DACC | Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

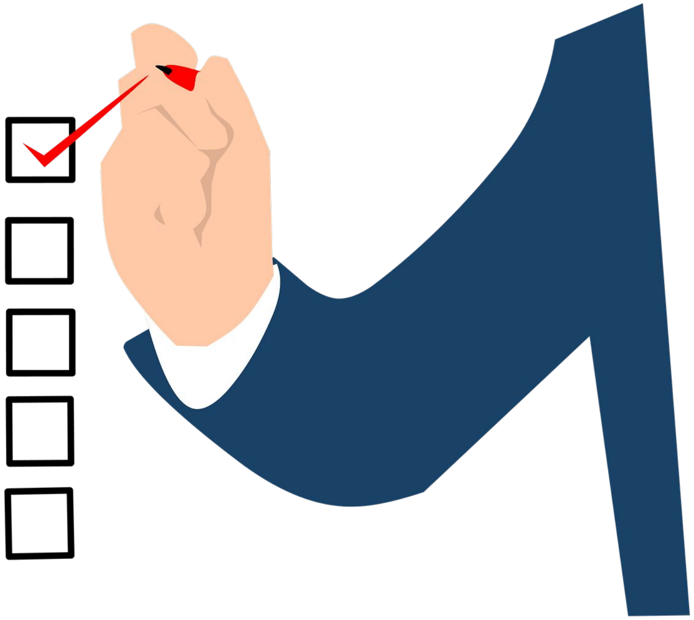
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Algoritmos Avançados

Professor:
Me. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Algoritmos Gulosos
   a. Contexto inicial
   b. Definição
   c. Estratégia Gulosa
   d. O problema das Moedas
   e. Agendamento de intervalos
   f. Particionamento de intervalos
   g. Colocando as feras na jaula
   h. Compras de casamento
2. Desafios

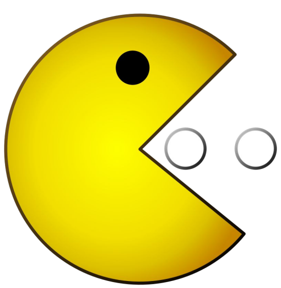


Adaptado: prof. João do E.S. Batista Neto - USP

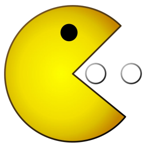
Contexto Inicial

Seja o seguinte cenário

- Um vetor A de tamanho n ≤ 10K, contendo inteiros ≤ 100K
    - A = {10, 7, 3, 5, 8, 2, 9}, n = 7
- Tarefas
    - Encontre o maior e o menor valor em A: 10 e 2
    - Encontre o k^{th} menor elemento em A: se k =2, então a resposta é 3
    - Encontre o maior g, tal que x, y ∈ A and g = |x − y|: 8
    - Encontre a subsequência crescente mais longa em A: {3, 5, 8, 9}
- Estes são problemas clássicos para os quais sempre pensamos, em primeiro lugar, numa solução força bruta. Vejamos:



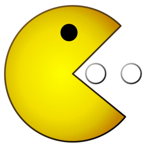
Contexto Inicial



$A = \{10, 7, 3, 5, 8, 2, 9\}, n = 7$

- Encontre o maior e o menor valor em A: 10 e 2
    - Muito simples. Basta fazer uma **Busca Completa**.
    - Complexidade é claramente O(n).

Contexto Inicial

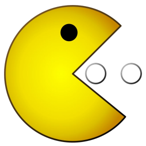


$A = \{10, 7, 3, 5, 8, 2, 9\}, n = 7$

- Encontre o maior e o menor valor em A: 10 e 2
  - Muito simples. Basta fazer uma **Busca Completa**.
  - Complexidade é claramente O(n).

- k^{th} menor elemento
  - Qual seria a solução força bruta, inspirada na solução acima?
  - Complexidade ? Percebe que ela é $O(n^2)$???
  - Vc consegue pensar numa versão, ainda intuitiva que é de O(n log n) ????
    - Já adiantando, em que paradigma esta solução se enquadra??

Contexto Inicial

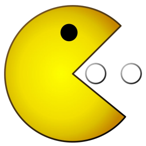


$A = \{10, 7, 3, 5, 8, 2, 9\}, n = 7$

- Encontre o maior e o menor valor em A > 10 e 2
  - Muito simples. Basta fazer uma **Busca Completa**.
  - Complexidade é claramente O(n).

