INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

SESIÓN 1.

Antonio Hervás Jorge. 2017

OBJETIVOS

1

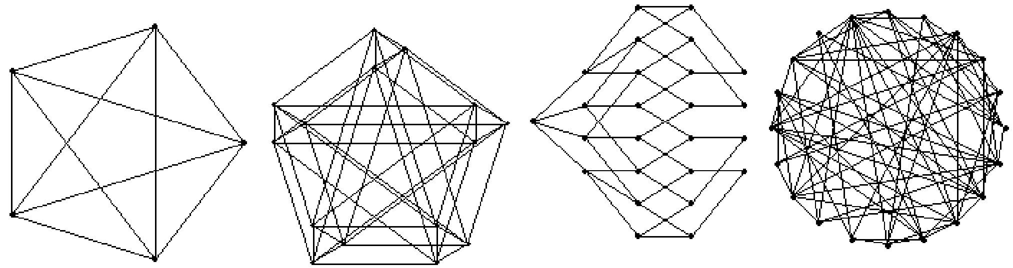
- Definir los conceptos básicos de Teoría de Grafos

2

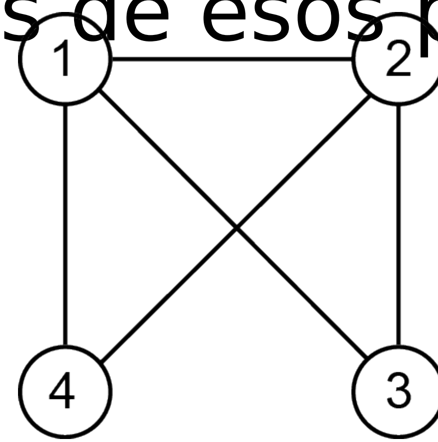
- Para grafo NO DIRIGIDOS:
- Desarrollar la idea intuitiva de grafo y red.
- Desarrollar la definición formal de grafo y red.

3

- Estudiar algunas de las propiedades básicas de grafo NO DIRIGIDOS

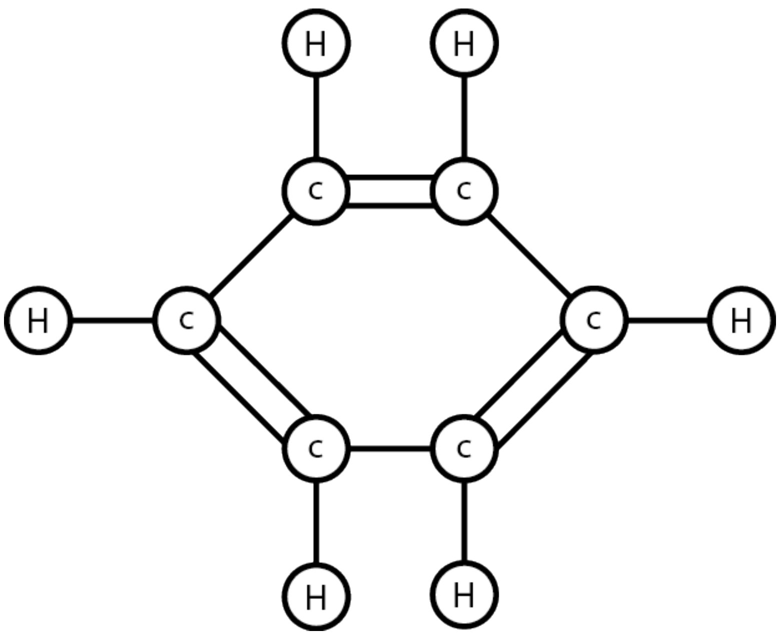


Un grafo es esencialmente cualquier cosa que se pueda representar mediante un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unan algunos de esos puntos.

