

Tema 1: Velocidad y aceleración

Alfonso Teja Rodríguez
Grupo C212

ALFONSOTEJEDA150605@GMAIL.COM

Miguel Cazorla Zamora
Grupo C212

MIGUELZAMORA210405@GMAIL.COM

Eric Reyes Milián

Tutor(es):
Doc. Copilot , by Github

Resumen

Este trabajo analiza tres problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La Parte A estudia un modelo cinemático con aceleración variable ($\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$), obteniendo soluciones analíticas y comparando métodos numéricos. La Parte B investiga un sistema con bifurcación tipo horquilla ($\frac{dv}{dt} = rv - v^3$), analizando cómo el parámetro r modifica cualitativamente el comportamiento del sistema, con puntos de equilibrio estables e inestables. La Parte C examina un sistema masa-resorte-amortiguador ($\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$), clasificando su comportamiento según el discriminante $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ en tres casos: sobre-amortiguado, críticamente amortiguado y sub-amortiguado. Se visualiza el plano de fase para cada caso, demostrando estabilidad asintótica global cuando $\alpha, \beta > 0$.

Abstract

This paper analyzes three ordinary differential equation problems. Part A studies a kinematic model with variable acceleration ($\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$), obtaining analytical solutions and comparing numerical methods. Part B investigates a system with pitchfork bifurcation ($\frac{dv}{dt} = rv - v^3$), analyzing how parameter r qualitatively changes the system's behavior, with stable and unstable equilibrium points. Part C examines a mass-spring-damper system ($\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$), classifying its behavior according to the discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ into three cases: over-damped, critically damped, and under-damped. The phase plane is visualized for each case, demonstrating global asymptotic stability when $\alpha, \beta > 0$.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Análisis cinemático, Estabilidad, Plano de fase, Sistemas dinámicos.

Tema: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Velocidad y aceleración.

1. Resumen Extendido

Este trabajo presenta un análisis detallado de tres problemas fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias, implementados en un entorno interactivo utilizando Unity. Cada parte aborda un aspecto diferente de los sistemas dinámicos, proporcionando tanto análisis teórico como visualización práctica.

1.1 Parte A: Cinemática y Métodos Numéricos

La Parte A se centra en el estudio de un modelo cinemático con aceleración variable, descrito por la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t$, con condiciones iniciales $v(0) = 0$ m/s y $x(0) = 0$ m. Se obtienen soluciones analíticas para la velocidad $v(t) = 0.04t^3 + 0.3t^2$ y la posición $x(t) = 0.01t^4 + 0.1t^3$, permitiendo analizar el comportamiento de un objeto sometido a una aceleración que crece cuadráticamente con el tiempo.

Un aspecto destacado es la comparación de diferentes métodos numéricos (Euler, Runge-Kutta 2 y Runge-Kutta 4) para resolver esta ecuación, evaluando

su precisión mediante el cálculo del error relativo respecto a la solución analítica. La visualización incluye un campo de isoclinas en el plano (t, v) que muestra cómo la solución sigue las pendientes del campo.

1.2 Parte B: Análisis de Bifurcación

La Parte B investiga un sistema con bifurcación tipo horquilla modelado por la ecuación $\frac{dv}{dt} = rv - v^3$, donde el parámetro r determina cualitativamente el comportamiento del sistema. El análisis se centra en cómo los puntos de equilibrio y su estabilidad cambian en función de este parámetro:

- Para $r < 0$: Existe un único punto de equilibrio estable en $v = 0$.
- Para $r > 0$: El punto $v = 0$ se vuelve inestable, mientras que aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables en $v = \sqrt{r}$ y $v = -\sqrt{r}$.

Esta transición representa una bifurcación tipo horquilla, visualizada mediante un diagrama que muestra

cómo los puntos de equilibrio y su estabilidad evolucionan con el parámetro r .

1.3 Parte C: Oscilador Amortiguado y Plano de Fase

La Parte C examina un sistema masa-resorte-amortiguador descrito por las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = v$ y $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x$, donde α representa el coeficiente de amortiguamiento y β la constante del resorte. El análisis de estabilidad se realiza mediante linearización alrededor del único punto de equilibrio $(0, 0)$ y el cálculo de los valores propios de la matriz jacobiana.

