\right)(x) \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\phi\big|_x\right)\right| \mathrm{d}^n x = \int_{\phi^{-1}(W)} \left(g \circ \phi\right)(x) \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\phi\big|_x\right)\right| \mathrm{d}^n x
\end{aligned}$$

$\square_{2.5}$

Bemerkung

Anschaulich lässt sich dies mit den Spaltenvektoren u_k von

$$\mathrm{D}\phi\big|_x = \left(u_1, \ldots, u_n\right)$$

erklären. Denn $\left|\det\left(\mathrm{D}\phi\big|_x\right)\right|$ ist das Volumen der von u_k generierten Zelle.
Zum Beispiel gilt in zwei Dimensionen:
TODO: Abb2-4.5.12 einfügen
$\left|\det\left(\mathrm{D}\phi\big|_x\right)\right|$ ist die Fläche des Parallelogramms.

2.6 **Theorem** (Transformationsformel)

Seien $f \in C_0^0\left(\mathbb{R}^n\right)$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq V \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und $\phi : U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to V$ ein Diffeomorphismus, so gilt:

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}^n x = \int_U \left(f \circ \phi\right)(y) \left|\det\left(\mathrm{D}\phi\big|_y\right)\right| \mathrm{d}^n y$$

Beweis

Wähle für jedes $p \in V$ eine Umgebung $W(p)$ wie in Lemma (2.5).
Wegen $\operatorname{supp}(f)$ ist $f \in C_0^0(V)$ und da der Träger $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, können wir ihn durch endlich viele solche offenen Mengen $W_1, \ldots, W_N$ mit $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ überdecken.
Wähle nun eine glatte, dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $\left(\eta_l\right)_{l \in L}$.
Nach Definition ist eine Zerlegung der Eins lokal endlich, das heißt jeder Punkt $s \in \operatorname{supp}(f)$ besitzt eine offene Umgebung U_p, so dass $\eta_l\big|_{U_p} = 0$ für fast alle Indizes $l \in L$ ist.

Wir bezeichnen die Indizes l, für die $\eta_l\big|_{U_p} = 0$ gilt, mit $l_{p,1}, \ldots, l_{p,n(p)}$ für ein $n\left(p\right) \in N$. Nun bilden die Mengen $\left(U_p\right)_{p \in \operatorname{supp}(f)}$ eine offene Überdeckung von $\operatorname{supp}\left(f\right)$, weil jedes $p \in \operatorname{supp}\left(f\right)$ in U_p enthalten ist.

Da $\operatorname{supp}\left(f\right)$ kompakt ist, gibt es somit eine endliche Teilüberdeckung $U_{p_1}, \ldots, U_{p_M}$ mit $M \in \mathbb{N}$ und gewissen Punkten $p_i \in \operatorname{supp}\left(f\right)$. Da auf jeder dieser endlich vielen Mengen nur endlich viele Funktionen η_l nicht identisch verschwinden, gilt dies auch für ganz $\operatorname{supp}\left(f\right)$. Genauer sind nur die Funktionen $\eta_{p_i,j}$ mit $j \leq n\left(p_i\right)$ und $i \leq M$ nicht identisch null.

Also besteht diese Zerlegung der Eins besteht aus endlich vielen nicht-trivialen Funktionen $\eta_1, \ldots, \eta_K \in C_0^\infty\left(V\right)$.

Daher gilt für alle $x \in \operatorname{supp}\left(f\right)$:

$$\sum_{k=1}^{K} \eta_k\left(x\right) = 1$$

Da die Zerlegung der Überdeckung $\left(W_n\right)_{n \in \{1,\ldots,N\}}$ untergeordnet ist, also

$$\operatorname{supp}\left(\eta_k\left(y\right) f\left(y\right)\right) \subseteq W_{l(k)}$$

gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
\int_V f\left(y\right) \mathrm{d}y &= \int_V \sum_{k=1}^{K} \eta_k\left(y\right) f\left(y\right) \mathrm{d}^n y = \sum_{k=1}^{K} \int_V \eta_k\left(y\right) f\left(y\right) \mathrm{d}^n y = \\
&= \sum_{k=1}^{K} \int_{W_{l(k)}} \eta_k\left(y\right) f\left(y\right) \mathrm{d}^n y = \\
&\overset{\text{Lemma 2.5}}{=} \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\eta_k \circ \phi\right)\left(x\right) \cdot \left(f \circ \phi\right)\left(x\right) \left|\det \mathrm{D}\phi\right| \mathrm{d}^n x = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{K} \eta_k\left(\phi\left(x\right)\right)\right)}_{=1} \cdot \left(f \circ \phi\right)\left(x\right) \left|\det \mathrm{D}\phi\right| \mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(f \circ \phi\right)\left(x\right) \left|\det \mathrm{D}\phi\right| \mathrm{d}^n x
\end{aligned}$$

$\square_{2.6}$

2.7 Korollar

Das iterierte Riemann-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x\right) \mathrm{d}^n x$ ist invariant unter

- der Vertauschung von Koordinaten.
- Drehungen und Spiegelungen.
- Translationen.

Beweis

Zum Beispiel für Vertauschung von x_1 und x_2 wähle:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\phi(x) = Ax$$

Dann gilt:

$$\det A = -1$$

Spiegelungen ($A_{11} = -1$) und Drehungen ($A \in \mathrm{SO}_n$) sind analog.
Translationen: $\phi(x) = x + u$ mit $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{D}\phi\big|_x = E_n \qquad \det \mathrm{D}\phi\big|_x = 1$$

$\square_{2.7}$

3 Einige Konstruktionen und Begriffe der Differentialtopologie

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, also ist M ein separabler Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur, das heißt einem maximalen Atlas $\mathcal{A} = \{(X,U)\}$ mit stetigen (beziehungsweise glatten) Kartenwechselabbildungen.

Ein wichtiger Begriff ist der *Tangentialraum*.

Betrachte als Beispiel eine Untermannigfaltigkeit:

Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ glatt und $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ ein regulärer Wert von F, das heißt $\mathrm{D}F\big|_p$ habe Rang $m - n$ für alle $p \in F^{-1}(0)$.

Dann ist $M := F^{-1}(0)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^n \subseteq \mathbb{R}^m$.

TODO: Abb3 einfügen

T_pM ist der Tangentialraum, also die sich tangential an M^n in p „anschmiegende" Ebene.

$$\mathrm{T}_pM := \ker\left(\mathrm{D}F\big|_p\right) + p \qquad\qquad \text{affiner Unterraum}$$

Oft betrachtet man auch $\mathrm{T}_pM := \ker \mathrm{D}F\big|_p \subseteq \mathbb{R}^m$ als Unterraum.

3.1 Der Tangentialraum

Sei M^n eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

3.1.1 Definition (Kurve)

Sei (x,U) eine Karte um p.

Eine C^1-Abbildung $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha(0) = p$ heißt auch *C^1-Kurve durch p*.

Das heißt für jede Karte (x,U) um p ist

$$x \circ a : (-\varepsilon,\varepsilon) \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine C^1-Abbildung.

TODO: Abb4 einfügen

Falls $\alpha((-\varepsilon,\varepsilon))$ *nicht* in U enthalten ist, verkleinern wir ε.

3.1.2 Bemerkung und Definition (Einsteinsche Summenkonvention, Äquivalente Kurven)

$v := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\big|_{t=0} \in \mathbb{R}^n$ ist der *Tangentialvektor* in Koordinaten in unserer Karte (x,U).
Betrachte eine andere Karte (y,V) um p.

$$w := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ \alpha)\big|_{t=0} \underset{\text{verkleinern}}{\overset{\text{evtl. } \varepsilon}{=}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\left(y \circ x^{-1}\right)}_{\text{Kartenwechselabbildung}} \circ (x \circ \alpha)\right)\Bigg|_{t=0}$$

Wende nun die Kettenregel an:

$$w = \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\big|_{t=0} = \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} \cdot v$$

Die Tangentialvektoren transformieren sich also mit der Jacobi-Matrix $\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)}$ der Kartenwechselabbildung, für die wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Die Komponenten lauten also:

$$w^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v^i =: \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v^i$$

Verwende dabei die *Einsteinsche Summenkonvention*:

> Summiere stets über doppelt auftretende Indizes.
>
> Genauer: Summiere über doppelt auftretende Indizes, wobei ein Index oben und ein Index unten steht.
>
> Es ist nämlich nicht sinnvoll über Komponenten zu summieren, bei denen beide Indizes oben beziehungsweise unten stehen, da diese dann nicht unabhängig von der Wahl der Karte ist.

Betrachte nun zwei Kurven α,β durch p.
TODO: Abb5 einfügen

$$v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\big|_{t=0} \qquad \tilde{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \beta)\big|_{t=0}$$
$$w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ \alpha)\big|_{t=0} \qquad \tilde{w} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ \beta)\big|_{t=0}$$

Nehme an, dass $v = \tilde{v}$ ist. Dann folgt:

$$w = \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} v$$
$$\tilde{w} = \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} \tilde{v}$$

Also gilt:

$$(w - \tilde{w}) = \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} \underbrace{(v - \tilde{v})}_{=0} = 0$$
$$w = \tilde{w}$$

Damit können wir folgende Äquivalenzrelation auf den C^1-Kurven durch p einführen:

$$\alpha \sim_p \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\text{Karte } (x,U)}{\exists} \; : \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \beta)\big|_{t=0}$$

Beachte: Diese Definition von $\sim_p$ ist unabhängig von der Wahl der Karte. Außerdem ist $\sim_p$ eine Äquivalenzrelation.

3.1.3 Definition (Tangentialraum)

Der Tangentialraum T_pM ist die Menge aller Äquivalenzklassen von C^1-Kurven durch p bezüglich der Relation $\sim_p$.

3.1.4 Satz

T_pM ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Beweis

Seien (x,U) eine Karte um p mit $x(p) = 0$ und α eine Kurve durch p. Dann ist $\tilde{\alpha} := x \circ \alpha$ eine C^1-Kurve durch $x(p)$..

TODO: Abb6 einfügen

Sei umgekehrt $\tilde{\beta}$ eine C^1-Kurve durch $x(p)$ in $\mathbb{R}^n$, dann ist $\beta := x^{-1} \circ \tilde{\beta}$ eine C^1-Kurve durch p in M.

Damit können wir den C^1-Kurven durch p eindeutig Kurven im $\mathbb{R}^n$ zuordnen.

Für Kurven $\tilde{\alpha}$,$\tilde{\beta}$ durch 0 im $\mathbb{R}^n$ können wir Linearkombinationen wie gewohnt bilden.

$$\left(\lambda\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\right)(t) := \lambda\tilde{\alpha}(t) + \tilde{\beta}(t) \in \mathbb{R}^n$$

Da $x(p) = 0$ ist, ist dann

$$x^{-1}\left(\lambda\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\right) = x^{-1}(\lambda\alpha \circ x + \beta \circ x)$$

eine Kurve durch p. $\square_{3.1.4}$

3.1.5 Bemerkung

Beachte, dass man den Definitionsbereich der Kurven möglicherweise verkleinern, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &: (-\varepsilon_1,\varepsilon_1) \to \mathbb{R}^n\\ \tilde{\beta} &: (-\varepsilon_2,\varepsilon_2) \to \mathbb{R}^n\\ \lambda\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} &: (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^n\\ &\qquad \delta \leq \min(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\end{aligned}$$

Wähle außerdem den Definitionsbereich so klein, dass das Bild stets in $x(U)$ liegt.

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\big|_{t=0} \\ \tilde{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ \alpha)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(x \circ y^{-1}\right) \circ (y \circ \alpha)\right)\big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)} \cdot v \end{aligned}$$

In Komponenten ist das mit der Einsteinschen Summenkonvention:

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$$

3.1.6 Definition (Richtungsableitung, ko- und kontravariante Vektoren)

Sei $v \in \mathrm{T}_p M$ mit Repräsentant α, also $v = [\alpha]$. α ist eine Kurve durch p.
Sei $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

$$f \circ \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

Dann ist die *Richtungsableitung von f in Richtung* v definiert als:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\big|_{t=0}$$

Rechne dies in Koordinaten, also einer Karte (x,U), aus:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(f \circ x^{-1}\right) \circ (x \circ \alpha)\right)\big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{D}\left(f \circ x^{-1}\right)\Big|_{x(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{D}\left(f \circ x^{-1}\right) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot v^j \end{aligned}$$

In einer Karte (y,V) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(f \circ y^{-1}\right) \circ (y \circ \alpha)\right)\big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{D}\left(f \circ y^{-1}\right)\Big|_{y(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{D}\left(f \circ y^{-1}\right) \cdot \tilde{v} = \frac{\partial f}{\partial y^j} \cdot \tilde{v}^j \end{aligned}$$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\big|_{t=0}$ unabhängig von der Wahl der Karte ist, folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} v^i = \frac{\partial f}{\partial y^i} \tilde{v}^i$$

Die beiden Faktoren $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ und v^i müssen sich auf eine verträgliche Weise transformieren.

$$\tilde{v}^k = v^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \qquad \textit{kontravariante}\ \text{Transformation}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)_{i=1,\ldots,n} = \mathrm{D}\left(f \circ y^{-1}\right) = \mathrm{D}\left(f \circ x^{-1} \circ \left(x \circ y^{-1}\right)\right) = \mathrm{D}\left(f \circ x^{-1}\right) \cdot \mathrm{D}\left(x \circ y^{-1}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \qquad \textit{kovariante}\ \text{Transformation}$$

Bei kontravarianten Größen steht der Index oben, bei kovarianten Transformationen unten.
Es treten also genau die Inversen Jacobi-Matrizen auf.

$$\begin{aligned} \mathrm{id} &= \left(y \circ x^{-1}\right) \circ \left(x \circ y^{-1}\right) \\ \Rightarrow \quad E_n &= \mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\Big|_{x(p)} \cdot \mathrm{D}\left(x \circ y^{-1}\right)\Big|_{y(p)} \end{aligned}$$

Oder in Komponenten:

$$\delta^i_l = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^l}$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}\tilde{v}^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^l} v^l\right) = \frac{\partial f}{\partial x^j} \underbrace{\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^l}\right)}_{=\delta^j_l} v^l = \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot v^j$$

3.1.7 Konstruktion (Tangentialraum über Derivationen, Funktionskeime)

Konstruiere nun den *Tangentialraum über Derivationen*:
Sei $\Omega \subseteq M$ eine offene Umgebung von p, so betrachte die glatten reellwertigen Funktionen $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ auf Ω.
Einem $[\alpha] \in \mathrm{T}_p M$ können wir die Richtungsableitung

$$f \in C^\infty(\Omega) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}$$

zuordnen.
TODO: Abb1 einfügen
Betrachte die Menge:

$$F^0_p = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, f \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } p \right\} \subseteq C^\infty(\Omega)$$

$C^\infty(\Omega)$ ist eine Algebra:

- Vektorraum über punktweise Addition und Skalarmultiplikation.
- Die Multiplikation ist ebenfalls punktweise, also als $(f \cdot g)(q) = f(q) \cdot g(q)$ definiert

F^0_p ist ein *Ideal* in $C^\infty(\Omega)$, das heißt für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $q \in F^0_p$ folgt $f \cdot q \in F^0_p$.
Man kann die Äquivalenzrelation einführen:

$$f_1 \sim f_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f_1 - f_2 \in F^0_p$$

Der Quotientenvektorraum

$$F^\infty_p(\Omega) := C^\infty(\Omega) \big/ F^0_p$$

ist die *Algebra der Funktionskeime*.
Identifiziere im Folgenden einen Repräsentanten $f \in C^\infty(U)$ mit $[f] \in F^\infty_p$.

3.1.8 Satz

Sei $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p. Dann gilt:

$$F_p^\infty(U) = F_p^\infty(M)$$

Beweis

Wähle eine Karte (x,V) mit einer Umgebung $V \subseteq U$ von p.
Wähle $\eta \in C^\infty(V)$ mit $\eta = 1$ in einer Umgebung von p mit $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq V$:
TODO: Abb2 einfügen
Sei $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$.
Betrachte die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \eta_\varepsilon(x_1) \cdots \eta_\varepsilon(x_n)$.
Wähle ε so klein, dass $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq x(V)$ ist. Setze:

$$\eta := \phi \circ x : M \to \mathbb{R}$$

Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann ist $f \cdot \eta \in C^\infty(U)$ und $f \sim \eta f$, da $\eta \equiv 1$ in einer kleinen Umgebung von p, das heißt:

$$[f] = [\eta f]$$

Also repräsentieren f und ηf das gleiche Element in F_p^∞. $\square_{3.1.8}$

3.1.9 Definition (Tangentialvektor, Derivation)

i) Ein *Tangentialvektor* v ist eine Abbildung

$$v : F_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) v ist linear, also $v(\lambda f + g) = \lambda v(f) + v(g)$.

b) v ist eine *Derivation*, das heißt es gilt die Leibniz-Regel:

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$$

ii) Die Menge aller Tangentialvektoren in p ist ein Vektorraum, der Tangentialraum T_pM.

Beachte: Die Vektorraumstruktur ist offensichtlich:

$$(\lambda v + w)(f) := \lambda \cdot v(f) + w(f)$$

Sei $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ eine Kurve durch p. Definiere $v \in \mathrm{T}_pM$:

$$\begin{aligned} v : F_p^\infty(M) &\to \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

3.1.10 **Definition** (partielle Ableitung)

Sei (x,U) eine Karte um p. Wir definieren Tangentialvektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ durch:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f &:= \partial_i \left(f \circ x^{-1}\right) \left(\xi^1, \ldots, \xi^n\right) \Big|_{x(p)} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f \circ x^{-1}\right) \left(x\left(p\right) + te_i\right)\end{aligned}$$

Beachte: $x : U \to \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung und $\left(\xi^1, \ldots, \xi^n\right) \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor.

3.1.11 **Satz** (Basis des Tangentialraums)

Sei (x,U) eine Karte um p und $v \in \mathrm{T}_p M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} v &= v^i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\ v^i &= v\left(x^i\right)\end{aligned}$$

Die Vektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ sind linear unabhängig. Sie sind also eine Basis von $\mathrm{T}_p M$.

Beweis

Lineare Unabhängigkeit:
Wähle ein festes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$x^i : U \to \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion und wir können die Derivation anwenden:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(x^i\right) = \partial_j \left(x^i \circ x^{-1}\right) \left(\xi^1, \ldots, \xi^n\right) \Big|_{x(p)} = \partial_j \xi^i = \delta^i_j$$

Daher sind die $\frac{\partial}{\partial x^i}$ linear unabhängig, denn aus

$$a^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = 0$$

für $a^j \in \mathbb{R}$ folgt:

$$0 = a^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(x^i\right) = a^j \delta^i_j = a^i$$

Wie kann man v in der Form

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

darstellen?
$x^i : U \to \mathbb{R} \in C^\infty(U)$ repräsentiert ein Element aus F_p^∞ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sei $[f] \in F_p^\infty$. Ohne Einschränkung gilt $f(p) = 0$, denn für die Konstante Funktion 1 gilt:

$$\begin{aligned} & v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + v(1) \cdot 1 = 2 \cdot v(1) \\ \Rightarrow \quad & v(1) = 0 \end{aligned}$$

Somit folgt für eine Konstante Funktion $c \in \mathbb{R}$:

$$v(c) = c \cdot v(1) = 0$$

Definiere nun:

$$g := f \circ x^{-1} : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$v(f) = v\left(\left(f \circ x^{-1}\right) \circ x\right) = v(g \circ x)$$

Nenne $x(p) =: \xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Nun könnte man schreiben:

$$g(\xi) = g(\xi_0) + \partial_j g(\xi - \xi_0)^j + o(\xi - \xi_0)$$

Besser kann man

$$g(\xi) = g(\xi_0) + h_j(\xi) \cdot (\xi - \xi_0)^j$$

mit einer glatten Funktion $h_j(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wählen, nämlich:

$$\begin{aligned} g(\xi) - g(\xi_0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(s \cdot (\xi - \xi_0) + \xi_0)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{D}g\Big|_{s\cdot(\xi-\xi_0)+\xi_0} \mathrm{d}s \cdot (\xi - \xi_0) = \\ &= \underbrace{\int_0^1 \partial_j g\Big|_{s\cdot(\xi-\xi_0)+\xi_0} \mathrm{d}s}_{=:h_j(\xi)} \cdot (\xi - \xi_0)^j = h_j(\xi) \cdot (\xi - \xi_0)^j \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h_j(\xi_0) &= \int_0^1 \partial_j g\Big|_{s\cdot(\xi_0-\xi_0)+\xi_0} \mathrm{d}s = \partial_j g\Big|_{\xi_0} \int_0^1 \mathrm{d}s = \\ &= \partial_j g\big|_{\xi_0} = \partial_j \left(f \circ x^{-1}\right)\left(\xi^1, \ldots, \xi^n\right)\Big|_{x(p)} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p f \end{aligned}$$

Dabei ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Schreibe nun $g \circ x$ als $g(x)$ mit der Funktion $x : U \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} v(f) &= v(g(x)) = v\left(g(x_0) + h_j(x) \cdot (x - x_0)^j\right) = \underbrace{v(g(x_0))}_{=0} + v\left(h_j(x) \cdot (x - x_0)^j\right) = \\ &= v(h_j(x)) \cdot (x - x_0)^j\Big|_p + (h_j \circ x)\Big|_p \cdot v\left((x - x_0)^j\right) = \\ &= v(h_j(x)) \cdot \left(\underbrace{x(p)}_{=x_0} - x_0\right)^j + \underbrace{h_j(x(p))}_{=\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p f} \cdot v\left((x - x_0)^j\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p f \cdot \left(v\left(x^j\right) - \underbrace{v(x_0)}_{=0}\right) = v\left(x^j\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p f \end{aligned}$$

Also gilt:

$$v = v\left(x^j\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

Daher sind die $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ ein Erzeugendensystem, also sind sie tatsächlich eine Basis. $\square_{3.1.11}$

Bemerkung

Der Zusammenhang mit der Definitionen des Tangentialraums ist folgendermaßen:
Sei $v = [\alpha]$, also ist die C^1-Kurve α durch p ein Repräsentant. Dann ist

$$\begin{aligned} F_p^\infty &\to \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f \circ \alpha\right)\right|_{t=0} \end{aligned}$$

eine Derivation, also ein $\tilde{v} \in \mathrm{T}_p M$.

3.1.12 Satz

Zu jedem $v \in \mathrm{T}_p M$ gibt es eine C^1-Kurve $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = p$, sodass

$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f \circ \alpha\right)\right|_{t=0}$$

für alle $f \in F_p^\infty$ gilt.

Beweis

Seien (x,U) eine Karte mit $x(p) = 0$ und $f \in F_p^\infty$.
Nach Satz 3.1.11 ist $v = v\left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Setze $\xi^i := v\left(x^i\right)$ und fasse $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ auf:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\to M \\ t &\mapsto x^{-1}(t\xi) \end{aligned}$$

Dies ist eine C^1-Kurve durch p.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f \circ \alpha\right)(t)\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(f \circ x^{-1}\right) \circ (x \circ \alpha)\right)(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(f \circ x^{-1}\right)(t\xi)\right)\right|_{t=0} = \\ &= \partial_j\left.\left(f \circ x^{-1}\right)\right|_{t=0} \cdot \xi^j = \xi^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p f = v(f) \end{aligned}$$

$\square_{3.1.12}$

3.2 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Seien M^n und N^k differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n,k \in \mathbb{N}$.
Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subseteq} M^n \to N^k$ gegeben.

- Stetigkeit ist definiert, da f die topologischen Räume M und N ineinander abbildet.
- Differenzierbarkeit wird wieder über Karten definiert:

3.2.1 Definition (differenzierbare Abbildung)

Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subseteq} M^n \to N^k$. f heißt *differenzierbar von der Klasse C^m*, falls es für alle $p \in \Omega$ eine Karte (x,U) um p und ein Karte (y,V) um $f(p)$ gibt, sodass

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap \Omega) \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^k \to y(V \cap f(\Omega)) \underset{\text{offen}}{\overset{\text{nicht notwendig}}{\subseteq}} \mathbb{R}^k$$

von der Klasse C^m ist.

3.2.2 Definition (Pushforward)

Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subseteq} M^n \to N^k$ differenzierbar, das heißt von der Klasse C^1. Für jedes $p \in \Omega$ definiert f eine lineare Abbildung

$$f_*\big|_p : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$$

die für $v \in \mathrm{T}_p M$ und $\varphi \in F^\infty_{f(p)} N$ als

$$\left(f_*\big|_p v\right)(\varphi) := v(\varphi \circ f)$$

definiert ist. f_* heißt *Pushforward* oder auch einfach *Differential*. (In manchen Büchern wird dies mit $\mathrm{d}f$ bezeichnet.)

TODO: Abb1 einfügen

Rechne diese Abbildung in lokalen Koordinaten aus:

Sei (x,U) eine Karte von M um p und (y,V) eine Karte von N um $f(p)$.

$$\begin{aligned} f_*\big|_p v &= \left(f_*\big|_p v\right)\left(y^i\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} = v\left(y^i \circ f\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} = \\ &= v\left(x^j\right) \cdot \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(y^i \circ f\right)\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} = \\ &= v^j \partial_j \left(y^i \circ f \circ x^{-1}\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} = A^i_j v^j \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} \end{aligned}$$

Dabei wird über i und j summiert.

$$A^i_j = \partial_j \left(y^i \circ f \circ x^{-1}\right)$$

A ist die Jacobi-Matrix von $y \circ f \circ x^{-1}$.