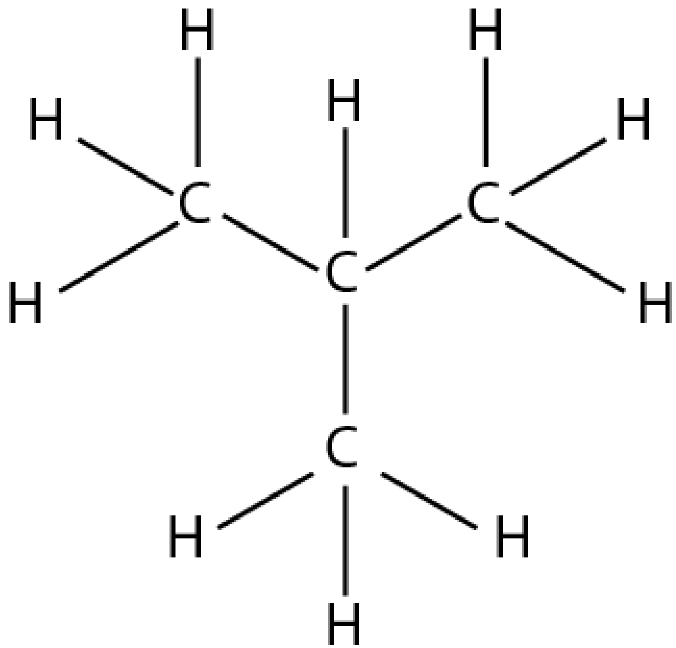


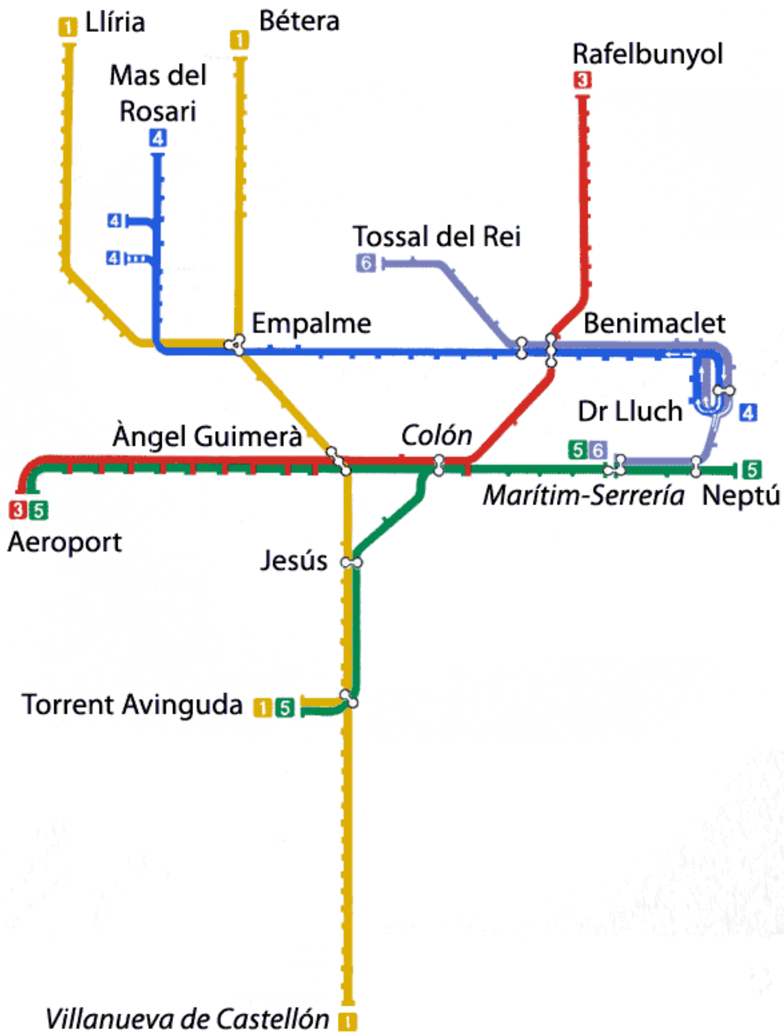
A los puntos les llamaremos vértices, y a las líneas arcos o aristas