El comportamiento dinámico del sistema se clasifica según el discriminante $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ en tres casos:

- Sobre-amortiguado ($\Delta > 0$): El sistema regresa al equilibrio sin oscilaciones (nodo estable).
- Críticamente amortiguado ($\Delta = 0$): El sistema regresa al equilibrio en el tiempo mínimo sin oscilaciones (nodo crítico).
- Sub-amortiguado ($\Delta < 0$): El sistema oscila con amplitud decreciente alrededor del equilibrio (foco estable).

La visualización del plano de fase para cada caso muestra las trayectorias del sistema y demuestra que, para $\alpha, \beta > 0$, el sistema es globalmente asintóticamente estable.

1.4 Visualizaciones Interactivas en Unity

Todas las simulaciones descritas han sido implementadas en Unity, proporcionando visualizaciones interactivas que permiten:

Parte A Comparar en tiempo real la solución analítica con los métodos numéricos, ajustando el paso de integración y observando cómo afecta la precisión.

Parte B Explorar el diagrama de bifurcación interactivamente, variando el parámetro r y observando cómo cambian los puntos de equilibrio y su estabilidad.

Parte C Visualizar el plano de fase con diferentes condiciones iniciales y parámetros, mostrando cómo las trayectorias convergen al equilibrio en cada régimen de amortiguamiento.

2. Parte A: Cinemática y Métodos Numéricos

En esta sección se presenta el análisis de un modelo cinemático con aceleración variable, descrito por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Se estudia tanto la solución analítica como la implementación de diferentes métodos numéricos para su resolución.

2.1 Planteamiento del Problema

Se considera un móvil que parte del reposo desde el origen de coordenadas, cuya aceleración varía con el tiempo según la expresión:

$$a(t) = 0.12t^2 + 0.6t \quad (1)$$

El problema consiste en resolver la ecuación diferencial para la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t \quad (2)$$

Con las condiciones iniciales:

$$v(0) = 0 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0 \text{ m} \quad (3)$$

2.2 Solución Analítica

Integrando la ecuación diferencial para la velocidad, se obtiene:

$$v(t) = \int (0.12t^2 + 0.6t) dt = 0.04t^3 + 0.3t^2 + C \quad (4)$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = 0$, se determina que $C = 0$, por lo que:

$$v(t) = 0.04t^3 + 0.3t^2 \text{ (m/s)} \quad (5)$$

Para obtener la posición, se integra la velocidad:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (0.04t^3 + 0.3t^2) dt = 0.01t^4 + 0.1t^3 + C' \quad (6)$$

Con la condición inicial $x(0) = 0$, se obtiene $C' = 0$, resultando:

$$x(t) = 0.01t^4 + 0.1t^3 \text{ (m)} \quad (7)$$

2.3 Análisis del Comportamiento

El análisis del movimiento revela características importantes:

- **Aceleración variable:** Crece cuadráticamente con el tiempo, alcanzando $a = 18.0 \text{ m/s}^2$ en $t = 10 \text{ s}$.
- **Velocidad creciente:** Sigue una combinación cúbica-cuadrática, llegando a $v = 70.0 \text{ m/s}$ al final del intervalo estudiado. La velocidad promedio en los 10 segundos es $\bar{v} = 20.0 \text{ m/s}$.
- **Desplazamiento:** La posición final es $x = 200 \text{ m}$, siguiendo una trayectoria polinómica de grado 4.

2.4 Visualizaciones Interactivas en Unity

Todas las simulaciones descritas han sido implementadas en Unity, proporcionando visualizaciones interactivas que permiten comparar en tiempo real la solución analítica con los métodos numéricos, ajustando el paso de integración y observando cómo afecta la precisión.

2.5 Valores Numéricos Clave

La siguiente tabla muestra los valores de aceleración, velocidad y posición en momentos específicos:

Tiempo (s)	Acel. (m/s ²)	Vel. (m/s)	Pos. (m)
0	0.00	0.00	0.00
5	6.00	12.50	18.75
10	18.00	70.00	200.00

Cuadro 1: Valores cinemáticos en instantes clave

2.6 Implementación de Métodos Numéricos

Para resolver numéricamente la ecuación diferencial, se implementaron tres métodos:

1. **Método de Euler:** El más simple pero menos preciso. Se basa en la aproximación lineal de la solución utilizando la pendiente en cada punto. La fórmula de recurrencia es:

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot f(t_n, v_n) \quad (8)$$

donde h es el paso de integración y $f(t, v) = 0.12t^2 + 0.6t$ es la función que define la aceleración.