3.2.3 Lemma

i) Für $\mathrm{id} : M \to M$ gilt $\mathrm{id}_*\big|_p = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_p M}$.

ii) Für die Folge $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$ gilt:

$$(g \circ f)_*\big|_p = g_*\big|_{f(p)} \circ f_*\big|_p$$

Beweis

i) Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$A^i_j = \partial_j \left(x^i \circ \mathrm{id} \circ x^{-1}\right) = \delta^i_j$$

Also ist $\mathrm{id}_*\big|_p = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pM}$.

ii) Seien $v \in \mathrm{T}_pM$ und $\varphi \in F^\infty_{(g\circ f)(p)}Q$.

$$\begin{aligned}\left(\left(g \circ f\right)_* v\right)(\varphi) &= v\left(\varphi \circ g \circ f\right) = v \circ \left(\left(\varphi \circ g\right) \circ f\right) = \left(f_*\big|_p v\right)\left(\varphi \circ g\right) = \\ &= \left(g_*\big|_{f(p)} \cdot \left(f_*\big|_p v\right)\right)(\varphi) = \left(g_*\big|_{f(p)} \circ f_*\big|_p\right) v\end{aligned}$$

$\square_{3.2.3}$

3.2.4 Definition (Pullback)

Sei $f : \Omega \subseteq M \to N$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : C^\infty(N) &\to C^\infty(M) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

heißt *Pullback*. Durch Äquivalenzklassenbildung erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^*\big|_p : F^\infty_p N &\to F^\infty_p M \\ [\varphi] &\mapsto [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$\left(f^*\big|_p v\right)(\varphi) = v\left(\varphi \circ f\right) = v\left(f^*\varphi\right)$$

Der Satz von der lokalen Umkehrbarkeit nimmt folgende Form an:

3.2.5 Theorem (lokale Umkehrbarkeit)

Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, M^n und N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\Omega \subseteq M^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^s\left(\Omega, N^n\right)$ eine differenzierbare Abbildung der Klasse C^s mit $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathrm{rg}\left(f_*\left(p\right)\right) = n$. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus, das heißt es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von p und eine offene Umgebung V von $f(p)$, sodass

$$f\big|_U : U \to V$$

ein Diffeomorphismus ist.

Beweis

Wähle Karten (x,U) um p und (y,V) um $f(p)$. Dann hat auch

$$\mathrm{D}\left(y \circ f \circ x^{-1}\right)\big|_p$$

Rang n, da dies gerade in der Darstellung von f_* in lokalen Karten auftritt.
Also ist $y \circ f \circ x^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus und somit ist auch $f = y^{-1} \circ \left(y \circ f \circ x^{-1}\right) \circ x$ ein lokaler Diffeomorphismus. $\square_{3.2.5}$

3.2.6 **Theorem** (Rangtheorem)

Sei $f : \Omega \subseteq M^n \to N^k$ von der Klasse C^1 und der Pushforward f_* habe konstanten Rang $r \leq k,n$. Dann gibt es Karten (x,U) um p und (y,V) um $f(p)$, sodass gilt:

$$\left(y \circ f \circ x^{-1}\right)\left(\xi^1, \ldots, \xi^n\right) = \left(\xi^1, \ldots, \xi^r, 0, \ldots, 0\right)$$

Beweis

Wende das übliche Rangtheorem in lokalen Karten an. $\square_{3.2.6}$

3.2.7 **Definition** (Submersion, Immersion)

i) Eine differenzierbare Abbildung $f : M^n \to N^k$ heißt *Submersion*, falls für alle $p \in M$ die Abbildung $f_*\big|_p$ surjektiv ist, also Höchstrang hat und $k \leq n$ gilt.

ii) Eine differenzierbare Abbildung $f : M^n \to N^k$ heißt *Immersion*, falls $f_*\big|_p$ injektiv ist, also Höchstrang hat und $k \geq n$ ist.

iii) Eine Immersion heißt *Einbettung*, falls f injektiv ist und $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $f(M)$ mit der Relativtopologie versehen ist. $f(M)$ heißt *Untermannigfaltigkeit*. f ist automatisch ein Diffeomorphismus.

3.2.8 **Beispiel**

Sei $f : M^n \to \mathbb{R}^k$ eine Einbettung. Dann hat

$$f_* : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}^k$$

konstanten Rang n.

TODO: Abb3 einfügen

Sei (x,U) ein Karte von M^n um einen Punkt $p \in M$.

$$f \circ x^{-1} : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

ist dann eine lokale Parametrisierung von $f(M)$.

Also ist $f(M)$ auch eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ wie wir sie früher definiert haben.

TODO: Abb4 einfügen

3.3 Grundlagen der Tensoranalysis

Sei $v \in \mathrm{T}_p M$. Zu einer Karte (x,U) um p gibt es eine zugehörige Basis $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ von $\mathrm{T}_p M$. Für $f \in F_p^\infty$ gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \partial_i \left(f \circ x^{-1}\right) \tag{3.1}$$

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{3.2}$$

$$v^i = v\left(x^i\right)$$

Transformationsverhalten der Basis $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Sei (y,V) eine weitere Karte. Verwende

$$v = v\left(y^j\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

für $v = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \left(y^j\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \partial_i\left(y^j \circ x^{-1}\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p}$$

$$\begin{aligned} v &= v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \tilde{v}^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \\ \tilde{v}^j &= v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Also transformiert sich v^i kontravariant.

3.3.1 Bemerkung und Definition (Kotangentialraum)

Definiere T_p^*M als den Dualraum von T_pM, den sogenannten *Kotangentialraum*.

$$E := \mathrm{T}_pM \qquad\qquad E^* := \mathrm{T}_p^*M$$

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von E. Betrachte die zugehörige duale Basis von E^* und lineare Funktionale $\left(\varphi^1, \ldots, \varphi^n\right)$ mit $\varphi^i\left(e_j\right) = s_j^i$.
In der Karte (x,U) haben wir die folgenden Basen:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p && \text{Basis von } \mathrm{T}_pM \\ &\left.\mathrm{d}x^1\right|_p, \ldots, \left.\mathrm{d}x^n\right|_p && \text{zugehörige duale Basis} \end{aligned}$$

Die duale Basis ist definiert über:

$$\left.\mathrm{d}x^j\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \delta_i^j$$

Untersuche das Transformationsverhalten der $\mathrm{d}x^i$. Sei (y,V) eine andere Karte.

$$\left.\mathrm{d}x^i\right|_p = a_k^i \left.\mathrm{d}y^k\right|_p$$

$$\left.\mathrm{d}x^i\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = \left(a_l^i \left.\mathrm{d}y^l\right|_p\right) \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = a_l^i \underbrace{\left(\left.\mathrm{d}y^l\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right)\right)}_{=\delta_k^l} = a_l^i \delta_k^l = a_k^i$$

$$a_k^i = \left.\mathrm{d}x^i\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = \left.\mathrm{d}x^i\right|_p \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^k} \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right) = \frac{\partial x^l}{\partial y^k} \underbrace{\left.\mathrm{d}x^i\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right)}_{=\delta_l^i} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$$

Also transformiert sich $\mathrm{d}x^i\big|_p$ kontravariant:

$$\boxed{\mathrm{d}x^i\big|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k\big|_p}$$

Sei $\varphi \in \mathrm{T}_p^*M$ ein Kotangentialvektor. Betrachte die Basisdarstellung in der Karte (x,U):

$$\varphi = \varphi_i \mathrm{d}x^i\big|_p = \varphi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j\big|_p = \tilde{\varphi}_j \mathrm{d}y^j\big|_p$$

Also gilt:

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\varphi_i$$

Dies ist kovariantes Transformationsverhalten.
Sei $\varphi \in \mathrm{T}_p^*M$ und $v \in \mathrm{T}_pM$:

$$\varphi(v) = \tilde{\varphi}_i \tilde{v}^i = \left(\varphi_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^l}v^l\right) = \varphi_k \underbrace{\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^l}\right)}_{=\delta^k_l} v^l = \varphi_k v^k$$

3.3.2 **Konstruktion** (Tensorprodukt)

Seien k ein Körper und E,F zwei k-Vektorräume endlicher Dimension.
Betrachte die Konstruktion des Tensorprodukts $E \otimes F$:

- Bilde das kartesische Produkt $E \times F = \big\{(u,v)\,\big|\, u \in E, v \in F\big\}$.
- Bilde formale Linearkombinationen $\langle E \times F\rangle$, das heißt ein $\Phi \in \langle E \times F\rangle$ hat die Form

  $$\Phi = \lambda_1 (u_1,v_1) + \lambda_2 (u_1,v_2) + \ldots + \lambda_L (u_L,v_L)$$

  mit $\lambda_i \in k$, $u_i \in E$ und $v_i \in F$ für $i \in \{1,\ldots,L\}$.
- Führe eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein, so dass die folgenden Relationen gelten:

  $$\begin{aligned} \lambda(u,v) &\sim (\lambda u,v) \sim (u,\lambda v) \\ ((u+v),w) &\sim (u,w) + (v,w) \\ (u,(v+w)) &\sim (u,v) + (u,w) \end{aligned}$$

Dann ist das *Tensorprodukt* definiert als:

$$E \otimes F = {}^{\langle E \times F\rangle}\big/_{\sim}$$

Eigenschaften des Tensorproduktes:

$$E^{r,s} := \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{r} \otimes \underbrace{E^* \otimes \ldots \otimes E^*}_{s}$$

1. Es gibt eine eindeutige multilineare Abbildung

$$\varphi : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{r} \times \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{s} \to E^{r,s}$$

$$(u_1, \ldots, v_r, a_1, \ldots, a_s) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_s$$

   Zum Beispiel gilt:

$$\varphi\left(2v_1, v_2, \ldots, v_r, a_1, \ldots, a_0\right) = 2\varphi\left(v_1, v_2, \ldots, v_r, a_1, \ldots, a_0\right) = \varphi\left(v_1, 2v_2, \ldots, v_r, a_1, \ldots, a_0\right)$$

2. *Universelle Eigenschaft*: Zu jeder bilinearen Abbildung $\Phi : E \times F \to \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\psi : E \otimes F \to \mathbb{R}$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ E \otimes F \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

3. Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von E und $(f_1, \ldots, f_m)$ eine Basis von F, so ist

$$(e_i \otimes f_j)_{\substack{i \in \{1, \ldots, n\} \\ j \in \{1, \ldots, m\}}}$$

   eine Basis von $E \otimes F$, also ist $\dim E \otimes F = n \cdot m$.
   $E^{r,s}$ hat die Basis

$$\left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\right)_{\substack{i_k \in \{1, \ldots, n\} \\ j_l \in \{1, \ldots, n\}}}$$

   und daher ist $\dim E^{r,s} = n^{r+s}$, wobei die Basis $\left(e^i\right)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ von E^* die zu $(e_i)\, i \in \{1, \ldots, n\}$ duale Basis von E ist.

3.3.3 Beispiel

Betrachte $E = \mathbb{R}^2$ mit der kanonischen Basis (e_1, e_2) und ihrer dualen Basis $\left(e^1, e^2\right)$ von $E^* \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^2$. Diese Isomorphie ist allerdings nicht kanonisch.

a) $E^{1,1}$ ist ein 4-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\left(e_1 \otimes e^1, e_2 \otimes e^1, e_1 \otimes e^2, e_2 \otimes e^2\right)$.
   Ein $T \in E^{1,1}$ hat die Basisdarstellung:

$$T = t^i_j e_i \otimes e^j$$

   T kann mit einer linearen Abbildung auf E identifiziert werden, denn für ein $v = v^i e_i \in E$ gilt:

$$(Tv)_i = t^i_j v^j$$

$$\begin{pmatrix} (Tv)^1 \\ (Tv)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 \\ t^2_1 & t^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Koordinatenfrei: Sei $u \in E$ und $\varphi \in E^*$, also:

$$u \otimes \varphi \in E^{1,1}$$

Dann ist

$$(u \otimes \varphi)(v) = u \cdot \varphi(v)$$

die zugehörige lineare Abbildung auf E.
Sei $T = t^i_j \left(e_i \otimes e^j\right)$, so ist:

$$Tv = t^i_j e_i e^j(v) = e_i t^i_j v^j$$

b) $E^{0,2} = E^* \otimes E^*$ hat die Basis $\left(e^i \otimes e^j\right)_{i,j \in \{1,2\}}$. Sei $T \in E^{(0,2)}$ mit $T = t_{ij} e^i \otimes e^j$.
Seien $v = v^i e_i, w = w^i e_i \in E$, dann ist:

$$t_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R}$$

Koordinatenfrei:

$$\left(e^i \otimes e^j\right)(v,w) = e^i(v) \cdot e^j(w)$$

Setze linear fort:

$$T(v,w) = t_{ij}\left(e^i \otimes e^j\right)(v,w) = t_{ij} e^i(v) e^j(w) = t_{ij} v^i w^j$$

Also ist $T : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinear, das heißt T eine Bilinearform.

c) $E^{1,2}$ hat Basis $\left(e_i \otimes e^j \otimes e^k\right)_{i,j,k \in \{1,2\}}$ und ist 8 dimensional. Ein $T = t^i_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k \in E^{1,2}$ kann interpretiert werden als bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} T &: E \times E \to E \\ (T(u,v))^i &\mapsto t^i_{jk} v^j w^k \end{aligned}$$

d) Ein $T \in E^{n,m}$ kann also aufgefasst werden als eine multilineare Abbildung:

$$T : E^m \to E^n$$

3.3.4 Bemerkung und Definition (Tensor)

Betrachte speziell $E = \mathrm{T}_p M$ und $E^* = \mathrm{T}^*_p M$.

$$\mathrm{T}^{r,s}_p M := \mathrm{T}_p M \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_p M \otimes \mathrm{T}^*_p M \otimes \ldots \otimes T^*_p M$$

ist ein n^{r+s}-dimensionaler Vektorraum und ein $A \in T^{r,s} M$ heißt *Tensor* der Stufe (r,s) in $p \in M$.
Sei (x,U) eine Karte, die folgende Basen induziert:

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)_{i \in \{1,\ldots,n\}} \quad \text{Basis von } \mathrm{T}_p M$$

$$\left(\left.\mathrm{d}x^i\right|_p\right)_{i \in \{1,\ldots,n\}} \quad \text{zugehörige duale Basis von } \mathrm{T}^*_p M$$

A hat dann die Basisdarstellung:

$$A = A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\bigg|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}\big|_p \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}\big|_p$$

Untersuche nun das Transformationsverhalten: Sei (y,V) eine neue Karte.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_p$$

$$\mathrm{d}x^j\big|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^l}\mathrm{d}y^l\big|_p$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\bigg|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}\big|_p \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}\big|_p = \\
&= \left(\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial}{\partial y^{k_1}}\bigg|_p\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial}{\partial y^{k_r}}\bigg|_p\right) \otimes \left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\mathrm{d}y^{l_1}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}\mathrm{d}y^{l_s}\right) = \\
&= \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\bigg|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\bigg|_p \otimes \mathrm{d}x^{l_1}\big|_p \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{l_s}\big|_p
\end{aligned}$$

Somit ist

$$A = \tilde{A}^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\bigg|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\bigg|_p \otimes \mathrm{d}x^{l_1}\big|_p \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x^{l_s}\big|_p$$

mit:

$$\tilde{A}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} = A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \cdot \ldots \cdot \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\bigg|_p \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}$$

Nachdem wir uns das Transformationsverhalten klar gemacht haben, schreiben wir im Folgenden meist nur die Komponenten in einer beliebigen Karte auf:

$$t^{i_1\dots i_r}_{j_1\cdots j_s} \quad \text{Tensor der Stufe } (r,s)$$

3.3.5 Definition (Operationen auf Tensoren)

1. Multiplikation von Tensoren: Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{r_1,s_1}M \times \mathrm{T}^{r_s,s_2}M &\twoheadrightarrow \mathrm{T}^{r_1+r_2,s_1+s_2}M \\
\left(A^{i_1\dots i_{r_1}}_{j_1\dots j_{s_1}}, B^{k_1\dots k_{r_2}}_{l_1\dots l_{s_2}}\right) &\mapsto A^{i_1\dots i_{r_1}}_{j_1\dots j_{s_1}} B^{k_1\dots k_{r_2}}_{l_1\dots l_{s_2}}
\end{aligned}$$

   induziert eine Abbildung:

$$\mathrm{T}^{r_1,s_1}M \otimes \mathrm{T}^{r_s,s_2}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^{r_1+r_2,s_1+s_2}M$$

Koordinatenfrei heißt das:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_p^{r_1,s_1} \otimes \mathrm{T}_p^{r_2,s_2} &= \underbrace{\mathrm{T}_pM \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_pM}_{r_1} \otimes \underbrace{\mathrm{T}_p^*M \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_p^*M}_{s_1} \otimes \\ &\otimes \underbrace{\mathrm{T}_pM \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_pM}_{r_2} \otimes \underbrace{\mathrm{T}_p^*M \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_p^*M}_{s_2} = \\ &= \mathrm{T}_p^{r_1+r_2,s_1+s_2}M\end{aligned}$$

Bemerkung: Die *Tensoralgebra*

$$\tau := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathrm{T}^{r,s}$$

ist eine Algebra, das heißt ein Vektorraum mit zusätzlicher Multiplikation:

$$\begin{aligned}\otimes : \tau \times \tau &\to \tau \\ (A^{r_1,s_1},A^{r_2,s_2}) &\mapsto A^{r_1,s_1} \otimes A^{r_2,s_2}\end{aligned}$$

2. *Verjüngung* oder *Kontraktion*:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_p^{r,s}M &\to \mathrm{T}_p^{r-1,s-1} \\ A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} &\mapsto A^{i_1\ldots i_{r-1}k}_{j_1\ldots j_{s-1}k}\end{aligned}$$

Dabei wird über k gemäß der Einsteinschen Summenkonvention summiert: Über doppelt auftretende Indizes, von denen einer kontravariant und einer kovariant ist, wird stets summiert.

3.3.6 Beispiel

Für die linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}\,(E,E)$ auf E gilt (vergleiche Beispiel 3.3.3 a)):

$$E \otimes E^* \overset{\sim}{=} \mathrm{Hom}\,(E,E)$$

Sei $A^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^j \in E \otimes E^*$, dann ist die Verjüngung

$$A^i_i = \mathrm{Tr}\,(A)$$

gerade die Spur der linearen Abbildung.

3.3.7 **Definition** (Tensorfeld, Vektorfeld)

Nehme an, man habe für jedes $p \in \Omega \overset{\text{offen}}{\subseteq} M$ einen Tensor $A\,(p) \in T_p^{r,s}\,(M)$ gegeben, das heißt in Komponenten einer Karte (x,U):

$$A\,(p) = A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\,(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \otimes \left.\mathrm{d}x^{j_1}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\mathrm{d}x^{j_s}\right|_p$$

Sind alle Komponentenfunktionen glatt als reelle Funktionen in unserer Karte, das heißt die Abbildungen $A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\left(x^{-1}\,(\xi)\right) : x\,(U) \to \mathbb{R}$ sind glatt, so heißt A *Tensorfeld.*
Ein Tensorfeld der Stufe (1,0) heißt *Vektorfeld*.

3.3.8 Bemerkung und Beispiel

Betrachte zum Beispiel ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathrm{T}_p M$:

$$v(p) \in \mathrm{T}_p^{1,0} M = \mathrm{T}_p M$$

$$q \in U$$

$$v(q) = v^i(q) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \qquad\qquad v^i(q) := v(q)\left(x^i\right)$$

$$v^i(x_1, \ldots, x_n) := v^i\left(x^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right)$$

$$\begin{aligned} v^i : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) &\mapsto \left(v^1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, v^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right) \end{aligned}$$

Beachte: Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, so ist die Definition des Tensorfelds unabhängig von der Wahl der Karte.

$$\frac{\partial}{\partial x^k} A^i_j =: B^i_{jk}$$

ist im Allgemeinen *kein* Tensor der Stufe (1,2).
Stattdessen verwendet man:

- Die *kovariante Ableitung* mit *den Christoffel-Symbolen* Γ^i_{kl}:
$$\nabla_k A^i_j = \partial_k A^i_j + \Gamma^i_{kl} A^l_j - \Gamma^b_{kj} A^i_b$$
- Die *äußere Ableitung*:
$$\mathrm{d}A = (\partial_i A_j - \partial_j A_i)\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \in \mathrm{T}_p^{(0,2)} M$$
Darauf kommen wir später bei Differentialformen zurück.

3.4 Das Tangentialbündel, Vektorbündel

Ziel: Mache die Menge der Tangentialräume zu einer Mannigfaltigkeit.

3.4.1 Definition (assoziierte Bündelkarte)

Sei $p \in M$ und (x,U) eine Karte um p.
Für jedes $q \in U$ ist dann $\mathrm{T}_q M$ ein n-dimensionaler Vektorraum. Die abstrakte Vereinigung

$$\dot{\bigcup_{q \in U}} \mathrm{T}_q M$$

ist disjunkt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{x} : \bigcup_{q \in U} \mathrm{T}_q M &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ v \in \mathrm{T}_q M &\mapsto \left(x(q), \left(v\left(x^1\right), \ldots, v\left(x^n\right)\right)\right) \end{aligned}$$

heißt *die x assoziierte Bündelkarte.*

3.4.2 Bemerkung

$v\left(x^i\right)$ sind die Komponenten der Basisdarstellung, denn für eine andere Karte (y,V) um p gilt:

$$v = v\left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q = v\left(y^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_q$$

Für die assoziierten Bündelkarten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left(\overline{x} \circ \overline{y}^{-1}\right) : \overline{y}\left(\bigcup_{q\in U\cap V} \mathrm{T}_q M\right) &\to \overline{x}\left(\bigcup_{q\in U\cap V} \mathrm{T}_q M\right)\\ (a,b) &\mapsto \left(\left(x\circ y^{-1}\right)(a), \left(\left.\frac{\partial x^1}{\partial y^j}\right|_a b^j, \ldots, \left.\frac{\partial x^n}{\partial y^j}\right|_a b^j\right)\right)\end{aligned}$$

$$b^i = v\left(y^i\right)$$

Die Komponenten von v transformieren sich kontravariant:

$$v\left(x^i\right) = v\left(y^j\right) \cdot \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_q$$

$x \circ y^{-1}$ ist der Diffeomorphismus des Kartenwechsels. Die Abbildung

$$b \mapsto \left(\left.\frac{\partial x^1}{\partial y^j}\right|_a b^j, \ldots, \left.\frac{\partial x^n}{\partial y^j}\right|_a b^j\right)$$

ist die lineare Transformation mit der Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildung.
Da die Jacobi-Matrix invertierbar ist, ist die Bündelkarten-Wechselabbildung ein Diffeomorphismus.

Betrachte:

$$\mathrm{T}M := \bigcup_{p\in M} \mathrm{T}_p M$$

Wähle auf $\mathrm{T}M$ die Topologie so, dass die Bündelkartenabbildungen Homöomorphismen werden.
Dann ist $\mathrm{T}M$ ein topologischer Hausdorff-Raum.
Ist $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas von M, so bilden die assoziierten Bündelkarten einen differenzierbaren Atlas von $\mathrm{T}M$.

3.4.3 Definition (Tangentialbündel, Faser, Schnitt des Bündels)

$\mathrm{T}M = \bigcup_{q\in U} \mathrm{T}_q M$ mit dem Atlas $\{(\overline{x}, TM)\}$ der assoziierten Bündelkarten heißt *das Tangentialbündel.*
Es ist eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit zusätzlicher Struktur:
Die Projektion auf die Basis ist:

$$\begin{aligned}\pi : \mathrm{T}M &\to M\\ \underbrace{v_p}_{\in \mathrm{T}_p M} &\mapsto p\end{aligned}$$

TODO: Abb2 einfügen

Ein Tangentialraum T_pM heißt *Faser* des Bündels.

Eine Abbildung $v : \Omega \subseteq M \to \mathrm{T}M$ mit $\pi \circ v = \mathrm{id}$ heißt *Vektorfeld.* Also liegt

$$v(p) \in \pi^{-1}(p) = \mathrm{T}_pM$$

in der zugehörigen Faser.

Hat man eine allgemeinere Faser, so heißt $v : \Omega \subseteq M \to \mathrm{T}M$ mit $\pi \circ v = \mathrm{id}$ ein *Schnitt des Bündels.*

3.4.4 **Definition** (Vektorbündel)

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und V ein k-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Ein komplexer Vektorraum geht analog.)

N heißt *Vektorbündel über M mit Faser V*, falls gilt:

i) N ist $(n+k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

ii) Eine glatte Projektion $\pi : N \to M$ ist gegeben.

iii) Zu einem Atlas $\{(x,U)\}$ von M ist ein zugehöriger Bündelatlas $\mathcal{A} = \left\{\left(\tilde{x},\tilde{U}\right)\right\}$ gegeben, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \pi^{-1}(U) \\ \tilde{x} : \tilde{U} &\to \mathbb{R}^n \times V \\ \tilde{p} &\mapsto (x(\pi(\tilde{p})),v) \end{aligned}$$

iv) Die Bündelkartenwechselabbildungen haben die Form:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{x} \circ \tilde{y}^{-1}\right) : (y,v) &\mapsto (x,w) \\ w &= A\big|_y v \end{aligned}$$

Dabei ist $A\big|_y : V \to V$ linear.

3.4.5 **Beispiel** (triviales Vektorbündel)

Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und V ein Vektorraum, dann ist

$$N := M \times V$$

mit

$$\tilde{x}((p,v)) = (x(p),v)$$

das sogenannte *triviale Vektorbündel.* (Trivial bedeutet, dass N die Struktur eines kartesischen Produkts hat.)

- Beispiel: $M = S^1$ und $V = \mathbb{R}$.

$$N := M \times V = S^1 \times \mathbb{R}$$

TODO: Abb3 einfügen

- Beispiel: Das Möbiusband:
  TODO: Abb4 einfügen
  Betrachte $[0,1] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und identifiziere $(0,x)$ mit $(1,-x)$ in einer Äquivalenzrelation $\sim$. Dann ist

  $$N : [0,1] \times \mathbb{R}/_{\sim}$$

  das Möbiusband. Dies ist ein nicht-triviales Bündel, aber lokal, also in einer Karte U ist $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}$ ein triviales Bündel.

