Sujet de TD n°2
Sur les modèles AR(1) et ARMA(1,1)…

Exercice 1 (modèle AR(1)). On s'intéresse à X processus <u>stationnaire</u> centré tel que

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

avec $\{\varepsilon_t\}$ bruit blanc de variance σ^2 ($WN(0, \sigma^2)$) et ϕ un paramètre scalaire.

1. On suppose $|\phi| < 1$. Obtenir une représentation (dite MA(∞)) du processus X en fonction du processus ε. Conclusion.

2. En déduire l'ACvF puis l'ACF du processus X.

3. Montrer que le cas $\phi = 1$ ou -1 est impossible! (le processus n'est pas stationnaire)

4. On suppose maintenant $|\phi| > 1$. Obtenir une représentation du processus X en fonction du processus ε. Conclusion.

5. On pose $Z_t = X_t - \frac{1}{\phi} X_{t-1}$. Montrer que Z est un bruit blanc. Conclusion.

Exercice 2 (modèle ARMA(1,1)).

On s'intéresse à X processus <u>stationnaire</u> centré vérifiant

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \qquad \text{avec } \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

On supposera $|\phi| < 1$ et $\phi + \theta \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un tel processus X unique de la forme MA(∞) suivante

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \, \varepsilon_{t-j}$$

avec des coefficients ψ_j que l'on explicitera.

2. Obtenir l'ACvF puis l'ACF du processus X.