INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS
SESIÓN 3.

Antonio Hervás Jorge.
2017

OBJETIVOS

1

- Vamos a ver como se relacionan los vértices de un grafo NO DIRIGIDO

2

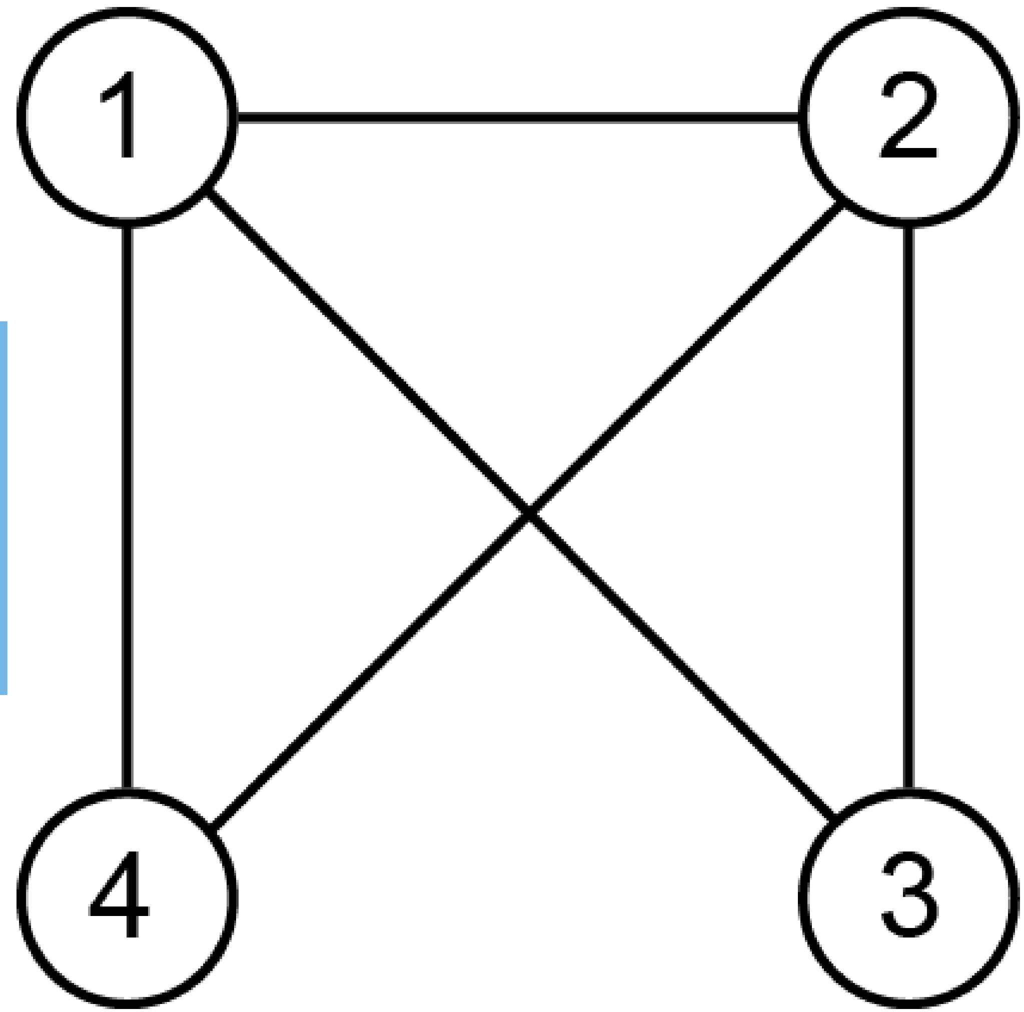
Aparecen nuevos conceptos, nuevas maneras de caracterizar un grafo no dirigido y nuevas maneras de representarlo..

3

- Conceptos fundamentales: Conexión y componentes conexas.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Grafos no dirigidos

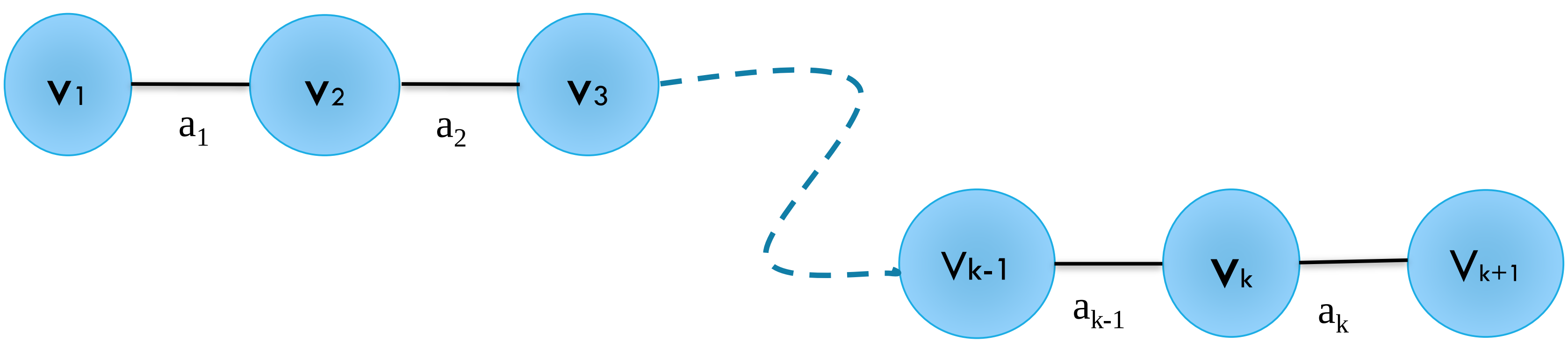


CAMINOS Y CONEXIÓN

Definición 1.1 (cadena, camino y ciclo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ su conjunto de aristas. Llamaremos* cadena *del vértice v_1 al vértice v_k, a una sucesión de vértices y aristas:*

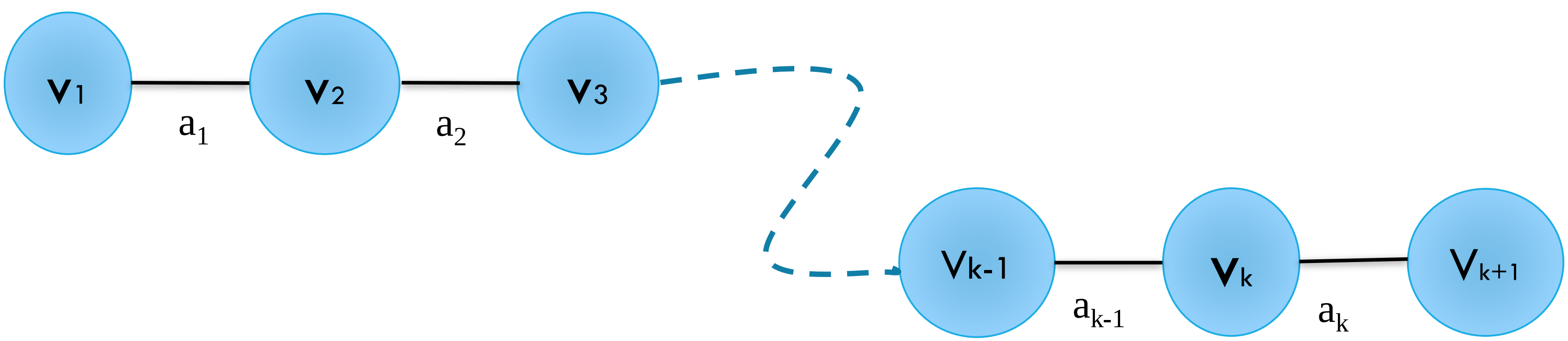
$$P = v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1} \tag{1}$$

de manera que $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\ \ a_j = (v_j, v_{j+1})$. Es decir cada arista a_i tiene como vértices extremos los mismos que tiene en el camino.