3.4.6 Bemerkung und Definition (Basis, Projektion, Faser)

Seien N eine $n+k$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, M, die sogenannte *Basis* sei eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\pi : N \to M$ die sogenannte *Projektion auf die Basis*, die differenzierbar beziehungsweise glatt sei.

Für $p \in M$ ist die *Faser* $\pi^{-1}(p)$ *(in p)* als Vektorraum isomorph zu einem k-dimensionalen reellen Vektorraum V.

TODO: Abb1 einfügen

Damit dies Sinn macht, muss der Atlas auf N mit der Vektorraumstruktur der Faser verträglich sein, das heißt:

Zu jeder Karte (x,U) um $p \in M$ gibt es eine Karte $\left(\overline{x},\overline{U}\right)$ von N mit $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$.

$$\begin{aligned} \overline{x} : \overline{U} &\to \mathbb{R}^n \times V \\ q &\mapsto (x(\pi(q)), v(q)) \end{aligned}$$

Betrachte ein glattes Vektorfeld $u : M \to \mathrm{T}M$ mit $\pi \circ u = \mathrm{id}$.

$\mathrm{T}^{r,s}M$ ist ein Vektorbündel mit Faser $\mathrm{T}^{r,s}_p M$.

Ein Tensorfeld $w : M \to \mathrm{T}^{r,s}M$ ist glatt mit $\pi \circ w = \mathrm{id}$.

4 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

4.1 Die Riemannsche Metrik

Zur Motivation:
Sei M eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, das heißt es gibt ein $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ mit regulärem Wert von 0 und $M := F^{-1}(0)$ eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

$$\mathrm{T}_p M = \ker\left(\mathrm{D}F\big|_p\right)$$

ist eine Hyperebene in $\mathbb{R}^N$. Man kann die Vektorraumstruktur und die Euklidische Struktur des $\mathbb{R}^N$ ausnutzen, um

1. die Länge von Kurven zu berechnen:
   Sei zum Beispiel $\alpha : [a,b] \to M \subseteq \mathbb{R}^N$ und $\dot\alpha(t) \in \mathrm{T}_{\alpha(t)}M$ oder $\dot\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$.
   $$\begin{aligned} \|\dot\alpha(t)\| &= \sqrt{\langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle} \\ L(\alpha) &= \int_a^b \|\dot\alpha(t)\| \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
   gibt die Länge der Kurve an.
2. den Schnittwinkel zwischen zwei Kurven durch p zu berechnen:
   Seien α,β zwei Kurven durch p mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$.
   TODO: Abb3 einfügen
   $$\cos\gamma = \frac{\left\langle \dot\alpha(0), \dot\beta(0)\right\rangle}{\left\|\dot\alpha(0)\right\| \left\|\dot\beta(0)\right\|}$$
   bestimmt den Schnittwinkel.
3. den Flächeninhalt zu berechnen:
   Es gibt eine explizite Formel zur Berechnung des Flächeninhalts.

Beachte: Man braucht hier nur die Einschränkung des Euklidischen Skalarproduktes auf den Tangentialraum, also:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle_p : \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \langle u,v \rangle_{\mathbb{R}^N} \end{aligned}$$

Fasse dabei $u,v \in \mathrm{T}_p M$ als Vektoren im $\mathbb{R}^N$ auf.
Verallgemeinere dies so, dass auf $\langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^N}$ verzichtet wird.

4.1.1 **Definition** (Riemannsche Metrik)

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Bilinearform

$$\langle .,. \rangle_p : \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}$$

heißt *Riemannsche Metrik in p*, falls sie

i) symmetrisch

$$\langle u,v \rangle_p = \langle v,u \rangle_p$$

ii) und positiv definit ist:

$$\langle u,u \rangle_p \geq 0 \qquad\qquad \langle u,u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

4.1.2 **Beispiel** (erste Fundamentalform)

Bei einer Untermannigfaltigkeit $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ kann man $\mathrm{T}_p M$ mit einem n-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^N$ identifizieren und setzen:

$$\begin{aligned} g := \langle .,. \rangle_p : \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \langle u,v \rangle_{\mathbb{R}^N} \end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte *induzierte Metrik* oder *erste Fundamentalform*.

Mit Tensoren kann man dies für ein $p \in M$ folgendermaßen ausdrücken:

$$g \in \mathrm{T}_p^{0,2} M = \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M$$

ist ein Tensor der Stufe (0,2) und kann in einer Basis dargestellt werden als:

$$g = g_{ij} \cdot \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

g kann mit einer Bilinearform identifiziert werden:

$$\begin{aligned} g : \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto g_{ij} u^i v^j \end{aligned}$$

Dabei ist $u = u^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ und $v = v^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$.
Ohne Indizes kann man $\varphi \otimes \psi \in \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M$ zu einer Bilinearform $\mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}$ machen:

$$(\varphi \otimes \psi)(u,v) := \varphi(u) \cdot \psi(v) \in \mathbb{R}$$

4.1.3 **Definition** (Riemannsche Metrik)

Ein Tensorfeld der Stufe (0,2) auf M heißt *Riemannsche Metrik auf M*, falls

i) g symmetrisch ist, also $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$ für alle $p \in M$.

ii) die zugehörige Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto g_{ij} u^i v^j \end{aligned}$$

für alle $p \in M$ positiv definit ist.

$(g_{ij})_{i,j}$ heißt *der metrische Tensor*. In einer Karte (x,U) um p gilt:

$$g\left(x\right) = g_{ij}\left(x\right) \mathrm{d}x^i\big|_p \otimes \mathrm{d}x^j\big|_p$$

Beim Wechsel zu einer weiteren Karte (y,V) um p transformieren sich die Komponenten wie folgt:

$$\tilde{g}_{kl}\left(y\right) = g_{ij}\left(x\right) \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right|_p \cdot \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right|_p$$

4.1.4 Beispiel

i) Betrachte $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten $y := (r,\varphi)$ aufgefasst als Karte. $x = \mathrm{id}$ ist die kartesische Karte und die Transformation ist:

$$x^1 = r\cos\varphi \qquad\qquad x^2 = r\sin\varphi$$

Drücke die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten aus.
TODO: Abb4 einfügen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^1} &= \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x^1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x^1} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_x \\ \frac{\partial}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^2} = -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x^1} + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}_x \end{aligned}$$

Dabei sind

$$\frac{\partial}{\partial x^{1/2}} = e_{1/2}$$

die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\frac{\partial}{\partial y^1}\right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1},\frac{\partial}{\partial y^1}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 1 \\ g_{21} = g_{12} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\frac{\partial}{\partial y^2}\right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1},\frac{\partial}{\partial y^2}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \\ g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^2},\frac{\partial}{\partial y^2}\right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y^2},\frac{\partial}{\partial y^2}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = r^2 \end{aligned}$$

ii) Betrachte Hyperbel-Koordinaten:

TODO: Abb5 einfügen

$$V = \left\{\left(x^1,x^2\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 > \left|x^1\right|\right\} \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$$

$$y^1 = x^1 \qquad\qquad y^2 = \sqrt{\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2}$$
$$x^1 = y^1 \qquad\qquad x^2 = \sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}$$

$x = \left(x^1,x^2\right)$ sei das kartesische Koordinatensystem und $g_{ij}\left(x\right) = \delta_{ij}$ die euklidischen Metrik. Berechne den metrischen Tensor $\tilde{g}$ in der Karte y. Verwende dazu das Transformationsverhalten des metrischen Tensors:

$$\tilde{g}_{kl}\left(y\right) = g_{ij}\left(x\right) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{11}\left(y\right) &= \delta_{11}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \delta_{22}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial y^1} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\right)^2 = \\ &= 1^2 + \left(\frac{2y^1}{2\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}}\right)^2 = 1 + \frac{\left(y^1\right)^2}{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{12}\left(y\right) = \tilde{g}_{21}\left(y\right) &= \delta_{11}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \delta_{22}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \\ &= 1 \cdot 0 + \frac{y^1}{\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}} = \frac{y^1 y^2}{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{22}\left(y\right) &= \delta_{11}\frac{\partial x^1}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \delta_{22}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)^2 = \\ &= 0^2 + \left(\frac{y^2}{\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}}\right)^2 = \frac{\left(y^2\right)^2}{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}\end{aligned}$$

4.1.5 Tensorkalkül mit Metrischem Tensor

Sei $v \in \mathrm{T}_pM$ und $g : \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ die Riemannsche Metrik in p.
Sei $\varphi_v \in \mathrm{T}_p^*M$ ist definiert durch $\varphi_v\left(w\right) := g\left(v,w\right) = \left\langle v,w\right\rangle_p$.
Man kann also T_pM mit Hilfe der Metrik kanonisch mit T_p^*M identifizieren. In Komponenten heißt das:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$\varphi_v\left(w\right) = g_{ij}v^i \cdot w^j$$

Also folgt:

$$\varphi_v = \varphi_i \mathrm{d}x^i \qquad\qquad \varphi_i = g_{ij}v^j$$

Denn es gilt:

$$\varphi_v\left(w\right) = \left(\varphi_i \mathrm{d}x^i\right)\left(w^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \varphi_i w^j \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{=\delta^i_j} = \varphi_i w^i$$

Dann gilt:

$$\varphi_i = g_{ij} v^j$$

Durch Überschieben mit der Metrik kann man aus einem kontravarianten Index einen kovarianten Index machen.
Mache umgekehrt aus einem kovariantem Index einen kontravarianten Index. Setze dann:

$$g^{ij} := \left(g^{-1}\right)_{ij}$$

Also gilt $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ und $g^{jk} = g^{kj}$. Sei $\varphi \in \mathrm{T}^*_p M$ mit $\varphi = \varphi_j \mathrm{d}x^j$. Dann gibt es ein $v \in \mathrm{T}_p M$ mit:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad\qquad v^i := g^{ij} \varphi_j$$

Allgemein ist für ein Tensorfeld $v^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_l}$ der Stufe (r,s) nun

$$v^{i_2 \dots i_r}_{k j_1 \dots j_l} := g_{k i_1} v^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_l}$$

ein Tensorfeld der Stufe $(r-1,s+1)$.
Durch Überschieben mit der Metrik kann man allgemein $\mathrm{T}^{r,s}$ mit $\mathrm{T}^{r+k,s-k}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ identifizieren.
Zweimaliges Überschieben liefert wieder den ursprünglichen Tensor:

$$\begin{aligned} v^i &\in \mathrm{T}_p M \\ g_{ij} v^j &\in \mathrm{T}^*_p M \\ g^{ki}\left(g_{ij} v^j\right) &= \underbrace{\left(g^{ki} g_{ij}\right)}_{=\delta^k_j} v^j = v^k \end{aligned}$$

4.2 Der Minkowski-Raum, Lorentz-Mannigfaltigkeiten

4.2.1 Definition (Minkowski-Raum, nicht entartet)

Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ (oder ein abstrakter 4-dimensionaler reeller Vektorraum) mit der Bilinearform

$$\langle u,v \rangle = u^0 v^0 - \sum_{i=1}^{3} u^i v^i$$

heißt *Minkowski-Raum.*

Bemerkung

Diese Bilinearform ist *nicht* positiv definit, denn zum Beispiel gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \qquad\qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$$

Daher ist die Bilinearform kein Skalarprodukt. Aber sie ist *nicht entartet*, das heißt für alle $u \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$\underset{v \in \mathbb{R}^4}{\forall} \langle u,v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

Allgemein:

4.2.2 Definition (Signatur, Pseudo-Orthonormalbasis)

Eine nicht entartete Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V hat *Signatur* (p,q), falls es eine Basis $(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,p+q}$ von V gibt, sodass gilt:

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{falls } \alpha = \beta \in \{1,\dots,p\} \\ -1 & \text{falls } \alpha = \beta \in \{p+1,\dots,p+q\} \end{cases}$$

Eine solche Basis nennt man *Pseudo-Orthonormalbasis.*

4.2.3 Satz

Die Signatur ist wohldefiniert, sie hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Beweis

Siehe zum Beispiel: Israel Gohberg, Leiba Rodman, Peter Lancaster: *Matrices and indefinite scalar products*, Birkhäuser, 1983 $\square_{4.2.3}$

4.2.4 Bemerkung und Definition (Minkowski-Signatur, pseudo-Riemannsch)

Falls die Signatur

- $(p,0)$ ist, ist $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt.
- $(0,q)$ ist, ist $-\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt.
- $(1,q)$, *Minkowski-Signatur* genannt, ist, haben wir einen Minkowski-Raum.
- (p,q) ist, heißt der Raum *pseudo-Riemannsch.*

4.2.5 Definition (pseudo-Riemannsche Metrik)

Sei M^{p+q} eine differenzierbar Mannigfaltigkeit.
Ein Tensorfeld der Stufe (0,2) auf M heißt *pseudo-Riemannsche Metrik* der Signatur (p,q), falls gilt:

i) g ist symmetrisch.

ii) Die Bilinearform

$$g : \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto g_{ij} u^i w^j$$

ist nicht-entartet und hat die Signatur (p,q).

(M,g) heißt *pseudo-Riemannsche* Mannigfaltigkeit. Bei der Signatur (1,3) heißt M *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.
Der Minkowski-Raum ist eine spezielle Lorentz-Mannigfaltigkeit.

4.2.6 Tensorkalkül in Lorentz-Mannigfaltigkeit

Sei M eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und seien $u,v \in \mathrm{T}_p M$. Wähle eine Pseudo-Orthonormalbasis $(e_i)_{i=0,\dots,3}$, das heißt:

$$u = u^i e_i \qquad\qquad v = v^i e_i$$

$$\langle u,v\rangle = g_{ij} u^i v^j$$

Es gilt:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$$
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2.7 Definition (kausale Struktur)

Ein $u \in \mathrm{T}_p M$ heißt

- *zeitartig*, falls $\langle u,u\rangle_p > 0$ ist.
- *raumartig*, falls $\langle u,u\rangle_p < 0$ ist.
- *lichtartig*, falls $\langle u,u\rangle_p = 0$ ist.

Eine Kurve $\gamma : (a,b) \to M$ heißt *kausal*, wenn $\dot\gamma(\tau) \in \mathrm{T}_{\gamma(\tau)} M$ für alle $\tau \in (a,b)$ zeitartig oder lichtartig ist.
Kausalitätsprinzip:
Information kann nur längs kausalen Kurven transportiert werden.
TODO: Abb1 einfügen

4.3 Länge von Kurven

Sei (M^n,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I = [a,b] \to M$ eine glatte Kurve.

4.3.1 Definition (Länge)

Die Länge L der Kurve γ ist definiert durch:

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(\tau))\, \dot\gamma^i(\tau)\, \dot\gamma^j(\tau)} \mathrm{d}\tau$$

Zum Vergleich die Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist:

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$$

Wohldefiniertheit:

- Die Unabhängigkeit von der Wahl der Karte auf M ist klar, weil $g_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$ ein Skalar ist.
- Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von der Parametrisierung der Kurve.

4.3.2 Definition (reguläre Kurve)

Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ heißt *regulär*, wenn für alle $\tau \in [a,b]$ schon $\dot{\gamma}(\tau) \neq 0$ ist.

4.3.3 Lemma

Für reguläre Kurven ist die Länge unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Beweis

Sei $\gamma : I := [a,b] \to M$ eine glatte reguläre Kurve und $\tilde{\gamma} : J \to M$ eine andere Parametrisierung. Dann ist $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : J \to I$ ein Diffeomorphismus ist.

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_J \sqrt{g_{ij}(\tilde{\gamma}(\tau))\,\dot{\tilde{\gamma}}^i(\tau)\,\dot{\tilde{\gamma}}^j(\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma \circ \varphi)(\tau)$$
$$\dot{\tilde{\gamma}}^i(\tau) = \gamma'^i\big|_{\varphi(\tau)}\dot{\varphi}(\tau)$$

Also folgt:

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_J \sqrt{g_{ij}\gamma'^i\big|_{\varphi(\tau)}\gamma'^j\big|_{\varphi(\tau)}}\,|\dot{\varphi}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

Die Substitution $t = \varphi(\tau)$ mit $\mathrm{d}t = \dot{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ liefert, da φ ein Diffeomorphismus ist.

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_I \sqrt{g_{ij}\gamma'^i\big|_{\varphi(\tau)}\gamma'^j\big|_{\varphi(\tau)}}\mathrm{d}t = L(\gamma)$$

$\square_{4.3.3}$

4.4 Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei (M^n,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (x,U) und (y,V) Karten um p.
TODO: Abb2 einfügen
Wähle ein $f \in C_0^0(U \cap V)$, das heißt $\operatorname{supp}(f) \subseteq U \cap V$, also $f(q) = 0$ für alle $q \notin U \cap V$.
Wie ist das Integral

$$\int_M f\mathrm{d}\mu = ?$$

zu definieren?

Idee

Integriere in Karten und untersuche:

$$\int_{x(U\cap V)} \left(f\circ x^{-1}\right) \mathrm{d}^n x \overset{?}{=} \int_{y(U\cap V)} \left(f\circ y^{-1}\right) \mathrm{d}^n y$$

Wegen

$$\left(f\circ x^{-1}\right) = \left(f\circ y^{-1}\right)\circ\left(y\circ x^{-1}\right)$$

definiere:

$$\begin{aligned}\left(f\circ y^{-1}\right)(y) &=: g(y)\\ \left(y\circ x^{-1}\right)(x) &=: \varphi(x)\end{aligned}$$

Die Transformationsformel lautet:

$$\int_{\varphi(\Omega)} g(y)\,\mathrm{d}^n y = \int_\Omega (g\circ\varphi)(x)\,|\det \mathrm{D}\varphi|\,\mathrm{d}^n x$$

Wende dies an für $\Omega := x(U\cap V)$ und erhalte:

$$\begin{aligned}\int_{y(U\cap V)} \underbrace{\left(f\circ y^{-1}\right)}_{=g(y)}(y)\,\mathrm{d}^n y &= \int_{x(U\cap V)} \left(f\circ x^{-1}\right)(x)\,|\det \mathrm{D}\varphi(x)|\,\mathrm{d}^n x\\ &\overset{\text{i. A.}}{\neq} \int_{x(U\cap V)} \left(f\circ x^{-1}\right)(x)\,\mathrm{d}^n x\end{aligned}$$

Die naive Idee geht nicht, weil diese Definition des Integrals davon abhängt, in welcher Karte man es ausrechnet.

Idee

Versuche den störenden Faktor $|\det \mathrm{D}\varphi|$ mit Hilfe der Riemannschen Metrik zu kompensieren.

$$\mathrm{D}\varphi = \mathrm{D}\left(y\circ x^{-1}\right) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right)_{i,k\in\{1,\ldots,n\}}$$

$$\tilde{g}_{kl}(y) = g_{ij}(x)\,\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^l} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} g_{ij}(x)\,\frac{\partial x^j}{\partial y^l} = \mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)^T\cdot g\cdot \mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}\det\tilde{g}(y) &= \det\left(\mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)\right)\cdot\det(g)\cdot\det\left(\mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)\right)\\ \sqrt{\det\tilde{g}(y)} &\overset{\det g>0}{=} \sqrt{\det g}\cdot\left|\det\left(\mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)\right)\right|\end{aligned}$$

Wegen

$$x\circ y^{-1} = \left(y\circ x^{-1}\right)^{-1}$$

gilt für alle $p\in U\cap V$:

$$\mathrm{D}\left(x\circ y^{-1}\right)\big|_{y(p)} = \mathrm{D}\left(y\circ x^{-1}\right)^{-1}\big|_{x(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(\mathrm{D}\left(x \circ y^{-1}\right)\right) = \frac{1}{\det\left(\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\right)}$$

Es folgt:

$$\sqrt{\det \tilde{g}\,(y)} = \sqrt{\det g} \cdot \frac{1}{\left|\det\left(\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\right)\right|}$$

Also gilt:

$$\int_{y(U\cap V)} \left(f \circ y^{-1}\right) \sqrt{\det\left(\tilde{g}\,(y)\right)}\mathrm{d}^n y = \int_{x(U\cap V)} \left(f \circ x^{-1}\right) \underbrace{\sqrt{\det\left(\tilde{g}\,(y)\right)\big|_{\varphi(x)}}\left|\det\left(\mathrm{D}\varphi\right)\right|}_{=\sqrt{\det(g(x))}} \mathrm{d}^n x$$

4.4.1 Lemma

Sind (x,U) und (y,V) zwei Karten auf M und $f \in C_0^0\,(U \cap V)$. Dann ist

$$\int_{x(U\cap V)} f\,(x) \sqrt{\det\left(g\,(x)\right)}\mathrm{d}^n x = \int_{y(U\cap V)} f\,(y) \sqrt{\det\left(g\,(y)\right)}\mathrm{d}^n y$$

Dabei ist $f\,(x) = f \circ x^{-1}$ und $f\,(y) = f \circ y^{-1}$ und wir lassen die Tilde (wie üblich) weg und schreiben $\tilde{g}\,(y) =: g\,(y)$.

Beweis

$$\begin{aligned}\int_{y(U\cap V)} f\,(y) \sqrt{\det\left(g\,(y)\right)}\mathrm{d}^n y &= \int_{x(U\cap V)} f\,(x) \sqrt{\det\left(g\,(x)\right)} \frac{\left|\det\left(\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\right)\right|}{\left|\det\left(\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\right)\right|}\mathrm{d}^n x = \\ &= \int_{x(U\cap V)} f\,(x) \sqrt{\det\left(g\,(x)\right)}\mathrm{d}^n x\end{aligned}$$

$\square_{4.4.1}$

Betrachte allgemeinere Funktionen, stelle also keine Bedingung an den Träger.
Beginne mit positiven Funktionen $f \in C^0\,(M,\mathbb{R}_{\geq 0})$.

4.4.2 Definition (Integral, integrierbar)

Seien $f \in C^0\,(M,\mathbb{R}_{\geq 0})$, (x_n,U_n) ein abzählbarer differenzierbarer Atlas und (η_k) eine untergeordnete Zerlegung der Eins, also genauer $\operatorname{supp}(\eta_k) \subseteq U_{n_k}$. Das *Integral* von f über M ist definiert durch:

$$\int_M f\mathrm{d}\mu := \sum_k \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f\eta_k) \circ x_{n_k}^{-1} \sqrt{\deg\left(g \circ x_{n_k}^{-1}\right)}\mathrm{d}^n x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

Schreibe für $g \circ x_{n_k}^{-1}$ auch kurz $g\,(x)$. f heißt *integrierbar* falls $\int_M f\mathrm{d}\mu < \infty$ ist.

4.4.3 Satz

Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins.

Beweis

Sei (y_l,V_l) ein weiterer, verträglicher Atlas und mit untergeordneter Zerlegung der Eins φ_m, genauer $\operatorname{supp}(\varphi_m) \subseteq V_{l_m}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f \cdot \eta_k)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x \\ &= \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} \left(\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi_m\right) \cdot f \cdot \eta_k\right)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x\end{aligned}$$

Man kann die letzte Gleichheit auf zwei Weisen begründen:

1. Mit dem monotonen Konvergenzsatz, falls das Lebesgue-Integral bekannt ist.
2. Wähle $\operatorname{supp}(\eta_k)$ kompakt, dies geht zum Beispiel so wie wir die Zerlegung der Eins konstruiert haben.
   Wegen der lokalen Endlichkeit der Zerlegung der Eins (μ_m) sind dann fast alle Summanden null.
   Man hat also eine endliche Summe und kann die Summe mit dem Integral vertauschen.

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x \\ &\overset{\operatorname{supp}(\varphi_m)\subseteq V_{l_m}}{=} \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{x_{n_k}(U_{n_k}\cap V_{l_m})} (f \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{y_{n_k}(U_{n_k}\cap V_{l_m})} (f \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)(y)\sqrt{\det(g(y))}\mathrm{d}^n y\end{aligned}$$

Summiere über k und erhalte dann:

$$\begin{aligned}\int_M f\mathrm{d}\mu &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f \cdot \eta_k)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_{y_{l_m}(V_{l_m})} \underbrace{(f \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)(y)}_{\geq 0}\underbrace{\sqrt{\det(g(y))}}_{\geq 0}\mathrm{d}^n y}_{\geq 0}\end{aligned}$$

Verwende den Umordnungssatz für Reihen mit nicht-negativen Gliedern und erhalte:

$$\int_M f\mathrm{d}\mu = \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{y_{l_m}(V_{l_m})} (f \cdot \varphi_m)(y)\sqrt{\det(g(y))}\mathrm{d}^n y \underset{\text{mit }(\varphi_m)}{\overset{\text{Definition}}{=}} \int_M f\mathrm{d}\mu$$

$\square_{4.4.3}$

4.4.4 Definition (integrierbar)

$f \in C^0(M,\mathbb{R})$ heißt *integrierbar*, falls $|f|$ integrierbar (im Sinne der Definition 4.4.2).
Definiere das Integral

$$\int_M f\mathrm{d}\mu := \sum_k \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (f \cdot \eta_k)(x)\sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x$$

wobei wieder (x_n,U_n) ein Atlas mit untergeordneter Zerlegung der Eins η_k ist.

4.4.5 Satz

Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins.

Beweis

Wähle wieder einen Atlas (y_l, V_l) und eine Zerlegung der Eins (φ_m). Die Doppelreihe

$$D := \sum_k \sum_m \int_{U_{n_k} \cap V_{l_m}} (f \cdot \eta_k \cdot \mu_m) \, \mathrm{d}\mu$$

ist absolut konvergent, da gilt:

$$D \leq \sum_k \sum_m \int_{U_{n_k} \cap V_{l_m}} \underbrace{(|f| \cdot \eta_k \cdot \varphi_m)}_{\geq 0} \mathrm{d}\mu = \int_M |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

Damit ist die Reihe absolut konvergent und folglich können wir nach dem Umordnungssatz die Summe über k und m vertauschen. Ab jetzt geht der Beweis wie vorher. $\square_{4.4.5}$

5 Der Divergenzsatz von Gauß

5.1 Die Divergenz

Im $\mathbb{R}^3$ ist für ein Vektorfeld

$$\begin{aligned} \vec{v} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \vec{v}\,(x) = \begin{pmatrix} v_1\,(x) \\ v_2\,(x) \\ v_3\,(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Divergenz definiert als:

$$\operatorname{div}\,(\vec{v}) := \partial_1 v_1\,(x) + \partial_2 v_1\,(x) + \partial_3 v_1\,(x)$$

Zum Beispiel gilt in der Physik im SI-Einheitensystem:

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Frage

Kann man die Divergenz auf einer Mannigfaltigkeit einführen und wenn ja wie?
Versuche naiv: Sei $v \in \mathrm{T}^{(1,0)}M$ ein Vektorfeld auf M, also ein Tensorfeld der Stufe (1,0).

$$\begin{aligned} v = v^i\,(x)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= \tilde{v}^k\,(y)\, \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p \\ \tilde{v}^k\,(y) = v^i\,(x)\, \left.\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|_p & \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\,(v) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p v^i\,(x)$$

Ist das unabhängig von der Karte?

