

Tema 1: Velocidad y aceleración

Alfonso Teja Rodríguez
Grupo C212

ALFONSOTEJEDA150605@GMAIL.COM

Miguel Cazorla Zamora
Grupo C212

MIGUELZAMORA210405@GMAIL.COM

Eric Reyes Milián

Tutor(es):
Doc. Copilot , by Github

Resumen

Este trabajo analiza tres problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La Parte A estudia un modelo cinemático con aceleración variable ($\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$), obteniendo soluciones analíticas y comparando métodos numéricos. La Parte B investiga un sistema con bifurcación tipo horquilla ($\frac{dv}{dt} = rv - v^3$), analizando cómo el parámetro r modifica cualitativamente el comportamiento del sistema, con puntos de equilibrio estables e inestables. La Parte C examina un sistema masa-resorte-amortiguador ($\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$), clasificando su comportamiento según el discriminante $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ en tres casos: sobre-amortiguado, críticamente amortiguado y sub-amortiguado. Se visualiza el plano de fase para cada caso, demostrando estabilidad asintótica global cuando $\alpha, \beta > 0$.

Abstract

This paper analyzes three ordinary differential equation problems. Part A studies a kinematic model with variable acceleration ($\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$), obtaining analytical solutions and comparing numerical methods. Part B investigates a system with pitchfork bifurcation ($\frac{dv}{dt} = rv - v^3$), analyzing how parameter r qualitatively changes the system's behavior, with stable and unstable equilibrium points. Part C examines a mass-spring-damper system ($\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$), classifying its behavior according to the discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ into three cases: over-damped, critically damped, and under-damped. The phase plane is visualized for each case, demonstrating global asymptotic stability when $\alpha, \beta > 0$.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Análisis cinemático, Estabilidad, Plano de fase, Sistemas dinámicos.

Tema: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Velocidad y aceleración.

1. Resumen Extendido

Este trabajo presenta un análisis detallado de tres problemas fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias, implementados en un entorno interactivo utilizando Unity. Cada parte aborda un aspecto diferente de los sistemas dinámicos, proporcionando tanto análisis teórico como visualización práctica.

1.1 Parte A: Cinemática y Métodos Numéricos

La Parte A se centra en el estudio de un modelo cinemático con aceleración variable, descrito por la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$, con condiciones iniciales $v(0) = 0$ m/s y $x(0) = 0$ m. Se obtienen soluciones analíticas para la velocidad $v(t) = 0.04t^3 + 0.3t^2$ y la posición $x(t) =$

$0.01t^4 + 0.1t^3$, permitiendo analizar el comportamiento de un objeto sometido a una aceleración que crece cuadráticamente con el tiempo.

Un aspecto destacado es la comparación de diferentes métodos numéricos (Euler, Runge-Kutta 2 y Runge-Kutta 4) para resolver esta ecuación, evaluando su precisión mediante el cálculo del error relativo respecto a la solución analítica. La visualización incluye un campo de isoclinas en el plano (t, v) que muestra cómo la solución sigue las pendientes del campo.

1.2 Parte B: Análisis de Bifurcación

La Parte B investiga un sistema con bifurcación tipo horquilla modelado por la ecuación $\frac{dv}{dt} = rv - v^3$, donde el parámetro r determina cualitativamente el comportamiento del sistema. El análisis se centra en cómo los puntos de equilibrio y su es-

tabilidad cambian en función de este parámetro: Parte C Visualizar el plano de fase con diferentes condiciones iniciales y parámetros, mostrando cómo las trayectorias convergen al equilibrio en cada régimen de amortiguamiento.

- Para $r < 0$: Existe un único punto de equilibrio estable en $v = 0$.
- Para $r > 0$: El punto $v = 0$ se vuelve inestable, mientras que aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables en $v = \sqrt{r}$ y $v = -\sqrt{r}$.

Esta transición representa una bifurcación tipo horquilla, visualizada mediante un diagrama que muestra cómo los puntos de equilibrio y su estabilidad evolucionan con el parámetro r .

1.3 Parte C: Oscilador Amortiguado y Plano de Fase

La Parte C examina un sistema masa-resorte-amortiguador descrito por las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = v$ y $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$, donde α representa el coeficiente de amortiguamiento y β la constante del resorte. El análisis de estabilidad se realiza mediante linearización alrededor del único punto de equilibrio $(0, 0)$ y el cálculo de los valores propios de la matriz jacobiana.

