



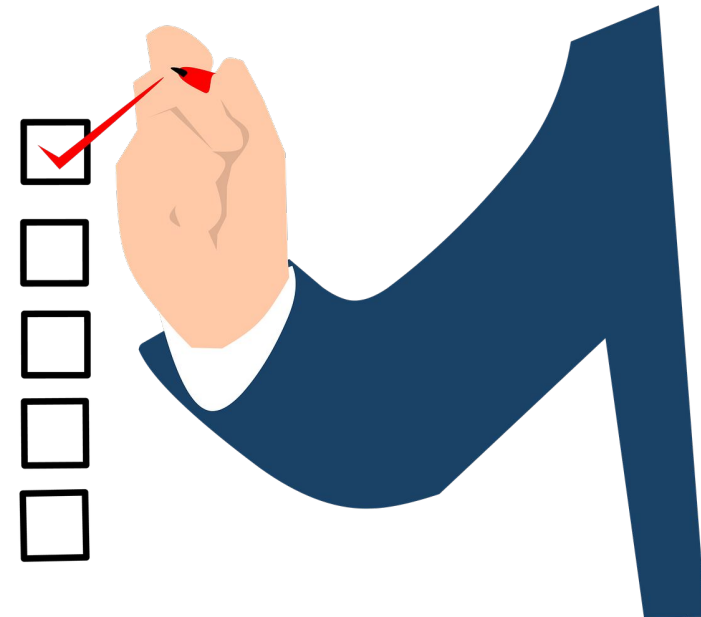
DACC | Departamento Acadêmico de
Ciência da Computação
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Algoritmos Avançados

Professor:
Me. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Algoritmo: Stable Matching
 - a. Um primeiro problema: casamento estável
 - b. Algoritmo de proposta-e-rejeição
 - c. Prova de corretude: complexidade
 - d. Estabilidade
 - e. Resumo
 - f. Implementação eficiente
2. Desafio



Um Primeiro Problema: Casamento Estável



- Em 1962, David Gale e Lloyd Shapney, economistas matemáticos, se propuseram a resolver o seguinte problema:
- Será possível construir um sistema (admissão em uma Universidade, processo de recrutamento de empregados por empresas) de forma que este seja auto-regulável (*self-enforcing*)?

A Special Case of **Stable Matching**



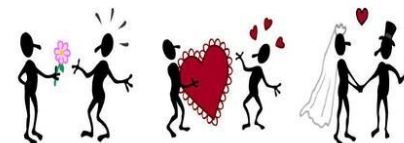
Stable Marriage

Um Primeiro Problema: Casamento Estável



- **Entrada:** a lista de preferências entre candidatos e empregadores (universitários e universidades, por exemplo);
- Um candidato tem uma **ordem de preferência** por companhias.
- As companhias, ao receber as inscrições, formam uma **ordem de chamada** para os candidatos.
- **O que pode dar errado com este sistema???**

A Special Case of **Stable Matching**



Stable Marriage

Um Primeiro Problema: Casamento Estável



- Suponha que alunos possam **trocar de ofertas** quando bem entenderem.
- Imagine que as empresas possam dispensar alguém previamente acordado, e contratar outros que dispensaram a oferta de estágio por ter escolhido outra empresa.

A Special Case of **Stable Matching**



Stable Marriage

- **Objetivo:** Dado um conjunto de preferências entre candidatos e empresas, desenvolva um processo de admissão auto-regulável. (self-enforcing)
- **Par instável:** candidato x e empresa y são instáveis se:
 - x prefere y à empresa a qual foi atribuído.
 - y prefere x a um dos seus candidatos admitidos.
 - Do ponto de vista econômico, relações instáveis trazem muitos problemas, inviabilizando qq planejamento decente.
- **Atribuição estável:** Atribuição sem pares instáveis.
 - Condição natural e desejável.
 - Interesses pessoais impedirão qualquer acordo candidato/empresa de ser feito.