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p \tilde{v}^k(x) = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(v^i(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^l}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(v^i(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(v^i(x)\right) + \frac{\partial x^l}{\partial y^k}v^i(x)\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^l \partial x^i} =$$
$$= \delta^l_i \frac{\partial}{\partial x^l}\left(v^i(x)\right) + \frac{\partial x^l}{\partial y^k}v^i(x)\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^l \partial x^i} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(v^i(x)\right) + \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^k}v^i(x)\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^l \partial x^i}}_{\text{störender Zusatzterm}}$$

Man sieht, dass man auf einer topologischen Mannigfaltigkeiten die Divergenz nicht definieren kann.

Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man hoffen, dass man mit Hilfe der Metrik die Formel so modifizieren kann, dass der störende Zusatzterm herausfällt. Dies erreicht man mit folgender Definition für die Divergenz:

$$\operatorname{div}(v) := \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{\det g}\cdot v^j\right)$$

Hat man eine kovariante Ableitung

$$\nabla_i v^k := \frac{\partial}{\partial x_i}v^k + \Gamma^k_{il}v^l$$

dann gilt:

$$\operatorname{div}(v) = \nabla_i v^i$$

Frage

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\det(g(x)) = ?$$

Einfacher ist es, eine glatte Ein-Parameter-Familie von Matrizen $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ zu betrachten. Dann ist $\det(A(t))$ glatt in t, denn es ist ein polynomialer Ausdruck der Matrixelemente.

5.1.1 Lemma

Sei $A \in C^1((a,b), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A(t)) = \det(A(t))\cdot \operatorname{Tr}\left(A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right)$$

Beweis

Sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$. Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ kann man mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der i-ten Zeile entwickeln und erhält:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Adj}_{ij}(A)$$

Dabei ist die *Adjunkte* $\mathrm{Adj}_{ij}(A)$ das Produkt von $(-1)^{i+j}$ und der Determinante der Matrix, die man erhält, wenn man bei A die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Wähle $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $k \neq i$. Dann folgt, da zwei Zeilen der Matrix in der Determinante identisch sind:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Adj}_{kj}(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Also folgt eine „Orthogonalitätsrelation“:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Adj}_{kj}(A) = \det(A) \cdot \delta_{ik}$$

Zusammenhang zur Inversen $B := A^{-1}$:

$$A \cdot B = \mathbb{1}$$
$$\sum_{j} a_{ij} \cdot b_{jk} = \delta_{ik}$$

Also folgt:

$$b_{jk} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}_{kj}(A)$$

Beispiel

Betrachte eine 2×2-Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathrm{Adj}_{11}(A) & \mathrm{Adj}_{21}(A) \\ \mathrm{Adj}_{12}(A) & \mathrm{Adj}_{22}(A) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Überprüfe:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zurück zum Beweis

Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\left(A\left(t\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det\left(A\right)\cdot\dot{a}_{ij}$$

Sei i,j fest gewählt, so gilt:

$$\det\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\mathrm{Adj}_{ik}\left(A\right)$$

Nun ist $\mathrm{Adj}_{ik}\left(A\right)$ unabhängig von a_{ij} und man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det\left(A\right)=\mathrm{Adj}_{ij}\left(A\right)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\left(A\left(t\right)\right)&=\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Adj}_{ij}\left(A\right)\cdot\dot{a}_{ij}=\det\left(A\right)\sum_{i,j}b_{ji}\cdot\dot{a}_{ij}=\\&=\det\left(A\right)\sum_{j}\left(B\cdot\dot{A}\right)_{jj}=\det\left(A\right)\mathrm{Tr}\left(B\cdot\dot{A}\right)\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A=\det A\cdot\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\cdot\dot{A}\right)$$

$\square_{5.1.1}$

5.1.2 Lemma und Definition (Divergenz)

Sei v ein Tensorfeld der Stufe (1,0), also ein Vektorfeld.
Dann ist die *Divergenz* von v in einer Karte (x,U) definiert durch

$$\mathrm{div}\left(v\right)=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\sqrt{\det g}v^{i}\right)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Beweis

Dies ergibt sich durch explizite Rechnung, indem man das Transformationsverhalten in eine andere Karte (y,V) betrachtet:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{lm}\left(y\right)&=g_{ij}\left(x\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{l}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}=\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{l}}g_{ij}\left(x\right)\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\\\tilde{g}\left(y\right)&=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{T}g\left(x\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \det \tilde{g} = \det g \cdot \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^T \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \det g \left(\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right)^2$$

$$\sqrt{\det \tilde{g}} = \sqrt{\det g\,(x)}\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}}\frac{\partial}{\partial y^k}\sqrt{\det \tilde{g}} = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\ln\sqrt{\det \tilde{g}}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\ln\left(\sqrt{\det g}\right) + \ln\left(\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial y^k}\sqrt{\det g} + \left(\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial y^k}\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{\det g} + \left(\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\right)^{-1}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1} \qquad\qquad \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^{-1}$$

folgt für den zweiten Term:

$$\begin{aligned}&\left(\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\right)^{-1}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| = \\ &\overset{\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\neq 0}{=} \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^{-1} = \\ &= -\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^{-2}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \\ &\overset{5.1.1}{=} -\left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^{-1}\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot \operatorname{Tr}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \\ &= -\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^l}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\partial x^l}\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}}\frac{\partial}{\partial y^k}\left(\sqrt{\det \tilde{g}}\right)\tilde{v}^k &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}\right)\tilde{v}^k - \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^l}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\partial x^l}\tilde{v}^k = \\ &\overset{v^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\tilde{v}^k}{=} \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}\right)v^i - \frac{\partial x^l}{\partial y^m}\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\partial x^l}v^i\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det\tilde{g}}}\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\sqrt{\det\tilde{g}}\tilde{v}^k\right) &= \frac{1}{\sqrt{\det\tilde{g}}}\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\sqrt{\det\tilde{g}}\right)\tilde{v}^k + \frac{\sqrt{\det\tilde{g}}}{\sqrt{\det\tilde{g}}}\frac{\partial}{\partial y^k}\tilde{v}^k = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det\tilde{g}}}\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\sqrt{\det\tilde{g}}\right)\tilde{v}^k + \frac{\partial x^j}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}v^i\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}\right)v^i - \frac{\partial x^l}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\partial x^l}\right)v^i \\
&\quad + \frac{\partial x^j}{\partial y^k}\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^j\partial x^i}v^i + \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}}_{=\delta_i^j}\frac{\partial}{\partial x^j}v^i = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}\right)v^i + \frac{\partial}{\partial x^i}v^i(x) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}v^i(x)\right)
\end{aligned}$$

$\square_{5.1.2}$

5.1.3 Bemerkung

Mit der kovarianten Ableitung gilt:

$$\operatorname{div}(v) = \nabla_i v^i$$

Dies geht auch für allgemeine Tensorfelder:

$$\nabla_i T^{ij} = w^j$$

w ist ein Vektorfeld.

5.2 Der Satz von Gauß auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Motivation

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f\big|_a^b$$

Versuche nun, dies auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, v ein Vektorfeld und die äußere Normale von Ω sei ν.

$$\int_\Omega \operatorname{div}(v)\,\mathrm{d}\mu_\Omega = \int_{\partial\Omega}\langle v,\nu\rangle\,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}$$

Bei uns ist $\Omega = M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\partial\Omega = \emptyset$. Wir wollen also zeigen:

$$\int_M \operatorname{div}(v)\,\mathrm{d}\mu_M = 0$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(v) &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det g} v^j \right) \\
\mathrm{d}\mu_M &= \sqrt{\det g} \mathrm{d}^n x \\
\operatorname{div}(v) \, \mathrm{d}\mu_M &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det g} v^j \right) \mathrm{d}^n x
\end{aligned}$$

5.2.1 Theorem

Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und v ein Vektorfeld auf M. Dann gilt:

$$\int_M \operatorname{div}(v) \, \mathrm{d}\mu_M = 0$$

Beweis

Wähle einen Atlas $(x_n,U_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ und untergeordnete Zerlegung der Eins $(\eta_k)_{k\in\{1,\ldots,K\}}$. Dann gilt nach Definition des Integrals:

$$\int_M \operatorname{div}(v) \, \mathrm{d}\mu_M = \sum_k \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (\eta_k \cdot \operatorname{div}(v)) \circ x_{n_k}^{-1} \cdot \sqrt{\det \left(g \circ x_{n_k}^{-1} \right)} \mathrm{d}^n x$$

Es ist $x_{n_k}(U_{n_k}) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\operatorname{supp}(\eta_k) \subseteq U_{n_k}$. Also folgt mit der Schreibweise $f(x)$ für $f \circ x_{n_k}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_M \operatorname{div}(v) \, \mathrm{d}\mu_M &= \sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x) \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g(x)} v^i(x) \right) \sqrt{\det g(x)} \mathrm{d}^n x = \\
&= \sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g(x)} v^i(x) \right) \mathrm{d}^n x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g(x)} v^i(x) \right) \mathrm{d}^n x = \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \eta_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g(x)} v^i(x) \right) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \eta_k \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g(x)} v^i(x) \right)
\end{aligned}$$

Gehe jetzt alle Summanden durch und wende den Satz von Fubini an, beispielsweise beim ersten Summanden:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \eta_k \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{\det g(x)} v^1(x) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \eta_k \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{\det g(x)} v^1(x) \right) = \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \left(-\frac{\partial}{\partial x^1} \eta_k \right) \sqrt{\det g(x)} v^1(x)
\end{aligned}$$

Der Randterm der partiellen Integration verschwindet, da η_k einen kompakten Träger hat. Also folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} v^i\right) \mathrm{d}^n x = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \eta_k\right) \cdot v^i \sqrt{\det g} \mathrm{d}^n x = -\int_M v\left(\eta_k\right) \mathrm{d}\mu_M$$

Summiere über k:

$$\int_M \operatorname{div}(v) \,\mathrm{d}\mu_M = \sum_{k=1}^K \left(-\int_M v\left(\eta_k\right) \mathrm{d}\mu_M\right) = -\int_M v\left(\sum_{k=1}^K \eta_k\right) \mathrm{d}\mu_M = -\int_M v(1) \,\mathrm{d}\mu_M = 0$$

$\square_{5.2.1}$

5.2.2 Definition (Gradient, Laplace-Beltrami-Operator)

Für $u \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ definiere

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}u &:= \frac{\partial}{\partial x^i}(u) \cdot \mathrm{d}x^i \in \mathrm{T}^{0,1} M \\
\operatorname{grad}(u) &:= (\operatorname{grad}(u))^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{T}^{1,0} M \\
(\operatorname{grad}(u))^i &:= g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} u
\end{aligned}$$

und den *Laplace-Beltrami-Operator*:

$$\Delta\backslash u := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det(g)} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} u\right)$$

alternativer Beweis von 5.1.2

Wähle $h \in C_0^\infty(M)$. Sei (x,U) eine Karte mit $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$. Dann ist

$$\int_M v(h) \,\mathrm{d}\mu_M$$

unabhängig von der Wahl der Karte definiert und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_M v(h) \,\mathrm{d}\mu_M &= \int_{\mathbb{R}^n} v^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} h\right) \sqrt{\det g} \mathrm{d}^n x = \\
&\overset{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} h \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} v^i\right) \mathrm{d}^n x \cdot \frac{\sqrt{\det g}}{\sqrt{\det g}} = \\
&= -\int_M h \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} v^i\right) \mathrm{d}\mu_M = \int_M h \cdot \operatorname{div}(v) \,\mathrm{d}\mu_M
\end{aligned}$$

Dies ist für alle h unabhängig von der Wahl der Karte.
Wähle eine Diracfolge h_m, die im Limes $m \to \infty$ gegen die Delta-Distribution (mal eine Konstante c) konvergiert.
Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$ und $\eta(0) > 0$.
TODO: Abb1-Plot von $e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ einfügen.

Sei $x_0 \in x(U)$.

$$h_m(x) := m^n \eta(m\|x - x_0\|)$$

TODO: Abb2 einfügen

Um das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_m(x)\,\mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} m^n \eta(m\|x - x_0\|)\,\mathrm{d}^n x$$

zu berechnen, führe die Substitution

$$u = m(x - x_0) \qquad \mathrm{d}^n u = m^n \cdot \mathrm{d}^n x$$

durch:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_m(x)\,\mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} m^n \eta(\|u\|)\frac{\mathrm{d}^n u}{m^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|u\|)\,\mathrm{d}^n u = c \in \mathbb{R}_{>0}$$

Dies ist unabhängig von m. Mit

$$\int_M v(h_m)\,\mathrm{d}\mu_M = \int_M h_m \cdot \underbrace{\mathrm{div}(v)\cdot\sqrt{\det g}}_{\text{stetig}}\,\mathrm{d}^n x \xrightarrow{m\to\infty} c \cdot \mathrm{div}(v)(x_0)\sqrt{\det(g(x_0))}$$

ist also auch die Divergenz unabhängig von der Wahl der Karte. $\square_{5.1.2}$

5.2.3 Korollar und Definition (Laplace-Gleichung, harmonisch)

Sei (M,g) eine zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $u \in C^\infty(M)$ und es gelte die *Laplace-Gleichung* $\Delta\backslash u = 0$.

Dann nennt man u *harmonisch* und u ist konstant.

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\left(\Delta\backslash u\right)}_{=0}\cdot u = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{\det g}\cdot \mathrm{grad}^j(u)\right)\cdot u = \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{\det g}\left(\left(\mathrm{grad}^j u\right)\cdot u\right)\right)}_{\mathrm{div}(\mathrm{grad}(u)\cdot u)} - \frac{1}{\sqrt{\det g}}\sqrt{\det g}\,\underbrace{\mathrm{grad}^j(u)(\partial_j u)}_{=g^{ij}(\partial_i u)(\partial_j u)} = \\
&= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u)\cdot u) - g(\mathrm{grad}(u),\mathrm{grad}(u))
\end{aligned}$$

Denn mit $g_{jk}g^{kl} = \delta^l_j$ folgt:

$$\begin{aligned}
g^{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) &= g^{ij}(\partial_i u)\left(g_{jk}g^{kl}\partial_l u\right) = g_{jk}\left(g^{ji}\partial_i u\right)\left(g^{kl}\partial_l u\right) = \\
&= g_{jk}\left(\partial^j u\right)\left(\partial^k u\right) = g(\mathrm{grad}(u),\mathrm{grad}(u))
\end{aligned}$$

Integriere jetzt über M:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left(\operatorname{div}\left(u \cdot \operatorname{grad}(u)\right) - g\left(\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(u)\right)\right) \mathrm{d}\mu_M = \\ &= \underbrace{\int_M \operatorname{div}\left(u \cdot \operatorname{grad}(u)\right) \mathrm{d}\mu_M}_{=0} - \int_M g\left(\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(u)\right) \mathrm{d}\mu_M = \\ &= -\int_M \underbrace{g\left(\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(u)\right)}_{\geq 0} \mathrm{d}\mu_M \end{aligned}$$

Also ist $g\left(\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(u)\right) = 0$, das heißt $\operatorname{grad}(u) = 0$ und somit $\partial_j u = 0$, also ist u konstant. $\square_{5.2.3}$

5.2.4 Bemerkung

Ist f eine holomorphe Funktion, dann gilt:

$$\Delta_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(f) = \Delta_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Im}(f) = 0$$

Der Satz von Liouville aus Analysis III sagt:

> Ist f beschränkt und auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, dann ist f konstant.

Hier haben wir das Analogon auf zusammenhängenden, kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
Vergleiche auch mit der Poisson-Gleichung aus der Physik:

$$\Delta\phi = 4\pi G\varrho \qquad \text{Newtonsches Gravitationsgesetz}$$

5.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Betrachte den Halbraum:

$$\mathbb{R}^n_- := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x^1 \leq 0\right\}$$

TODO: Abb3 einfügen

Die Topologie auf $\mathbb{R}^n_-$ ist die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Relativtopologie, das heißt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_-$ ist genau dann offen, wenn es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $U \cap \mathbb{R}^n_- = \Omega$ ist.
Zum Beispiel ist $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_-$ bezüglich der Relativtopologie offen, da $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Aber Ω ist in $\mathbb{R}^n$ nicht offen.

5.3.1 Definition (differenzierbar)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_-$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *(k-mal stetig) differenzierbar in* $x \in \Omega$, falls es eine Umgebung U von x im $\mathbb{R}^n$ gibt, und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f gibt, also $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ und $\tilde{f}\big|_{U\cap\Omega} = f\big|_{U\cap\Omega}$, die ($k$-mal stetig) differenzierbar ist.
f heißt *(k-mal stetig) differenzierbar in* Ω, falls f in jedem Punkt $x \in \Omega$ differenzierbar ist.
TODO: Abb4 einfügen

Bemerkung

Es gibt genau dann eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f, wenn f auf jeder offenen Teilmenge von Ω (k-mal stetig) differenzierbar ist und der Limes der k-ten partiellen Ableitungen von f auf dem Rand existiert.

5.3.2 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_-$ offen bezüglich der Relativtopologie und $f \in C^k(\Omega,\mathbb{R})$, so gibt es ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subseteq U$ und eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(U,\mathbb{R})$.

Beweis

Für jedes $x \in \Omega$ gibt es nach Definition eine offene Umgebung U^x von x und eine Fortsetzung $\tilde{f}^x : U^x \to \mathbb{R}$.
TODO: Abb5 einfügen
Wähle eine abzählbare untergeordnete Zerlegung der Eins $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt η_k ist lokal endlich, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \eta_k = 1$ und $\operatorname{supp}(\eta_k) \subseteq U^{x(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist nach Satz 1.3.4 und Theorem 1.3.5 immer möglich.
Setze nun $\tilde{f}_k = \eta_k(x) \cdot \tilde{f}^{x(k)}(x)$ und:

$$\tilde{f}(x) := \sum_k \tilde{f}_k = \sum_k \eta_k(x)\, \tilde{f}^{x(k)}(x)$$

Dann wissen wir:

- Für alle $x \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\eta_k\big|_V = 0$ für fast alle k ist. Damit ist klar, dass die Reihe konvergiert, denn sie reduziert sich auf eine endliche Summe. Außerdem ist $\tilde{f}$ wieder k-mal stetig differenzierbar.
- Sei $x \in \Omega$, dann folgt:

$$\tilde{f}(x) = \sum_k \eta_k(x) \cdot \underbrace{\tilde{f}^{x(k)}(x)}_{=f(x)} = \sum_k \eta_k(x)\, f(x) = f(x) \underbrace{\left(\sum_k \eta_k(x)\right)}_{=1}$$

$\square_{5.3.2}$

5.3.3 Definition (Mannigfaltigkeit mit Rand)

Eine *Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein separabler, topologischer Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n_-$ ist.
Wie bei Mannigfaltigkeiten kann man definieren:

- Karten
- Atlas
- maximaler Atlas
- differenzierbare Struktur
- C^k-Struktur

5.3.4 Lemma und Definition (Randpunkt, innerer Punkt)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.
Ein Punkt $p \in M$ heißt *Randpunkt*, wenn es eine Karte (x,U) um p gibt, sodass $x(p) \in \mathbb{R}^n_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x^1 = 0\right\}$ ist.
Ansonsten heißt p *innerer Punkt*.
TODO: Abb6 einfügen
Diese Begriffe sind wohldefiniert, das heißt zu einem gegebenen Punkt $p \in M$ kann es nicht zwei Karten (x,U) und (y,V) geben, sodass $(y(p))_1 = 0$ und $(x(p))_1 \neq 0$.

Beweis

Angenommen es gäbe solche Karten (x,U) und (y,V) um p. Dann ist

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus.
Definiere g als die Projektion auf die erste Komponente, also für $v \in \mathbb{R}^n$

$$g(v) = v^1$$

Dann ist $g\big|_{y(V)} \leq 0$. Betrachte $f := g \circ y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f(x(p)) = g(y(p)) = 0$$

$$\mathrm{D}f\big|_{x(p)} = \underbrace{\mathrm{D}g\big|_{y(x)}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{D}\left(y \circ x^{-1}\right)\big|_{x(p)}}_{\text{invertierbar}} \neq 0$$

Also hat $\mathrm{D}f\big|_{x(p)}$ Rang 1, das heißt Höchstrang. Betrachte die Kurve:

$$c(\tau) = x(p) + \tau \cdot \operatorname{grad}(f)(p)$$

Dann ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ c)\big|_{\tau=0} > 0$$

Also gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$ und $c(\tau) =: z$ mit $f(z) = f(c(\tau)) > 0$. Dann ist $\left(y \circ x^{-1}\right)(z) \in y(V)$.
Damit folgt der Widerspruch:

$$g\left(y \circ x^{-1}(z)\right) = f(z) > 0$$

$\square_{5.3.4}$

5.3.5 Definition (Rand, Inneres)

Der *Rand von M* ist:

$$\partial M := \left\{p \in M \middle| p \text{ ist Randpunkt}\right\} \subseteq M$$

Dies ist eine $(n-1)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, denn für $p \in \partial M$ ist für jede Karte (x,U) um p schon $x^1(p) = 0$.

TODO: Abb1 einfügen

Betrachte:

$$\tilde{x} : U \cap \partial M \to \mathbb{R}^n_0 \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

Dann ist $(\tilde{x}, U \cap \partial M)$ eine Karte von ∂M.

Das *Innere*, $M^\circ := M \setminus \partial M$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

5.3.6 Beispiel

Seien N^n eine glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), $\varphi : N^n \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞ und a ein regulärer Wert von φ.

$$M := \varphi^{-1}((-\infty, a])$$

ist dann eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \varphi^{-1}(a)$.

5.3.7 Definition (Tangentialraum)

Nun zum Tangentialraum:

Für innere Punkte geht dies wie bisher. Sei also p ein Randpunkt.

$f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ ist eine glatte Funktion. Dann gibt es ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x(U) \subseteq V$ und ein $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$, dass glatt ist, und für das $\tilde{g}\big|_{x(U)} = f \circ x^{-1}\big|_{x(U)}$ gilt.

Zu jedem $f \in F^\infty_p M$ können wir einen Repräsentanten $g := f \circ x^{-1}$ fortsetzen auf eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x(p)$.

Man kann $F^\infty_p(M)$ also mit den Funktionskeimen $F^\infty_{x(p)}(x(U))$ auffassen, wobei $F^\infty_{x(p)}(x(U))$ die Funktionskeime von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $x(p) \in \mathbb{R}^n$ ist. Also kann man auch $\mathrm{T}_p M$ wie bisher als Derivationen auf $F^\infty_p(M)$ definieren.

Dies ist wieder ein n-dimensionaler Vektorraum, aufgespannt durch die Richtungsableitungen:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

5.3.8 Bemerkung

TODO: Abb2 einfügen

Sei $p \in \partial M$. $\mathrm{T}_p M$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

$\mathrm{T}_p \partial M$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Vektorraum.

TODO: Abb3 einfügen

Sei $\hat{g} \in C^\infty\left(\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^n_-\right)$ mit $\hat{V} = V \cap \mathbb{R}^n_-$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann kann $\hat{g}$ fortgesetzt werden zu $g \in C^\infty\left(V, \mathbb{R}^n_-\right)$.

Eine Derivation, die auf $\hat{g}$ wirkt, kann aufgefasst werden als Derivation auf g, die tangential zu $\mathbb{R}^n_0$ verläuft.

$\mathrm{T}_p \partial M$ wird aufgespannt von $\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, $\mathrm{T}_p M$ dagegen von $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Damit kann $\mathrm{T}_p \partial M$ identifiziert werden mit dem Unterraum $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \subseteq \mathrm{T}_p M$.

5.3.9 Definition (Riemannsche Metrik)

Eine *Riemannsche Metrik* ist eine bilineare Abbildung $g_p : \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$, die symmetrisch und positiv definit ist und glatt von p abhängt. Allgemein führen wir $\mathrm{T}^{p,q}M$ ein wie bisher.

5.3.10 Definition (Normale)

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M.
Für $p \in \partial M$ heißt $\nu \in \mathrm{T}_pM$ eine *Normale*, falls $\nu \perp \mathrm{T}_p\partial M \subseteq \mathrm{T}_pM$, das heißt für alle $w \in \mathrm{T}_p\partial M$ gilt $g(\nu,w) = 0$.
Wir betrachten also eine orthogonale Zerlegung von $\mathrm{T}_pM = \mathrm{T}_p\partial M \oplus \langle\nu\rangle$. Außerdem normieren wir ν, das heißt es gilt $\langle\nu,\nu\rangle = 1$.
TODO: Abb4 einfügen
Eine Normale heißt *innere Normale*, falls es eine C^1-Kurve $C : [0,\varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ gibt, sodass die Derivation, die definiert ist durch

$$\hat{\nu}(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\big|_{t=0} := \lim_{\delta \searrow 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\big|_{t=\delta}$$

mit ν übereinstimmt.
Sonst heißt ν *äußere Normale*.

$$g_p\big|_{\mathrm{T}_p\partial M \times \mathrm{T}_p\partial M} : \mathrm{T}_p\partial M \times \mathrm{T}_p\partial M \to \mathbb{R}$$

definiert eine Riemannsche Metrik auf ∂M, die sogenannte *induzierte Metrik*.
Die induzierte Metrik und die äußere Normale hängen glatt von p ab.