El comportamiento dinámico del sistema se clasifica según el discriminante $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ en tres casos:

- Sobre-amortiguado ($\Delta > 0$): El sistema regresa al equilibrio sin oscilaciones (nodo estable).
- Críticamente amortiguado ($\Delta = 0$): El sistema regresa al equilibrio en el tiempo mínimo sin oscilaciones (nodo crítico).
- Sub-amortiguado ($\Delta < 0$): El sistema oscila con amplitud decreciente alrededor del equilibrio (foco estable).

La visualización del plano de fase para cada caso muestra las trayectorias del sistema y demuestra que, para $\alpha, \beta > 0$, el sistema es globalmente asintóticamente estable.

1.4 Visualizaciones Interactivas en Unity

Todas las simulaciones descritas han sido implementadas en Unity, proporcionando visualizaciones interactivas que permiten:

Parte A Comparar en tiempo real la solución analítica con los métodos numéricos, ajustando el paso de integración y observando cómo afecta la precisión.

Parte B Explorar el diagrama de bifurcación interactivamente, variando el parámetro r y observando cómo cambian los puntos de equilibrio y su estabilidad.

2. Parte A: Cinemática y Métodos Numéricos

En esta sección se presenta el análisis de un modelo cinemático con aceleración variable, descrito por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Se estudia tanto la solución analítica como la implementación de diferentes métodos numéricos para su resolución.

2.1 Planteamiento del Problema

Se considera un móvil que parte del reposo desde el origen de coordenadas, cuya aceleración varía con el tiempo según la expresión:

$$a(t) = 0.12t^2 + 0.6t \quad (1)$$

El problema consiste en resolver la ecuación diferencial para la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t \quad (2)$$

Con las condiciones iniciales:

$$v(0) = 0 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0 \text{ m} \quad (3)$$

2.2 Solución Analítica

Integrando la ecuación diferencial para la velocidad, se obtiene:

$$v(t) = \int (0.12t^2 + 0.6t) dt = 0.04t^3 + 0.3t^2 + C \quad (4)$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = 0$, se determina que $C = 0$, por lo que:

$$v(t) = 0.04t^3 + 0.3t^2 \text{ (m/s)} \quad (5)$$

Para obtener la posición, se integra la velocidad:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (0.04t^3 + 0.3t^2) dt = 0.01t^4 + 0.1t^3 + C' \quad (6)$$

Con la condición inicial $x(0) = 0$, se obtiene $C' = 0$, resultando:

$$x(t) = 0.01t^4 + 0.1t^3 \text{ (m)} \quad (7)$$

2.3 Análisis del Comportamiento

El análisis del movimiento revela características importantes:

Tiempo (s)	Acel. (m/s ²)	Vel. (m/s)	Pos. (m)
0	0.00	0.00	0.00
5	6.00	12.50	18.75
10	18.00	70.00	200.00

Cuadro 1: Valores cinemáticos en instantes clave

- **Aceleración variable:** Crece cuadráticamente con el tiempo, alcanzando $a = 18.0 \text{ m/s}^2$ en $t = 10 \text{ s}$.
- **Velocidad creciente:** Sigue una combinación cúbica-cuadrática, llegando a $v = 70.0 \text{ m/s}$ al final del intervalo estudiado. La velocidad promedio en los 10 segundos es $\bar{v} = 20.0 \text{ m/s}$.
- **Desplazamiento:** La posición final es $x = 200 \text{ m}$, siguiendo una trayectoria polinómica de grado 4.

2.4 Visualizaciones Interactivas en Unity

Todas las simulaciones descritas han sido implementadas en Unity, proporcionando visualizaciones interactivas que permiten comparar en tiempo real la solución analítica con los métodos numéricos, ajustando el paso de integración y observando cómo afecta la precisión.

2.5 Valores Numéricos Clave

La siguiente tabla muestra los valores de aceleración, velocidad y posición en momentos específicos:

2.6 Implementación de Métodos Numéricos

Para resolver numéricamente la ecuación diferencial, se implementaron tres métodos:

1. **Método de Euler:** El más simple pero menos preciso. Se basa en la aproximación lineal de la solución utilizando la pendiente en cada punto. La fórmula de recurrencia es:

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot f(t_n, v_n) \quad (8)$$

donde h es el paso de integración y $f(t, v) = 0.12t^2 + 0.6t$ es la función que define la aceleración.