CADENA Y CAMINO

- *A los vértices* v_1 *y* v_{k+1} *se les llama vértices extremos de la cadena.*
- *Si todas las aristas son distintas diremos que la cadena es* simple, *y si* $v_1 = v_{k+1}$, *diremos que la cadena es* cerrada.
- *Cuando en* P *todos los vértices sean distintos, excepto, quizá, el primero y el último, que podrían coincidir, diremos que* P *es un* camino.

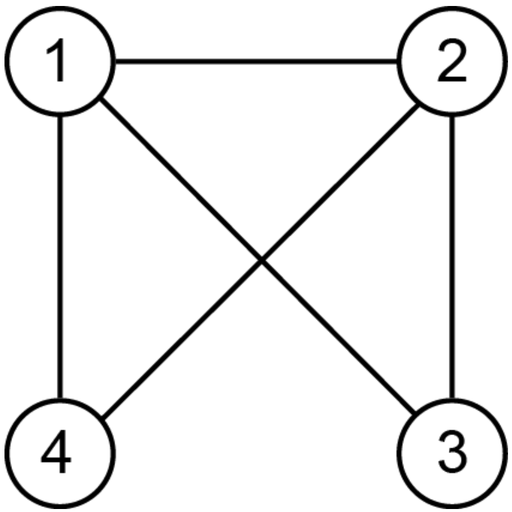


CADENA Y CAMINO

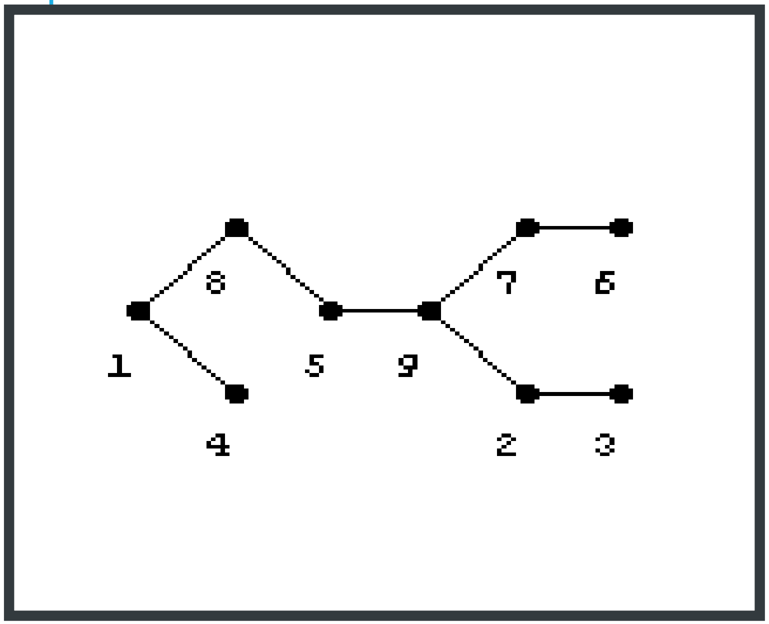
- *Un camino o una cadena decimos que es trivial, si sólo tiene un vértice y ninguna arista.*
- *Cuando en un camino no trivial, los vértices extremos coinciden* $v_1 = v_{k+1}$, *entonces diremos que es un* ciclo. *La diferencia con la cadena cerrada es que en un ciclo no se repiten vértices, mientras que en una cadena cerrada si pueden repetirse.*

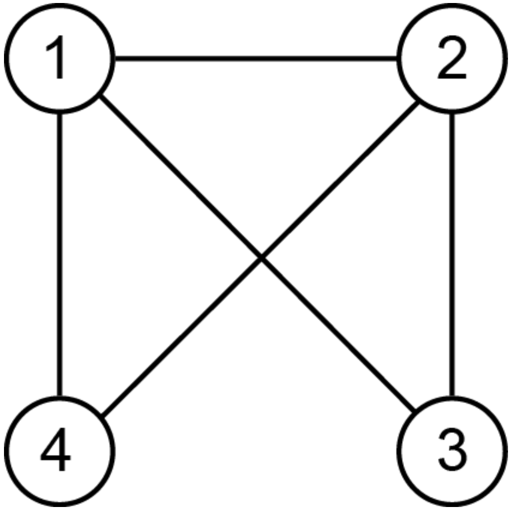
Cadena Cerrada:
CR= (4,2,3,1,2,4)

Ciclo:
CR= (2,3,1,2)