- k^{th} menor elemento
  - Qual seria a solução força bruta, inspirada na solução acima?
  - Complexidade ? Percebe que ela é $O(n^2)$???
  - Vc consegue pensar numa versão, ainda intuitiva que é de O(n log n) ????
    - Já adiantando, em que paradigma esta solução se enquadra??
      - **Divisão e Conquista** !
  - Existe uma solução mágica aqui que é de O(n).. Alguém conhece ???

Contexto Inicial



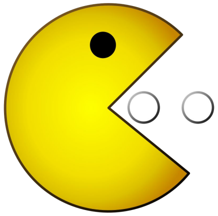
$$A = \{10, 7, 3, 5, 8, 2, 9\},\ n = 7$$

- Encontre o maior g, tal que $x, y \in A$ and $g = |x - y|$ >>> 8
  - Qual o algoritmo força bruta?
  - Qual a sua complexidade ?
  - Consegue pensar numa estratégia de $O(n)$???
    - A diferença entre o maior e o menor valor !!!!
      - Que estratégia é esta?

Contexto Inicial

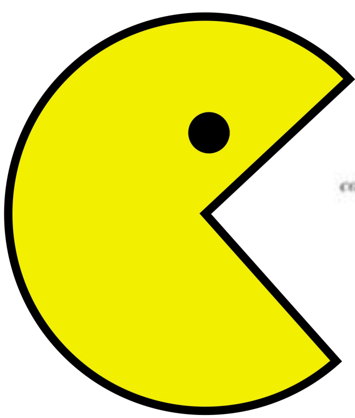
$A = \{10, 7, 3, 5, 8, 2, 9\}$, $n = 7$

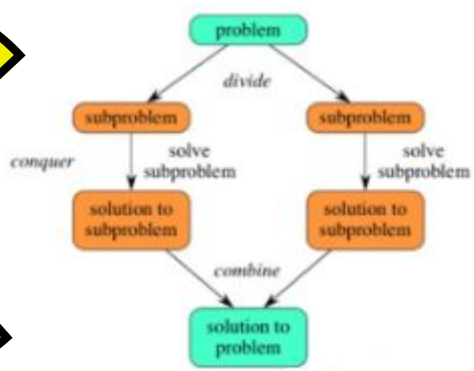
- Encontre o maior g, tal que $x, y \in A$ and $g = |x - y|$ >>> 8
  - Qual o algoritmo força bruta?
  - Qual a sua complexidade ?
  - Consegue pensar numa estratégia de $O(n)$???
    - A diferença entre o maior e o menor valor !!!!
      - Que estratégia é esta?
  - **Gulosa** !!!!
- Encontre a subsequência crescente mais longa em A: {3, 5, 8, 9}
  - Força bruta: tente todas as n^2 -1 subsequências possíveis. Isso para n >= 10K é péssimo
  - Existe uma solução **programação dinâmica** $O(n^2)$, mas isso ficará para daqui a algumas aulas !!!



Greedy Algorithm - Algoritmo Guloso

- **Como definir um algoritmo guloso?**
- É praticamente impossível definir com precisão
- Um **algoritmo é guloso** se este constrói uma solução em pequenos passos, tomando uma decisão "ótima" em cada passo, com o objetivo de atingir uma solução ótima globalmente.



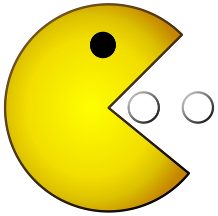


Como saber se a estratégia gulosa funciona?

- **Um problema deve exibir as seguintes propriedades**

  1. **Ele tem estruturas sub-ótimas:** existe solução ótima para o problema se este contém soluções ótimas para os sub-problemas

  2. **Ele tem propriedade gulosa:** Se fizermos o que parece ser melhor naquele momento, terminaremos com a solução ótimas -> Nunca será preciso reconsiderar escolhas passadas !