2. **Método de Runge-Kutta de orden 2 (RK2):** Ofrece un equilibrio entre simplicidad y precisión. Utiliza una combinación ponderada de dos evaluaciones de la función para mejorar la aproximación:

$$k_1 = f(t_n, v_n) \quad (9)$$

$$k_2 = f(t_n + h, v_n + h \cdot k_1) \quad (10)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (11)$$

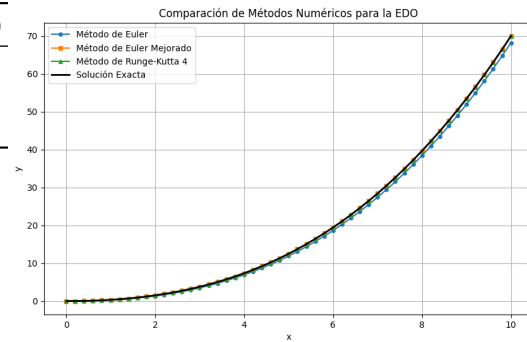


Figura 1: Comparación entre métodos numéricos y la solución analítica

3. **Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4):** El más preciso de los tres. Utiliza cuatro evaluaciones de la función para obtener una aproximación de mayor orden:

$$k_1 = f(t_n, v_n) \quad (12)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} \cdot k_1) \quad (13)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} \cdot k_2) \quad (14)$$

$$k_4 = f(t_n + h, v_n + h \cdot k_3) \quad (15)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (16)$$

La implementación de estos métodos se realizó con diferentes pasos de integración para estudiar su convergencia y estabilidad. Se utilizó un paso base de $h = 0.1$ segundos para la comparación principal.

2.7 Comparación de Métodos Numéricos

La siguiente figura muestra una comparación entre los diferentes métodos numéricos implementados (Euler, RK2 y RK4) y la solución analítica:

Para cuantificar la precisión de cada método, se calculó el error absoluto respecto a la solución analítica en diferentes puntos del intervalo $[0, 10]$ segundos. La tabla 3 muestra estos errores para $t = 5 \text{ s}$ y $t = 10 \text{ s}$ con un paso de integración $h = 0.1 \text{ s}$.

Se observa que el error del método de Euler crece significativamente con el tiempo, mientras que el método RK4 mantiene una precisión muy alta incluso al final del intervalo. El método RK2 presenta un comportamiento intermedio.

También se estudió la convergencia de los métodos al reducir el paso de integración. La tabla 4 muestra cómo disminuye el error máximo al reducir el paso.

2.8 Análisis de Condicionamiento

El número de condición del problema se visualiza para entender la sensibilidad de la solución a pequeñas perturbaciones:

Método	Orden	Eval./paso	Estab.	Prec.
Euler	1	1	Baja	Baja
RK2	2	2	Media	Media
RK4	4	4	Alta	Alta

Cuadro 2: Características de los métodos numéricos

Tiempo (s)	Err. Euler	Err. RK2	Err. RK4
5	0.625	0.031	< 0.001
10	3.500	0.175	0.011

Cuadro 3: Error absoluto de los métodos numéricos

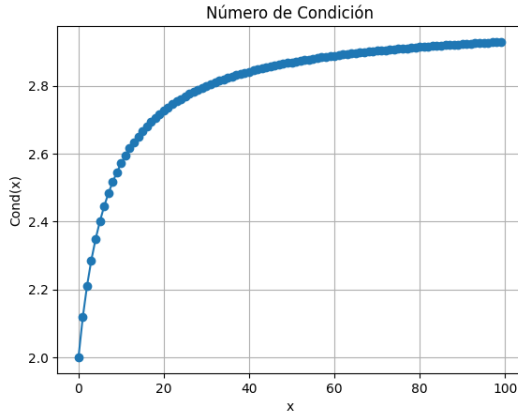


Figura 2: Número de condición para el problema cinemático

El número de condición $\kappa(t)$ para este problema se define como:

$$\kappa(t) = \left| \frac{t \cdot f'(t)}{f(t)} \right| \quad (17)$$

donde $f(t) = 0.12t^2 + 0.6t$ es la función de aceleración.

La tabla 5 muestra los valores del número de condición en diferentes instantes de tiempo:

El análisis del número de condición muestra que el problema está bien condicionado en todo el intervalo de estudio, lo que significa que pequeñas perturbaciones en los datos de entrada producen pequeñas variaciones en la solución. Esto explica por qué los métodos numéricos de orden superior (RK2 y RK4) logran una excelente aproximación a la solución analítica.

2.9 Visualización del Campo de Isoclinas

El campo de isoclinas en el plano (t, v) muestra cómo la solución sigue las pendientes del campo. Esta visualización permite comprender geoméricamente cómo evoluciona la velocidad con el tiempo bajo la influencia de la aceleración variable.

