

Minimalno bojenje grana grafa

Seminarski rad u okviru kursa

Računarska inteligencija

Matematički fakultet

Anđela Križan, Anđela Janošević

15. april 2020.

Sažetak

U ovom radu prikazaćemo rešavanje problema minimalnog bojenja grana grafa iz oblasti teorije grafova. Koristićemo optimizaciju simuliranog kaljenja i na kraju uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom algoritma grube sile koji koristi odsecanje.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Bojenje grana grafa korišćenjem Grube sile	2
3	Bojenje grana grafa optimizacijom Simuliranog Kaljenja	3
4	Rezultati	3
5	Literatura	8

1 Uvod

U oblasti teorije grafova, bojenje grana grafa je dodeljivanje boja granama grafa tako da dve susedne grane nemaju istu boju. Bojenje grana je jedno od nekoliko različitih tipova bojenja grafova. Problem bojenja grana postavlja pitanje da li je moguće obojiti grane datog grafa koristeći najviše k različitih boja, za zadatu vrednost k , ili sa najmanje moguće boja. Minimalan broj potrebnih boja za ispravno bojenje grana grafa G naziva se hromatski indeks grafa ili granični hromatski broj $\chi'(G)$.

Po Vizingovoj teoremi, broj potrebnih boja da bi se obojile grane prostog grafa je ili njegov maksimalni stepen Δ ili $\Delta + 1$. Ako je za neki graf G , $\chi'(G) = \Delta(G)$ onda se kaže da taj graf pripada klasi 1, u suprotnom pripada klasi 2. Svaki bipartitivni graf, planarni graf i skoro svaki random graf je u klasi 1. Granični hromatski broj grafa G je veoma usko povezan sa maksimalnim stepenom grafa $\Delta(G)$. Očigledno da je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, ako se Δ različitih grana spajaju u čvoru V i sve ove grane moraju biti različitih boja, to može biti moguće samo ako ima najmanje Δ boja na raspolaganju. Vizingova teorema tvrdi da je ova veza jako uska i za svaki graf granični hromatski broj je ili $\Delta(G)$ ili $\Delta(G) + 1$.

U daljem tekstu prikazaćemo dva algoritma za rešavanje ovog problema. Prvi algoritam koristi optimizaciju simuliranog kaljenja (*eng.* Simulated Annealing - SA), dok je drugi algoritam varijanta grube sile (*eng.* Brute Force) koji koristi odsecanje. Prikazaćemo dobijene rezultate oba algoritma i uporediti ih.

2 Bojenje grana grafa korišćenjem Grube sile

Algoritam gruba sila je tehnika rešavanja problema koja se sastoji od nabiranja svih mogućih kandidata i provere da li svaki kandidat zadovoljava problem. Gruba sila se može primeniti na problem Minimalnog bojenja grana grafa, tako što se proverava svaka kombinacija grana-boja. Problem Minimalnog bojenja grana grafa je NP težak, odnosno ne postoji algoritam koji se izvršava u polinomijalnom vremenu. Algoritam Grube sile je eksponencijalne složenosti, on generiše sve kombinacije i među njima se može izabrati optimalna.

Gruba sila se može popraviti korišćenjem tehnika odsecanja. U tre-

nutku kada se trenutna grana E koju razmatramo ne može obojiti ni jednom od ponuđenih boja, vrši se odsecanje. To znači da dalje nećemo razmatrati ni susede grane E , jer ona ne može biti obojena ni jednom ponuđenom bojom, pa dalje razmatranje njenih suseda svakako neće dovesti do optimalnog rešenja.

Pomenute ponuđene boje generišemo na osnovu stepena grafa. Obzirom na to da se svi grafovi koje smo mi obrađivali nalaze u klasi 1, to znači da stepen grafa predstavlja hromatski indeks, i sa toliko boja ćemo pokušavati da obojimo grane.