O problema das Moedas

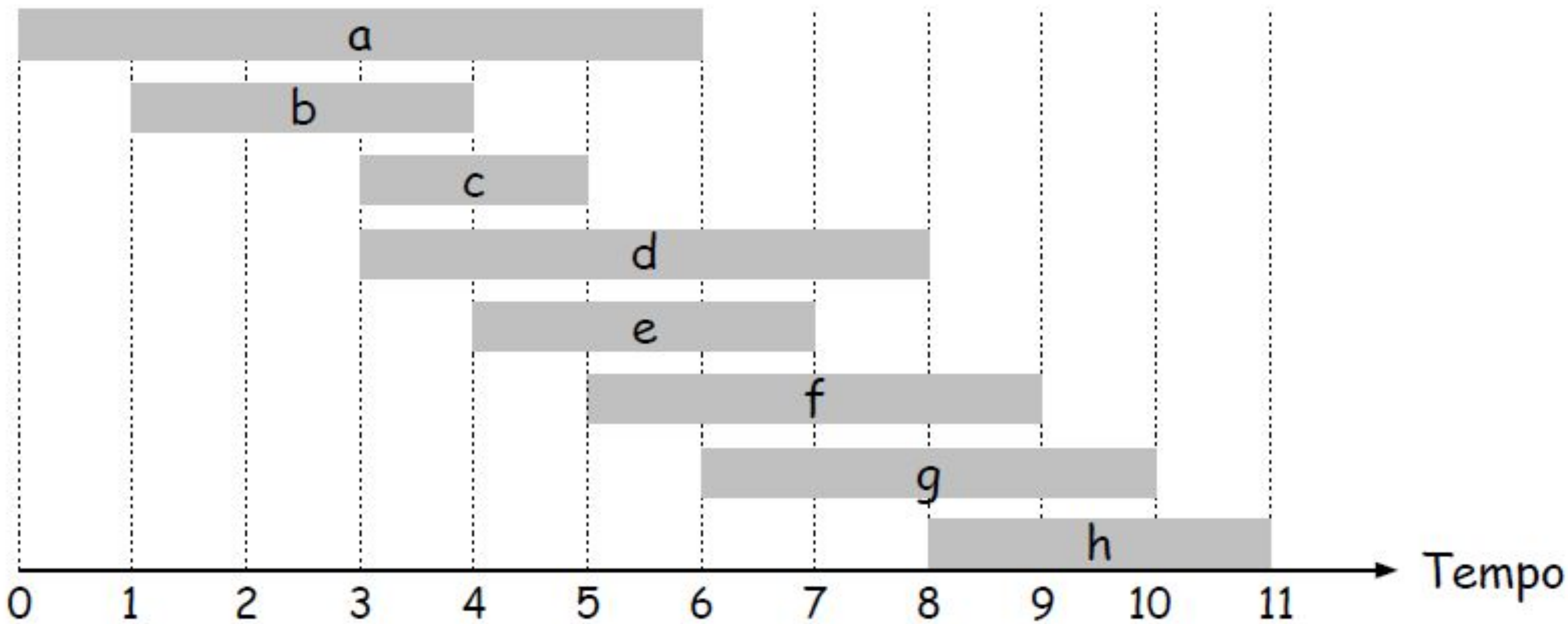
- Dada uma quantia V e uma lista de n moedas, **retorne o número mínimo de moedas** que representa V.
  - V = 42.
  - Moedas = {25, 10, 5, 1}
  - Desenvolva uma solução gulosa para esse problema!

O problema das Moedas

- Dada uma quantia V e uma lista de n moedas, **retorne o número mínimo de moedas** que representa V.
    - V = 42.
    - Moedas = {25, 10, 5, 1}
- 42-25 = 17 → 17-10 = 7 → 7-5 = 2 → 2-1 = 1 → 1-1 = 0
- Portanto, 5 moedas:
    - **Sub-estruturas ótimas** → 42 = {25,10,5,1,1} : ótimo; 17 = {10,5,1,1} : 4 moedas (ótimo); 7 = {5,1,1}: 3 moedas..
    - **Propriedade Gulosa** → V - x = V' < V; Podemos provar que se "x" é a maior moeda do conjunto, ∄ outra estratégia melhor.
    - **Claro que para um outro conjunto de moedas esta estratégia é furada...**

Agendamento de Intervalos (Interval Scheduling)

- Tarefa j começa em s_j e termina em f_j.
- Duas tarefas são compatíveis se não há sobreposição.
- **Objetivo:** encontre o subconjunto máximo de tarefas mutuamente compatíveis.