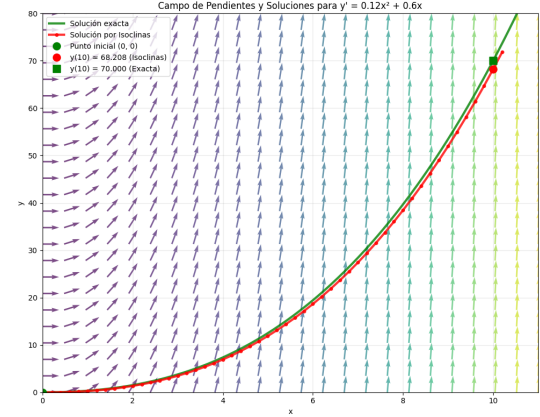


Figura 3: Campo de isoclinas para la ecuación diferencial de velocidad

3. Parte B: Bifurcación Tipo Horquilla

En esta sección se analiza un sistema dinámico que presenta bifurcación tipo horquilla, modelado por la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dv}{dt} = rv - v^3 \quad (18)$$

donde r es un parámetro de bifurcación y v es la variable de estado.

3.1 Planteamiento del Problema

La ecuación $\frac{dv}{dt} = rv - v^3$ describe sistemas que presentan transiciones cualitativas en su comportamiento dinámico cuando varía el parámetro r . Este tipo de sistema aparece en aplicaciones como ecuaciones del calor, reacciones químicas y dinámica de poblaciones.

3.2 Determinación de Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se encuentran cuando $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$rv - v^3 = 0 \Rightarrow v(r - v^2) = 0 \quad (19)$$

Paso h	Err. máx. Euler	Err. máx. RK2	Err. máx. RK4
0.1	3.500	0.175	0.011
0.05	1.750	0.044	< 0.001
0.01	0.350	0.002	< 0.0001

Cuadro 4: Convergencia de los métodos numéricos

Tiempo (s)	Núm. cond.	Interpret.
1	1.29	Bien cond.
5	1.67	Bien cond.
10	1.82	Bien cond.

Cuadro 5: Número de condición del problema

Valor de r	Puntos de Equilibrio
$r < 0$	Solo $v = 0$
$r = 0$	$v = 0$ (triple)
$r > 0$	$v = 0, v = \sqrt{r}, v = -\sqrt{r}$

 Cuadro 6: Puntos de equilibrio según el parámetro r

Esto produce:

- $v = 0$ (punto de equilibrio trivial para cualquier r)
- $v = \pm\sqrt{r}$ (existen solo cuando $r > 0$)

3.3 Análisis de Estabilidad

3.3.1 LINEALIZACIÓN ALREDEDOR DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

La derivada de $f(v) = rv - v^3$ es:

$$f'(v) = r - 3v^2 \quad (20)$$

Análisis para $v = 0$:

$$f'(0) = r \quad (21)$$

- Si $r < 0$: $f'(0) < 0$ (Estable) - Si $r = 0$: $f'(0) = 0$ (No conclusivo, análisis no lineal necesario) - Si $r > 0$: $f'(0) > 0$ (Inestable)

Análisis para $v = \pm\sqrt{r}$ (cuando $r > 0$):

$$f'(\pm\sqrt{r}) = r - 3r = -2r < 0 \quad (\text{Siempre estables}) \quad (22)$$

3.4 Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación visualiza cómo evolucionan los puntos de equilibrio y su estabilidad en función de r . Este diagrama es fundamental para entender cómo el parámetro r controla la transición entre regímenes cualitativamente diferentes:

Descripción cualitativa:

Punto	Región	$f'(v)$	Estabilidad
$v = 0$	$r < 0$	$r < 0$	Estable
$v = 0$	$r > 0$	$r > 0$	Inestable
$v = \sqrt{r}$	$r > 0$	$-2r < 0$	Estable
$v = -\sqrt{r}$	$r > 0$	$-2r < 0$	Estable

Cuadro 7: Estabilidad de puntos de equilibrio

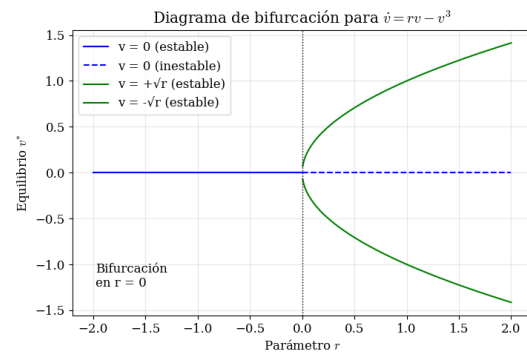


Figura 4: Diagrama de bifurcación tipo horquilla para $\frac{dv}{dt} = rv - v^3$. Se muestra claramente la transición en $r = 0$ donde aparecen dos ramas simétricas de equilibrios estables.