5.4 Der allgemeine Gaußsche Divergenzsatz

5.4.1 Theorem (Satz von Gauß)

Sei (M^n,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, ν die äußere Normale und u ein Vektorfeld auf M. Dann gilt:

$$\int_M \mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial M} \langle\nu,u\rangle\,\mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

Dabei ist $\mathrm{d}\mu_{\partial M}$ das Maß bezüglich der induzierten Metrik und $\langle\nu,u\rangle$ das Skalarprodukt auf T_pM, das heißt die induzierte Riemannsche Metrik.

Beweis

Überdecke M mit endlich vielen Karten und wähle eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(\eta_k)_{k=1,\dots,K}$.

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{K} \int_M \eta_k \mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}\mu_M = \\ &= \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (\eta_k \mathrm{div}(u)) \circ x_{n_k}^{-1} \cdot \sqrt{\det\left(g \circ x_{n_k}^{-1}\right)}\mathrm{d}^n x \right)\end{aligned}$$

Kürzere Schreibweise:

$$\int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (\eta_k(x)\operatorname{div}(u)(x)) \cdot \sqrt{\det(g(x))}\mathrm{d}^n x$$

Falls das Kartengebiet U_{n_k} den Rand von M nicht schneidet, also $U_{n_k} \cap \partial M = \emptyset$, können wir genau wie früher partiell integrieren:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k \operatorname{div}(u)\sqrt{\det g}\mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k \partial_j \left(\sqrt{\det g} u^j\right) \mathrm{d}^n x \overset{\text{part.Int.}}{=} -\int_M u(\eta_{n_k})\,\mathrm{d}\mu_M$$

Es genügt also, eine Karte am Rand zu betrachten:

TODO: Abb5 einfügen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_-} \eta \cdot (\operatorname{div}(u))\sqrt{\det g}\mathrm{d}^n x &= \int_{\mathbb{R}^n_-} \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g} u^i\right)\sqrt{\det g}\mathrm{d}^n x = \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \eta \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g} u^i\right) = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_-}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\eta\right) \cdot \sqrt{\det g} u^i \mathrm{d}^n x + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \eta \sqrt{\det g} u^1 \Big|_{x^1=0} = \\ &= -\int_M u(\eta) \cdot \mathrm{d}\mu_M + \int_{\mathbb{R}^n_0} \eta\sqrt{\det g} u^1 \Big|_{x_1=0} \mathrm{d}^{n-1}x\end{aligned}$$

TODO: Abb6 einfügen

Für den Summand mit $i = 1$ gilt genauer:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1 \eta \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\det g} u^1\right)\right) = \\ =&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \left(\eta\sqrt{\det g} u^1|_{x^1=0} - \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_1 \frac{\partial}{\partial x^1}(\eta) \cdot \sqrt{\det g} u^1\right)\end{aligned}$$

Sei $p \in \partial M \cap U_{n_k}$.

$$\nu = \nu^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Da ν senkrecht auf $\mathrm{T}_p \partial M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle$ steht, gilt für alle $\alpha \in \{2, \ldots, n\}$:

$$0 = g\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = g_{ij}\nu^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^j = g_{ij}\nu^i \cdot \delta^j_\alpha = g_{i\alpha}\nu^i = \nu_\alpha$$

Also gilt:

$$\nu_i = (c, 0, \ldots, 0)$$

Bestimme c:

$$1 = \langle \nu, \nu\rangle = g_{ij}\nu^i\nu^j = g^{ij}\nu_i\nu_j = g^{11} \cdot c^2$$

Also gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}$$

Nun berechne g^{11} mit $\alpha,\beta \in \{2,\ldots,n\}$ und der Cramerschen Regel:

$$g^{11} = \frac{1}{\det g} \det\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\{2,\ldots,n\}}$$

$$g\left(u,\nu\right) = u^j \nu_j = u^1 \cdot c = u^1 \cdot \frac{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}}}{\sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\{2,\ldots,n\}}}}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\eta_k \sqrt{\det g} \cdot u^1 \mathrm{d}^{n-1}x &= \eta_k u^1 \frac{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}}}{\sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\{2,\ldots,n\}}}} \cdot \sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\{2,\ldots,n\}}} \mathrm{d}^{n-1}x = \\ &= \eta_k g\left(u,\nu\right) \cdot \mathrm{d}\mu_{\partial M}\end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\int_{\mathbb{R}^n_{<0}} \eta_k \cdot \operatorname{div}\left(u\right) \sqrt{\det g} \mathrm{d}^n x = -\int_M u\left(\eta_k\right) \mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} \eta_k \cdot \langle u,\nu\rangle \,\mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

Summiere nun über k. Dies ist eine endliche Summe, weil M kompakt ist.
Verwende dabei, dass $\sum_k u\left(\eta_k\right) = u\left(1\right) = 0$. Dann folgt die Behauptung. $\square_{5.4.1}$

5.4.2 Theorem (Greensche Formeln)

Sei (M,g) kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand und $f,h \in C^\infty\left(M,\mathbb{R}\right)$.

$$\int_M f \cdot \Delta\backslash h \mathrm{d}\mu_M = -\int_M \langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} f \cdot \nu\left(h\right) \mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

$$\int_M \Big(f \cdot \Delta\backslash h - h \cdot \Delta\backslash f\Big) \mathrm{d}\mu_M = \int_{\partial M} \left(f\nu\left(h\right) - \nu\left(f\right) h\right) \mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

Beweis

Es gilt:

$$\langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle = g\left(\operatorname{grad}\left(f\right),\operatorname{grad}\left(h\right)\right) = \left(\partial_j f\right)\left(\partial^j h\right)$$

$$\begin{aligned}f \cdot \Delta\backslash h &= f \cdot \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_j \left(\sqrt{\det g} \partial^j h\right) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_j \left(\sqrt{\det g} f \cdot \partial^j h\right) - \left(\partial_j f\right)\left(\partial^j h\right) = \\ &= \operatorname{div}\left(f \cdot \operatorname{grad}\left(h\right)\right) - \langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle\end{aligned}$$

Integriere auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned}\int_M f \cdot \Delta\backslash h \mathrm{d}\mu_M &= -\int_M \langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_M \operatorname{div}\left(f \cdot \operatorname{grad}\left(h\right)\right) \mathrm{d}\mu_M = \\ &= -\int_M \langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{grad}\left(h\right),\nu\rangle \,\mathrm{d}\mu_{\partial M} = \\ &= -\int_M \langle \mathrm{D}f,\mathrm{D}h\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} f \cdot \nu\left(h\right) \mathrm{d}\mu_{\partial M}\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung betrachte die erste Gleichung, vertauscht f und g, und subtrahiert dies von der ursprünglichen ersten Gleichung:

$$\begin{aligned}\int_M \left(f \cdot \ \Delta\backslash h - h \cdot \ \Delta\backslash f\right) \mathrm{d}\mu_M &= -\int_M \langle \mathrm{D}f, \mathrm{D}h\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} f \cdot \nu(h) \,\mathrm{d}\mu_{\partial M} + \\ &\quad + \int_M \langle \mathrm{D}h, \mathrm{D}f\rangle \,\mathrm{d}\mu_M - \int_{\partial M} h \cdot \nu(f) \,\mathrm{d}\mu_{\partial M} = \\ &= \int_{\partial M} \left(f\nu(h) - \nu(f) h\right) \mathrm{d}\mu_{\partial M}\end{aligned}$$

$\square_{5.4.2}$

5.4.3 Randwertprobleme

Seien $\varrho \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $\varphi \in C^\infty(\partial M,\mathbb{R})$ gegeben.
Betrachte folgende Gleichungssysteme:

- Dirichlet-Problem:

$$\begin{aligned} \Delta\backslash f &= \varrho && \text{(Poisson-Gleichung)} \\ f\big|_{\partial M} &= \varphi && \text{(Dirichlet-Randbedingung)} \end{aligned}$$

- Neumann-Problem:

$$\begin{aligned} \Delta\backslash f &= \varrho && \text{(Poisson-Gleichung)} \\ \nu(f)\big|_{\partial M} &= \varphi && \text{(Neumann-Randbedingung)} \end{aligned}$$

5.4.4 Korollar

Die Lösung des Dirichlet-Problems ist eindeutig und das Neumann-Problem ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Beweis

Seien f_1 und f_2 zwei Lösungen. Dann erfüllt $f := f_1 - f_2$ die Gleichung:

$$\Delta\backslash f = 0$$

$$f\big|_{\partial M} = 0 \qquad\qquad \text{bzw.} \quad \nu(f) = 0$$

Nach der ersten Greenschen Formel für $h = f$ gilt dann:

$$0 = \int_M f \cdot \ \Delta\backslash f \mathrm{d}\mu_M = -\int_M \langle \mathrm{D}f, \mathrm{D}f\rangle \,\mathrm{d}\mu_M + \int_{\partial M} \underbrace{f}_{=0 \text{ (Dirichlet)}} \cdot \underbrace{\nu(f)}_{=0 \text{ (Neumann)}} \mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

Also folgt:

$$\int_M \underbrace{\langle \mathrm{D}f, \mathrm{D}f\rangle}_{\geq 0} \mathrm{d}\mu_M = 0$$

Also gilt $\mathrm{D}f = 0$ und somit ist f konstant. Beim Dirichlet-Problem folgt $f = 0$, da dies auf dem Rand gilt. $\square_{5.4.4}$

5.4.5 **Theorem** (Mittelwertgleichung)

Seien f harmonisch, also $\Delta f = 0$ in $\Omega \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $p \in \Omega$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $B_r(p) \subseteq \Omega$ gilt. Dann gilt:

$$f(p) = \frac{1}{\operatorname{vol}\left(S_r^{(p)}\right)} \int_{S_r^{(p)}} f \mathrm{d}\mu$$

Dabei ist

$$S_r^{(p)} := \left\{ q \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|p - q\| = r \right\}$$
$$\operatorname{vol}\left(S_r^{(p)}\right) := \int_{S_r^{(p)}} \mathrm{d}\mu$$

und $\mathrm{d}\mu$ das zugehörige Oberflächenmaß bezüglich der induzierten Metrik.

Bemerkung

Bei holomorphen Funktionen folgt die Mittelwertgleichung aus dem Cauchyschen Theorem:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z} \mathrm{d}z$$

Beweis

Es gilt:

$$0 = \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$$

Setze zur Einfachheit $p = 0$. Die äußere Normale ist:

$$\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

TODO: Abb1 einfügen

$$0 = \int_{B_r(0)} \Delta f \mathrm{d}\mu_M = \int_{B_r(0)} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) \mathrm{d}\mu_M =$$
$$= \int_{S_r} \langle \operatorname{grad}(f), \nu \rangle \mathrm{d}\mu_{S_r} = \int_{S_r} \nu(f) \mathrm{d}\mu_{S_r}$$

Skaliere nun um:

$$0 = \int_{S_r} \nu(f)\big|_x \mathrm{d}\mu_{S_r}(x) \underset{\mathrm{d}\mu_{S_1}(y) = \frac{1}{r^{n-1}} \mathrm{d}\mu_{S_r}(x)}{\overset{y = \frac{x}{r}}{=}} r^{n-1} \int_{S_1} \nu(f)\big|_{ry} \mathrm{d}\mu_{S_1}(y)$$

Weiterer Trick:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(ry) = \mathrm{D}f\big|_{ry} \cdot y = \nu(f)\big|_{ry}$$

Denn es gilt:

$$y = \nu = \frac{x}{\|x\|}$$

Damit folgt:

$$0 = r^{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{S_1} f(ry) \,\mathrm{d}\mu_{S_1}(y)$$

Also ist

$$F(r) := \int_{S_1} f(ry) \,\mathrm{d}\mu_{S_1}(y) = c$$

unabhängig von r.

$$c = \lim_{r \to 0} F(r) \overset{\text{glm. Konvergenz}}{\underset{S_1 \text{ kompakt}}{=}} \int_{S_1} \left(\lim_{r \to 0} f(ry) \right) \mathrm{d}\mu_{S_1}(y) = f(0) \cdot \mathrm{vol}(S_1)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{c}{\mathrm{vol}(S_1)} = \frac{1}{\mathrm{vol}(S_1)} \int_{S_1} f(ry) \,\mathrm{d}\mu_{S_1}(y) = \\ &\overset{x=ry}{=} \frac{1}{r^{n-1}\mathrm{vol}(S_1)} \int_{S_r} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{S_r}(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S_r)} \int_{S_r} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{S_r}(x) \end{aligned}$$

$\square_{5.4.5}$

5.4.6 Theorem (Satz von Gauß auf nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten)

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand ∂M.
Sei u ein glattes Vektorfeld, und $\mathrm{div}(u)$ integrierbar.
Nehme außerdem an, dass es eine untergeordnete Zerlegung der Eins (η_k) gibt, sodass $\mathrm{supp}(\eta_k)$ kompakt und $\sum_k |u(\eta_k)|$ integrierbar ist.
Dann gilt:

$$\int_M \mathrm{div}(u) \,\mathrm{d}\mu_M = \int_{\partial M} \langle u,\nu \rangle \,\mathrm{d}\mu_{\partial M}$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{div}(u) \,\mathrm{d}\mu_M &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{n_k}(U_{n_k})} (\eta_k \mathrm{div}(u)) \circ x_{n_k}^{-1} \sqrt{\det g \circ x_{n_k}^{-1}} \mathrm{d}^n x = \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_M u(\eta_k) \,\mathrm{d}\mu}_{\text{absolut konvergent}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial M} \eta_k \langle u,\nu \rangle \,\mathrm{d}\mu_{\partial M}}_{\text{endliche Summe}} \end{aligned}$$

$\square_{5.4.6}$

5.4.7 Theorem (Gaußscher Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$)

Sei u ein glattes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div}(u) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ und:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^2 |u(x)| = 0$$

Dann ist $\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(u)\, \mathrm{d}^3x = 0$.

Bemerkung

- Mit Rand, also für ein offenes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und $M = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ mit glattem Rand, geht es analog.
- Die Bedingung

  $$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^2 |u(x)| = 0$$

  kann abgeschwächt werden, am bestem mit dem Lebesgue-Integral.

Beweis

Wähle $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta_R\big|_{[0,R]} = 1$ und $\eta_R\big|_{[R+1,\infty)} = 0$ und $|\eta_R'| \leq 2$.
TODO: Abb1 einfügen
Nach dem Satz von Gauß gilt, da $\eta_R \cdot u$ einen kompakten Träger hat:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(\eta_R(\|x\|) \cdot u(x))\, \mathrm{d}x = 0$$

Also folgt, wenn man $\tilde{\eta}_R := \eta_R(\|.\|) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betrachtet:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\eta}_R \operatorname{div}(u)\, \mathrm{d}^3x = -\int_{\mathbb{R}^3} u(\tilde{\eta}_R)\, \mathrm{d}^3x$$

Mit $R \to \infty$ folgt aus Dominierter Konvergenz $\lim_{R\to\infty} u(\tilde{\eta}_R) = u(1) = 0$ und somit:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(u)\, \mathrm{d}^3x\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} u(\tilde{\eta}_R)\, \mathrm{d}^3x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u(\tilde{\eta}_R)|\, \mathrm{d}^3x$$

$$|u(\tilde{\eta}_R)| \leq |u| \cdot |\mathrm{D}\tilde{\eta}_R| = |u| \cdot \left|\eta_R'\right|$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(\tilde{\eta}_R)|\, \mathrm{d}^3x \leq 2\int_{\mathbb{R}^3} |u| \cdot \chi \mathrm{d}^3x$$

Dabei ist χ die charakteristische Funktion der Menge:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 | R \leq \|x\| \leq R+1\right\}$$

Denn:

$$\mathrm{D}\eta_R(\|x\|) = \mathrm{D}\eta_R\left(\sqrt{\|x\|^2}\right)$$

Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_R = \eta_R'\left(\|x\|\right)\frac{x^j}{\sqrt{\|x\|^2}}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\eta) &= \eta'\left(\|x\|\right)\frac{x}{\|x\|}\\ |\operatorname{grad}(\eta)| &= \left|\eta'\left(\|x\|\right)\right| \leq 2\end{aligned}$$

$$2\int_{\mathbb{R}^3}|u|\cdot\chi\mathrm{d}^3x \leq 2\sup_{R\leq\|x\|\leq R+1}|u(x)|\cdot 4\pi\left(R+1\right)^2 \leq 4\cdot 4\pi\sup_{R\leq\|x\|\leq R+1}|u(x)|\,\|x\|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}(u)\,\mathrm{d}^3x = 0$$

$\square_{5.4.7}$

6 Differentialformen

Betrachte eine Mannigfaltigkeit M^n ohne Riemannsche Metrik.

Frage

Wie kann man eine Ableitung einführen?

Partielle Ableitungen liefern im Allgemeinen keine sinnvolle Ableitung, da sie von der Wahl der Koordinaten abhängen, zum Beispiel sei $v \in \mathrm{T}^{0,1}M$:

$$v = v_k(x)\,\mathrm{d}x^k = \tilde{v}_l(y)\,\mathrm{d}y^l$$

$$\tilde{v}_l = \frac{\partial x^k}{\partial y^l} v_k$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial y^m} &= \frac{\partial}{\partial y^m}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l} v_k\right) = \underbrace{\frac{\partial x^n}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x^n}}_{=\frac{\partial}{\partial y^m}} \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l} v_k\right) = \\
&= \frac{\partial x^n}{\partial y^m}\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\frac{\partial v_k}{\partial x^n} + \frac{\partial x^n}{\partial y^m} v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^n \partial y^l} = \\
&= \underbrace{\frac{\partial x^n}{\partial y^m}\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\frac{\partial v_k}{\partial x^n}}_{\text{Transformationsverhalten eines Tensors}} + \underbrace{v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^m \partial y^l}}_{\text{unerwünschter Zusatzterm}}
\end{aligned}$$

Um den unerwünschten Zusatzterm zum Verschwinden zu bringen, *antisymmetrisiert* man:

$$F_{jk}(x) := \frac{\partial v_k(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j(x)}{\partial x^k} \qquad \tilde{F}_{lm}(x) := \frac{\partial \tilde{v}_m(x)}{\partial y^l} - \frac{\partial \tilde{v}_l(x)}{\partial y^m}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{lm}(x) &= \frac{\partial x^n}{\partial y^l}\frac{\partial x^k}{\partial y^m}\frac{\partial v_k}{\partial x^n} + v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m} - \frac{\partial x^n}{\partial y^m}\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\frac{\partial v_k}{\partial x^n} - v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^m \partial y^l} = \\
&= \frac{\partial x^a}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial x^b}{\partial y^m}\left(\frac{\partial v_b}{\partial x^a} - \frac{\partial v_a}{\partial x^b}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial x^b}{\partial y^m} F_{ab}(x)
\end{aligned}$$

Also ist

$$F := F_{ab}(x)\,\mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b = \tilde{F}_{lm}(x)\,\mathrm{d}y^l \otimes \mathrm{d}y^m$$

ein Tensor der Stufe (0,2). Man schreibt auch

$$F = \mathrm{d}v$$

und d heißt *äußere Ableitung.*

Anwendung in der Physik

Betrachte das Vektorpotential $\vec{A}$ mit Magnetfeld $\vec{B} = \operatorname{rot}\left(\vec{A}\right)$ und das elektrostatische Potential φ. Im 4-dimensionalen Minkowskiraum ist das elektromagnetische Potential $A = \left(\varphi,\vec{A}\right)$. Dann ist

$$F = \mathrm{d}A$$

der Feldstärketensor. Nichtrelativistisch:

$$\left(\operatorname{rot}\left(\vec{A}\right)\right)^i = \varepsilon^{ijk} \underbrace{\partial_j A_k}_{=\mathrm{d}A}$$

Betrachte im Folgenden nur Tensorfelder der Stufe $(0,k)$, die *alternierend* sind, das heißt:

$$A_{i_1 \ldots i_l \ldots i_m \ldots i_k} = -A_{i_1 \ldots i_m \ldots i_l \ldots i_k}$$

Die Menge dieser Tensorfelder ist $\Lambda^k(M)$ und man bezeichnet sie als *Differentialformen.*
Die *äußere Ableitung* ist eine Abbildung:

$$\mathrm{d} : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$$

Der ε-Tensor lässt sich verallgemeinern zum *Hodge-Stern*:

$$* : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$$

6.1 Alternierende Formen

Sei E ein n-dimensionaler Vektorraum. (Später werden wir $E = \mathrm{T}_p M$ wählen.)
E^* sei der zugehörige Dualraum und:

$$E^{0,k} := \underbrace{E^* \otimes \ldots \otimes E^*}_{k \text{ Faktoren}}$$

6.1.1 Definition (multilinear, Tensorprodukt)

Eine Abbildung $\varphi : E^k \to \mathbb{R}$ heißt *multilinear*, falls sie in jedem Argument linear ist.
Die multilinearen Abbildungen bilden einen Vektorraum $M^k(E)$.
Auf den multilinearen Abbildungen kann man ein *Tensorprodukt* einführen:

$$\begin{aligned} \otimes : M^k(E) \times M^l(E) &\to M^{k+l} \\ (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_1, \ldots, v_{k+l}) &= \varphi_1(v_1, \ldots, v_k)\, \varphi_2(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

$\otimes$ ist bilinear.

6.1.2 Satz (Tensorprodukt-Basis)

Sei $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ eine Basis von E^*. Dann bilden die Vektoren

$$\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}; \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$$

eine Basis von $M^k(E)$. Insbesondere gilt $\dim\left(M^k(E)\right) = n^k$.

Beweis

Sei (e_k) eine Basis von E und $\left(\varphi^k\right)$ die duale Basis, das heißt $\varphi^k(e_l) = \delta_l^k$.

$$\left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \varphi^{i_1}(e_{j_1}) \cdots \varphi^{i_k}(e_{j_k}) = \delta_{j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_k}^{i_k}$$

a) Zeige, dass die Vektoren $\left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}$ ein Erzeugendensystem von $M^k(E)$ sind:
Sei $T \in M^k(E)$, so setze $t_{i_1 \ldots i_k} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.
Seien $w_i \in E$, so stelle diese in der Basis dar:

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} w_i^k e_k$$

Aus der Multilinearität folgt:

$$T(w_1, \ldots, w_k) = w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k} t_{i_1 \ldots i_k}$$

$$\left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)(w_1, \ldots, w_k) = w_1^{j_1} \cdots w_k^{j_k} \left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k}$$

Also gilt:

$$T(w_1, \ldots, w_k) = t_{i_1 \ldots i_k} \left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)(w_1, \ldots, w_k)$$

Es folgt:

$$T = t_{i_1 \ldots i_k} \left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)$$

b) Zeige, dass die Vektoren $\left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right)_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}$ linear unabhängig sind: Aus

$$\lambda_{i_1 \ldots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k} = 0$$

folgt durch anwenden auf $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$:

$$\lambda_{j_1 \ldots j_k} = 0$$

Also sind alle Koeffizienten Null und somit folgt die lineare Unabhängigkeit.

$\square_{6.1.2}$

Zusammenhang zum Tensorprodukt

Sei $T \in M^k(E)$, also ist

$$T : E \times \ldots \times E \to \mathbb{R}$$

multilinear. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\hat{T} : E \otimes \ldots \otimes E \to \mathbb{R}$$

mit:

$$T(w_1, \ldots, w_k) = \hat{T}(w_1 \otimes \ldots \otimes w_k)$$

Also ist $\hat{T} \in (E \otimes \ldots \otimes E)^* \cong E^* \otimes \ldots \otimes E^*$.

6.1.3 Definition (Pullback)

Sei $f : E \to F$ linear.
Die duale Abbildung oder der *Pullback* von f ist die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f^* : M^k\left(F\right) &\to M^k\left(E\right) \\ \left(f^*T\right)\left(u_1, \ldots, u_n\right) &:= T\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_k\right)\right) \end{aligned}$$

6.1.4 Definition (alternierend)

Ein $\varphi \in M^k\left(E\right)$ heißt *alternierend* (oder *total antisymmetrisch*), falls es antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Argumente ist, das heißt:

$$\varphi\left(u_1, \ldots, u_a, \ldots, u_b, \ldots, u_k\right) = -\varphi\left(u_1, \ldots, u_b, \ldots, u_a, \ldots, u_k\right)$$

Die alternierenden multilinearen Abbildungen werden mit $\Omega^k\left(E\right) \subseteq M^k\left(E\right)$ bezeichnet. Sei S_k die symmetrische Gruppe, also die Permutationsgruppe von $\{1, \ldots, k\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt} : M^k\left(E\right) &\to \Omega^k\left(E\right) \\ \mathrm{Alt}\left(T\right)\left(v_1, \ldots, v_k\right) &:= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\left(\sigma\right) T\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) \end{aligned}$$

6.1.5 Beispiel

$M^1\left(E\right) = E^*$
$M^2\left(E\right) \ni T : E \times E \to \mathbb{R}$ ist bilinear.
$\left(e_i\right)$ sei Basis von E und $\left(\varphi^i\right)$ die zugehörige duale Basis, also $\varphi^i\left(e_j\right) = \delta^i_j$.

$$\left(\varphi^i \otimes \varphi^j\right)\left(u, v\right) := \varphi^i\left(u\right) \cdot \varphi^j\left(v\right)$$

$$T\left(u, v\right) = T\left(u^i e_i, v^j e_j\right) = u^i v^j T\left(e_i, e_j\right) = T\left(e_i, e_j\right)\left(\varphi^i \otimes \varphi^j\right)\left(u, v\right)$$

Also gilt:

$$T = T\left(e_i, e_j\right) \underbrace{\varphi^i \otimes \varphi^j}_{\in E^* \otimes E^*}$$

Daher kann man T auf kanonische Weise mit einem Element aus $E^* \otimes E^*$.