Agendamento de Intervalos: Algoritmos Gulosos

- **Modelo guloso.** Considere tarefas em alguma ordem. Cada tarefa é escolhida obedecendo-se o mesmo critério utilizado nas escolhas prévias.
- **[Tempo de início mais cedo]** Considere tarefas em ordem ascendente de tempo de início s_j.
- **[Tempo de fim mais cedo]** Considere tarefas em ordem ascendente em tempo de fim f_j.
- **[Menor intervalo]** Considere tarefas em ordem ascendente de tamanho de intervalo $f_j - s_j$.
- **[Menor número de conflitos]** Para cada tarefa, conte o número de tarefas em conflito c_j. Agende em ordem ascendente de conflitos c_j.

Agendamento de Intervalos: Algoritmos Gulosos

- **Modelo guloso.** Considere tarefas em alguma ordem. Cada tarefa é escolhida desde que seja compatível com as outras escolhidas previamente.

Agendamento de Intervalos: Algoritmos Gulosos

- **Modelo guloso.** Considere tarefas em alguma ordem. Cada tarefa é escolhida desde que seja compatível com as outras escolhidas previamente.

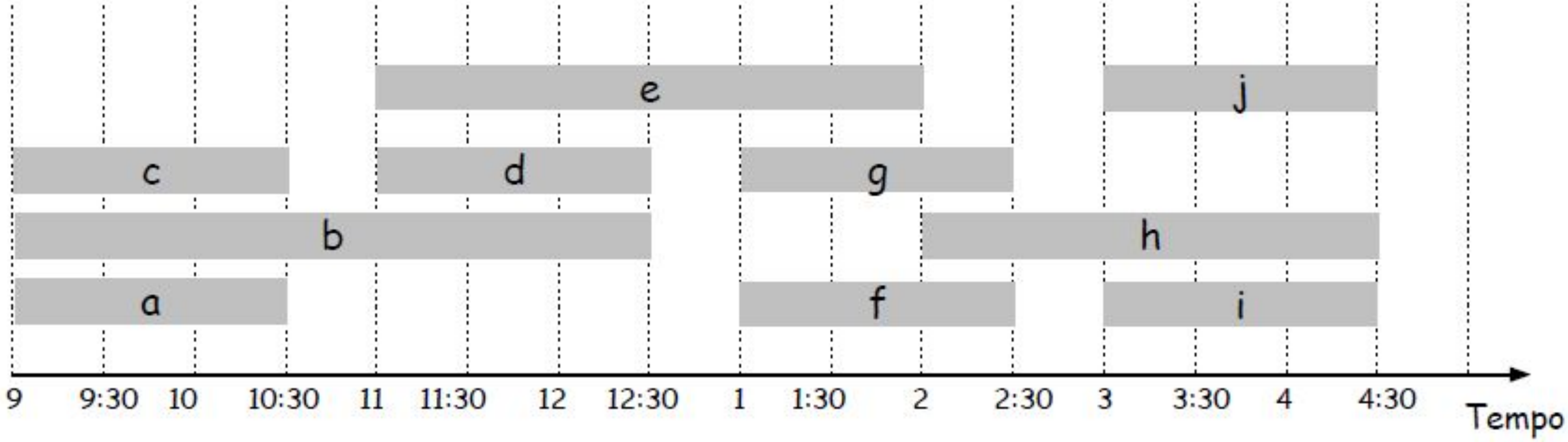
```
Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.
     jobs selected
A ← φ
for j = 1 to n {
    if (job j compatible with A)
        A ← A ∪ {j}
}
return A
```

Implementação. O(n log n).

- Guarde a tarefa j* que foi adicionada por último em A.
- Tarefa j é compatível com A se sj ≥ f_{j^*}.