Um Primeiro Problema: Casamento Estável



- Qual seria uma solução ideal para este problema?
- Exigir altruísmo tanto de empresa quanto de empregados e esperar que estes mantenham suas escolhas, mesmo que prefiram a outros?
 - Não!

A Special Case of **Stable Matching**



Stable Marriage

Um Primeiro Problema: Casamento Estável



- O ideal é a situação em que o **interesse próprio** (tanto de empresa quanto de empregado) **previna que ofertas de empregos sejam desfeitas e redirecionadas.**
- **Exemplo:** se alguém que trabalha para X, liga para a firma Y, se oferecendo para abandonar X e ir para Y, Y deveria dizer: sinto muito... com base nas escolhas prévias que fizemos, nós não temos preferência em lhe contratar. Obrigado !
- O mesmo valeria para empresas indo atrás de candidatos já empregados por outras empresas, mas não obtendo sucesso **(os empregados já estão contentes onde estão!)**

Problema do Casamento Estável

- **Objetivo.** Dado n homens (H) e n mulheres (M), encontre um casamento “adequado”.
 - Cada homem faz uma lista de preferências de mulheres.
 - Cada mulher faz uma lista de preferências de homens.

	favorito ↓ 1°	2°	menos favorito ↓ 3°
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

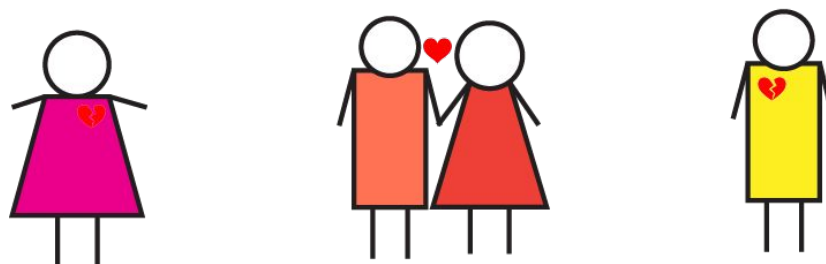
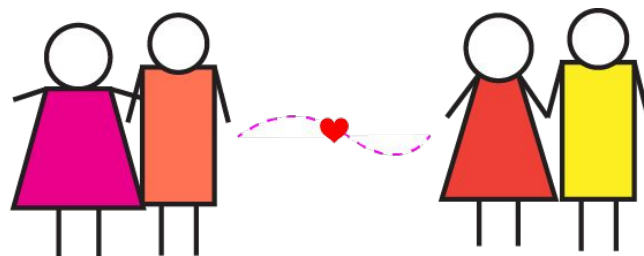
Lista de preferência dos homens

	favorito ↓ 1°	2°	menos favorito ↓ 3°
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

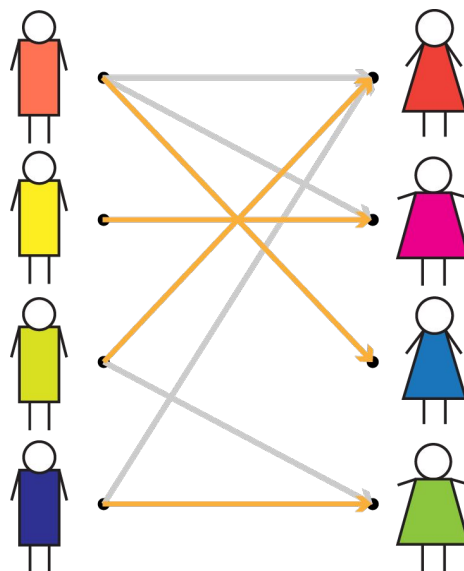
Problema do Casamento Estável

- **Casamento S:** conjunto de pares ordenados $(H \times M)$ em que cada membro de H e M aparece em no máximo um par em S .
- **Atenção:** no máximo significa que alguém pode ficar ser par !!!



