

# Simulacija kretanja projektila sa otporom vazduha

Projekat iz predmeta Analiza 4  
Matematički fakultet

Anđela Jovanović, Stefan Kerkoč

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Projektovanje problema preko diferencijalnih jednačina</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dodavanje sile otpora</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Simulacija kretanja</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Procena gubitka energije</b>	<b>4</b>

# 1 Projektovanje problema preko diferencijalnih jednačina

Početni problem ovog zadatka je bio zapisivanje kretanja projektila preko diferencijalnu jednačinu u dvodimenzionalnom gravitacionom polju.

Diferencijalna jednačina kretanja projektila u dvodimenzionalnom gravitacionom polju (kosi hitac) bez otpora vazduha može se zapisati kao sistem dve diferencijalne jednačine za horizontalnu ( $x$ ) i vertikalnu ( $y$ ) komponentu brzine i položaja:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y\end{aligned}$$

Gde je  $g$  gravitaciono ubrzanje.

## 2 Dodavanje sile otpora

Nakon toga smo morali da dodamo silu otpora vazduha koja je direktno proporcionalna intenzitetu brzine u svakoj tački, a deluje suprotno od smera kretanja.

Ako dodamo silu otpora vazduha koja je direktno proporcionalna intenzitetu brzine u svakoj tački, a deluje suprotno od smera kretanja, onda ćemo imati dodatne članove u jednačinama:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -k \cdot v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - k \cdot v_y\end{aligned}$$

Gde je  $k$  koeficijent otpora vazduha.

Ove jednačine se mogu simulirati numeričkim metodama, kao što je Eulerova metoda, kako bi se dobile vrednosti brzina i pozicija tokom vremena.

U našem kodu za simuliranje kretanja smo upravo primenili Eulerovu metodu.

### 3 Simulacija kretanja

Slika 1: Simulacija kretanja

## 4 Procena gubitka energije

Za kraj smo morali da procenimo gubitak energije koji je nastao usled otpora vazduha.

To se može odraditi posmatranjem promene ukupne mehaničke energije tokom kretanja projektila. Ukupna mehanička energija projektila u dvodimenzionalnom kretanju pod uticajem gravitacije i otpora vazduha je data izrazom:

$E$  = kinetička energija + potencijalna energija

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy$$

Gde je:

$m$  - masa projektila,

$v_x$  - horizontalna komponenta brzine,

$v_y$  - vertikalna komponenta brzine,

$g$  - gravitaciono ubrzanje,

$y$  - visina projektila iznad referentnog nivoa.

Gubitak energije po jedinici vremena, koji je posledica otpora vazduha, može se izračunati kao negativna vrednost derivacije ukupne mehaničke energije po vremenu:

$$\frac{dE}{dt} = -k(v_x^2 + v_y^2)$$

Gde je  $k$  koeficijent otpora vazduha.

Ovaj izraz daje brzinu kojom projektil gubi energiju usled otpora vazduha. Ako želimo proceniti ukupan gubitak energije tokom simulacije, možemo integrirati  $dE/dt$  tokom vremena.

Međutim, važno je napomenuti da numeričke metode (npr. Eulerova metoda) koje se često koriste za simulaciju kretanja projektila ne očuvavaju tačno energiju tokom vremena, pa će se ukupna energija projektila smanjivati tokom simulacije. Ipak, gubitak energije po jedinici vremena može nam pružiti uvid u relativni značaj otpora vazduha.