Particionamento de Intervalos

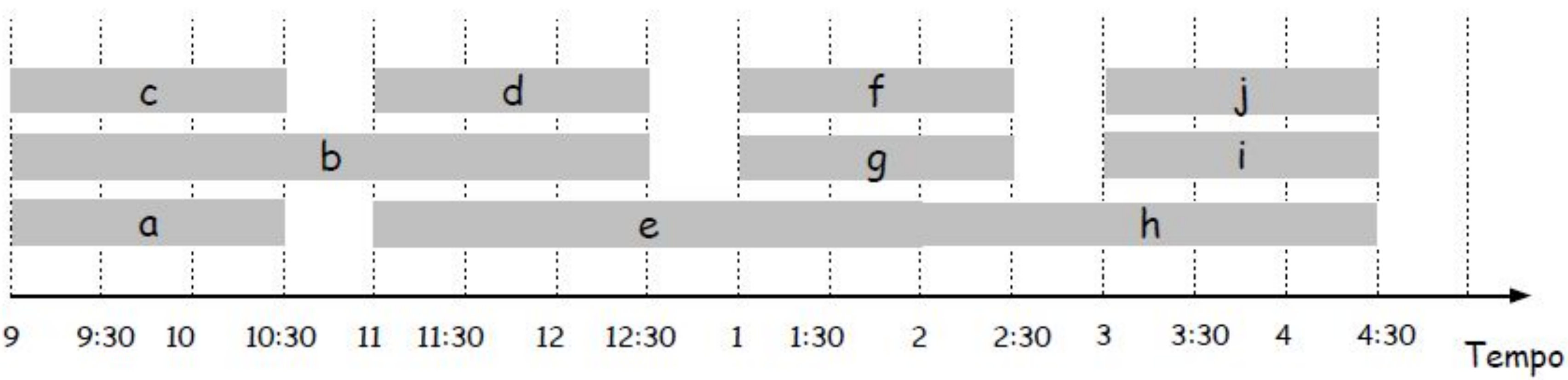
- Palestra j começa em s_j e termina em f_j.
- **Objetivo:** encontrar um número mínimo de salas para agendar todas as palestras de forma que duas palestras não ocorram na mesma sala ao mesmo tempo.
- Ex: Esse agendamento usa 4 salas para agendar 10 palestras. Pode ser menos??



Particionamento de Intervalos

- Palestra j começa em s_j e termina em f_j.
- **Objetivo:** encontrar um número mínimo de salas para agendar todas as palestras de forma que duas palestras não ocorram na mesma sala ao mesmo tempo.

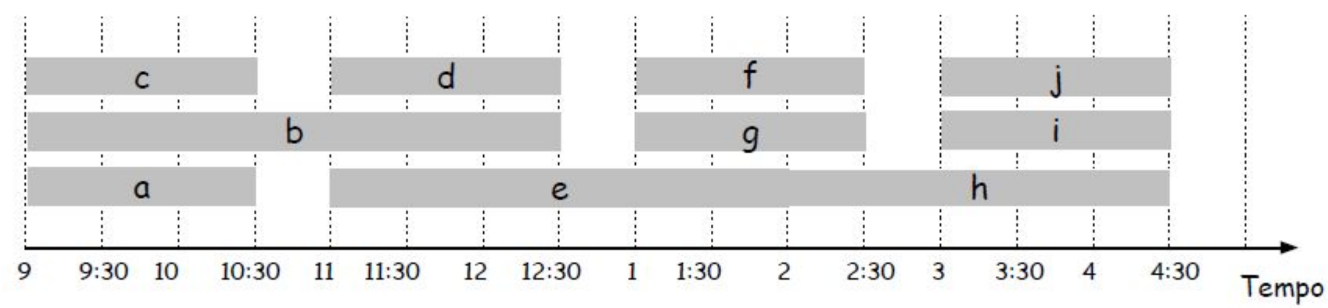
Ex: Esse agendamento usa apenas 3 salas.



Limite inferior da solução ótima

- Definição: A **profundidade** de um conjunto é o máximo número de intervalos que se cruzam em algum ponto na linha do tempo.
- **Observação importante.** Número de salas necessárias ≥ profundidade.
- **Ex:** Profundidade do agendamento abaixo = 3 ⇒ solução ótima.

  a, b, c todos se cruzam em 9:30hs
- **Q.** Será que sempre existe um agendamento igual à profundidade dos intervalos?