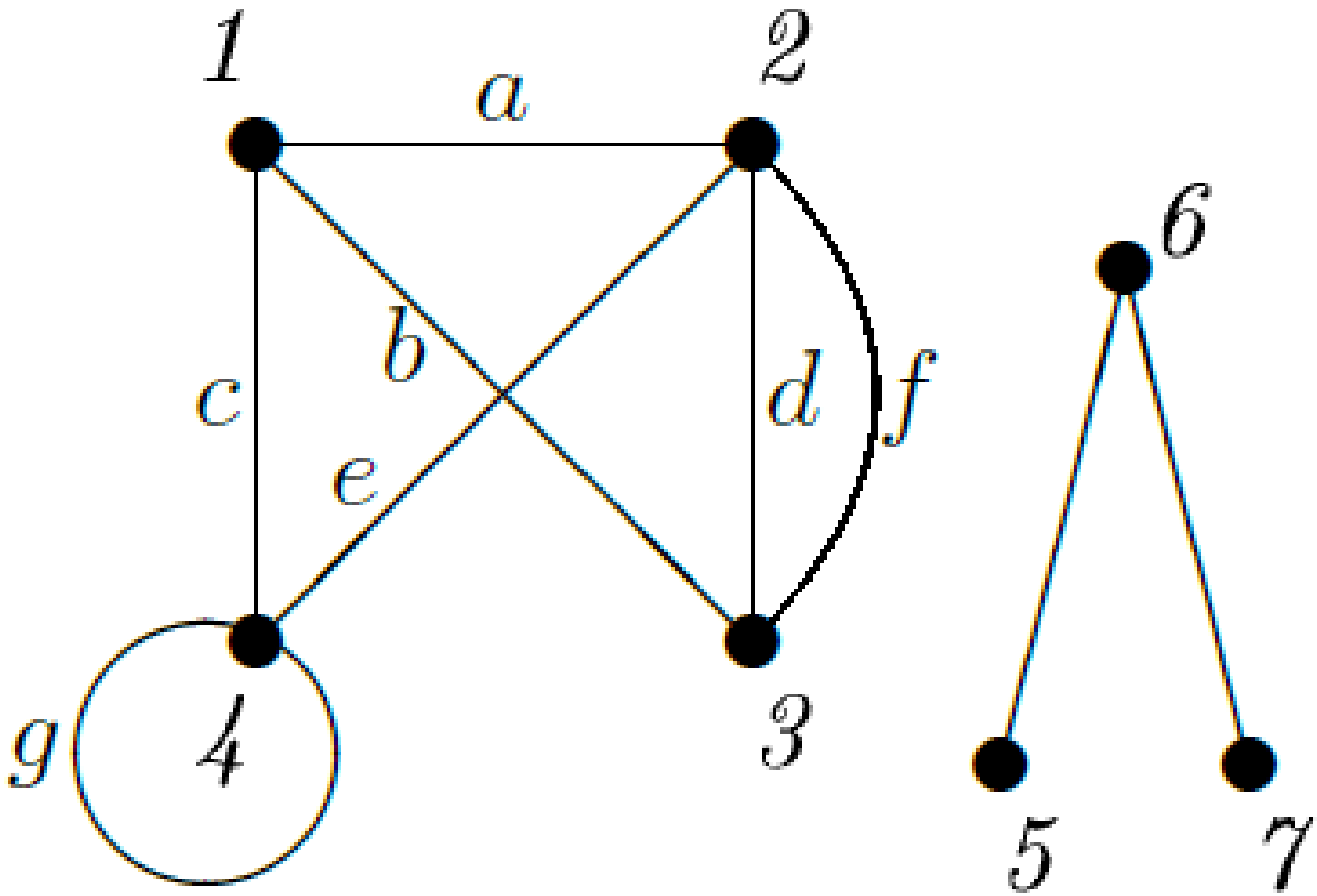


CADENA Y CAMINO





- *Llamaremos* longitud *de un camino a su número de aristas.*
- *Llamaremos* distancia entre dos vértices *a la longitud del camino más corto en el grafo entre los dos vértices.*


1
2
a
6
b
c
d
f
e
g
4
3
5
7

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

Definición 1.2 (Conexión) *Supongamos $G=(V,E)$ un grafo no dirigido y $u, v \in V$. Diremos que los vértices u y v están* **conectados** *si y solamente si existe algún (u-v)-camino en el grafo.*

Propiedades de la relación de conexión:

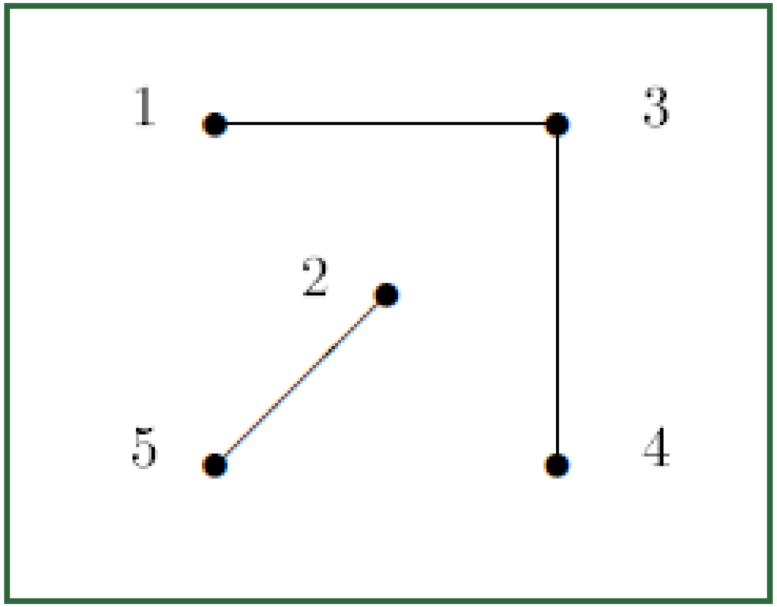
- Un vértice esta conectado consigo mismo por un camino de longitud cero.
- Si existe un camino de u a v, también existe un camino de v a u.
- Si existe un camino de u a v y otro de v a w, entonces los vértices u y w están también conectados.

$$\boxed{[u] = \{\, v \in V \;/\; \exists \; un \; u - v \; camino \; en \; G\}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

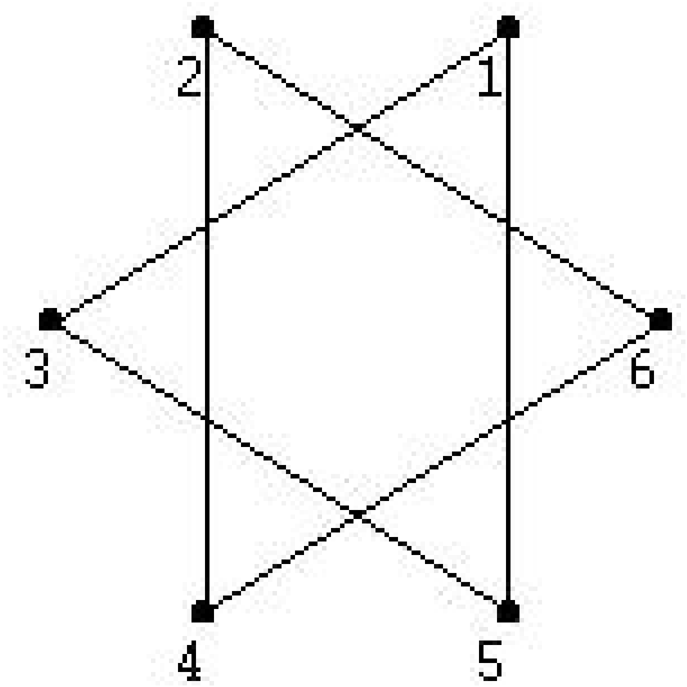
$$[u] = \{\ v \in\ V\ /\ \exists\ un\ u - v\ camino\ en\ G\}$$



$$[3] = \{1, 3, 4\}$$

$$[2] = \{2, 5\}$$

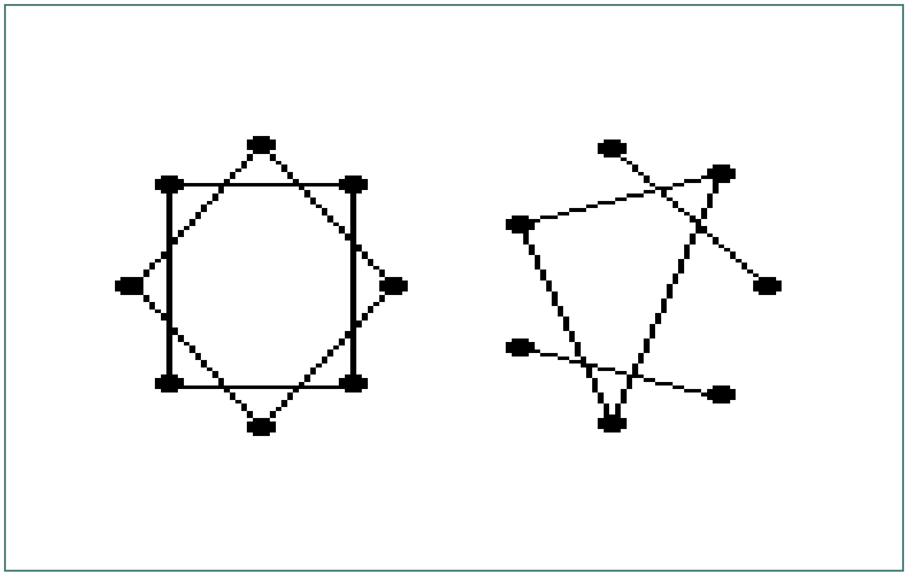
CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