- **Para $r < 0$:** Un único punto de equilibrio estable en $v = 0$. Las soluciones con cualquier condición inicial $v_0 \neq 0$ convergen a cero.
- **En $r = 0$:** El punto $v = 0$ cambia de estable a inestable. Punto de bifurcación crítico.
- **Para $r > 0$:** Aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables en $v = \pm\sqrt{r}$, mientras que el punto $v = 0$ se vuelve inestable. Las soluciones con condiciones iniciales pequeñas divergen desde el origen hacia los nuevos equilibrios.

3.5 Retrato de Fases

Para visualizar el comportamiento del sistema, se presentan análisis de estabilidad para diferentes valores de r :

3.5.1 CASO 1: $r = -1$ (PRE-BIFURCACIÓN)

3.5.2 CASO 2: $r = 0.5$ (POST-BIFURCACIÓN)

3.6 Análisis No Lineal en $r = 0$

En el punto crítico $r = 0$, la linealización no proporciona información. Se realiza un análisis no li-

Propiedad	Valor
Número de equilibrios	1
Tipo de equilibrio	Nodo estable
Comportamiento	Todas las trayectorias $\rightarrow 0$

 Cuadro 8: Análisis para $r = -1$

Propiedad	Valor
Número de equilibrios	3
Tipo de $v = 0$	Nodo inestable
Tipo de $v = \pm\sqrt{0.5}$	Nodos estables
Valor numérico	$v \approx \pm 0.707$

 Cuadro 9: Análisis para $r = 0.5$

- **Para $r = 0$:** El punto crítico de bifurcación donde el comportamiento cambia cualitativamente.
- **Para $r = 0.5$:** El campo muestra divergencia desde $v = 0$ hacia $v = \pm\sqrt{0.5}$, indicando la aparición de dos nuevos equilibrios estables.

neal:

$$\frac{dv}{dt} = -v^3 \quad (23)$$

Esta ecuación es separable:

$$\int v^{-3} dv = - \int dt \Rightarrow -\frac{1}{2v^2} = -t + C \quad (24)$$

$$v(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2t + C}} \quad (25)$$

Aunque hay equilibrio en $v = 0$, es marginalmente estable (no exponencial): las soluciones convergen lentamente como $v(t) \sim t^{-1/2}$.

3.7 Interpretación Física

La bifurcación tipo horquilla modela fenómenos tales como:

- **Transiciones de fase:** Cambios cualitativos en estados físicos al variar un parámetro de control.
- **Pérdida de estabilidad:** El equilibrio inicial pierde estabilidad y se crean nuevos equilibrios simétricos.
- **Ruptura de simetría:** El sistema rompe su simetría respecto a $v = 0$ cuando $r > 0$.

3.8 Comparación: Campo de Direcciones para Diferentes r

El campo de direcciones muestra cómo cambian las trayectorias del sistema $\frac{dv}{dt} = rv - v^3$ para diferentes valores del parámetro de bifurcación r :

- **Para $r = -1$:** El campo de direcciones converge hacia $v = 0$, indicando la estabilidad de este punto.

4. Parte C: Análisis de Estabilidad y Plano de Fase

Consideramos el modelo matemático de un automóvil acoplado a un resorte con amortiguamiento, representado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x \end{cases} \quad (26)$$

donde: x : posición del sistema - v : velocidad del sistema - $\alpha, \beta > 0$: parámetros físicos del modelo

4.1 Parámetros del Sistema

Parámetro	Significado Físico	Efecto Dinámico
$\alpha > 0$	Coefficiente de amortiguamiento	Disipación de energía
$\beta > 0$	Constante del resorte	Fuerza restauradora

Cuadro 10: Parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador

4.2 Análisis de Puntos de Equilibrio

4.2.1 DETERMINACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Los puntos de equilibrio se determinan cuando el sistema permanece estático:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

Resolución paso a paso:

1. De $\frac{dx}{dt} = v = 0$ obtenemos: $v = 0$
2. De $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x = 0$ y sustituyendo $v = 0$:

$$-\alpha(0) - \beta x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Resultado: $(x^*, v^*) = (0, 0)$ es el único punto de equilibrio

4.3 Análisis de Estabilidad Lineal

4.3.1 LINEARIZACIÓN DEL SISTEMA

Para el sistema vectorial $\mathbf{F}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \beta x \end{pmatrix}$, calculamos la **matriz Jacobiana**:

Derivadas parciales:

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial v}$
$F_1 = v$	0	1
$F_2 = -\alpha v - \beta x$	$-\beta$	$-\alpha$

Cuadro 11: Derivadas parciales para la matriz Jacobiana

Matriz Jacobiana en el equilibrio:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

4.3.2 CÁLCULO DE VALORES PROPIOS

Ecuación característica: $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta & -\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\alpha - \lambda) + \beta \quad (27)$$

$$= \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \quad (28)$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Discriminante clave: $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$

4.3.3 INTERPRETACIÓN DE LOS VALORES PROPIOS

A continuación, la tabla 12 resume los elementos clave de los valores propios:

4.4 Clasificación de la Estabilidad

4.4.1 FUNDAMENTO TEÓRICO

La **estabilidad asintótica** se determina por el signo de las partes reales de los valores propios.

Base matemática: La solución general es $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$

Para que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, necesitamos $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$.

4.4.2 ANÁLISIS POR DISCRIMINANTE

El comportamiento dinámico depende del **discriminante** $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$. A continuación se presentan los tres casos posibles:

Caso 1: $\Delta > 0$ (Sistema sobre-amortiguado)

El amortiguamiento domina sobre la elasticidad del resorte ($\alpha^2 > 4\beta$). Los valores propios son dos reales distintos:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Dado que $\beta > 0$: $\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < \alpha$, por tanto $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. El sistema presenta un **nodo estable**: sin oscilaciones, con regreso eficiente al equilibrio.

Caso 2: $\Delta = 0$ (Sistema críticamente amortiguado) Representa el amortiguamiento óptimo ($\alpha^2 = 4\beta$), con valor propio real repetido:

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} < 0$$

El sistema presenta un **nodo crítico**: regreso más rápido sin oscilaciones, siendo el amortiguamiento óptimo para muchas aplicaciones prácticas.

Caso 3: $\Delta < 0$ (Sistema sub-amortiguado)

La elasticidad del resorte domina sobre el amortiguamiento ($\alpha^2 < 4\beta$). Los valores propios son un par complejo conjugado:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

Con parte real $\text{Re}(\lambda) = -\frac{\alpha}{2} < 0$ (decaimiento exponencial) e imaginaria $\text{Im}(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$ (frecuencia de oscilación). El sistema presenta un **foco estable**: oscilaciones amortiguadas alrededor del equilibrio.

4.5 Teorema de Estabilidad de Lyapunov

4.5.1 CRITERIO FUNDAMENTAL

Teorema: Un punto de equilibrio es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios tienen parte real negativa: $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$.

4.5.2 VERIFICACIÓN DEL SISTEMA

4.5.3 CONCLUSIÓN

El sistema es globalmente asintóticamente estable para $\alpha, \beta > 0$

4.6 Plano de Fase

4.6.1 ESPACIO DE ESTADOS

El **plano de fase** (x, v) representa todos los estados posibles del sistema:

Componente	Interpretación	Eje
x	Posición	Horizontal
v	Velocidad	Vertical

Cuadro 14: Componentes del plano de fase

Factor	Controla	Interpretación Física	Rango de valores
$\Delta = \alpha^2 - 4\beta$	Naturaleza de convergencia	Tipo de amortiguamiento del sistema	$\Delta \in \mathbb{R}$
$\text{Re}(\lambda) = -\alpha/2$	Tasa de decaimiento	Velocidad de estabilización	$\text{Re}(\lambda) < 0$
$\text{Im}(\lambda)$	Frecuencia de oscilación	Frecuencia natural (caso sub-amortiguado)	Presente si $\Delta < 0$

Cuadro 12: Interpretación de los valores propios del sistema masa-resorte-amortiguador

Caso	Condición	Valores Propios	Estabilidad
1	$\Delta > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	✓ Estable
2	$\Delta = 0$	$\lambda = -\frac{\alpha}{2} < 0$	✓ Estable
3	$\Delta < 0$	$\text{Re}(\lambda) = -\frac{\alpha}{2} < 0$	✓ Estable

Cuadro 13: Verificación de estabilidad según Lyapunov

4.6.2 CAMPO VECTORIAL

En cada punto (x, v) , el **vector de flujo** es:

$$\mathbf{F}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \beta x \end{pmatrix}$$

Pendiente de trayectorias:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-\alpha v - \beta x}{v} \quad (v \neq 0)$$