- **Algoritmo guloso.** Considere palestras em ordem crescente de tempo de início: atribua uma palestra para qualquer sala compatível.

```
Sort intervals by starting time so that s1 ≤ s2 ≤ ... ≤ sn.
d ← 0    ← number of allocated
           classrooms

for j = 1 to n {
   if (lecture j is compatible with some classroom k)
      schedule lecture j in classroom k
   else
      allocate a new classroom d + 1
      schedule lecture j in classroom d + 1
      d ← d + 1
}
```

Implementação. O(n log n).

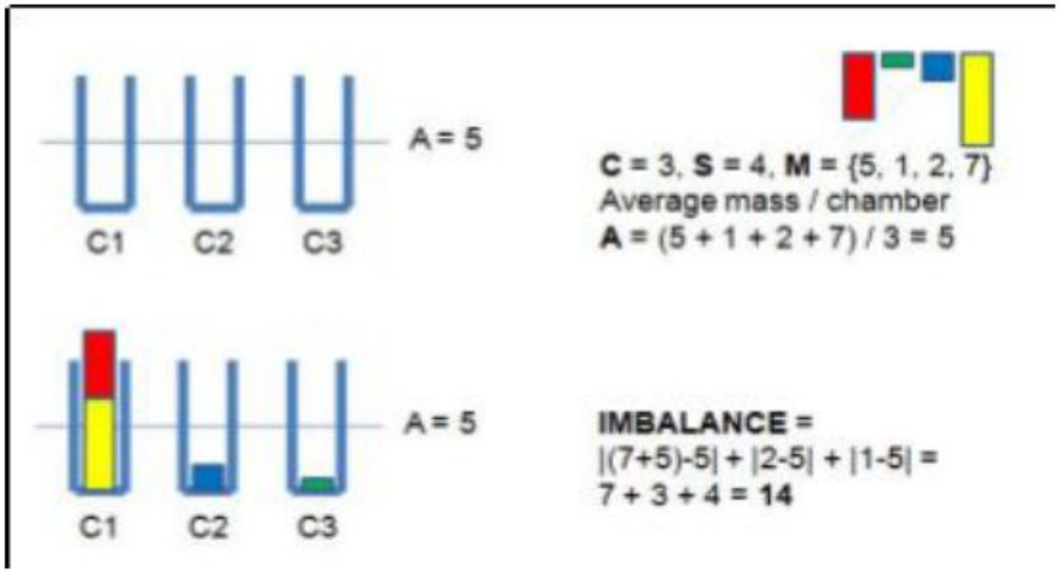
- Para cada sala de aula k, mantenha o tempo final da última tarefa adicionada.
- Mantenha as salas em uma fila de prioridade. (sala com menor f_x fica na frente!)

Particionamento de Intervalos: Algoritmos Gulosos

- **Observação.** O algoritmo guloso nunca agenda duas palestras incompatíveis na mesma classe.
- **Teorema.** O algoritmo guloso é ótimo.
- **Pf.** Seja d = número de salas que o algoritmo guloso alocou (1..d).
- A sala d está aberta porque tivemos que agendar uma tarefa, digamos j, que era incompatível com todas as d-1 salas.
- Uma vez que nós ordenamos por tempo de início, todas essas incompatibilidades são causadas por palestras que começam antes de s_j.
- Então, temos d palestras sobrepondo-se no tempo $s_j + \varepsilon$.
- Observação importante ⇒ todos os agendamentos usam ≥ d salas.

Colocando as feras na jaula

- Sejam C jaulas, cada qual podendo armazenar 0, 1 ou 2 animais. Existem S animais ($1 \leq S \leq 2C$) e uma lista M das massas dos S animais.
- Determine qual jaula deve conter cada animal tal que **o desbalanceamento seja mínimo**.