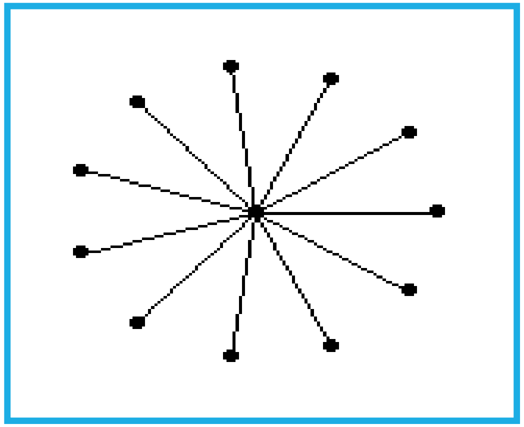


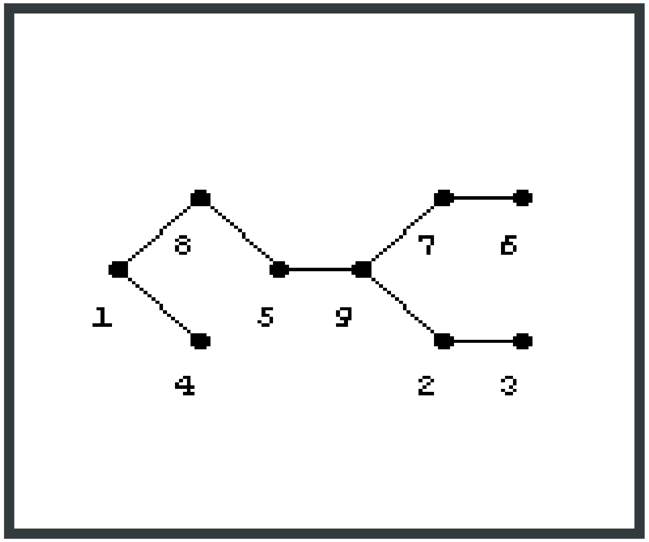
[1] = {1,3,5}

[2] = {2,4,6}

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

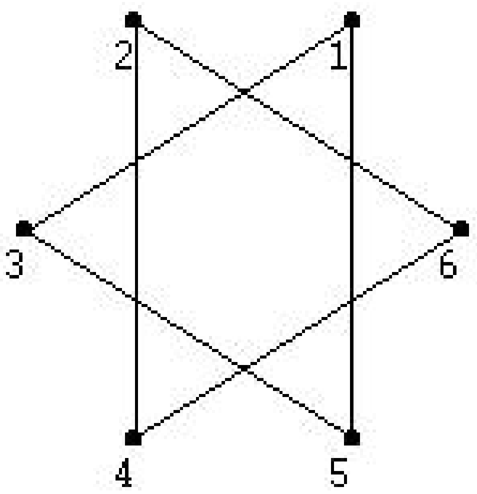






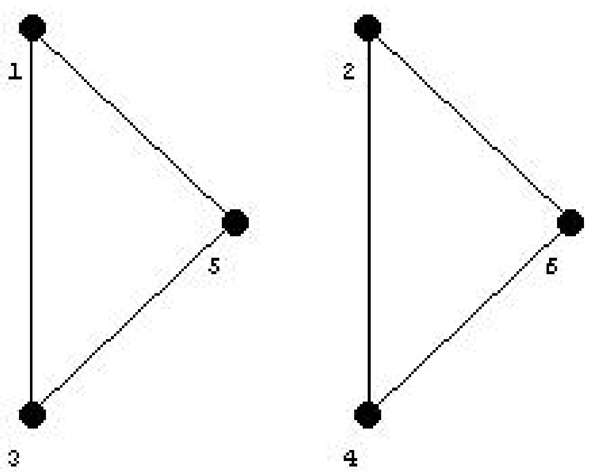
CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS: COMPONENTES CONEXAS

Definición 1.3 (Componente conexa) *Llamaremos* componente conexa *de un grafo no dirigido* $G = (V, A)$, *al* subgrafo generado *por cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación de conexión sobre el conjunto de vértices* V*, es decir el grafo cuyos vértices son los de* $[u] \subseteq V$*, y las aristas las del grafo* G *incidentes con los vértices de* $[u]$