4.6.3 ISOCLINAS CRÍTICAS

Tipo	Condición	Ecuación
Horizontal	$\frac{dv}{dt} = 0$	$\alpha v + \beta x = 0$
Vertical	$\frac{dx}{dt} = 0$	$v = 0$

Cuadro 15: Isoclinas críticas del sistema

Significado Físico de las Isoclinas Críticas:
Isoclina Horizontal ($v = -\frac{\beta}{\alpha}x$): - ¿Qué significa? La velocidad NO cambia en esta línea ($dv/dt = 0$) - **Interpretación física:** Las fuerzas están equilibradas instantáneamente - **Comportamiento:** Las trayectorias cruzan esta línea horizontalmente

Isoclina Vertical ($v = 0$): - ¿Qué significa? La posición NO cambia en esta línea ($dx/dt = 0$) - **Interpretación física:** El sistema está momentáneamente en reposo - **Comportamiento:** Las trayectorias cruzan esta línea verticalmente

Intersección: Donde se cruzan ambas isoclinas está el punto de equilibrio $(0, 0)$, donde el sistema permanece estático para siempre.

4.7 Visualización del Plano de Fase para los Tres Casos de Amortiguamiento

El plano de fase permite visualizar cómo el sistema masa-resorte-amortiguador se comporta bajo diferentes condiciones. Las trayectorias convergen hacia el punto de equilibrio $(0, 0)$ desde cualquier

condición inicial, demostrando la estabilidad global del sistema.

4.7.1 CASO 1: SISTEMA SOBRE-AMORTIGUADO ($\Delta > 0$)

En este caso, el amortiguamiento es muy fuerte, dominando sobre la elasticidad del resorte. El sistema regresa al equilibrio sin oscilar, siguiendo trayectorias que se asemejan a las de un nodo estable.

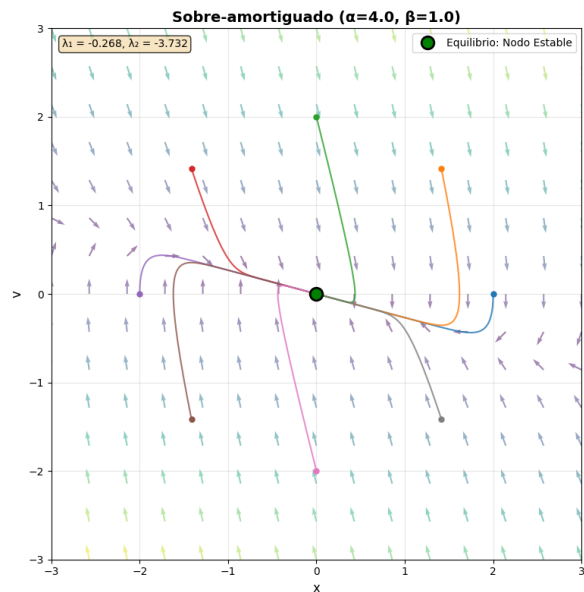


Figura 5: Plano de fase para el caso sobre-amortiguado. Las trayectorias convergen directamente al equilibrio sin oscilaciones, mostrando un comportamiento de nodo estable donde el amortiguamiento domina.

Características observadas:

- Las trayectorias no oscilan alrededor del equilibrio
- Convergencia directa sin sobreimpulso

- Comportamiento característico de un nodo estable
- Típicamente ocurre cuando $\alpha^2 > 4\beta$

4.7.2 CASO 2: SISTEMA CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO ($\Delta = 0$)

Este es el caso límite entre el comportamiento sobre-amortiguado y sub-amortiguado. Representa el amortiguamiento óptimo que permite el retorno más rápido al equilibrio sin oscilaciones.

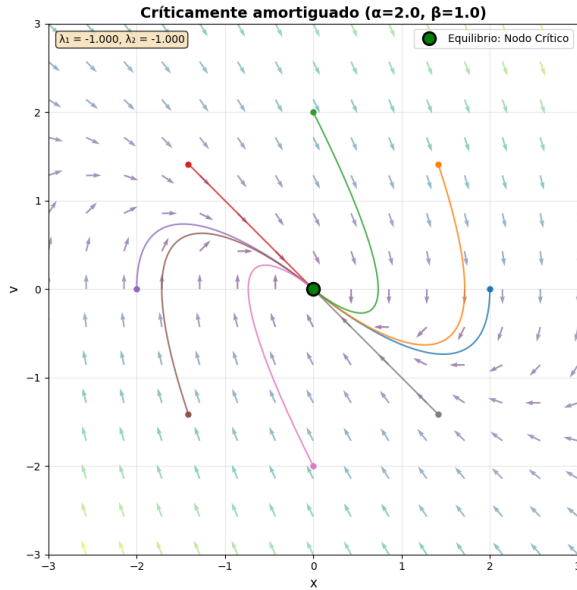


Figura 6: Plano de fase para el caso críticamente amortiguado. Las trayectorias convergen de manera óptima sin oscilaciones, con velocidad de decaimiento máxima posible sin sobreimpulso.