6.1.6 Definition (Wedge-Produkt)

Wir definieren das *Wedge-Produkt* (oder Dachprodukt) durch:

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k \times \Omega^l &\to \Omega^{k+l} \\ \left(\omega, \eta\right) &\mapsto \omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}\mathrm{Alt}\left(\omega \otimes \eta\right) \end{aligned}$$

Dabei ist der Vorfaktor Konvention.

6.1.7 Satz (Eigenschaften des Wedge-Produkt)

- Aus $\Omega \in \Omega^k(E)$ folgt $\mathrm{Alt}(\Omega) = \Omega$.
- $\wedge$ ist bilinear.
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$
- $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$
- $\wedge$ ist assoziativ:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \Theta = \omega \wedge (\eta \wedge \Theta)$$

Beweis

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\Omega)(v_1,\ldots,v_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\Omega\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}\right) = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} (\mathrm{sgn}(\sigma))^2\,\Omega(v_1,\ldots,v_k) = \\ &= \frac{1}{k!}\cdot k!\Omega(v_1,\ldots,v_k) = \Omega(v_1,\ldots,v_k)\end{aligned}$$

Die Bilinearität ist klar.

$$\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta) = (-1)^{kl}\,\mathrm{Alt}(\eta\otimes\omega)$$

$$\begin{aligned}(f^*\omega)(u_1,\ldots,u_k) &= \omega(f(u_1),\ldots,f(u_k)) \\ (f^*\eta)(v_1,\ldots,v_l) &= \eta(f(v_1),\ldots,f(v_l)) \\ (f^*\omega)\wedge(f^*\eta)(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l) &= (\omega\wedge\eta)(f(u_1),\ldots,f(u_k),f(v_1),\ldots,f(v_l)) = \\ &= f^*(\omega\wedge\eta)(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underbrace{\omega}_{k}\wedge\underbrace{\eta}_{l})\wedge\underbrace{\Theta}_{m} &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\mathrm{Alt}((\omega\wedge\eta)\otimes\Theta) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\cdot\frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\Theta) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\Theta) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\Theta))\end{aligned}$$

$\square_{6.1.7}$

6.1.8 Satz (Basis von $\Omega^k(E)$)

Die Vektoren

$$\varphi^{i_1}\wedge\varphi^{i_2}\wedge\ldots\wedge\varphi^{i_k}$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ bilden eine Basis von $\Omega^k(E)$ und somit gilt:

$$\dim\left(\Omega^k(E)\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Beweis

Sei $T \in \Omega^k(E) \subseteq M^k(E)$ mit $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$. Die Basisdarstellung in $M^k(E)$ ist:

$$T = t_{i_1 \ldots i_k} \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}$$

Es folgt:

$$\mathrm{Alt}(T) = t_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{Alt}\left(\varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k}\right) = \frac{1}{k!} \cdot t_{i_1 \ldots i_k} \varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k}$$

Daher ist $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ ein Erzeugendensystem von $\Omega^k(E)$. Es gilt

$$\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} = -\varphi_{i_2} \wedge \varphi_{i_1}$$

und allgemein ist $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ total antisymmetrisch, das heißt insbesondere, dass es verschwindet, wenn zwei Indizes übereinstimmen.
Ordne die Indizes so um, dass sie aufsteigend sind und erhalte:

$$\mathrm{Alt}(T) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \tilde{t}_{i_1 \ldots i_k} \varphi^{i_k} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k}$$

Also sind die Vektoren $\left(\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k}\right)_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n}$ ein Erzeugendensystem.
Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, verwendet man für $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$:

$$\left(\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_k}\right)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}$$

$\square_{6.1.8}$

Insbesondere ist $\dim(\Omega^n(E)) = 1$. $\Omega^n(E)$ wird aufgespannt von $\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \ldots \wedge \varphi^n$.

6.1.9 Satz

Sei $\omega \in \Omega^n(E)$ für $n = \dim(E)$. Dann gilt:

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(A) \cdot \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

Dabei ist:

$$v_j = a^i_j e_i$$

$$A := \left(a^i_j\right)_{ij} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix}$$

Beweis

Definiere:

$$\mathcal{E}(v_1, \ldots, v_n) := \det(A)$$

Diese Abbildung ist multilinear und total antisymmetrisch aufgrund der Eigenschaften der Determinante.
Da $\dim(\Omega^n(E))$ eindimensional ist, ist $\omega = c \cdot \mathcal{E}$. Um c zu bestimmen, betrachte:

$$\omega(e_1, \ldots, e_n) = c \cdot \mathcal{E}(e_1, \ldots, e_n) = c \cdot \det(\mathbb{1})$$
$$\Rightarrow \quad c = \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

$\square_{6.1.9}$

6.1.10 Beispiel

Sei $E = \mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Basis. Betrachte $\mathcal{E}$ wie eben.
Stelle $\mathcal{E}$ in Komponenten dar:

$$\mathcal{E}(v_1, \ldots, v_n) = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n}$$
$$\epsilon_{123\ldots n} = 1$$

Daher ist $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ ist total antisymmetrisch:

$$\epsilon_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ heißt *total antisymmetrisches Symbol* oder *Levi-Civita-Symbol*. Im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\epsilon_{ijk} a_l^i a_m^j a_n^k = \det(A) \cdot \epsilon_{lmn}$$

6.2 Differentialformen, Orientierbarkeit

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Setze $E = \mathrm{T}_p M$ und betrachte $\Omega^k(\mathrm{T}_p M)$.
Was heißt differenzierbar?
TODO: Abb1 einfügen
Sei $U \subseteq M$ offen und

$$x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Karte. Dann ist der Pushforward

$$x_*\big|_p : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{x(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Der Pullback wird definiert als:

$$x^*\big|_p : \Omega^k\left(\mathrm{T}_{x(p)}\mathbb{R}^n\right) \to \Omega^k(\mathrm{T}_p M)$$
$$\left(x^*\big|_p \omega\right) \underbrace{(u_1, \ldots, u_k)}_{\in (\mathrm{T}_p M)^k} := \omega\left(x_*\big|_p(u_1), \ldots, x_*\big|_p(u_k)\right)$$

Definiere Differentialformen auf $x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$T = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} t_{i_1 \ldots i_k}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

mit $t_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(x(U))$.

6.2.1 Definition (Differentialform)

Eine *Differentialform* φ der Stufe k auf M ist eine Abbildung, die jedem $p \in M$ ein Element aus $\Omega^k(\mathrm{T}_p M)$ zuordnet, sodass für jede Karte (x,U) nun $\left(x^{-1}\right)^* \varphi$ ein glatter Tensor auf $x(U)$ ist, also in der kanonischen Basisdarstellung glatte Koeffizienten hat.
TODO: Abb2 einfügen

Bemerkung

Äquivalent hätte man sagen können:
φ ist eine total antisymmetrisches Tensorfeld der Stufe $(0,k)$.

Lokale Darstellung

$$\varphi = \varphi_{i_1 \ldots i_k}(x) \cdot \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Wir wollen mit Hilfe von n-Formen die Orientierung einführen. Sei $\omega \in \Omega^n(E)$:

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(A)\, \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

6.2.2 Definition (orientierungserhaltend, orientierbar)

Sei $\omega \in \Omega^n(M) \setminus \{0\}$. Eine lineare Abbildung

$$f : E \to E$$

heißt *orientierungserhaltend*, falls $\omega(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ das gleiche Vorzeichen hat, wie $\omega(v_1, \ldots, v_n)$ für alle $v_1, \ldots, v_n \in E$.

- Diese Definition hängt nicht von der Wahl von ω ab.
- Es genügt, eine feste Basis $v_1, \ldots, v_n$ von E zu betrachten.

TODO: Abb3 einfügen
Die Kartenwechselabbildung $y \circ x^{-1}$ heißt *orientierungserhaltend*, falls

$$\left(y \circ x^{-1}\right)_* \big|_p : \mathrm{T}_{x(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_{y(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend für alle $p \in U \cap V$ ist.
Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M heißt *orientierungserhaltend*, falls alle Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend sind.
Wenn M einen orientierungserhaltenden Atlas zulässt, so heißt M *orientierbar*.
$(M,\mathcal{A})$ mit orientierungserhaltendem Atlas $\mathcal{A}$ heißt *orientiert*.

6.2.3 Beispiel

i) Der Torus ist orientierbar.
   TODO: Abb4 einfügen
ii) Das Möbiusband ist *nicht* orientierbar.
   TODO: Abb5 einfügen
   Die Kartenwechselabbildung ist *nicht orientierungserhaltend*.

6.2.4 Theorem (Charakterisierung Orientierbarkeit)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es eine nirgends verschwindende n-Form auf M^n gibt.

Beweis

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{A} := \left\{h_i,U_i \middle| i \in \mathbb{N}\right\}$ ein Atlas von M. Dann ist $\left(h_i^{-1}\right)^* \omega$ eine n-Form auf $h_i\left(U_i\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Betrachte nun die Funktionen:

$$f_i\left(p\right) := \left(\left(h_i^{-1}\right)^* \omega\right)\bigg|_{h_i(p)} \left(e_1,\ldots,e_n\right)$$

Dabei bezeichnet $e_1,\ldots,e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Da ω nirgends verschwindet, haben die f_i keine Nullstellen.
Falls $f_i < 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt, dann ersetze h_i durch $S \circ h_i$, wobei $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Spiegelung an der Hyperebene $\left(e_1\right)^{\perp}$ bezeichnet. Danach definieren die n-Formen $\left(h_i^{-1}\right)^* \omega$ alle die gleiche Orientierung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, in dem die Standardbasis positiv orientiert ist. Sei nun $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und $h_i \circ h_j^{-1}$ ein Kartenwechsel. Dann gilt

$$\left(\left(h_i^{-1}\right)^* \omega\right)\left(e_1,\ldots,e_n\right) > 0$$

und:

$$\begin{aligned}\left(\left(h_i^{-1}\right)^* \omega\right)\left(\left(h_i \circ h_j^{-1}\right)_* e_1,\ldots,\left(h_i \circ h_j^{-1}\right)_* e_n\right) &= \left(\left(h_i \circ h_j^{-1}\right)^* \left(h_i^{-1}\right)^* \omega\right)\left(e_1,\ldots,e_n\right) = \\ &= \left(\left(h_i^{-1} \circ h_i \circ h_j^{-1}\right)^* \omega\right)\left(e_1,\ldots,e_n\right) = \\ &= \left(\left(h_j^{-1}\right)^* \omega\right)\left(e_1,\ldots,e_n\right) > 0\end{aligned}$$

Also ist $\left(h_i \circ h_j^{-1}\right)_*$ orientierungserhaltend für alle $i,j \in \mathbb{N}$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Damit ist M nach Definition orientierbar und der Atlas $\{h_i,U_i\}$ ist orientiert. $\square_{„\Leftarrow“}$
„$\Rightarrow$“: Dies folgt aus den folgenden Lemmata.

6.2.5 Lemma

Auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten $\left(M^n,g\right)$ ist durch

$$\varepsilon = \sqrt{\det\left(g\right)}\epsilon_{i_1\ldots i_n}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

eine kanonische n-Form gegeben, die sogenannte *Volumenform.*

Beweis

Betrachte wieder das Transformationsverhalten:

$$g = g_{ij}\left(x\right)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = \tilde{g}_{ab}\left(y\right)\mathrm{d}y^a \otimes \mathrm{d}y^b$$

Bei der Herleitung des Volumenmaßes haben wir bereits gesehen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \tilde{g}} &= \sqrt{\det g} \left| \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \right) \right| \\ \mathrm{d}x^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \mathrm{d}y^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} &= \sqrt{\det g} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}} \mathrm{d}y^{a_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{a_n}} \mathrm{d}y^{a_n} \right) = \\ &= \sqrt{\det g} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{a_n}} \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_n} = \\ &= \sqrt{\det g} \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \right) \epsilon_{a_1 \ldots a_n} \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_n} = \\ &\overset{\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\right) > 0}{=} \sqrt{\det \tilde{g}} \epsilon_{a_1 \ldots a_n} \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_n} \end{aligned}$$

Dabei ist $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\right) > 0$, da die Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend sind. $\square_{6.2.5}$

6.2.6 Lemma

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n kann man eine Riemannsche Metrik g einführen. Diese ist aber im Allgemeinen weder eindeutig noch kanonisch.

Beweis

Sei $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine abzählbare Zerlegung der Eins, untergeordnet zu einem abzählbaren Atlas (x_n, U_n), genauer $\operatorname{supp}(\eta_k) \subseteq U_{n_k}$.

TODO: Abb1 einfügen

Sei $g_{ij} = \delta_{ij}$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Mit dem Pullback definiere:

$$g^{(k)} := \eta_k \cdot x_{n_k}^* (\delta) \in \mathrm{T}^{0,2} U$$

Dann ist

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k x_{n_k}^* (\delta)$$

eine Riemannsche Metrik auf M^n. $\square_{6.2.6}$

Beweis von 6.2.4

„⇒“: Wähle eine Orientierung und eine Riemannsche Metrik nach 6.2.6. Dann gibt es nach 6.2.5 eine nirgends verschwindende n-Form. $\square_{6.2.4}$

6.3 Die äußere Ableitung, der deRham-Komplex

6.3.1 Definition (äußere Ableitung)

Die äußere Ableitung ist eine Abbildung:

$$\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

Für $\varphi \in \Omega^0(M) := C^\infty(M)$ sei:

$$\mathrm{d}\varphi := \mathrm{D}\varphi = \varphi_* = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi\right)\mathrm{d}x^j \in \Omega^1(M)$$

Für $\varphi \in \Omega^k(M)$, also

$$\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

definiere:

$$\mathrm{d}\varphi := \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi_{i_1 \dots i_k}\right)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

6.3.2 Theorem (Rechenregeln)

Für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^l(M)$ gilt:

i) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{d}(\omega + \eta) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\eta$$
$$\mathrm{d}(\lambda\omega) = \lambda\mathrm{d}\omega$$

ii) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\eta)$

iii) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$

Beweis

i) Die Linearität ist klar nach Definition.

ii) Darstellung in einer Basis:

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$
$$\eta = \eta_{j_1 \dots j_k}\mathrm{d}x^{j_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$$

$$\omega \wedge \eta = \omega_{i_1 \dots i_k}\eta_{j_1 \dots j_k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \frac{\partial}{\partial x^a}(\omega_{i_1 \dots i_k}\eta_{j_1 \dots j_k})\,\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^a}(\omega_{i_1 \dots i_k})\,\eta_{j_1 \dots j_k}\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} + \\
&\quad + \omega_{i_1 \dots i_k}\frac{\partial}{\partial x^a}(\eta_{j_1 \dots j_k}) \cdot (-1)^k \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^{j_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} = \\
&= (\mathrm{d}\omega \wedge \eta) + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\eta)
\end{aligned}$$

iii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \frac{\partial}{\partial x^a}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right) &= \frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^a}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = -\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right)
\end{aligned}$$

Also folgt $\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right) = 0$.

$\square_{6.3.2}$

6.3.3 Satz

Die äußere Ableitung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems definiert.

Beweis

1. Beweis: Rechne das Transformationsverhalten nach:

$$\omega = \omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \tilde{\omega}_{a_1\ldots a_k}\mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k}$$

$$\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_k} = \omega_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}$$

Berechne $\mathrm{d}\omega$ im Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y^b}\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_k}\mathrm{d}y^b \wedge \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k} = \\
&\quad= \frac{\partial}{\partial y^b}\left(\omega_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\right)\mathrm{d}y^b \wedge \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k} = \\
&\quad= \frac{\partial}{\partial y^b}\left(\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\mathrm{d}y^b \wedge \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k} + \\
&\qquad+ \omega_{i_1\ldots i_k}\underbrace{\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^b \partial y^{a_1}}}_{\text{symmetrisch in } a_1\leftrightarrow b}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{a_2}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\cdot \\
&\qquad\cdot \underbrace{\mathrm{d}y^b \wedge \mathrm{d}y^{a_1}}_{\text{antisymmetrisch in } a_1\leftrightarrow b} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k} + \ldots = \\
&\quad= \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\mathrm{d}y^b \wedge \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{a_k} = \\
&\quad= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\mathrm{d}y^b\right) \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\mathrm{d}y^{a_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{a_k}}\mathrm{d}y^{a_k}\right) = \\
&\quad= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}
\end{aligned}$$

$\square_{\text{1. Beweis}}$

2. Beweis (elegante Methode): Seien $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen $\omega \in \Omega^k(V)$ und:

$$f : U \to V$$

Dann ist der Pushforward

$$f_* : \mathrm{T}_p U \to \mathrm{T}_{f(p)} V$$

und der Pullback:

$$\begin{aligned} f^* &: \Omega^k(V) \to \Omega^k(U) \\ (f^*\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(f_* v_1, \ldots, f_* v_k) \end{aligned}$$

Behauptung:

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$$

Betrachtet man diese Gleichung speziell für $f = y \circ x^{-1}$, so liefert sie gerade das gewünschte Transformationsverhalten der äußeren Ableitung.
Beweis: Sei $\omega \in \Omega^k$ und

$$f : M \to N$$

differenzierbar.

$$\begin{aligned} f_* &: \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N \\ (f_* u)(\eta) &:= u(\eta \circ f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^* &: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M) \\ (f^*\omega)(u_1, \ldots, u_k) &:= \omega(f_* u_1, \ldots, f_* u_k) \end{aligned}$$

Aus Theorem 6.3.2 wissen wir, dass

$$\mathrm{d} : \Omega^k(N) \to \Omega^{k+1}(N)$$

linear ist, und die graduierte Leibniz-Regel

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

und $\mathrm{d}^2 = 0$ gelten. Gehe induktiv nach der Stufe von ω vor:
Induktionsanfang bei $k = 0$: Sei $\omega \in \Omega^0(N)$ also $\omega \in C^\infty(N)$. Richtungsableitung:

$$\mathrm{d}\omega(u) = u(\omega) = (\mathrm{D}\omega)\, u = \mathrm{D}_u \omega$$

Sei $v \in \mathrm{T}_p M$, dann ist $f_* v \in \mathrm{T}_{f(p)} N$.

$$\begin{aligned} (f^*(\mathrm{d}\omega))(v) = \mathrm{d}\omega(f_* v) = (f_* v)(\omega) = v(\omega \circ f) = \\ = \mathrm{d}(\omega \circ f)(v) = \mathrm{d}(f^*\omega)(v) \end{aligned}$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(p) &= \omega\big|_{f(p)} \\ f^*\omega &= \omega \circ f \end{aligned}$$

$$\left(f^*\omega\right)\left(u_1,\ldots,u_k\right)\Big|_p = \omega\left(f_*u_1,\ldots,f_*u_k\right)\Big|_{f(p)}$$

Also gilt:

$$f^*\left(\mathrm{d}\omega\right) = \mathrm{d}\left(f^*\omega\right)$$

Induktionsschritt $k \rightsquigarrow k+1$: Sei $\omega \in \Omega^k\left(N\right)$. Betrachte zunächst die $k+1$-Form $\omega \wedge \mathrm{d}x^i$. Mit der Leibniz-Regel folgt:

$$\mathrm{d}\left(\omega \wedge \mathrm{d}x^i\right) = \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}x^i + (-1)^k\,\omega \wedge \underbrace{\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^i\right)}_{=0}$$

Mit

$$\begin{aligned} f^*\left(\omega \wedge \eta\right)\left(u_1,\ldots,u_k\right) &= \left(\omega \wedge \eta\right)\left(f_*u_1,\ldots,f_*u_k\right) = \omega\left(f_*\ldots\right)\cdot\eta\left(f_*\ldots\right) = \\ &= \left(f^*\omega\right)\wedge\left(f^*\eta\right)\left(u_1,\ldots,u_k\right) \end{aligned}$$

folgt:

$$f^*\left(\mathrm{d}\left(\omega \wedge \mathrm{d}x^i\right)\right) = f^*\left(\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}x^i\right) = f^*\left(\mathrm{d}\omega\right)\wedge f^*\left(\mathrm{d}x^i\right)$$

Nach Induktionsvoraussetzung (Abkürzung: IV) gilt:

$$f^*\left(\mathrm{d}\omega\right) = \mathrm{d}\left(f^*\omega\right)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} f^*\left(\mathrm{d}\left(\omega \wedge \mathrm{d}x^i\right)\right) &\overset{\text{IV}}{=} \mathrm{d}\left(f^*\omega\right)\wedge f^*\left(\mathrm{d}x^i\right) = \mathrm{d}\left(f^*\omega \wedge f^*\mathrm{d}x^i\right) - (-1)^k\,\omega \wedge \mathrm{d}\left(f^*\mathrm{d}x^i\right) = \\ &\overset{\text{IV}}{=} \mathrm{d}\left(f^*\omega \wedge f^*\mathrm{d}x^i\right) - (-1)^k\,\omega \wedge f^*\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^i\right) = \\ &= \mathrm{d}\left(f^*\left(\omega \wedge \mathrm{d}x^i\right)\right) \end{aligned}$$

Verwende nun die Linearität von d und f^*. $\square_{\text{Behauptung}}$
Das Transformationsverhalten kann man ausdrücken als

$$f^* \underbrace{\left(\mathrm{d}\omega\right)}_{\text{auf } y(U\cap V)\subseteq\mathbb{R}^n} = \mathrm{d} \underbrace{\left(f^*\omega\right)}_{\text{auf } x(U\cap V)\subseteq\mathbb{R}^n}$$

mit $f = y \circ x^{-1}$ und ω aufgefasst als Differentialform auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. $\square_{\text{2. Beweis}}$

Bemerkung

Es gilt:

$$\mathrm{d}: \Omega^k\left(M\right) \to \Omega^{k+1}\left(M\right)$$

$$0 \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathbb{R} \overset{\mathrm{d}}{\to} C^\infty\left(M\right) = \Omega^0\left(M\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^1\left(M\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^2\left(M\right) \to \ldots \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^n\left(M\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} 0$$

Für die ersten beiden Abbildungen definiere:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}: 0 &\to \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : \mathbb{R} &\to C^{\infty}(M) \\ \lambda &\mapsto (m \mapsto \lambda) \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt beachte:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Im Fall $k = n$ hat man $(n+1)$-Faktoren $\mathrm{d}x^{j_l}$. Wenigstens zwei der Indizes j_l müssen daher übereinstimmen. Wegen der Antisymmetrie erhalten wir null.
Außerdem gilt $\mathrm{d}^2 = 0$, das heißt es gilt:

$$\mathrm{d}\left(\Omega^k\right) \subseteq \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^{k+1}}\right)$$

Eine solche Folge nennt man allgemein einen *Kettenkomplex.*

6.3.4 Definition (deRham-Komplex, geschlossen, exakt)

Der durch die äußere Ableitung gegebene Kettenkomplex heißt *deRham-Komplex.*
Ein $\omega \in \ker(\mathrm{d})$ heißt *geschlossene Differentialform.*
Ein $\omega \in \mathrm{im}(\mathrm{d})$ heißt *exakte Differentialform.*

Bemerkung

$\mathrm{d}\left(\Omega^{k-1}(M)\right)$ sind die exakten Differentialformen.
$\ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}\right)$ sind die geschlossenen Differentialformen.
Jede exakte Differentialform ist geschlossen, denn es gilt $\mathrm{d}^2 = 0$.
Im Allgemeinen ist aber *nicht* jede geschlossene Differentialform exakt.

6.3.5 Definition (deRham-Kohomologie)

Weil $\mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) \subseteq \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^k}\right)$ ein Teilraum ist, kann man die Äquivalenzrelation

$$\omega \sim \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \omega - \omega' \in \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M)$$

auf $\ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^k}\right)$ definieren. Damit ist die *deRham-Kohomologie*

$$H^k(\Omega) := \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}\right) / \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) := \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}\right) / \sim$$

ein Vektorraum.
$\dim\left(H^k\right) \in \mathbb{N}$ beschreibt die Topologie von M.

6.3.6 Definition (sternförmig)

Ein offenes Gebiet $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bezüglich $a \in A$, falls mit jedem $x \in A$ auch

$$\overline{ax} := \left\{ ta + (1-t)\,x \middle| t \in [0,1] \right\} \subseteq A$$

ist.
TODO: Abb1 einfügen

6.3.7 Theorem (Poincarésches Lemma)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich 0. Dann ist jede geschlossene Form auf A exakt.
(Also ist die deRham-Kohomologie trivial.)

Beweis für den Fall $k = 1$

Sei ω eine geschlossene 1-Form, das heißt:

$$\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$$

$$\mathrm{d}\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i = 0$$

Für

$$\varphi(x) := \left(\int_0^1 \omega_i(tx)\,\mathrm{d}t \right) x^i$$

gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x^j = \left(\int_0^1 t \cdot \underbrace{\partial_j\omega_i}_{=\partial_i\omega_j} |_{tx}\mathrm{d}t\right)x^i\mathrm{d}x^j + \left(\int_0^1 \omega_i\big|_{tx}\mathrm{d}t\right)\delta^i_j\mathrm{d}x^j = \\ &= \left(\int_0^1 t \cdot \underbrace{\partial_j\omega_i}_{=\partial_i\omega_j} |_{tx}\mathrm{d}t\right)x^i\mathrm{d}x^j + \left(\int_0^1 \omega_j\big|_{tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^i\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\partial_j\omega_i\big|_{tx}x^i\mathrm{d}x^j \overset{\omega \text{ geschlossen}}{=} \partial_i\omega_j\big|_{tx}x^i\mathrm{d}x^j \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_j\big|_{tx}\mathrm{d}x^j$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi(x) &= \left(\int_0^1 t\cdot\partial_j\omega_i\big|_{tx}\mathrm{d}t\right)x^i\mathrm{d}x^j + \left(\int_0^1 \omega_j\big|_{tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^j \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\cdot\omega_j\big|_{tx}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^j = \omega_j(x)\,\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

Also ist φ eine 0-Form mit $\mathrm{d}\varphi = \omega$, das heißt ω ist exakt. $\square$Beweis für $k = 1$

Frobenius „Integrabilitätsbedingungen“

Frage: Sei ω_i gegeben. Gibt es ein φ so, dass $\omega_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\varphi$ ist?
Falls ja, folgt $\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\varphi$, also gilt $\partial_i\omega_j = \partial_j\omega_i$.
Also ist $\partial_i\omega_j = \partial_j\omega_i$ eine notwendige Bedingung.
Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn das Gebiet einfach zusammenhängend ist.