[1] = {1,3,5}

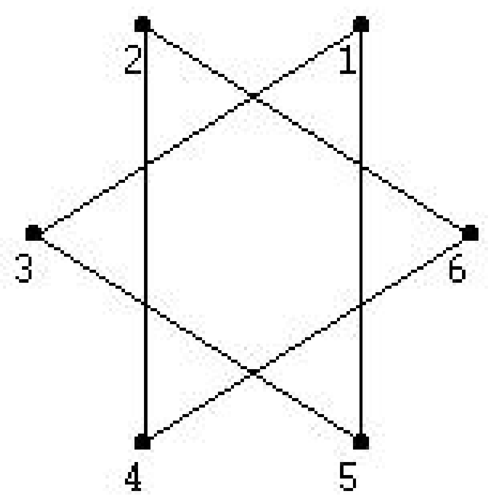
[2] = {2,4,6}

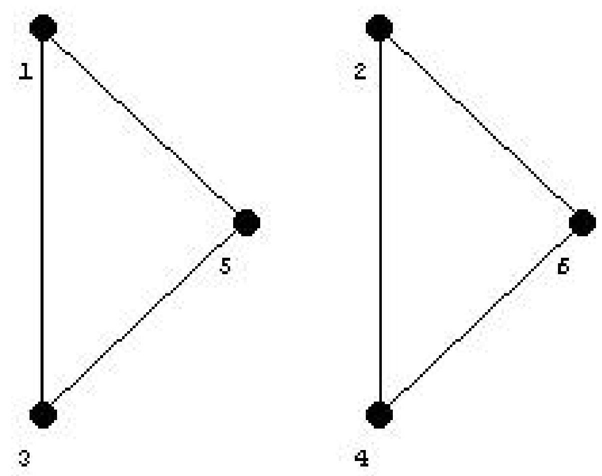


COMPONENTES CONEXAS

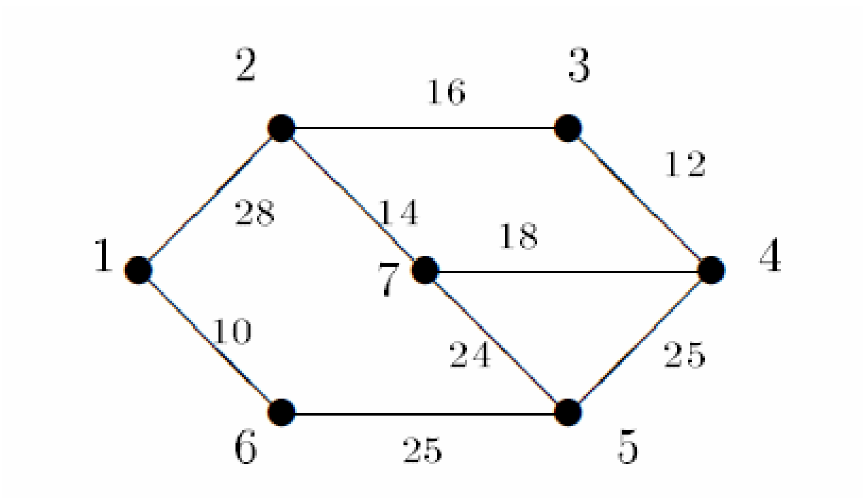
Propiedades de las componentes conexas:

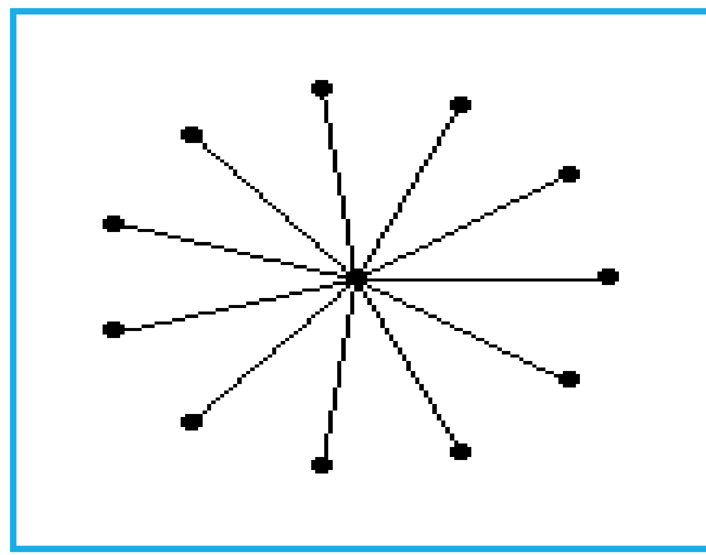
- No tienen vértices comunes
- No tienen aristas comunes
- No hay aristas entre componentes conexas distintas de un grafo.



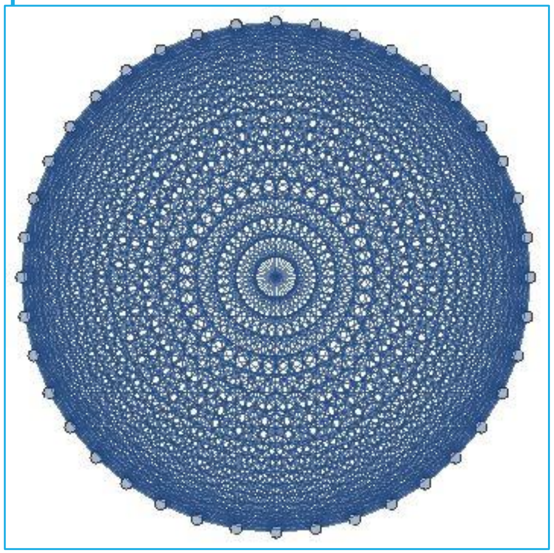


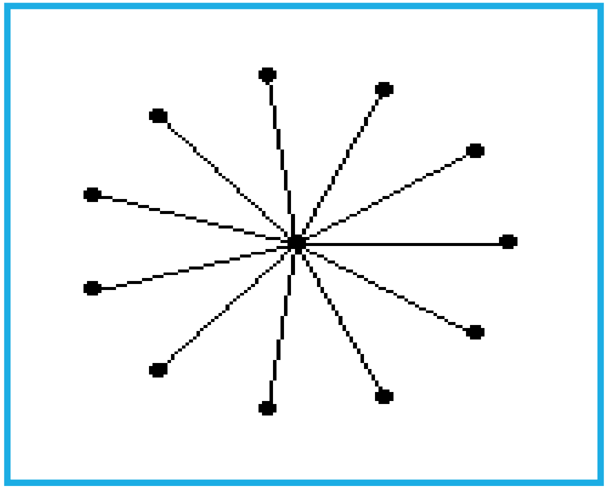
Definición 1.4 (Grafo conexo) *Un grafo diremos que es conexo si todos sus vértices estan conectados entre sí.*