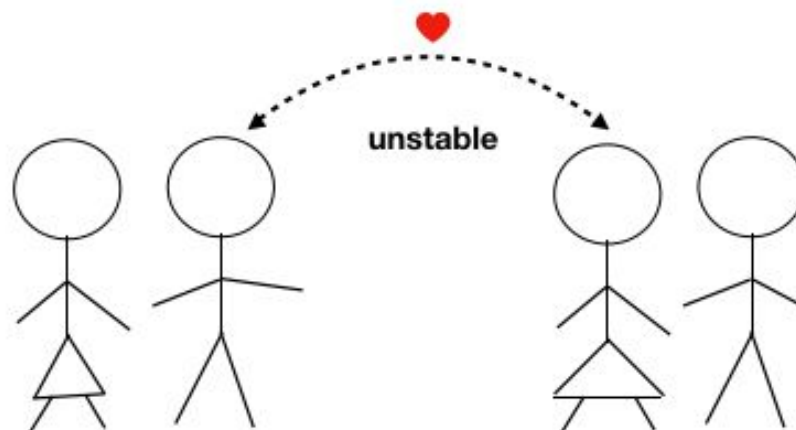
Problema do Casamento Estável

- **Casamento perfeito (S'):** não há poligamia e “solteirice”.
 - Cada homem casa exatamente com uma mulher.
 - Cada mulher casa exatamente com um homem.
 - Cada membro H e M aparece em exatamente um par em S' .



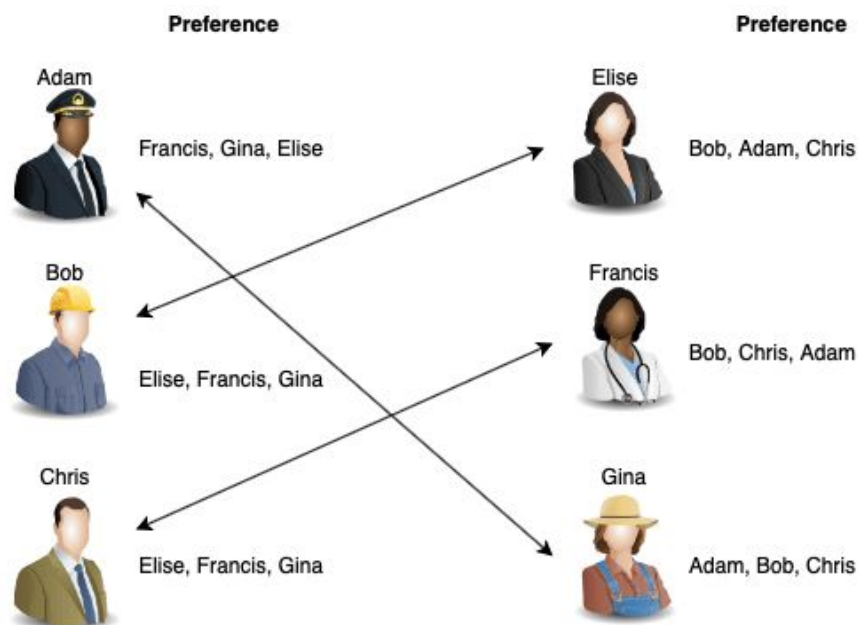
Problema do Casamento Estável

- **Estabilidade:** não há incentivo para que um par prejudique outros casamentos.
- No casamento S , um par não casado m - w é **instável** se o homem m e a mulher w preferir um ao outro ao invés de seus atuais pares.
- **Pares instáveis** m - w poderiam se separar de seus atuais pares.



Problema do Casamento Estável

- **Casamento estável:** casamento perfeito sem pares instáveis.
- **Problema do Casamento Estável.** Dado um lista de preferências de n homens e n mulheres, encontre um casamento estável, **se ele existir**.