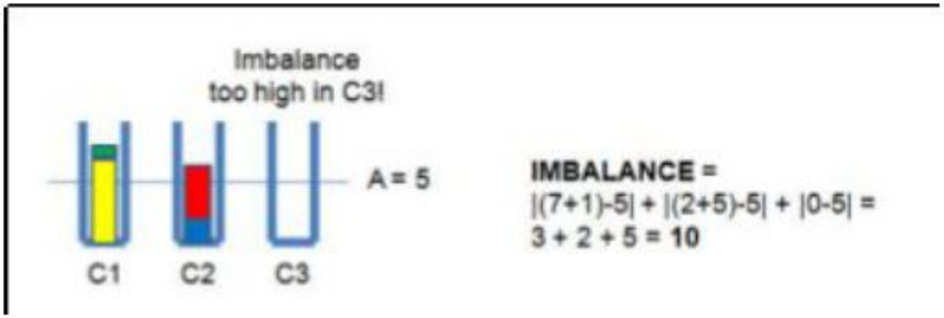


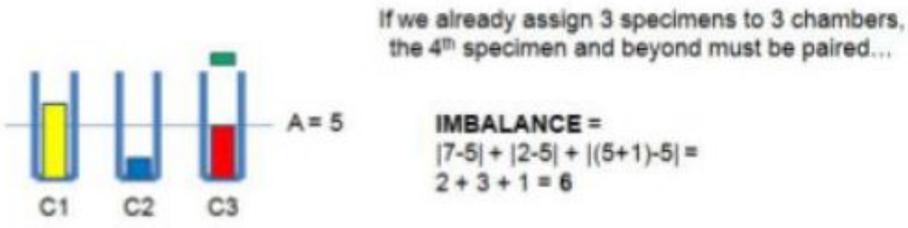
A é o valor médio esperado em cada uma das C jaulas.

O **desbalanceamento** é a soma das diferenças entre a massa total em cada jaula com relação a A.

Colocando as feras na jaula

- **Existe um algoritmo guloso para este problema. Você consegue enxergá-lo?**
- **obs 1:** se houver uma jaula vazia será normalmente benéfico (e nunca pior) mover um animal de uma jaula com 2, para uma vazia. (jaula vazia aumenta o desbalanceamento);
- **obs 2:** Se S > C, então S - C animais devem ser colocados aos pares numa jaula que já contém um animal (o princípio do escaninho!)