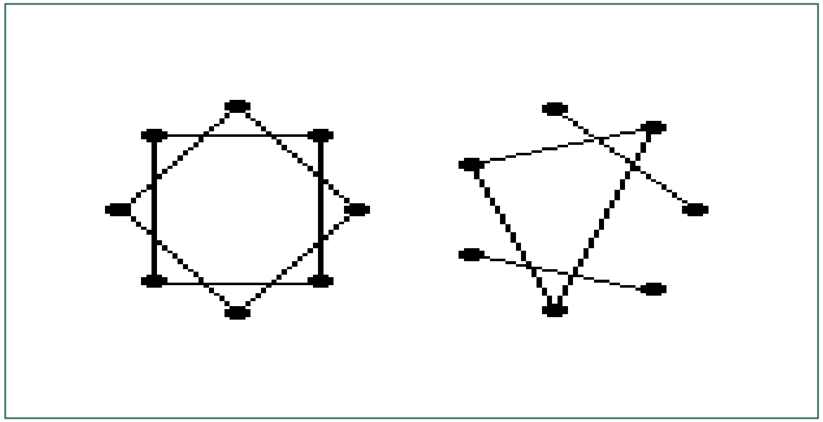


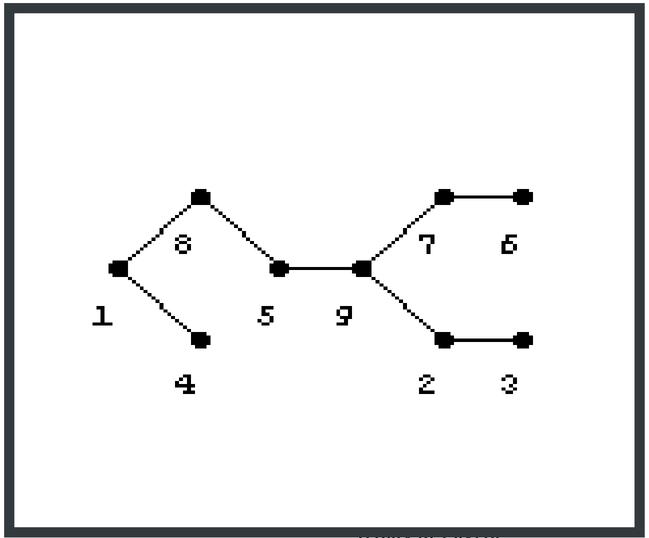


CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS



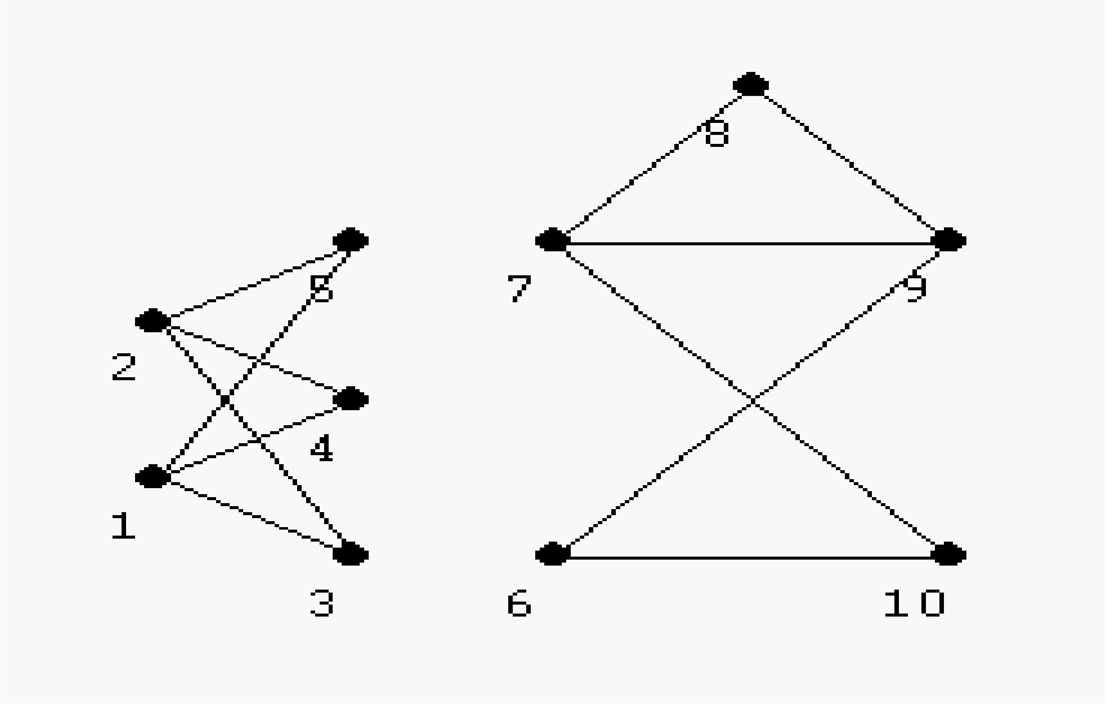






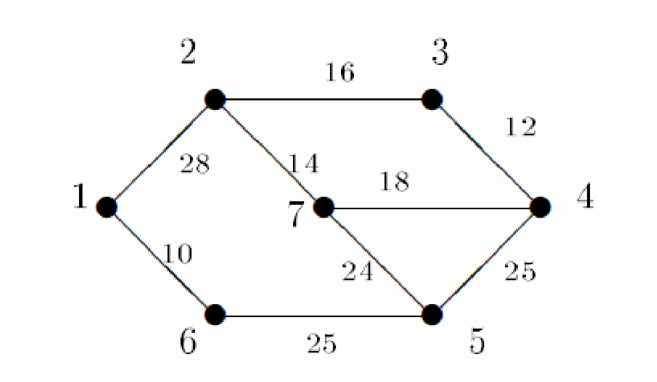
CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

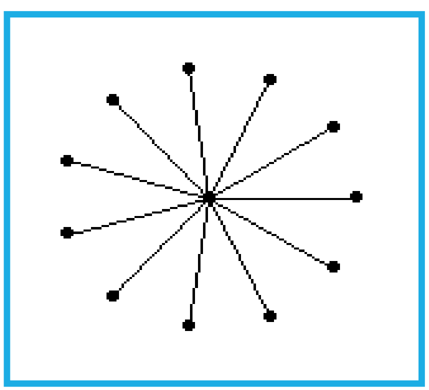
Teorema 1.1 *Sea G un grafo no dirigido y conexo. G es bipartido si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

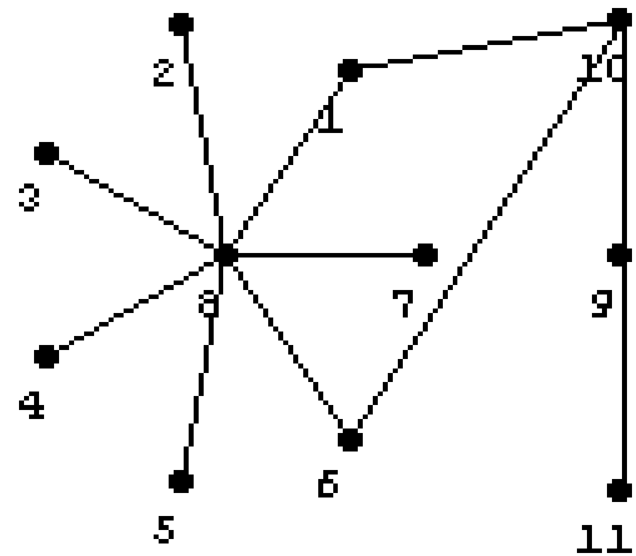


CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

Teorema 1.2 *Si G es un grafo no dirigido conexo no trivial, entonces G tiene un vértice de grado uno, un ciclo o ambas cosas.*