3 Bojenje grana grafa optimizacijom Simuliranog Kaljenja

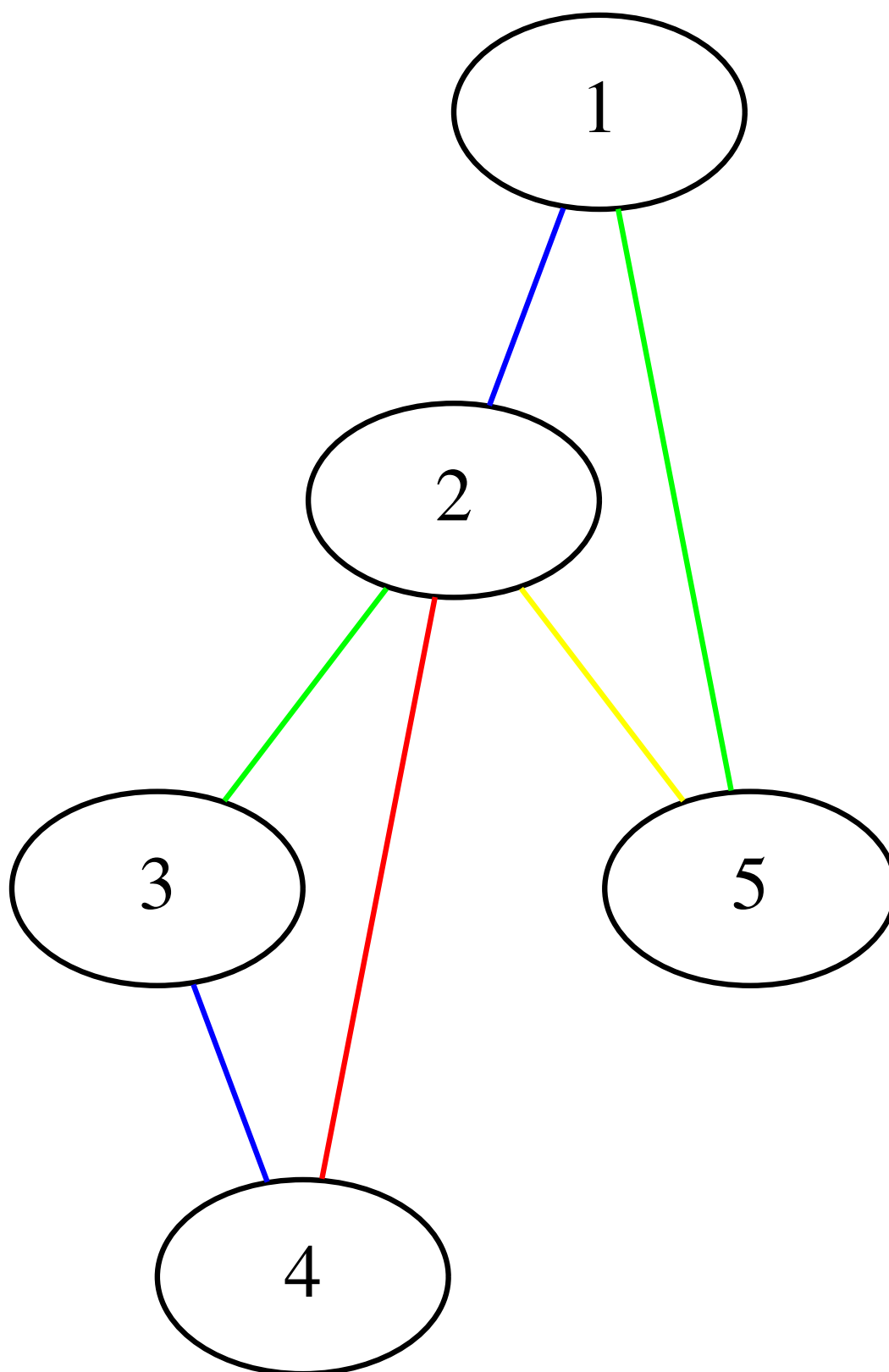
Simulirano kaljenje se zasniva na poboljšanju jednog rešenja. U svakom koraku ovog algoritma razmatra se rešenje u okolini trenutnog. Kod problema Minimalnog bojenja grana grafa, okolina predstavlja invertovanje jedne, dve ili tri grane.