Problema do Casamento Estável

- Pergunta:** A atribuição Xavier-Clare, Yancey-Bertha, Zeus-Amy é estável?

	favorit o ↓		menos favorito
	1º	2º	3º
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

	favorit o ↓		menos favorito
	1º	2º	3º
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Casamento Estável

- **Pergunta:** A atribuição Xavier-Clare, Yancey-Bertha, Zeus-Amy é estável?
- **Resposta:** Não. Bertha e Xavier irão se unir.

	favorito ↓		menos favorito
	1º	2º	3º
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

	favorito ↓		menos favorito
	1º	2º	3º
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Casamento Estável

- **Pergunta:** A atribuição Xavier-Amy, Yancey-Bertha, Zeus-Clare é estável?
- **Resposta.** Sim.

	favorito ↓		menos favorito ↓
	1°	2°	3°
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Lista de preferência dos homens

	favorito ↓		menos favorito ↓
	1°	2°	3°
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Lista de preferência das mulheres

Problema do Companheiro

- **Pergunta:** Sempre existirão casamentos estáveis?
- **Resposta:** Não é óbvio a priori.
- Mas a resposta é sim. É possível mostrar que para cada conjunto de preferências entre mulheres e homens existirá um casamento estável. E também existe um **algoritmos eficiente que faz isso.**



Problema do Companheiro



- **Informações importantes:**
- a) todos estão solteiros no início;
- b) Em 1962 a sociedade era ainda mais machista e o algoritmo foi projetado de forma que os **homens tomavam, a princípio, a iniciativa de escolher as mulheres** em sua lista de preferência. Chamaremos esta atitude de: pedir em casamento (**propose (m,w)**);
- c) Inicialmente, é arriscado para w rejeitar o pedido de m. Então dizemos que ao fazer a proposta, teremos um par intermediário (m,w) em noivado (**engagement**);
- d) No entanto, futuramente, se m' pedir a mão de w (e w preferir m'), o **par (m,w) será desfeito**.

Algoritmo de Proposta-e-Rejeição

- **Algoritmo de Proposta-e-Rejeição.** [Gale-Shapley 1962]
Método intuitivo que garante encontrar um casamento estável.

```
Initialize each person ( $m \in M$  ,  $h \in H$ ) to be free.  
while (there is a man who is free and hasn't proposed to every woman) {  
    Choose such a man  $m$   
     $w = 1^{\circ}$  woman on  $m$ 's list to whom  $m$  has not yet proposed  
    if ( $w$  is free)  
         $m$  and  $w$  become engaged  
    else //  $w$  is currently engaged to  $m'$   
        if ( $w$  prefers  $m$  to her fiancé  $m'$ )  
             $m$  and  $w$  become engaged;  
             $m'$  becomes free  
        else  $w$  rejects  $m$  //  $m$  remains free!  
}
```

Return the set S of engaged pairs (stable matching) !

Prova de Corretude: Limite

- **Observação 1.** Homens propões às mulheres em ordem decrescente de preferências.
- **Observação 2.** Uma vez que uma mulher se compromete, ela não se torna solteira novamente, ela somente “troca para melhor”.
- **Observação 3.** O homem, por sua vez pode voltar a ficar solteiro. E sua situação apenas “piora” com as trocas.

Prova de Corretude: Limite

- **Afirmção.** O algoritmo termina depois de no máximo n^2 iterações do laço (while).
- **Prova.** Cada iteração do laço um homem propõe casamento a uma mulher.
- Existem somente n^2 possibilidades de pares de m e w !!!

	1º	2º	3º	4º	5º
Victor	A	B	C	D	E
Wyatt	B	C	D	A	E
Xavier	C	D	A	B	E
Yancey	D	A	B	C	E
Zeus	A	B	C	D	E

	1º	2º	3º	4º	5º
Amy	W	X	Y	Z	V
Bertha	X	Y	Z	V	W
Clare	Y	Z	V	W	X
Diane	Z	V	W	X	Y
Erika	V	W	X	Y	Z

Prova de Corretude: casamento perfeito (não necessariamente estável)



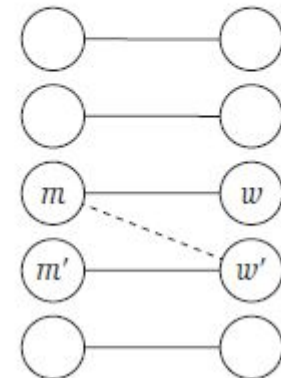
- **Afirmção.** Todos os homens e mulheres casam.
 - Se um homem está solteiro em algum momento da execução, é porque existe uma mulher a quem ele ainda não pediu em casamento.
- **Prova. (por contradição)**
 - Suponha que Zeus está solteiro, mas já propôs a todas as mulheres.
 - Neste ponto cada uma das n mulheres está comprometida, por conta da observação 2 (uma vez comprometida, uma mulher não fica solteira novamente; apenas troca de marido).
 - Como um conjunto de pares comprometidos representa um casamento, temos que ter n homens comprometidos neste ponto!
 - Mas Zeus ainda está solteiro, o que é uma contradição!