RESUMEN:
CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

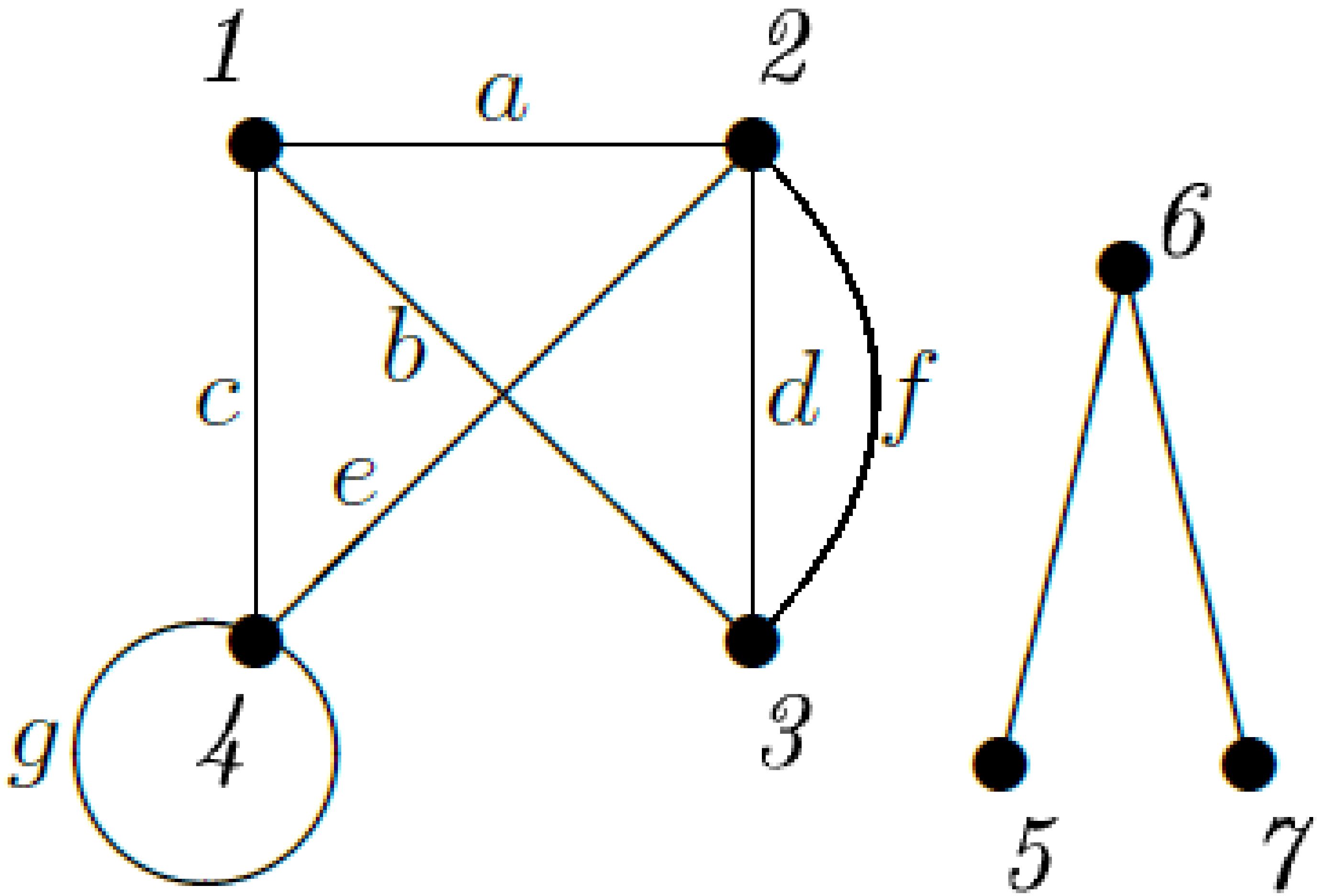
Definición 38 *Llamaremos* componente conexa *de un grafo no dirigido $G=(V,E)$, al grafo generado por cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación de conexión sobre el conjunto de vértices V.*

Definición 39 *Un grafo diremos que es conexo si todos sus vértices estan conectados entre sí.*

Si un grafo tiene ω componentes conexas distintas, diremos que se trata de un grafo ω-conexo.

Propiedades de las componentes conexas:

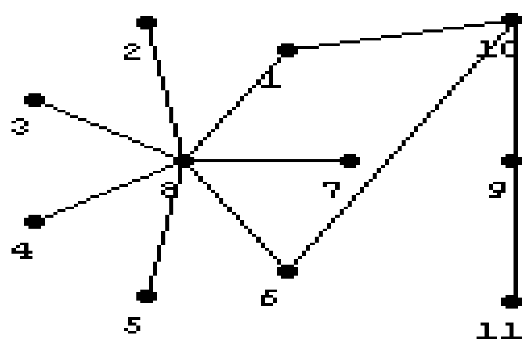
- No tienen vértices comunes
- No tienen aristas comunes
- No hay aristas entre componentes conexas distintas de un grafo.


1
2
a
b
c
d
e
f
g
4
3
6
5
7

Teorema 1.3 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido conexo y C un ciclo en G. Sea e una arista de C, entonces $G - \{e\}$ sigue siendo conexo.*

Teorema 1.4 *Si G es conexo y no dirigido con $|V| \geq 2$, entonces el número de aristas de G es mayor o igual que $|V| - 1$.*

Teorema 1.5 *Sea V un conjunto de vértices, entonces existe un grafo no dirigido y conexo con $|V| - 1$ aristas.*



Definición 52 *Decimos que V' es una* cortadura de vértices, *siendo* $V' \subseteq V$ *y G conexo, si* $G \sim V'$ *es desconexo. Si, además,* $\mid V' \mid = k$ *entonces V' es una k-cortadura de vértices.*

Definición 53 *La* conectividad *de un grafo es el mínimo número entero k, para el cual el grafo tiene una k-cortadura de vértices. O dicho de otra forma, el mínimo número de vértices que se han de quitar para que el grafo sea desconexo.*

Definición 54 *E' es una* cortadura de aristas *si el grafo* $G \sim E'$ *es desconexo. Si se cumple* $\mid E' \mid = k'$ *decimos que el grafo tiene una k'-cortadura de aristas.*

Definición 55 *Definimos la* aristoconectividad *como el menor número entero k' para el cual el grafo tiene una k'-cortadura de aristas*

Definición 56 *Decimos que un vértice v es un* vértice de corte *si por sí mismo constituye una 1-cortadura.*

Definición 57 *Decimos que una arista e es una* arista de corte *si por sí misma constituye una 1-cortadura de aristas.*

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

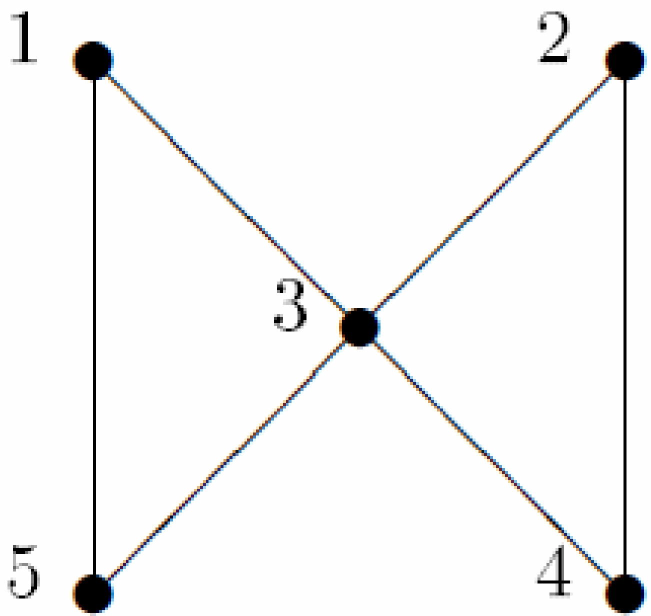


Figure 26: Grafo conexo.

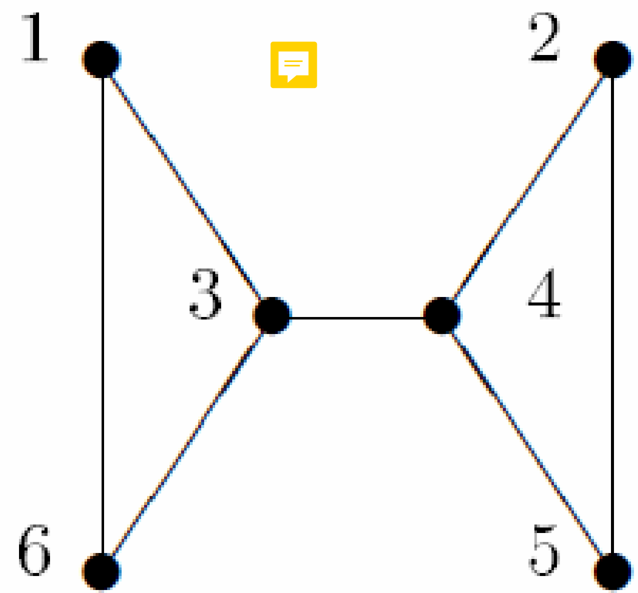


Figure 27: Grafo conexo.