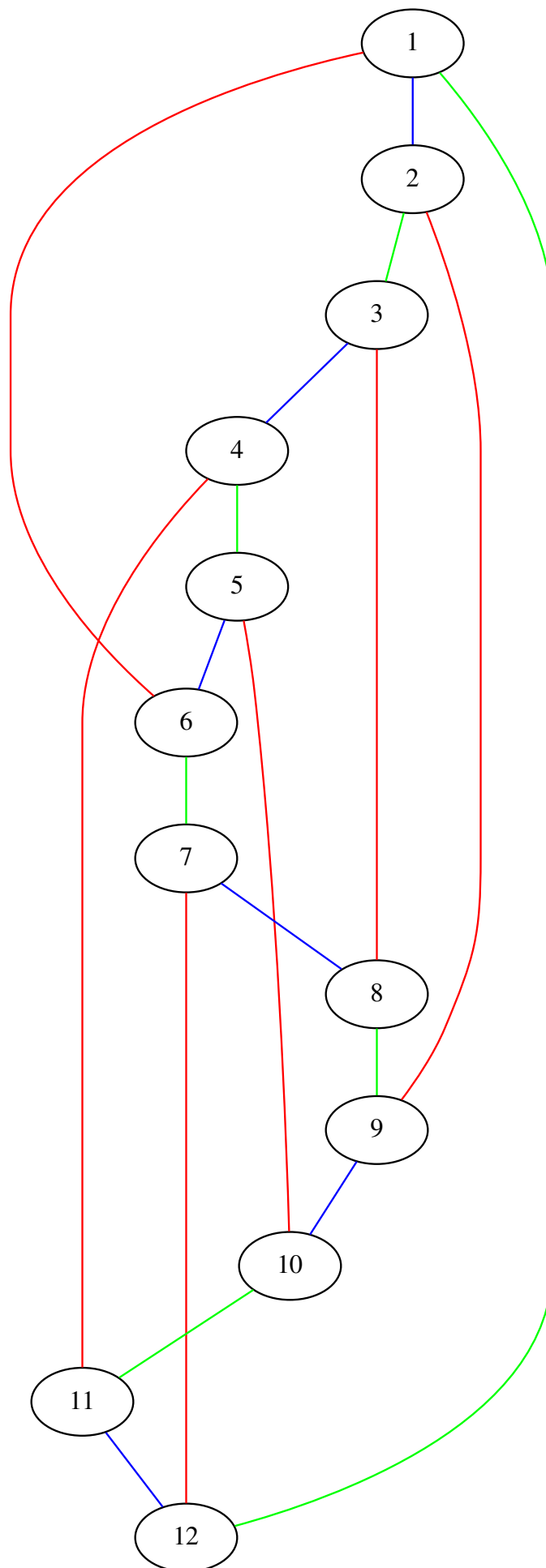
Invertovanje realizujemo tako što tim granama oduzmemo trenutne boje. Ukoliko je vrednost iz okoline bolja od trenutnog, ažuriramo trenutno rešenje. Ukoliko nije bolja, upoređuju se vrednosti opadajuće funkcije p i proizvoljno izabrane promenljive q iz intervala $(0,1)$. Ako je $p > q$, ažuriramo trenutno rešenje. U ovom koraku obezbeđujemo da se algoritam ne zaglavi u lokalnom optimumu. Algoritam se ponavlja dok se ne dostigne maksimalan broj iteracija.