2. **Método de Runge-Kutta de orden 2 (RK2):** Ofrece un equilibrio entre simplicidad y precisión. Utiliza una combinación ponderada de dos evaluaciones de la función para mejorar la aproximación:

$$k_1 = f(t_n, v_n) \quad (9)$$

$$k_2 = f(t_n + h, v_n + h \cdot k_1) \quad (10)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (11)$$

3. **Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4):** El más preciso de los tres. Utiliza cuatro evaluaciones de la función para obtener una aproximación de mayor orden:

$$k_1 = f(t_n, v_n) \quad (12)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \quad (13)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \quad (14)$$

$$k_4 = f(t_n + h, v_n + h \cdot k_3) \quad (15)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (16)$$

La implementación de estos métodos se realizó con diferentes pasos de integración para estudiar su convergencia y estabilidad. Se utilizó un paso base de $h = 0.1$ segundos para la comparación principal.

2.7 Comparación de Métodos Numéricos

La siguiente figura muestra una comparación entre los diferentes métodos numéricos implementados (Euler, RK2 y RK4) y la solución analítica:

Para cuantificar la precisión de cada método, se calculó el error absoluto respecto a la solución analítica en diferentes puntos del intervalo $[0, 10]$ segundos. La tabla 3 muestra estos errores para $t = 5$ s y $t = 10$ s con un paso de integración $h = 0.1$ s.

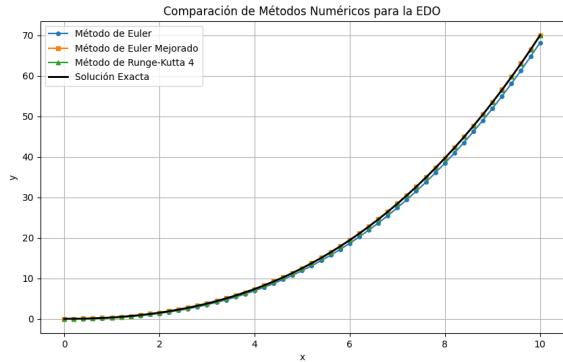


Figura 1: Comparación entre métodos numéricos y la solución analítica

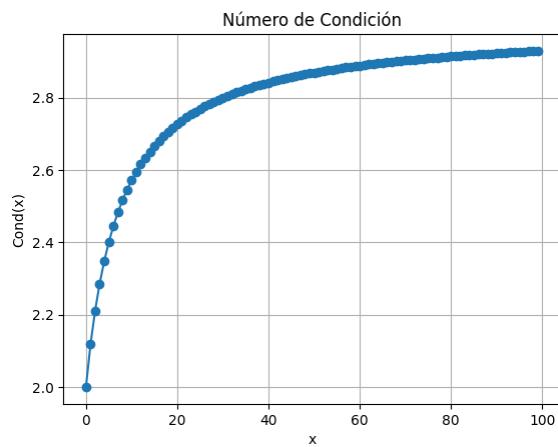


Figura 2: Número de condición para el problema cinemático

Se observa que el error del método de Euler crece significativamente con el tiempo, mientras que el método RK4 mantiene una precisión muy alta incluso al final del intervalo. El método RK2 presenta un comportamiento intermedio.

También se estudió la convergencia de los métodos al reducir el paso de integración. La tabla 4 muestra cómo disminuye el error máximo al reducir el paso.

2.8 Análisis de Condicionamiento

El número de condición del problema se visualiza para entender la sensibilidad de la solución a pequeñas perturbaciones:

El número de condición $\kappa(t)$ para este problema se define como:

$$\kappa(t) = \left| \frac{t \cdot f'(t)}{f(t)} \right| \quad (17)$$

donde $f(t) = 0.12t^2 + 0.6t$ es la función de aceleración.