Beweis für k-Formen

Lasse die Summe über Tensorindizes weg. Sei ω ein k-Form mit $k \geq 1$.

$$\varphi := \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^{i_\alpha} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi(x) = &\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) \underbrace{\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial x^j}}_{=\delta_j^{i_\alpha}} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{=:A} + \\ &+ \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k} \partial_j \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^{i_\alpha} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{=:B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= k \cdot \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned}$$

Für B nenne $j \to i_\alpha$ und $i_\alpha \to l$.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k} \partial_{i_\alpha} \omega_{i_1 \ldots l \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^l \mathrm{d}x^{i_\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_{\alpha-1}} \wedge \mathrm{d}x^{i_{\alpha+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\int_0^1 t^{k} \partial_{i_\alpha} \omega_{i_1 \ldots l \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^l \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned}$$

ω ist geschlossen, das heißt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\partial_l \omega_{i_1 \ldots i_k} - \partial_{i_1} \omega_{l i_1 \ldots i_k} - \partial_{i_2} \omega_{i_1 l i_3 \ldots i_k} - \ldots - \partial_{i_k} \omega_{i_1 \ldots i_{k-1} l} \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \left(\partial_l \omega_{i_1 \ldots i_k} - k \partial_{i_\alpha} \omega_{i_1 \ldots l \ldots i_k} \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\partial_{i_\alpha} \omega_{i_1 \ldots l \ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \frac{1}{k} \partial_l \omega_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{k} \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\int_0^1 t^{k} \partial_l \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^l \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \left(\int_0^1 t^{k} \partial_l \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^l \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned}$$

Insgesamt gibt das:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi &= k \cdot \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} + \\ &\quad + \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{i_1 \dots i_k}(tx)\, \mathrm{d}t \right) x^l \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \left(\int_0^1 k t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) + t^k \partial_l \omega_{i_1 \dots i_k}(tx)\, x^l \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t^k \omega_{i_1 \dots i_k} \right) \big|_{tx} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \omega_{i_1 \dots i_k}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \omega\end{aligned}$$

$\square_{6.3.7}$

6.3.8 Beispiel

Betrachte den Torus $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

$$\omega := \mathrm{d}x \in \Omega^1 \left(T^2 \right)$$
$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} 1 \right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x = 0$$

Also ist ω geschlossen. Ist ω exakt, das heißt gibt es ein $\varphi \in \Omega^0 = C^\infty \left(T^2 \right)$ mit $\omega = \mathrm{d}\varphi$?

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathrm{d}y \overset{!}{=} \omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. φ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig, aber nicht auf T^2.
Also ist ω nicht exakt und $\omega \in H^1 \neq \{0\}$.

6.4 Integration von Differentialformen

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (*ohne* Riemannsche Metrik), zur Einfachheit kompakt.
Sei $\omega \in \Omega^k(M)$. Was ist $\int_M \omega$?
Für $k \neq n$ geht das nicht. Für $k = n$ ist:

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

Beispiel
Hätten wir eine Riemannsche Metrik, könnten wir für ω die Volumenform nehmen:

$$\omega := \sqrt{\det(g)} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

$$\int \omega_{12\ldots n} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n = \int \sqrt{\det g}\, \underbrace{\epsilon_{1\ldots n}}_{=1} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Allgemein für ein $\eta \in \Omega^k$, also total antisymmetrisches $\eta_{i_1\ldots i_k}(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \eta_{i_1\ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \\ &= \frac{1}{n^k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \sum_{i_1\ldots i_k} \eta_{i_1\ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned}$$

6.4.1 **Definition** (Integral von Differentialformen)

Sei $(\eta_k)_{k=1\ldots,K}$ eine Zerlegung der Eins, die einem Atlas (x_m,U_m) untergeordnet ist, der endlich gewählt werden kann, da M^n kompakt ist. Also sei $\operatorname{supp}(\eta_k) \subseteq U_k$. Für $\varphi \in \Omega^n(M)$ definiere:

$$\int_M \varphi := \sum_{k=1}^{K} \int_{x_k(U_k)} \left(x_k^{-1}\right)^* (\eta_k \cdot \varphi)\Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Oder kürzer:

$$\int_M \varphi = \sum_k \int \eta_k \varphi_{1\ldots n}(x)\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Denn es gilt:

$$\varphi = \varphi_{i_1\ldots i_n}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \varphi_{12\ldots n}(x)$$

6.4.2 **Satz**

Das Integral aus Definition 6.4.1 ist unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins definiert.

Beweis

Auf M gibt es eine Riemannsche Metrik g.
In jeder Karte ist dann bis auf ein Vorzeichen eine eindeutige n-Form

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\det g}\epsilon_{i_1\ldots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

gegeben. Da die n-Formen in jedem Punkt bis auf ein Vielfaches eindeutig sind, können wir φ in der Form

$$\varphi = f \cdot \varepsilon$$

mit $f \in C^\infty(U)$ schreiben, also:

$$\varphi_{i_1\ldots i_n}(x) = f(x) \sqrt{\det(g)}\epsilon_{i_1\ldots i_n}$$

Es folgt:

$$\int \eta_k \varphi_{1\dots n}(x)\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k f(x)\sqrt{\det g}\,\underbrace{\epsilon_{12\dots n}}_{=1}\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int \eta_k f \mathrm{d}\mu_g$$

Hieran sieht man, dass das Integral unabhängig von Kartenwechseln ist, welche die Orientierung erhalten.

Bei Kartenwechseln, die die Orientierung umkehren, kehrt sich das Vorzeichen von f und ε um, das Integral bleibt wieder erhalten. $\square_{6.4.2}$

2. Beweis

Durch elementare Rechnung folgt mit

$$\omega = \omega_{i_1\dots i_n}(x)\,\mathrm{d}x^i \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j$$

nun:

$$\omega = \omega_{i_1\dots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}}\mathrm{d}y^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{j_n} = \left(\det\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\cdot \omega_{j_1\dots j_n}\mathrm{d}y^{j_1} \wedge \dots \mathrm{d}y^{j_n}$$

$$\omega_{1\dots n}(y) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\omega_{1\dots n}(x)$$

$$\int \eta_k \omega_{1\dots n}(y)\,\mathrm{d}y^1 \dots \mathrm{d}y^n = \int \eta_k \omega_{1\dots n}(x)\,\underbrace{\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\mathrm{d}y^1 \dots \mathrm{d}y^n}_{=:\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n}$$

$\square_{\text{2.Beweis}}$

6.5 Der Satz von Stokes

6.5.1 Theorem (Satz von Stokes)

Sei M^n eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Dann gilt für die äußere Ableitung $\mathrm{d}\omega \in \Omega^n(M)$:

$$\int_M (\mathrm{d}\omega) = 0$$

Später zeigen wir für Mannigfaltigkeit mit Rand:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Beweis

Wähle eine endliche Zerlegung der Eins.

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_k \int_{x_k(U_k)} \eta_k \left(\mathrm{d}\omega\right)_{1\dots n} \mathrm{d}^n x$$

Betrachte speziell:

$$\omega = f(x)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^l} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Dies ist ausreichend, weil eine allgemeine $(n-1)$-Form als Linearkombination solcher $(n-1)$-Formen geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^l} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = \\ &= (-1)^{l-1} \frac{\partial f}{\partial x^l} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k \left(\mathrm{d}\omega\right)_{1\dots n} \mathrm{d}^n x &= (-1)^{l-1} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x) \frac{\partial f}{\partial x^l} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \\ &= (-1)^{l-1} \int \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\int \mathrm{d}x^l} \ldots \int \mathrm{d}x^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^l \eta_k \frac{\partial f}{\partial x^l}\right) = \\ &= (-1)^l \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \eta_k(x)\right) f \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathrm{d}\eta_k \wedge \omega\right)\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\int_M \eta_k \mathrm{d}\omega = -\int_M \left(\mathrm{d}\eta_k\right) \wedge \omega$$

Summiere über k:

$$\sum_k \eta_k = 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_M \mathrm{d}\omega = \int_M \left(\mathrm{d}(1)\right) \wedge \omega = 0$$

Für allgemeine ω folgt die Behauptung nun aus der Linearität von d, indem man eine Basisdarstellung von ω betrachtet. $\square_{6.5.1}$

Nun zum Fall mit Rand: Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. (Dieser ist auch kompakt.)

$$x : U \to \mathbb{R}^n_- := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x^1 \leq 0\right\}$$

$$x : U \cap \partial M \to \mathbb{R}^n_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x^1 = 0\right\}$$

Seien $\omega \in \Omega^k(M)$ und (x,U) eine Karte um einen Randpunkt $p \in \partial M$. Für $x \in \mathbb{R}^n_-$ schreibe:

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Dann ist

$$\omega(p) : (\mathrm{T}_p M)^k \to \mathbb{R}$$

eine k-Linearform, die total antisymmetrisch ist. Fasse

$$\mathrm{T}_p \partial M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\rangle = \mathrm{T}_p M$$

als Unterraum auf. Schränke $\omega(p)$ auf $(\mathrm{T}_p \partial M)^k$ ein:

$$\omega(p)\,\big|_{\partial M} = (\mathrm{T}_p \partial M)^k \to \mathbb{R}$$

ist multilinear und total antisymmetrisch und somit $\omega\big|_{\partial M} \in \Omega^k(\partial_M)$.
Oder in Komponenten für ein $x \in \mathbb{R}^n_0$:

$$\omega\big|_{\partial M} = \sum_{2 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

$\mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n$ sind Basis von $(\mathrm{T}_p \partial M)^*$, nämlich die duale Basis zu $\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

6.5.2 **Theorem** (Satz von Stokes mit Rand)

Sei M eine n-dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $\mathrm{d}\omega$ eine n-Form. ω ist dann eine $(n-1)$-Form auf ∂M. Es gilt:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Beweis

Wähle wieder eine endlich Zerlegung der Eins η_k.

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_k \int_{x_k(U_k)} \eta_k(x)\, (\mathrm{d}\omega)_{1 \ldots n}\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Falls $U_k \cap \partial M = \emptyset$ gilt, also x_k eine Karte im Innern ist, so gilt genau wie im Fall ohne Rand:

$$\int_M \eta_k \mathrm{d}\omega = -\int_M (\mathrm{d}\eta_k) \wedge \omega$$

Falls U_{n_k} den Rand schneidet, gilt:

$$\int_M \eta_k \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{R}^n_-} \eta_k(x)\, (\mathrm{d}\omega)_{1 \ldots n}\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

TODO: Abb2 einfügen

Nehme wieder an, dass gilt:

$$\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^l} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$
$$\mathrm{d}\omega = (-1)^{l-1} \frac{\partial f}{\partial x^l} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

$$\Rightarrow \quad \int_M \eta_k \mathrm{d}\omega = (-1)^{l-1} \int_{\mathbb{R}^n_-} \eta_k(x) \frac{\partial f}{\partial x^l} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Integriere nun partiell. Fall $l \neq 1$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^l \ldots \Rightarrow$ Man bekommt also keine Randterme

Fall $l = 1$:

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x^1 \eta_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x^1} = \eta_k f\big|_{x^1=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\eta_k\right) \cdot f$$

Man bekommt also den Randterm:

$$(-1)^{1-1} \int_{\mathbb{R}^n_0} \eta_k \cdot f \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n = \int_{\partial M} \eta_k \omega\big|_{\partial M}$$

(Genau wie oben):

$$\omega\big|_{\partial M} = 0 \quad \text{falls } l \neq 1$$
$$\omega\big|_{\partial M} = f \cdot \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \quad \text{falls } l = 1$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\partial M} \eta_k \omega = \int_{\mathbb{R}^n_0} \eta_k \cdot f \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Also gilt allgemein:

$$\int_M \eta_k \mathrm{d}\omega = -\int_M (\mathrm{d}\eta_k) \wedge \omega + \int_{\partial M} \eta_k \omega$$

Summiere über k, verwende dann $\displaystyle\sum_k \eta_k = 1$ und $\mathrm{d}(1) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$\square_{6.5.2}$

6.6 Hodge-Stern, Hodge-Theorem

Sei nun M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, zur Einfachheit kompakt und ohne Rand. Betrachte Ω^k auf ganz M als Vektorraum mit folgenden Operationen für $\omega,\eta \in \Omega^k$ und $\lambda,\nu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda\omega + \nu\eta)(p) := \lambda\omega(p) + \nu\eta(p)$$

$\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \to \Omega^{k+l}$	Wedge-Produkt
$\displaystyle\int_M : \Omega^n \to \mathbb{R}$ linear	Integral

Kombiniere $\wedge$ und $\int_M$:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \Omega^k \times \Omega^{n-k} &\to \mathbb{R} \\ (\omega,\eta) &\mapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

Dies ist eine Bilinearform und man nennt sie auch *duale Paarung*.
(Bemerkung: Ω^k und Ω^{n-k} sind ∞-dimensional. Wir müssten eigentlich eine Topologie auf Ω^k und Ω^{n-k} einführen. Dies lassen wir hier außer Acht und verweisen auf die Funktionalanalysis.)
Falls für alle $u \in E, v \in F$ die Bedingung

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$$

für die duale Paarung $\langle .,. \rangle : E \times F \to \mathbb{R}$ erfüllt ist, heißt $A^* : F \to F$ die *Adjungierte* von $A : E \to E$.
Was ist d^*?
Sei $\omega \in \Omega^{k-1}$ und $\eta \in \Omega^{n-k}$.

$$0 \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Satz von}}{=}} \int_M \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) \underset{\text{Leibnizregel}}{\overset{\text{graduierte}}{=}} \int_M \left(\mathrm{d}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{k-1} \omega \wedge (\mathrm{d}\eta) \right) = \langle \mathrm{d}\omega, \eta \rangle + (-1)^{(k-1)} \langle \omega, \mathrm{d}\eta \rangle$$

Also ist *formal*:

$$\mathrm{d}^* = (-1)^k \, \mathrm{d}$$

Wegen $\mathrm{d}^2 = 0$ folgt:

$$\mathrm{d}\mathrm{d}^* = 0 = \mathrm{d}^*\mathrm{d}$$

Es ist also unmöglich so einen Differentialoperator zweiter Ordnung zu bilden. Dafür benötigt man den Hodge-Stern-Operator:

$* : \Omega^k \to \Omega^{n-k}$	Hodge-Stern
$\Delta := -(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*)$	Hodge-Laplace

Ziel

Führe auf den Vektorräumen $\Omega^k(M)$ ein Skalarprodukt ein, sodass $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ eine analytisch interessante Adjungierte besitzt.

Motivation

Sei E ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gilt:

$$\dim\left(\Omega^k(E)\right) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dim\left(\Omega^{n-k}(E)\right)$$

Also sind $\Omega^k(E)$ und $\Omega^{n-k}(E)$ isomorph. Ist E zusätzlich orientiert und mit Skalarprodukt versehen, dann gibt es einen *natürlichen* Isomorphismus, der wie folgt definiert ist:
Für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$*\left(e^1 \wedge \ldots \wedge e^k\right) = e^{k+1} \wedge \ldots \wedge e^n$$

Dabei ist $\left\{e^1,\ldots,e^n\right\}$ die Dualbasis.
Diese Abbildung kann man schreiben als:

$$*\left(e^{j_1}\wedge\ldots\wedge e^{j_k}\right)=\frac{1}{(n-k)!}\delta^{j_1i_1}\ldots\delta^{j_ki_k}\epsilon_{i_1\ldots i_k,i_{k+1}\ldots i_n}e^{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge e^{i_n}$$

Sei nun (M,g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, kompakt und ohne Rand.
Dann erhält man eine entsprechende Abbildung $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$.
Eine Darstellung in lokaler Karte (x,U) erhält man, indem man δ^{ij} durch $g^{ij}(x)$ und $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ durch $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}=\sqrt{\det(g(x))}\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ ersetzt.

6.6.1 Definition (Hodge-Stern)

Der *Hodge-Stern* $*$ ist der lineare Isomorphismus:

$$\begin{aligned}*:\Omega^k(M)&\to\Omega^{n-k}(M)\\ \omega&\mapsto *\omega:=\frac{1}{(n-k)!}\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{i_{k+1}\ldots i_n}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\end{aligned}$$

Dabei ist $\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{i_{k+1}\ldots i_n}=g^{i_1j_1}\ldots g^{i_kj_k}\varepsilon_{j_1\ldots j_k,i_{k+1}\ldots i_n}$. Also ist $*\omega$ ein $(0,n-k)$-Tensor.

6.6.2 Satz

Es gilt:

$$*^2=(-1)^{k(n-k)}\mathbb{1}_{\Omega^k(M)}=\begin{cases}\mathbb{1}_{\Omega^k(M)} & \text{falls } n \text{ ungerade}\\ (-1)^k\mathbb{1}_{\Omega^k(M)} & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}$$

Beweis

$$\begin{aligned}**\omega&=*\left(\frac{1}{(n-k)!}\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{i_{k+1}\ldots i_n}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_n}\right)=\\ &=\frac{1}{k!}\varepsilon^{j_1\ldots j_{n-k}}{}_{l_1\ldots l_k}\left(\frac{1}{(n-k)!}\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_{n-k}}\omega_{i_1\ldots i_k}\right)\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}=\\ &=\frac{1}{k!\,(n-k)!}\varepsilon^{j_1\ldots j_{n-k}}{}_{l_1\ldots l_k}\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_{n-k}}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}=\\ &=\frac{1}{k!\,(n-k)!}g_{l_1r_1}\ldots g_{l_kr_k}\varepsilon^{j_1\ldots j_{n-k},r_1\ldots r_k}g^{s_1i_1}\ldots g^{s_ki_k}\varepsilon_{s_1\ldots s_k,j_1\ldots j_{n-k}}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}=\\ &=\frac{(-1)^{k(n-k)}}{k!\,(n-k)!}g_{l_1r_1}\ldots g_{l_kr_k}g^{s_1i_1}\ldots g^{s_ki_k}\varepsilon^{j_1\ldots j_{n-k},r_1\ldots r_k}\varepsilon_{j_1\ldots j_{n-k},s_1\ldots s_k}\omega_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}\end{aligned}$$

Beachte:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1\ldots i_n}&=g^{i_1j_1}\ldots g^{i_nj_n}\varepsilon_{j_1\ldots j_n}=g^{i_1j_1}\ldots g^{i_nj_n}\sqrt{\det(g)}\epsilon_{j_1\ldots j_n}=\\ &=\det\left(g^{-1}\right)\sqrt{\det(g)}\epsilon_{j_1\ldots j_n}=\frac{\sqrt{\det(g)}}{\det(g)}\epsilon_{j_1\ldots j_n}=\frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\epsilon_{j_1\ldots j_n}\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$**\omega = \frac{(-1)^{k(n-k)}}{k!\,(n-k)!} g_{l_1 r_1} \dots g_{l_k r_k} g^{s_1 i_1} \dots g^{s_k i_k} \epsilon^{j_1 \dots j_{n-k}, r_1 \dots r_k} \epsilon_{j_1 \dots j_{n-k}, s_1 \dots s_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{l_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_k}$$

Klar ist, dass man nur Beiträge bekommt, wenn $(s_1, \dots, s_k)$ eine Permutation von $(r_1, \dots, r_k)$ ist, da sonst einer der beiden total antisymmetrischen Tensoren verschwindet. Wegen der Antisymmetrie des Dachprodukts und der Komponenten $\omega_{i_1,\dots,i_k}$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned} **\omega &= (-1)^{k(n-k)}\, g_{l_1 r_1} g^{r_1 i_1} \dots g_{l_k r_k} g^{r_k i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{l_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_k} = \\ &= (-1)^{k(n-k)}\, \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = (-1)^{k(n-k)}\, \omega \end{aligned}$$

$\square_{6.6.2}$

Mit Hilfe des Hodge-Sterns kann man nun ein Skalarprodukt auf $\Omega^k(M)$ einführen:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\to \mathbb{R} \\ (\omega,\eta) &\mapsto \int_M (\omega \wedge (*\eta)) \end{aligned}$$

6.6.3 Lemma

Für jede n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ gilt:

$$\int_M \omega = \int_M (*\omega)\, \mathrm{d}\mu_M$$

Beweis

Es gilt:

$$*^2\big|_{\Omega^n(M)} = \mathbb{1}$$

Nun ist

$$*\omega =: f$$

eine skalare Funktion.

$$\omega = *f = f\varepsilon = f\sqrt{\det(g)}\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$$

$\square_{6.6.3}$

6.6.4 Lemma

Die Bilinearform auf $\Omega^k(M)$, $\langle \omega,\eta \rangle = \int_M (\omega \wedge (*\eta))$ ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis

$$\begin{aligned}
\langle \omega,\eta \rangle &\overset{6.6.3}{=} \int_M * (\omega \wedge (*\eta))\, \mathrm{d}\mu_M \\
* (\omega \wedge (*\eta)) &= \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \left(\omega_{i_1 \dots i_k} (*\eta)_{i_{k+1} \dots i_n} \right) = \\
&= \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_k, i_{k+1} \dots i_n} \eta^{j_1 \dots j_k} = \\
&= \frac{(n-k)!}{k!} (*\omega)^{i_1 \dots i_{n-k}} (*\eta)_{i_1 \dots i_{n-k}}
\end{aligned}$$

Offenbar ist dies symmetrisch und positiv definit. $\Box_{6.6.4}$

6.6.5 **Lemma** (Adjungierte d^*)

Die Adjungierte von d bezüglich $\langle .,. \rangle$ ist:

$$\mathrm{d}^* = (-1)^{k+(n-k+1)(k-1)} * \mathrm{d} * : \Omega^k (M) \to \Omega^{k-1} (M)$$

Beweis

Sei $\omega \in \Omega^{k-1} (M)$ und $\eta \in \Omega^k (M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\omega,\eta \rangle = \int_M (\mathrm{d}\omega) \wedge (*\eta) &\overset{\text{Produktregel}}{=} \underbrace{\int_M \mathrm{d} (\omega \wedge *\eta)}_{=0} + (-1)^k \int_M \omega \wedge \mathrm{d} * \eta = \\
= (-1)^{k+(n-k+1)(k-1)} \int_M \omega \wedge * (*\mathrm{d} * \eta) &= (-1)^{k+(n-k+1)(k-1)} \langle \omega, * \mathrm{d} * \eta \rangle
\end{aligned}$$

$\Box_{6.6.5}$

Mit diesen Vorbereitungen kann man schließlich Operatoren zweiter Ordnung einführen, den Hodge-Laplace-Operator:

$$\Delta := - (\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}) : \Omega^k (M) \to \Omega^k (M)$$

Auf 0-Formen ist

$$\Delta f = - (\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}) f = -\mathrm{d}^*\mathrm{d}f = \Delta\backslash_g f$$

gerade wieder der Laplace-Beltrami-Operator.
Der Laplace-Operator ist jetzt aber allgemein auf k-Formen definiert. Er hat *schöne* Eigenschaften.

6.6.6 **Lemma** (Rechenregeln Laplace-Operator)

i)

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{d} &= \mathrm{d}\Delta \\
\mathrm{d}^*\Delta &= \Delta^*\mathrm{d}
\end{aligned}$$

ii) $(-\Delta)$ ist positiv, also $\langle -\Delta\varphi,\varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in \Omega^k$.

iii) $\langle -\Delta\varphi,\varphi \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = 0$ und $\mathrm{d}^*\varphi = 0$

Beweis

i) Es gilt:

$$\Delta \mathrm{d} = -\left(\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}\right)\mathrm{d} = -\mathrm{d}\mathrm{d}^*\mathrm{d} = -\mathrm{d}\left(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*\right) = \mathrm{d}\Delta$$

$\Delta \mathrm{d}^* = \mathrm{d}^*\Delta$ folgt genauso, wenn man zusätzlich verwendet:

$$0 = (\mathrm{d} \circ \mathrm{d})^* = \mathrm{d}^* \circ \mathrm{d}^* = (\mathrm{d}^*)^2$$

ii) Es gilt:

$$\langle -\Delta\varphi,\varphi\rangle = \langle \mathrm{d}\mathrm{d}^*\varphi + \mathrm{d}^*\mathrm{d}\varphi,\varphi\rangle = \langle \mathrm{d}^*\varphi,\mathrm{d}^*\varphi\rangle + \langle \mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}\varphi\rangle \geq 0$$

iii) $\langle -\Delta\varphi,\varphi\rangle = 0$ gilt genau dann, wenn beide Summanden verschwinden. Da $\langle,\rangle$ positiv definit ist, folgt $\mathrm{d}\varphi = 0 = \mathrm{d}^*\varphi$

$\square_{6.6.6}$

Ist $\Delta\varphi = 0$, so heißt φ *harmonisch*.

Aus unserem Lemma folgt, dass dann $\mathrm{d}\varphi = 0 = \mathrm{d}^*\varphi$. Jede harmonische Form ist also geschlossen.

Man kann also *spezielle* geschlossene Formen konstruieren, indem man harmonische Formen betrachtet. Damit lässt sich die deRham-Kohomologie untersuchen. Dieses Gebiet heißt Harmonische Analysis.

Auf 0-Formen gilt:

$$\mathrm{d}^* = *\mathrm{d}* = 0$$

Denn d verschwindet auf n-Formen. Also folgt

$$\Delta = -\mathrm{d}^*\mathrm{d}$$

und somit für $\omega \in \Omega^0(M)$:

$$\omega \text{ geschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \text{ harmonisch}$$

Die exakten 0-Formen sind gerade die konstanten Formen.