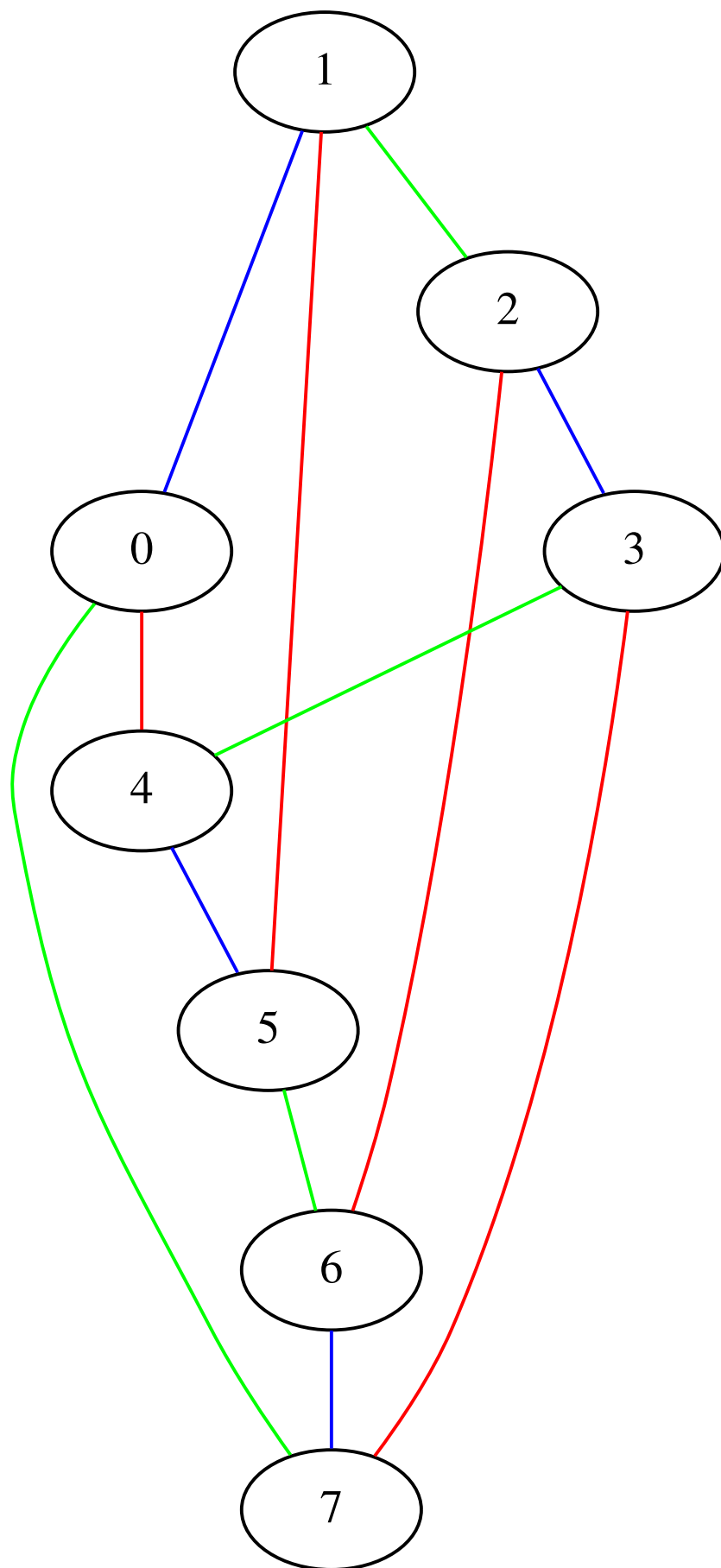
4 Rezultati

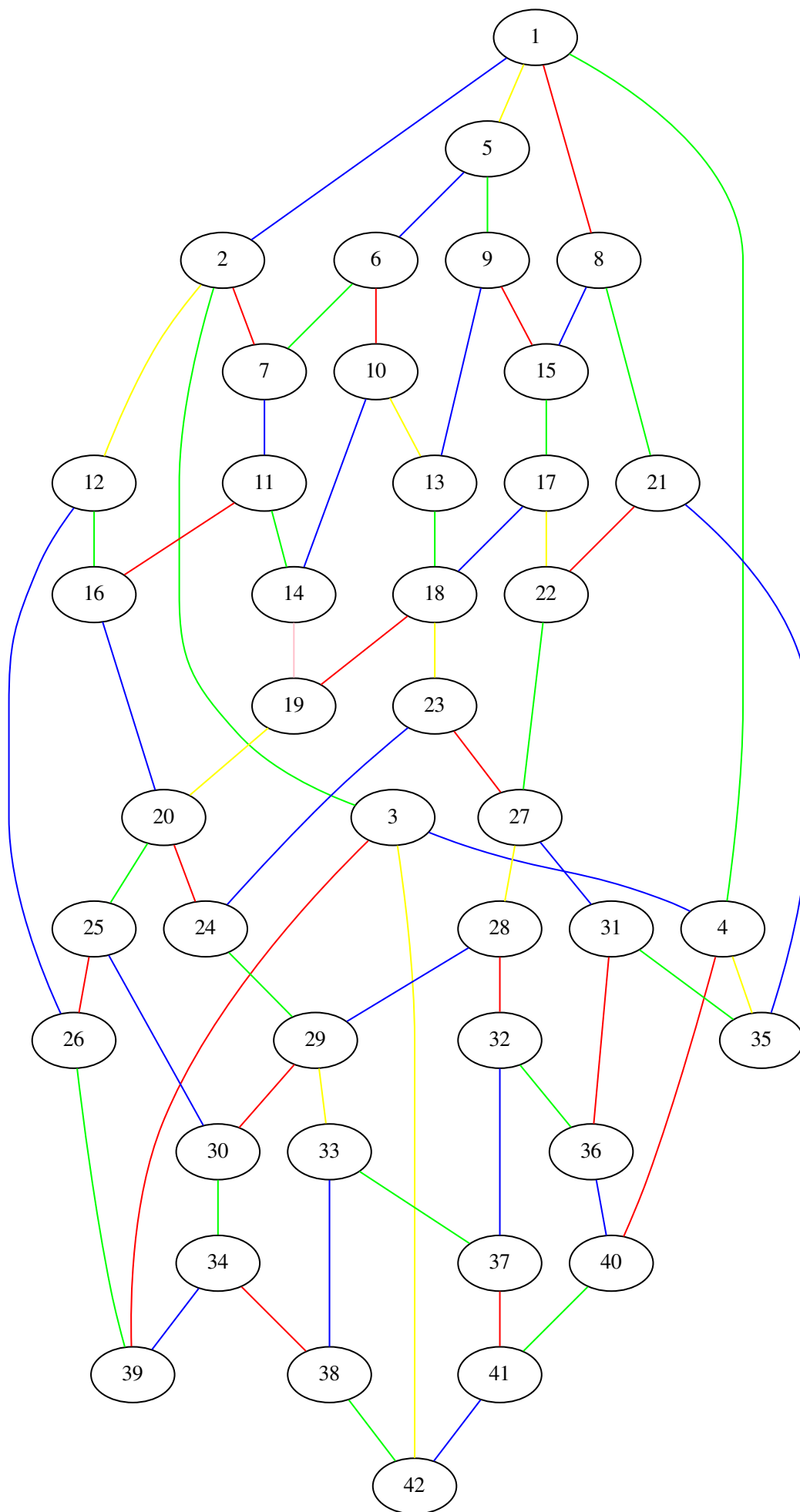
Problem Minimalnog bojenja grana grafa ćemo prikazati na neke poznate grafove.

U nastavku ćemo prikazati minimalna bojenja grana grafa za grafove „Leptir”, „Franklin”, „Wagner”, „Wiener Araya”, redom.









5 Literatura

- Materijali sa vežbi iz predmeta Računarska inteligencija, dr Stefan Mišković
- Wikipedia