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que v_j es accesible desde v_i, si existe un camino (dirigido o no dirigido) desde v_i hasta v_j.

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } v_j \text{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

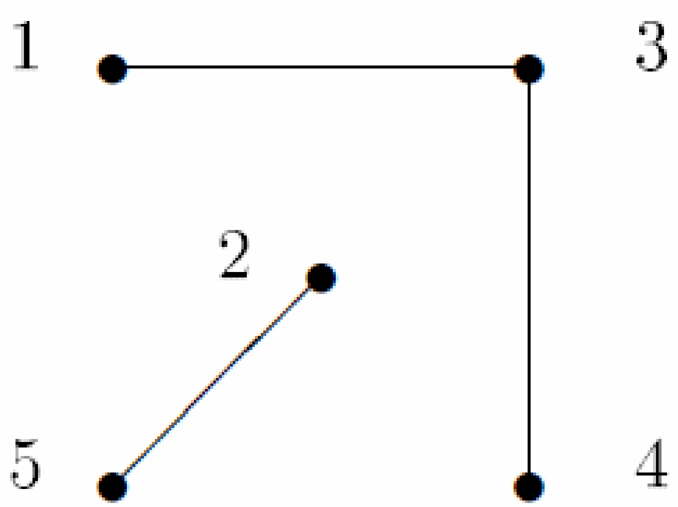
$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } v_j \text{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si llamamos $R(v_i)$ a los vértices alcanzables desde v_i, podemos obtenerlos mediante el uso de la función Γ.

$$\mathrm{R}(\mathrm{v}_i)=\text{Alcanzables desde}(\mathrm{v}_i) = \{\mathrm{v}_i\} \cup \Gamma(\mathrm{v}_i) \cup \ldots \cup \Gamma^n(\mathrm{v}_i)$$

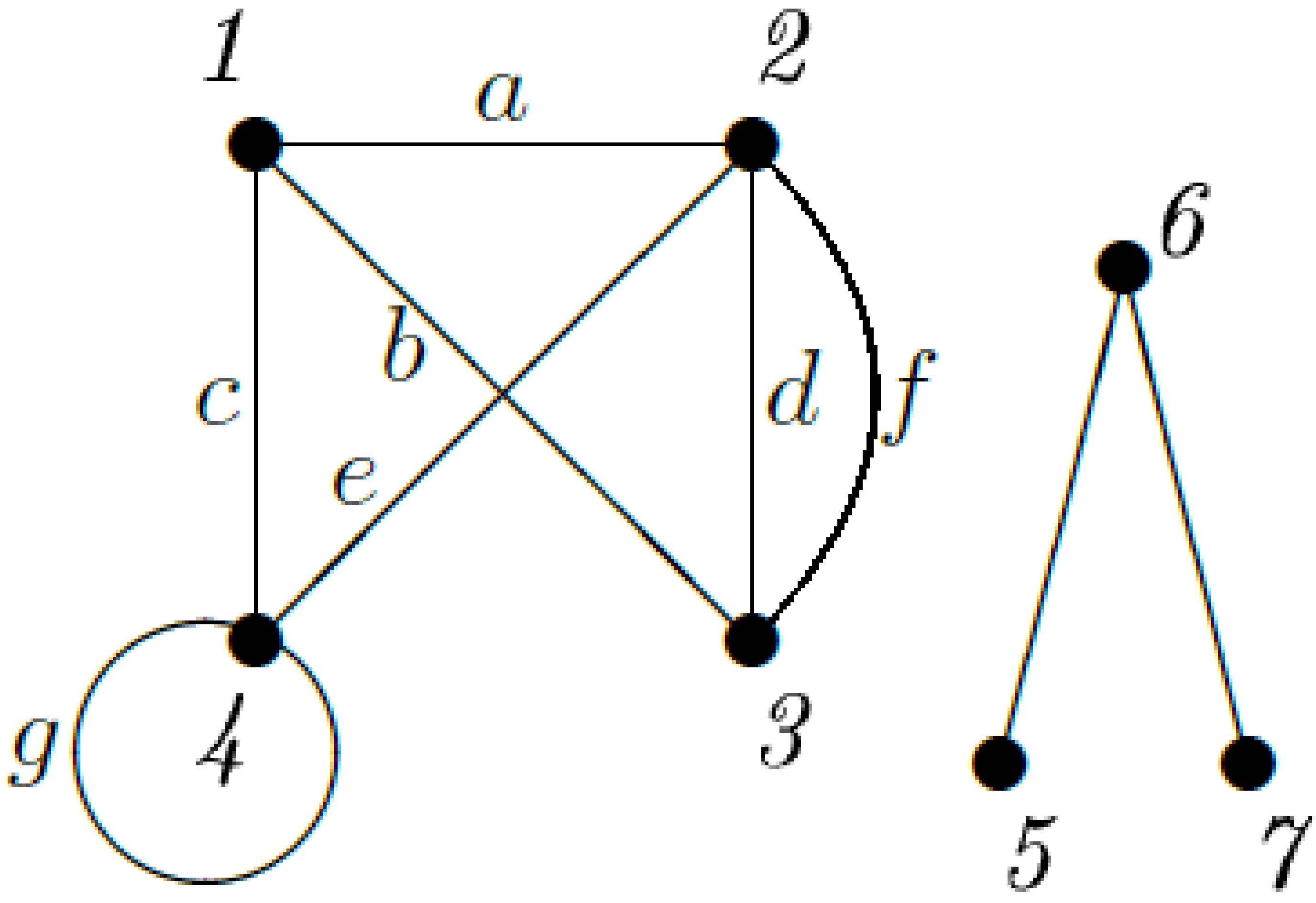
MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD



OBJETIVO:

Obtener las componentes conexas

Algoritmo 2.1 (BFS)

```
procedimiento BFS(v)
/* se aplica sobre un grafo G de n vértices */
global G,n,ALCANZADO(1:n);
cola COLA;
x ← v;
ALCANZADO(v) ← 1;
inicializar la cola a vacío;

bucle
    para todos los vértices w adyacentes desde x hacer
        si ALCANZADO(w) = 0
            entonces
                ALCANZADO(w) ← 1
                añadir w a COLA
    si COLA está vacia
        entonces return
    borrar el vértice x de COLA
fin del bucle

fin BFS
```

Algoritmo 2.2 (DFS)

```
    procedimiento DFS(v)
    /* se aplica sobre un grafo G de n vértices */
    global G,n,ALCANZADO(1:n);
    integer v,w;
    ALCANZADO(v) ← 1;
   para todos los vértices w(no alcanzados) adyacentes desde x hacer
        call DFS(w)
   fin del para
fin DFS
```