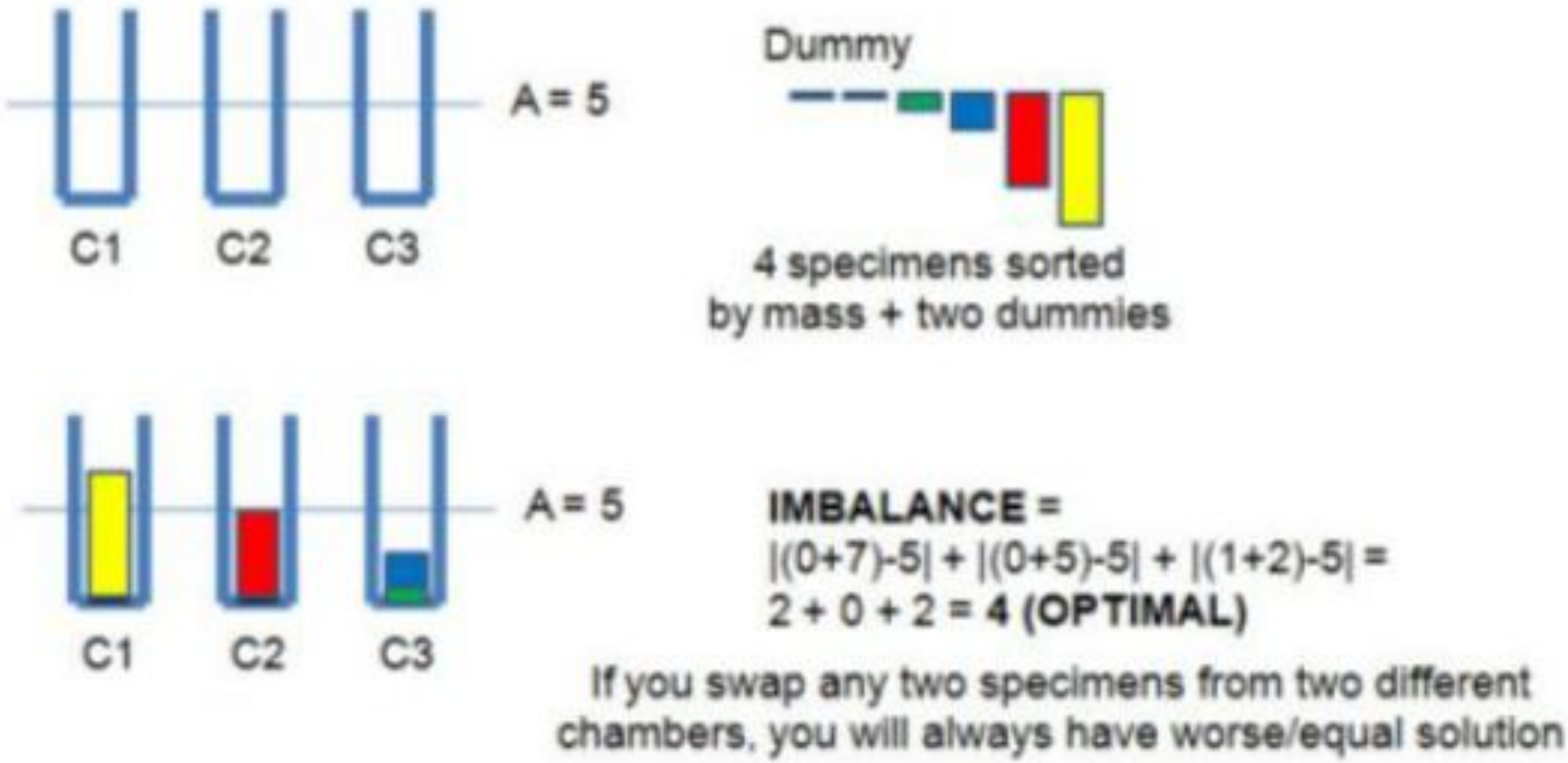




Colocando as feras na jaula

- **Segredo está na ordenação !**
- Se S < 2C, então adicione 2C - S animais dummies (de massa 0). Se C = 3 e S = 4, então crie 2 animais extras de massa 0, tal que M = {5,1,2.7} seja M = {5,2,1,7,0,0}
- Ordene o conjunto: M = {0,0,1,2,5,7}
- Temos finalmente uma estratégia gulosa neste ponto
  - forme um par em C1 com as massas M1 e M2C
  - forme um par em C2 com as massas M2 e M2C-1, e assim por diante.
- Esta estratégia gulosa é conhecida por **balanceamento de carga ou *load balancing***.

Colocando as feras na jaula



Compras de Casamento

- Dada uma relação de I itens (calça, sapato, blusa, etc) e uma verba V limitada, sua tarefa é comprar um item de cada, gastando o máximo possível de sua verba! Cada item possui preços distintos.
- O problema pode não ter solução.

Para V = 20, I = 3

- item 0 → 6, 4, 8
- item 1 → 5, 10
- item 2 → 1, 5, 3, 5

Para V = 9, I = 3

- item 0 → 6, 4, 8
- item 1 → 5, 10
- item 2 → 1, 5, 3, 5

Qual o primeiro algoritmo que lhe vem à mente?

Compras de Casamento

- Podemos seguir as etapas abaixo:
  - selecione, para cada item, aquele com o preço mais alto
  - subtraia da verba este item,
  - repita o processo para os itens restantes
  - Ao final, teremos gasto o máximo possível.
- Se pensou isso, então você acabou de sugerir um **algoritmo guloso**:
- Um algoritmo é guloso se ele faz, localmente, a escolha ótima (→selecione o mais caro!) na **esperança** de que, ao final, chegue a uma solução global que seja ótima (→ o menor troco possível ou o máximo dinheiro gasto);

Compras de Casamento

- Exemplo 1
  - Para V = 20, I = 3
    - item 0 → 6, 4, 8
    - item 1 → 5, 10
    - item 2 → 1, 5, 3, 5
- Exemplo 2
  - Para V = 9, I = 3
    - item 0 → 6, 4, 8
    - item 1 → 5, 10
    - item 2 → 1, 5, 3, 5
  - "no solution"
- Exemplo 3
  - Para V = 12, I = 3
    - item 0 → 6, 4, 8
    - item 1 → 5, 10
    - item 2 → 1, 5, 3, 5
  - "no solution" ou 😞😞😞 ???

Compras de Casamento

- **Você acha que a solução gulosa para este caso é adequada?**
  a. para V=20, ele funciona perfeitamente…
  b. para V=9, ele também funciona. Indica que não há solução e, de fato, não há!
  c. aqui ele falha retumbantemente. Vai dizer que não tem solução, mas tem!
  - **Programação Dinâmica…**

Dúvidas, sugestões?