La tabla 5 muestra los valores del número de condición en diferentes instantes de tiempo:

El análisis del número de condición muestra que el problema está bien condicionado en todo el intervalo de estudio, lo que significa que pequeñas perturbaciones en los datos de entrada producen pequeñas varia-

Método	Orden	Eval./paso	Estab.	Prec.
Euler	1	1	Baja	Baja
RK2	2	2	Media	Media
RK4	4	4	Alta	Alta

Cuadro 2: Características de los métodos numéricos

Tiempo (s)	Err. Euler	Err. RK2	Err. RK4
5	0.625	0.031	< 0.001
10	3.500	0.175	0.011

Cuadro 3: Error absoluto de los métodos numéricos

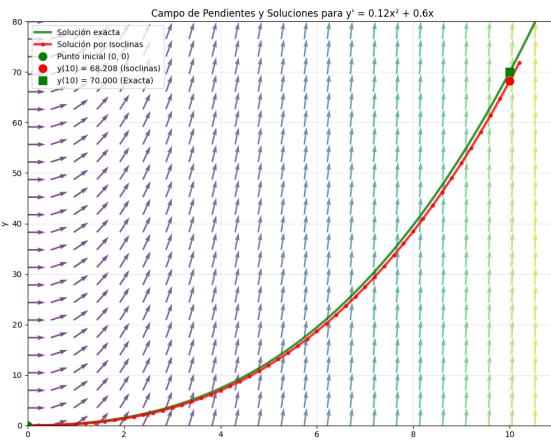


Figura 3: Campo de isoclinas para la ecuación diferencial de velocidad

ciones en la solución. Esto explica por qué los métodos numéricos de orden superior (RK2 y RK4) logran una excelente aproximación a la solución analítica.

2.9 Visualización del Campo de Isoclinas

El campo de isoclinas en el plano (t, v) muestra cómo la solución sigue las pendientes del campo. Esta visualización permite comprender geométricamente cómo evoluciona la velocidad con el tiempo bajo la influencia de la aceleración variable.

3. Parte B

4. Parte C: Análisis de Estabilidad y Plano de Fase

Consideramos el modelo matemático de un automóvil acoplado a un resorte con amortiguamiento, representado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x \end{cases} \quad (18)$$

donde: - x : posición del sistema - v : velocidad del sistema - $\alpha, \beta > 0$: parámetros físicos del modelo

4.1 Parámetros del Sistema

4.2 Análisis de Puntos de Equilibrio

4.2.1 DETERMINACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Los puntos de equilibrio se determinan cuando el sistema permanece estático:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

Resolución paso a paso:

1. De $\frac{dx}{dt} = v = 0$ obtenemos: $v = 0$
2. De $\frac{dv}{dt} = -\alpha v - \beta x = 0$ y sustituyendo $v = 0$:

$$-\alpha(0) - \beta x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Resultado: $(x^*, v^*) = (0, 0)$ es el único punto de equilibrio

4.3 Análisis de Estabilidad Lineal

4.3.1 LINEARIZACIÓN DEL SISTEMA

Para el sistema vectorial $\mathbf{F}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \beta x \end{pmatrix}$, calculamos la **matriz Jacobiana**:

Derivadas parciales:

Matriz Jacobiana en el equilibrio:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

4.3.2 CÁLCULO DE VALORES PROPIOS

Ecuación característica: $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta & -\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\alpha - \lambda) - (1)(-\beta) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Discriminante clave: $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$

4.3.3 INTERPRETACIÓN DE LOS VALORES PROPIOS

4.4 Clasificación de la Estabilidad

4.4.1 FUNDAMENTO TEÓRICO

La **estabilidad asintótica** se determina por el signo de las partes reales de los valores propios.

Paso h	Err. máx. Euler	Err. máx. RK2	Err. máx. RK4
0.1	3.500	0.175	0.011
0.05	1.750	0.044	< 0.001
0.01	0.350	0.002	< 0.0001

Cuadro 4: Convergencia de los métodos numéricos

Tiempo (s)	Núm. cond.	Interpret.
1	1.29	Bien cond.
5	1.67	Bien cond.
10	1.82	Bien cond.

Cuadro 5: Número de condición del problema

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial v}$
$F_1 = v$	0	1
$F_2 = -\alpha v - \beta x$	$-\beta$	$-\alpha$

Cuadro 7: Derivadas parciales para la matriz Jacobiana

Parámetro	Significado Físico	Efecto Dinámico	Factor	Controla	Interpreta
$\alpha > 0$	Coeficiente de amortiguamiento	Disipación de energía	$\text{Re}(\lambda) < 0$	Naturaleza de convergencia	Tipo de amortiguamiento
$\beta > 0$	Constante del resorte	Fuerza restauradora	$\text{Im}(\lambda)$	Tasa de decaimiento	Velocidad natural

Cuadro 6: Parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador

Cuadro 8: Interpretación de los valores propios

Base matemática: La solución general es $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$

Para que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, necesitamos $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$.