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

Damit können wir die 0-te Kohomologie berechnen:

6.6.7 Lemma

$H^0(M) = 0$

Beweis

Nach 5.2.3 ist jede harmonische Funktion konstant. Also ist jede geschlossene 0-Form exakt. $\square_{6.6.7}$
Auf 1-Formen gilt:
Sei $\varphi \in \Omega^1$ *harmonisch*, das heißt $\Delta\varphi = 0$. Es folgt:

$$\mathrm{d}\varphi = 0 \qquad\qquad \mathrm{d}^*\varphi = 0$$

Insbesondere ist φ geschlossen.
Frage: Ist φ auch exakt?
Bemerkung: Ist umgekehrt $\mathrm{d}\varphi = 0$, so folgt *nicht*, dass $\Delta\varphi = 0$ ist, denn:

$$\Delta\varphi = -\mathrm{dd}^*\varphi - \mathrm{d}^*\underbrace{\mathrm{d}\varphi}_{=0} = -\mathrm{dd}^*\varphi \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0$$

Im Allgemeinen kann $\mathrm{d}^*\varphi \neq 0$ sein.
Frage: Sei $\varphi \in \Omega^1$ mit $\mathrm{d}\varphi = 0$. Kann man φ um eine exakte Form $\mathrm{d}\eta$ abändern, sodass $\varphi + \mathrm{d}\eta$ harmonisch ist.
Falls ja: In jeder Äquivalenzklasse in $H^1(M)$ gibt es eine harmonische Form, oder äquivalent: Jede Vektor in $H^1(M)$ kann durch eine harmonische Form repräsentiert werden.

6.6.8 Theorem (Hodge-Theorem)

In jeder Äquivalenzklasse der de-Rham-Kohomologie $H^k(M)$ liegt genau eine harmonische Form.
„Beweisidee“: Nehme $\varphi \in \Omega^k$ und $\mathrm{d}\varphi = 0$ an. Sei $\eta \in \Omega^{k-1}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi + \mathrm{d}\eta) &= -(\mathrm{dd}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d})(\varphi + \mathrm{d}\eta) = \\ &= -\mathrm{dd}^*\varphi - \mathrm{d}^*\underbrace{\mathrm{d}\varphi}_{=0} + \underbrace{\Delta\mathrm{d}\eta}_{=\mathrm{d}(\Delta\eta)} = \\ &= \mathrm{d}(-\mathrm{d}^*\varphi + \Delta\eta) \overset{?!}{=} 0\end{aligned}$$

Dies ist sicher erfüllt, wenn gilt:

$$\Delta\eta = \mathrm{d}^*\varphi \qquad\qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zeigt man, dass die Poisson-Gleichung für jedes $\mathrm{d}^*\varphi$ eine glatte Lösung η besitzt. (elliptische Differentialgleichung)
Eindeutigkeit:
Seien $\alpha_1 = \varphi + \mathrm{d}\eta_1$ und $\alpha_2 = \varphi + \mathrm{d}\eta_2$ harmonisch.

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -\mathrm{d}\underbrace{(\eta_1 - \eta_2)}_{=:\beta} = -\mathrm{d}\beta$$

$$\langle \alpha_1 - \alpha_2, \mathrm{d}\beta\rangle = \langle \mathrm{d}^*(\alpha_1 - \alpha_2), \beta\rangle = 0$$

Denn $\alpha_1 - \alpha_2$ ist harmonisch und nach Lemma 6.6.6 folgt:

$$\mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \qquad\qquad \mathrm{d}^*(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

Also:

$$\begin{aligned} -\langle \mathrm{d}\beta, \mathrm{d}\beta \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \quad \mathrm{d}\beta &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square_{6.6.8}$

7 Distributionen und Fouriertransformation

7.1 Distributionen

Historisch: Dirac δ-Distribution:

$$\begin{aligned} \delta(x) &:= 0 \quad \text{für } x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x &:= 1 \end{aligned}$$

TODO: Abb1 einfügen

$$\eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \delta$$

Rechenregel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

Eine Möglichkeit, dies mathematisch einzuführen ist das Dirac-Maß.

Aber wir möchten außerdem Distributionen und nicht-glatte Funktionen differenzieren können. $\delta'(x)$ ist nicht als Maß einführbar. Für $x \in \mathbb{R}^n$ wollen wir

$$\Delta \frac{1}{\|x\|}$$

berechnen können.

Idee: Werte im schwachen Sinn aus, rechne formal:

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(x)\,\delta'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{formal}}{=} -\int_{\mathbb{R}} \eta'(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = -\eta'(0)$$

Allgemein betrachte Elemente $\eta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ aus dem Schwartz-Raum. $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ ist der Dualraum von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \mathscr{S}^* \ni \phi &: \mathscr{S} \to \mathbb{R} \\ (\Delta\phi) &: \mathscr{S} \to \mathbb{R} \\ (\Delta\phi)(\eta) &:= \phi\underbrace{(\Delta\eta)}_{\in \mathscr{S}} \end{aligned}$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist unendlich-dimensional. Hier ist unklar, was *Stetigkeit* von $\phi \in \mathscr{S}^*$ heißt.

7.1.1 Definition (Multiindex, Schwartz-Norm)

Für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ ist der *Multiindex* $\alpha := (i_1, \dots, i_k)$ ein geordnetes Tupel von Indizes und $|\alpha| := k$ die *Stufe des Multiindex.*

$$\mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \qquad \text{Differentialoperator der Ordnung } k$$

$$x^\alpha = x^{i_1} \dots x^{i_k} \qquad \text{Monom der Ordnung } k$$

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $r,s \in \mathbb{N}$, dann ist die *Schwartz-Norm*:

$$\begin{aligned} \|f\|_{r,s} &:= \sum_{\substack{\alpha \text{ mit} \\ |\alpha| \le r}} \sum_{\substack{\beta \text{ mit} \\ |\beta| \le s}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x) \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x^1} f \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^1 f \right| + \dots \end{aligned}$$

7.1.2 Definition (Schwartz-Raum)

Der *Schwartz-Raum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen C^∞-Funktionen f, sodass $\|f\|_{r,s} < \infty$ für alle $r,s \in \mathbb{N}$ ist.

Beispiel

$f(x) = 1$

$$\|f\|_{1,0} = \underbrace{\sup_x |f(x)|}_{=1} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\sup_x \left| x^i f(x) \right|}_{=\infty}$$

$f(x) = e^{-\|x\|^2}$

$$\|f\|_{r,0} = \sum_{|\alpha| \le r} \sup_x \left| x^\alpha e^{-\|x\|^2} \right| < \infty$$

$$\|f\|_{r,s} = \sum_{|\alpha| \le r} \sum_{|\beta| \le s} \sup \left| \underbrace{x^\alpha \mathrm{D}^\beta e^{-\|x\|^2}}_{=P(x) e^{-\|x\|^2}} \right| \overset{P(x) \text{ Polynom}}{=} 0$$

Es ist $C_0^\infty \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Man sagt auch, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sind die glatten Funktionen mit *schnellem Abfall* (engl.: rapid decay).

Topologie auf $\mathscr{S}$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist *offen*, falls es zu jedem $f \in A$ ein $\varepsilon > 0$ und $r,s \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$B_\varepsilon^{r,s}(f) := \left\{ g \middle| \|g - f\|_{r,s} < \varepsilon \right\} \subseteq A$$

Dies ist ähnlich wie in einem Banachraum, aber man hat jetzt eine ganze Familie von Normen $\|.\|_{r,s}$. Allgemeiner: topologischer Vektorraum, uniformer Raum, …

Konvergenzbegriff: $f_n \to f$ in $\mathscr{S}$, falls in jeder offenen Umgebung von f fast alle f_n liegen.

7.1.3 Satz

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathscr{S}$ konvergiert gegen $f \in \mathscr{S}$ genau dann, wenn für alle $r,s \in \mathbb{N}$ schon $\|f - f_n\|_{r,s} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt.

Bemerkung

Es gelte $f_n \to f$. Das heißt insbesondere gilt $\|f - f_n\|_{0,0} \to 0$, also $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, also konvergiert $f_n \rightrightarrows f$ gleichmäßig. Außerdem gilt:

$$\|f - f_n\|_{r,0} \to 0$$

Also gilt $\sup_x |\mathrm{D}^\alpha f_n(x) - \mathrm{D}^\alpha f(x)| \to 0$ für alle α, das heißt $\mathrm{D}^\alpha f_n \rightrightarrows f$ konvergiert gleichmäßig und wegen

$$\|f - f_n\|_{r,s} \to 0$$

konvergiert $x^\alpha \mathrm{D}^\beta f_n \rightrightarrows x^\alpha \mathrm{D}^\beta f$ ebenfalls gleichmäßig.
Dies führt dazu, dass $\mathscr{S}$ vollständig ist.

Beweis

„$\Rightarrow$“: Die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ heißt nach Definition, dass in jeder offenen Umgebung von f fast alle f_n liegen.
Also liegen für alle $r,s \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ fast alle f_n in $B_\varepsilon^{r,s}(f)$. Daher konvergiert $\|f - f_n\|_{r,s} \to 0$.
„$\Leftarrow$“: Nehme an, dass für alle $r,s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|f - f_n\|_{r,s} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sei A eine offene Umgebung von f. Nach Definition der Topologie auf $\mathscr{S}$ gibt es also $r,s \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon^{r,s}(f) \subseteq A$.
Wegen $\|f_n - f\|_{r,s} \to 0$ folgt, dass fast alle f_n in $B_\varepsilon^{r,s}(f)$ liegen, und somit auch in A. $\square_{7.1.3}$

7.1.4 Definition (Distribution)

Sei $\mathscr{S}^* := \{T : \mathscr{S} \to \mathbb{R} \text{ linear und stetig}\}$ der Dualraum. $\mathscr{S}^*$ heißt der Raum der *temperierten Distributionen.*

7.1.5 Satz (stetig $\Leftrightarrow$ beschränkt)

Ein lineares Funktional $T : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn es $r,s \in \mathbb{N}$ und ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass gilt:

$$|Tf| \le C\,\|f\|_{r,s} \tag{7.1}$$

Beweis

„$\Leftarrow$“: Angenommen (7.1) gilt und $f_n \to f$ konvergiert in $\mathscr{S}$. Für die Stetigkeit ist $Tf_n \to Tf$ zu zeigen. Es gilt:

$$|Tf_n - Tf| \overset{T \text{ linear}}{=} |T(f_n - f)| \leq C \|f_n - f\|_{r,s} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Denn sogar für alle $p,q \in \mathbb{N}$ konvergiert $\|f_n - f\|_{p,q} \to 0$.
Also bildet T konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab und ist somit stetig.
„$\Rightarrow$”: Sei T stetig. Dann ist das Urbild offener Mengen offen. Also gilt insbesondere für die offene Menge $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}$:

$$T^{-1}(B_1(0)) \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathscr{S}$$

Also gibt es $r,s \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\varepsilon^{r,s}(0) \subseteq T^{-1}(B_1(0))$ oder äquivalent:

$$\|f\|_{r,s} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |Tf| < 1$$

Betrachte diese Ungleichung für $\tilde{f} = \lambda f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\|f\|_{r,s} < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad |Tf| < \frac{1}{\lambda}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f \neq 0$, denn sonst ist die Behauptung klar. Wähle nun zu gegebenem f mit $\|f\|_{r,s} \neq 0$ den Skalierungsfaktor $\lambda := \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_{r,s}}$: Damit folgt aus der stets gültigen Beziehung

$$\|f\|_{r,s} < \frac{2\varepsilon}{\varepsilon}\|f\|_{r,s} = 2\|f\|_{r,s}$$

dann:

$$|Tf| < \frac{2}{\varepsilon}\|f\|_{r,s}$$

Also gilt für alle $f \in \mathscr{S}$:

$$|Tf| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|f\|_{r,s}$$

$\square_{7.1.5}$

7.1.6 Beispiele (δ-Distribution)

$\delta \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ soll eingeführt werden. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\delta : \mathscr{S} &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto f(0)\end{aligned}$$

ist linear. Um zu zeigen, dass δ stetig ist, müssen wir zeigen, dass es geeignete $r,s \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|\delta(f)| \leq C|f|_{r,s}$ gibt:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_{0,0}$$

Nützliche Notation:

$$\delta(f) =: \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}^n x$$

7.1.7 Beispiel (Integraloperator)

a) Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit höchstens polynomialem Anstieg, das heißt, es gibt $r,C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit:

$$|g(x)| \leq C(1+\|x\|^r)$$

$$T_g : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}^n x$$

Dieses Integral ist endlich:

$$|T_g f| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \underbrace{|g(x)|}_{\leq C(1+\|x\|^r)} \mathrm{d}^n x \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|(1+\|x\|^r)\, \mathrm{d}^n x$$

Da $f \in \mathscr{S}$ ist, folgt:

$$\sup\left(\left(1+\|x\|^{r+n+1}\right) f(x)\right) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|f(x)|) + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\|x\|^{r+n+1} f(x)\right| =$$
$$= \underbrace{\|f\|_{0,0} + \|f\|_{r+n+1;0}}_{=:K} < \infty$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)|\left(1+\|x\|^{r+n+1}\right) \leq K$$
$$|f(x)| \leq \frac{K}{1+\|x\|^{r+n+1}}$$
$$\Rightarrow \quad |T_g f| \leq CK \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1+\|x\|^r}{1+\|x\|^{r+n+1}} \mathrm{d}^n x \leq$$
$$\leq 2CK \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+\|x\|^{n+1}} \mathrm{d}^n x}_{=:a<\infty} = 2CKa < \infty$$

$T_g f$ ist stetig:

$$|T_g f| \leq 2CKa = 2Ca\left(\|f\|_{0,0} + \|f\|_{r+n+1,0}\right) \leq 4Ca\, \|f\|_{r+n+1,0}$$

Denn $\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{r,s}$ für alle $p \leq r$ und $q \leq s$.
Auf diese Weise kann man g eine Distribution T_g zuordnen. Oft wird g mit T_g identifiziert. Damit werden Distributionen zu verallgemeinerten Funktionen.

b) $g = e^x$:

$$T_g : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g\, \mathrm{d}^n x$$

ist *nicht* wohldefiniert, denn zum Beispiel $f = \dfrac{1}{\cosh(x)}$ fällt exponentiell im Unendlichen ab und somit ist $f \in \mathscr{S}$, aber es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^x}{\cosh(x)} \mathrm{d}x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\cosh(x)} = 2$$

Also ist T_g keine temperierte Distribution.

7.1.8 Beispiel (Ableitung der δ-Distribution)

Was ist die Ableitung δ'?
Rechne erst formal für ein $f \in \mathscr{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta'(x) f(x) \,\mathrm{d}x \overset{\text{part. Int.}}{=} -\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f'(x) \,\mathrm{d}x = -f'(0)$$

Das Ergebnis dieser formalen Rechnung verwenden wir jetzt als Definition:

$$\begin{aligned} \delta' : \mathscr{S} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto -f'(0) \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung und es gilt:

$$\left|\delta'(f)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| = \|f\|_{0,1}$$

Also ist δ' stetig nach 7.1.5 und somit $\delta' \in \mathscr{S}^*$.

7.1.9 Definition (Distributionsableitung)

Sei $T \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ und α ein Multi-Index. Definiere die Distributionsabbildung $\mathrm{D}^\alpha T$ durch:

$$(\mathrm{D}^\alpha T)(f) := (-1)^{|\alpha|}\, T(\mathrm{D}^\alpha f)$$

Behauptung

$\mathrm{D}^\alpha T \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ ist eine temperiere Distribution.

Beweis

Aus $T \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^n)$ folgt für alle $f \in \mathscr{S}$:

$$\|Tf\| \leq C\, \|f\|_{r,s}$$

$$|(\mathrm{D}^\alpha T)(f)| = |T(\mathrm{D}^\alpha f)| \leq C\, \|\mathrm{D}^\alpha f\|_{r,s} \leq C\, \|f\|_{r,s+|\alpha|}$$

Also ist $\mathrm{D}^\alpha T$ stetig nach Satz (7.1.5). $\square_{7.1.9}$
Es gilt noch Folgendes (ohne Beweis):

7.1.10 Satz

Für $g \in C^\infty$ mit höchstens polynomialem Anstieg ist die Abbildung $g \mapsto T_g \in \mathscr{S}^*$ injektiv.

7.1.11 Lemma

Es gilt

$$\|f \cdot g\|_{r,s} \leq \|f\|_{r,s} \cdot \|g\|_{r,s}$$

und sogar noch bessere Ungleichungen.

Ab jetzt in einer Dimension. Die Verallgemeinerung geht analog.

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \|f\|_{p,q} < \infty \right\}$$
$$\|f\|_{p,q} = \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=0}^{q} \sup_x \left| x^r f^{(s)}(x) \right|$$

Der Dualraum $\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$ besteht aus den temperierte Distribution, das ein $T \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R})$ ist eine Abbildung $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die linear und stetig ist.

7.2 Die Fouriertransformation

7.2.1 Definition (Fouriertransformation)

Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$, das heißt $f = f_1 + \mathbf{i} f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Setze:

$$(\mathcal{F} f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x \qquad \left(\overline{\mathcal{F}} f\right)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{\mathbf{i}px} \mathrm{d}x$$

7.2.2 Satz

$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : \mathscr{S}(\mathbb{C}) \to \mathscr{S}(\mathbb{C})$ sind linear und stetig.

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F} f)(p)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)\, e^{-\mathbf{i}px} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(1 + x^2\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sup_x \left(|f(x)| \left(1+x^2\right)\right)}_{\leq \|f\|_{2,0} < \infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x}_{<\infty} < \infty\end{aligned}$$

Das Integral ist also konvergent. Verwende

$$p^r e^{-\mathbf{i}px} = \mathbf{i}^r \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r e^{-\mathbf{i}px}$$

und erhalte:

$$\begin{aligned}
\left(p^r \mathrm{D}^s f\right)(p) &= p^r \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^s \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^s \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r e^{-\mathbf{i}px}\right) \mathrm{d}x = \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^s \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r f(x)\right)}_{\in \mathscr{S}} e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathbf{i}x)^s \left(\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r f(x)\right) e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \leftrightarrow -\mathbf{i}x \qquad\qquad p \leftrightarrow \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\left|p^r \mathrm{D}^s f(p)\right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x^s f^{(r)}(x)\right| \left(1+x^2\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \sup_x \left|x^s f^r(x)\left(1+x^2\right)\right| \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x}_{=:C<\infty} \leq C \left\|f\right\|_{s+2,r}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\left\|\mathcal{F}f\right\|_{r,s} \leq \tilde{C} \left\|f\right\|_{s+2,r}$$

Also ist $\mathcal{F}$ tatsächlich stetig. Für $\overline{\mathcal{F}}$ geht das analog. $\square_{7.2.2}$

7.2.3 Theorem (Plancherel)

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{id} : \mathscr{S}(\mathbb{C}) \to \mathscr{S}(\mathbb{C})$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\right)(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}px} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}qx} f(q)\, \mathrm{d}q\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{naiv}}{=} \frac{1}{2\pi} \int f(q) \underbrace{\left(\int e^{-\mathbf{i}(p-q)x} \mathrm{d}x\right)}_{\text{Integral existiert nicht}} \mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Um diese Konvergenzprobleme der Integrale zu vermeiden, führt man einen sogenannten *kon-*

vergenzerzeugenden Faktor ein:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\right)(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\overline{\mathcal{F}}f\right)(x)}_{\in\mathscr{S}(\mathbb{C})}e^{-\mathbf{i}px}\mathrm{d}x = \\
&\overset{\text{dominierte}}{\underset{\text{Konvergenz}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-\varepsilon x^2}}_{\to 1}\left(\overline{\mathcal{F}}f\right)(x)\,e^{-\mathbf{i}px}\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon x^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathbf{i}qx}f(q)\,\mathrm{d}q\right)e^{-\mathbf{i}px}\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(q)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon x^2}e^{\mathbf{i}(q-p)x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Berechne das Innere Integral mit $u := p - q$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon x^2-\mathbf{i}ux}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon\left(x+\frac{\mathbf{i}u}{2\varepsilon}\right)^2}e^{-\frac{u^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}x \overset{y=x+\frac{\mathbf{i}u}{2\varepsilon}}{\underset{\mathrm{d}y=\mathrm{d}x}{=}} e^{-\frac{u^2}{4\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{u^2}{2\varepsilon}}$$

Setze dies ein:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\right)(p) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(q)}_{=f(p)+(f(q)-f(p))}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q = \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\left(f(p)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q + \int_{-\infty}^{\infty}(f(q)-f(p))\,e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q\right)
\end{aligned}$$

TODO: Abb: Plot von $\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}$ für zwei verschiedene ε

Man erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q \overset{v:=\frac{p-q}{\sqrt{4\varepsilon}}}{\underset{\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{4\varepsilon}}}{=}} -\sqrt{4\varepsilon}\int_{\infty}^{-\infty}e^{-v^2}\mathrm{d}v = 2\sqrt{\pi\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(q)-f(p))\,e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q\right| &\leq C\int_{-\infty}^{\infty}|q-p|\,e^{-\frac{(p-q)^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}q = \\
&\overset{v:=\frac{p-q}{\sqrt{4\varepsilon}}}{\underset{\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{4\varepsilon}}}{=}} C\int_{-\infty}^{\infty}|v|\sqrt{4\varepsilon}e^{-v^2}\left(-\sqrt{4\varepsilon}\right)\mathrm{d}v \leq \\
&\leq 4C\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}|v|\,e^{-v^2}\mathrm{d}v \leq \varepsilon\tilde{C}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\right)(p) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\left(f(p)\cdot 2\sqrt{\pi\varepsilon}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}2\pi\left(f(p)+\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0}f(p)+\mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = f(p)
\end{aligned}$$

$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ geht analog. $\square_{7.2.3}$

Ziel: Verallgemeinere $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ auf $\mathscr{S}^*(\mathbb{C})$. Als Vorbereitung seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(p) \cdot g(p)\,\mathrm{d}p &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x \right) \cdot g(p)\,\mathrm{d}p = \\ &\overset{\text{Fubini}}{\underset{\text{wie oben}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p)\, e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}p \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\mathcal{F}g)(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung lässt sich unmittelbar verwenden, um die Fouriertransformation einer Distribution zu definieren.

7.2.4 Definition (Fouriertransformation für Distribution)

$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : \mathscr{S}^*(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}^*(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}T)(f) &:= T(\mathcal{F}f) \\ \left(\overline{\mathcal{F}}T\right)(f) &:= T\left(\overline{\mathcal{F}}f\right)\end{aligned}$$

7.2.5 Satz

Es gilt:

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{id}_{\mathscr{S}^*(\mathbb{C})} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$$

Beweis

$$\left(\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}}T\right)\right)(f) = \left(\overline{\mathcal{F}}T\right)(\mathcal{F}f) = T\left(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f\right) = T(f)$$

Also gilt $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$ und für $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$ folgt es analog. $\square_{7.2.5}$

7.2.6 Lemma

Für alle $f, g \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}f)}(x)\,(\mathcal{F}g)(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}f} h \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\overline{\mathcal{F}}\overline{f}\right) h \mathrm{d}x \overset{\text{wie oben}}{=} \int_{\mathbb{R}} \overline{f} \cdot \left(\overline{\mathcal{F}}h\right) \mathrm{d}x$$

Für $h = \mathcal{F}g$ folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}f}\mathcal{F}g \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}\left(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} \cdot g \mathrm{d}x$$

$\square_{7.2.6}$

Führe das folgende Skalarprodukt auf $\mathscr{S}$ ein:

$$\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}} \overline{f} g \mathrm{d}x$$

$(\mathscr{S}, \langle .,. \rangle)$ ist ein Skalarproduktraum. Vervollständige dies zum Hilbertraum $\left(\mathcal{L}^2(\mathbb{C}), \langle .,. \rangle\right)$. Dann ist $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ eine *Isometrie*, das heißt $\langle f,g\rangle = \langle \mathcal{F}f,\mathcal{F}g\rangle$. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{C})$$

ist *unitär*.

7.2.7 Beispiele

i) $\mathcal{F}\delta$ ist zu berechnen.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\delta)(f) = \delta(\mathcal{F}f) = (\mathcal{F}f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx} \mathrm{d}x\right)_{p=0} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,\mathrm{d}x = T_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(f)\end{aligned}$$

Oder einfacher:

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ii) $g(p) = e^{\mathbf{i}py}$ mit einem gegeben Parameter $y \in \mathbb{R}$. g ist keine Schwartzfunktion, aber betrachte $\mathrm{T}_g \in \mathscr{S}^*$ definiert durch:

$$(T_g)\, f := \int_{\mathbb{R}} g(p)\, f(p)\, \mathrm{d}p$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}T_g)\, f = T_g(\mathcal{F}f) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{\mathbf{i}py}}_{=g(p)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\mathbf{i}px} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}p &= \\ \overset{\text{Plancherel}}{=} \sqrt{2\pi} \cdot f(y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{F}T_g) = \sqrt{2\pi}\delta_y$$

Dabei ist $\delta_y(f) = f(y)$. Oft schreibt man auch:

$$\mathcal{F}e^{\mathbf{i}py} = \sqrt{2\pi}\delta_y$$

$$\int \mathrm{d}p e^{-\mathbf{i}p(x-y)} = 2\pi\delta(x-y) \qquad \text{Plancherel}$$

Anhang

Danksagungen

Mein besonderer Dank geht an Professor Finster, der diese Vorlesung hielt und es mir gestattete, diese Vorlesungsmitschrift zu veröffentlichen.
Außerdem möchte ich mich ganz herzlich bei allen bedanken, die durch aufmerksames Lesen Fehler gefunden und mir diese mitgeteilt haben.

Andreas Völklein

GNU Free Documentation License

0. Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. Applicability and definitions

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. Verbatim copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. Copying in quantity

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. Combining documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. Collections of documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. Aggregation with independent works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. Future revisions of this license

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `https://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. Relicensing

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

Addendum: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME.
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation;
>
> with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

> A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.