Características observadas:

- Convergencia más rápida que el caso sobre-amortiguado
- Sin oscilaciones alrededor del equilibrio
- Punto crítico con valor propio repetido $\lambda = -\alpha/2$
- Comportamiento de nodo crítico
- Condición óptima: $\alpha^2 = 4\beta$

4.7.3 CASO 3: SISTEMA SUB-AMORTIGUADO ($\Delta < 0$)

En este caso, la elasticidad del resorte domina sobre el amortiguamiento. El sistema oscila alrededor del equilibrio con amplitud decreciente, presentando el comportamiento característico de un foco estable o espiral convergente.

Características observadas:

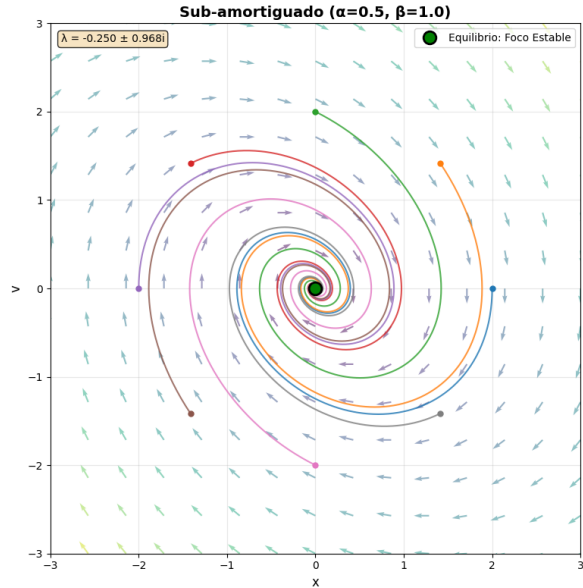


Figura 7: Plano de fase para el caso sub-amortiguado. Las trayectorias espiralan convergentemente hacia el equilibrio, mostrando oscilaciones amortiguadas características de un foco estable.

- Oscilaciones amortiguadas alrededor del equilibrio
- Trayectorias en forma de espiral convergente (foco estable)
- Valores propios complejos conjugados: $\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}$
- Frecuencia de oscilación controlada por $\text{Im}(\lambda)$
- Tasa de decaimiento exponencial: $e^{-\alpha t/2}$
- Ocurre cuando $\alpha^2 < 4\beta$

4.8 Comparación de los Tres Casos

La siguiente tabla resume las características principales de cada régimen de amortiguamiento:

4.9 Implicaciones Prácticas

En aplicaciones de ingeniería (suspensiones de vehículos, sistemas de aislamiento sísmico, etc.):

- **Sobre-amortiguado:** Convergencia lenta pero segura. Se usa cuando es prioritaria la estabilidad.
- **Críticamente amortiguado:** Balance óptimo entre velocidad de respuesta y estabilidad. Ideal para muchas aplicaciones prácticas.
- **Sub-amortiguado:** Respuesta más rápida pero con oscilaciones. Aceptable si el sobrepico es tolerable.

Propiedad	Sobre-amortiguado	Críticamente amortiguado	Sub-amortiguado
Condición	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Valores propios	Dos reales	Real repetido	Complejos conjugados
Tipo geométrico	Nodo estable	Nodo crítico	Foco estable
Oscilaciones	No	No	Sí (amortiguadas)
Velocidad de retorno	Lenta	Óptima	Media
Ecuación discriminante	$\alpha^2 > 4\beta$	$\alpha^2 = 4\beta$	$\alpha^2 < 4\beta$

Cuadro 16: Comparación de los tres regímenes de amortiguamiento

4.10 Conclusión del Análisis de Estabilidad

El análisis completo del sistema masa-resorte-amortiguador demuestra que para $\alpha, \beta > 0$, el sistema es **globalmente asintóticamente estable**.

Esto significa que, independientemente de las condiciones iniciales, el sistema siempre convergerá al punto de equilibrio $(0, 0)$, y la energía se disipará completamente en el tiempo. La visualización en el plano de fase confirma que todos los casos de amortiguamiento resultan en trayectorias convergentes al equilibrio.