4.4.2 ANÁLISIS POR DISCRIMINANTE

El comportamiento dinámico depende del **discriminante** $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$:

Caso 1: $\Delta > 0$ (Sistema sobre-amortiguado)

Condición física: El amortiguamiento domina sobre la elasticidad del resorte ($\alpha^2 > 4\beta$)

Valores propios: Dos reales distintos

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Análisis de estabilidad: - Dado que $\beta > 0$: $\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < \sqrt{\alpha^2} = \alpha$ - Por tanto: $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$

Caso 2: $\Delta = 0$ (Sistema críticamente amortiguado) **Condición física:** Amortiguamiento óptimo, balance perfecto entre disipación y elasticidad ($\alpha^2 = 4\beta$)

Valor propio: Real repetido

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} < 0$$

Caso 3: $\Delta < 0$ (Sistema sub-amortiguado) **Condición física:** La elasticidad del resorte domina sobre el amortiguamiento ($\alpha^2 < 4\beta$)

Valores propios: Par complejo conjugado

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

Componentes: - **Parte real:** $\text{Re}(\lambda) = -\frac{\alpha}{2} < 0$ (decaimiento exponencial) - **Parte imaginaria:** $\text{Im}(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$ (frecuencia de oscilación)

4.5 TEOREMA DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

4.5.1 CRITERIO FUNDAMENTAL

Teorema: Un punto de equilibrio es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios tienen parte real negativa: $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$.

4.5.2 VERIFICACIÓN DEL SISTEMA

4.5.3 CONCLUSIÓN

El sistema es globalmente asintóticamente estable para $\alpha, \beta > 0$

4.6 PLANO DE FASE

4.6.1 ESPACIO DE ESTADOS

El **plano de fase** (x, v) representa todos los estados posibles del sistema:

4.6.2 CAMPO VECTORIAL

En cada punto (x, v) , el **vector de flujo** es:

$$\mathbf{F}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \beta x \end{pmatrix}$$

Pendiente de trayectorias:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-\alpha v - \beta x}{v} \quad (v \neq 0)$$

4.6.3 ISOCLINAS CRÍTICAS

Significado Físico de las Isoclinas Críticas:

Isocina Horizontal ($v = -\frac{\beta}{\alpha}x$): - ¿Qué significa? La velocidad NO cambia en esta línea ($dv/dt = 0$)

Interpretación física: Las fuerzas están equilibradas instantáneamente - **Comportamiento:** Las trayectorias cruzan esta línea horizontalmente

Clasificación	Comportamiento Físico
Nodo estable	El sistema regresa al equilibrio sin oscilaciones, como un amortiguador muy eficiente

Cuadro 9: Clasificación del caso sobre-amortiguado

Clasificación	Comportamiento Físico
Nodo crítico	Regreso más rápido posible al equilibrio sin oscilaciones (amortiguamiento óptimo)

Cuadro 10: Clasificación del caso críticamente amortiguado

Isocina Vertical ($v = 0$): - **¿Qué significa?** La posición NO cambia en esta línea ($dx/dt = 0$) - **Interpretación física:** El sistema está momentáneamente en reposo - **Comportamiento:** Las trayectorias cruzan esta línea verticalmente

Intersección: Donde se cruzan ambas isoclinas está el punto de equilibrio $(0,0)$, donde el sistema permanece estático para siempre.

Clasificación	Comportamiento
Foco estable (espiral)	El sistema oscila mientras regresa al equilibrio

Cuadro 11: Clasificación del caso sub-amortiguado

Caso	Condición	Valores Propios	Estabilidad
1	$\Delta > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	✓ Estable
2	$\Delta = 0$	$\lambda = -\frac{\alpha}{2} < 0$	✓ Estable
3	$\Delta < 0$	$\text{Re}(\lambda) = -\frac{\alpha}{2} < 0$	✓ Estable

Cuadro 12: Verificación de estabilidad según Lyapunov

Componente	Interpretación	Eje
x	Posición	Horizontal
v	Velocidad	Vertical

Cuadro 13: Componentes del plano de fase

Tipo	Condición	Ecuación
Horizontal	$\frac{dv}{dt} = 0$	$\alpha v + \beta x = 0$
Vertical	$\frac{dx}{dt} = 0$	$v = 0$

Cuadro 14: Isoclinas críticas del sistema