- **Problema do Casamento Estável.** Dado n homens e n mulheres, e suas preferências, encontre um casamento estável se existir um.
- **Algoritmo Gale-Shapley.** Garantias para encontrar um casamento estável para qualquer instância problema.
- **Questão.** Se existirem múltiplos casamentos estáveis, qual deles o algoritmo GS encontrará?
- **Questão.** Como implementar eficientemente o algoritmo GS?

Entendendo a Solução

- **Q.** Para uma dada instância do problema, pode haver vários casamentos estáveis. Todas as execuções do algoritmo GS produziram o mesmo casamento estável? Caso afirmativo, qual deles?
- Seja a seguinte lista de preferências:
 - – m prefere w à w'
 - – m' prefere w' a w
 - – w prefere m' a m
 - – w' prefere m a m'
- Qual resultado teremos ao executarmos o alg. GS ?
- Haveria outra solução possível e estável ??

An instability: m and w'
each prefer the other to
their current partners.



Entendendo a Solução

- **Atribuição ótima para homens.** Cada homem casa com sua melhor parceira válida.
- **Afirmação.** Todas as execuções de GS produzirão a atribuição ótima para homens, a qual é um casamento estável!
- O algoritmo GS é altamente injusto para com as mulheres, pois são os homens que fazem o pedido!
- Se fosse o contrário, seria injusto para com os homens.

- **Problema do Casamento Estável.** Dado um conjunto de preferências de n homens e n mulheres, encontre um casamento e **estável**.

nenhum homem ou mulher prefere estar com outro par fora o que foi atribuído.

- **Algoritmo Gale-Shapley.** Encontre um casamento estável em tempo $O(n^2)$.
- **Ótimo para Homens.** Na versão do algoritmo GS onde os homens propõe casamento, cada homem casa com sua melhor **parceira válida**.

w é um parceiro válido de m se existir algum casamento estável onde m e w são pares.

Q. O caso ótimo para os homens vem às custas da escolha das mulheres?

Implementação Eficiente

- **Implementação Eficiente.** Nós descrevemos uma implementação $O(n^2)$.
- Representando homens e mulheres.
 - Assuma que os homens são rotulados $1, \dots, n$.
 - Assuma que as mulheres são rotuladas $1', \dots, n'$.
- **Casamentos.**
 - Mantenha uma lista de homens livres, e.g., em uma fila.
 - Mantenha dois vetores $wife[m]$, e $husband[w]$.
 - atribua a entrada 0 se não há casamento
 - se m casar com w então $wife[m]=w$ e $husband[w]=m$

- **Homens propondo.**

- Para cada homem, mantenha uma lista de mulheres, ordenadas por preferência.
- Mantenha um vetor $\text{count}[m]$ que conta o número de propostas feitas pelo homem m .

- **Mulheres rejeição/aceitação.**

- Uma mulher w prefere um homem m ao homem m' ?
- Para cada mulher, crie uma lista inversa da lista de preferência dos homens.
- Tempo de acesso constante para cada consulta depois de um pré-processamento $O(n)$.

Implementação Eficiente

Amy	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Pref	8	3	7	1	4	5	6	2

Amy	1	2	3	4	5	6	7	8
Inverse	4º	8º	2º	5º	6º	7º	3º	1º

```
for i = 1 to n  
  inverse[pref[i]] = i
```

Amy prefere o homem 3 ao 6
desde que $\text{inverse}[3] < \text{inverse}[6]$

2 7

Dúvidas, sugestões?

