Equivalencia de Condiciones para la Integrabilidad de Riemann

Introducción

En el análisis matemático, la integrabilidad de Riemann es un concepto fundamental. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice Riemann integrable si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \text{ partición de } [a, b] \text{ tal que } U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Este teorema establece condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de Riemann, formuladas en tres formas equivalentes:

1. **Condición de Riemann**: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ partición de $[a, b]$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.
2. **Condición de Darboux**: $\lim_{\|P\|\to 0} U(P, f) = \lim_{\|P\|\to 0} L(P, f)$.
3. **Condición de Cauchy**: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ partición de $[a, b]$ tal que $\forall P' \supseteq P$, se tiene $U(P', f) - L(P', f) < \epsilon$.

Demostraremos la equivalencia probando las siguientes implicaciones:

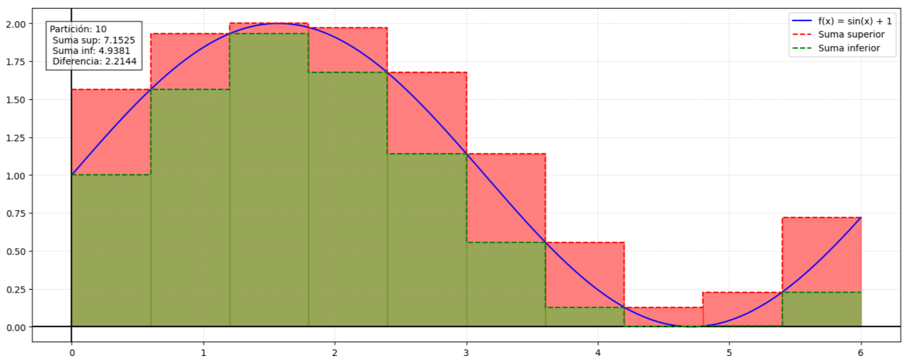
$$\text{Riemann} \Rightarrow \text{Darboux} \Rightarrow \text{Cauchy} \Rightarrow \text{Riemann}.$$

Demostración de las Implicaciones

1. Riemann $\Rightarrow$ Darboux

Hipótesis: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.
Tesis: $\lim_{\|P\|\to 0} U(P, f) = \lim_{\|P\|\to 0} L(P, f)$.

El argumento geométrico subyacente a esta afirmación es que, conforme el tamaño de la partición se reduce, las áreas de las barras de la suma superior y la suma inferior se van ajustando a la misma cantidad. Intuitivamente, al hacer las particiones más finas, las oscilaciones de la función quedan cada vez más confinadas, reduciendo la diferencia $U(P, f) - L(P, f)$. Esto se puede visualizar mediante diagramas en los que la diferencia de áreas se vuelve arbitrariamente pequeña.



Dado $\epsilon > 0$, existe una partición P tal que:

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Dado que $U(P, f)$ y $L(P, f)$ son respectivamente cotas superior e inferior de la integral, se tiene:

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq U(P, f).$$

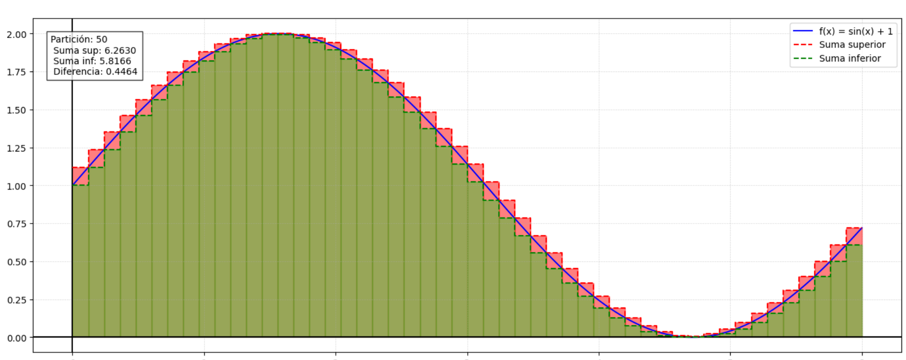
Al hacer $\|P\| \to 0$, se concluye que $U(P, f)$ y $L(P, f)$ convergen a un mismo valor, demostrando la tesis.

2. Darboux $\Rightarrow$ Cauchy

Hipótesis: $\lim\limits_{\|P\| \to 0} U(P, f) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} L(P, f)$.

Tesis: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ tal que $\forall P' \supseteq P$, se cumple $U(P', f) - L(P', f) < \epsilon$.

Desde una perspectiva geométrica, la condición de Darboux garantiza que al hacer refinamientos sucesivos, la diferencia entre las sumas superior e inferior disminuye de manera controlada. Esto significa que, sin importar cómo se refinan las particiones, los valores de $U(P, f)$ y $L(P, f)$ permanecerán cercanos, asegurando la condición de Cauchy.



Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier partición P con $\|P\| < \delta$:

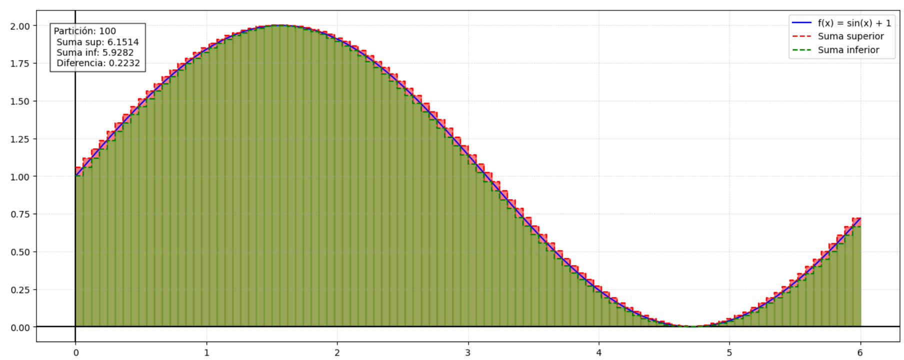
$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Si P' es un refinamiento de P, entonces $\|P'\| \leq \|P\| < \delta$, por lo que la desigualdad sigue siendo válida, demostrando la tesis.

3. Cauchy $\Rightarrow$ Riemann

Hipótesis: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ tal que $\forall P' \supseteq P$ se cumple $U(P', f) - L(P', f) < \epsilon$.
Tesis: $\forall \epsilon > 0, \exists P$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.

Desde una perspectiva visual, esto significa que una vez que encontramos una partición suficientemente fina, cualquier refinamiento posterior sigue cumpliendo la propiedad de que la diferencia entre la suma superior e inferior se mantiene por debajo de ϵ. Este hecho implica que la función es integrable en el sentido de Riemann.



Dado $\epsilon > 0$, por la hipótesis existe una partición P tal que $\forall P' \supseteq P$:

$$U(P', f) - L(P', f) < \epsilon.$$

En particular, tomando $P' = P$, se concluye $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$, demostrando la tesis.

Conclusión

Hemos probado las implicaciones:

$$\text{Riemann} \Rightarrow \text{Darboux} \Rightarrow \text{Cauchy} \Rightarrow \text{Riemann}.$$

Por lo tanto, las tres condiciones son equivalentes:

$$\text{Riemann} \iff \text{Darboux} \iff \text{Cauchy}.$$

Esto establece que f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solo si cumple cualquiera de estas condiciones, proporcionando un criterio riguroso para su integrabilidad.