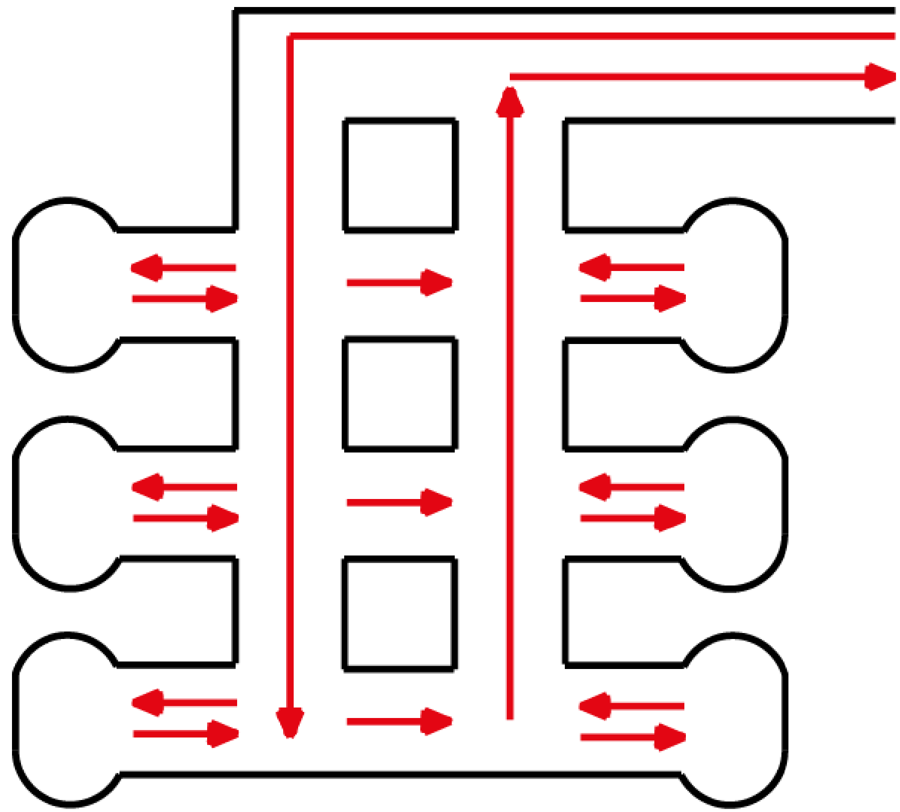
BENCENO
C_6H_6

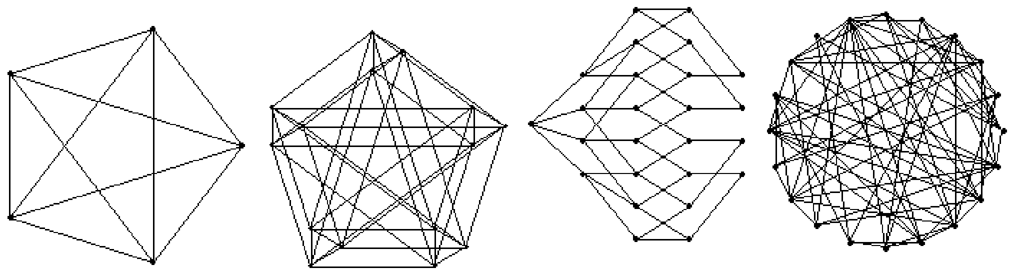


BUTANO
C_4H_{10}




Llíria
Bétera
Mas del
Rosari
Rafelbunyol
Tossal del Rei
Empalme
Benimaclet
Dr Lluch
Àngel Guimerà
Colón
Marítim-Serrería
Neptú
Aeroport
Jesús
Torrent Avinguda
Villanueva de Castellón

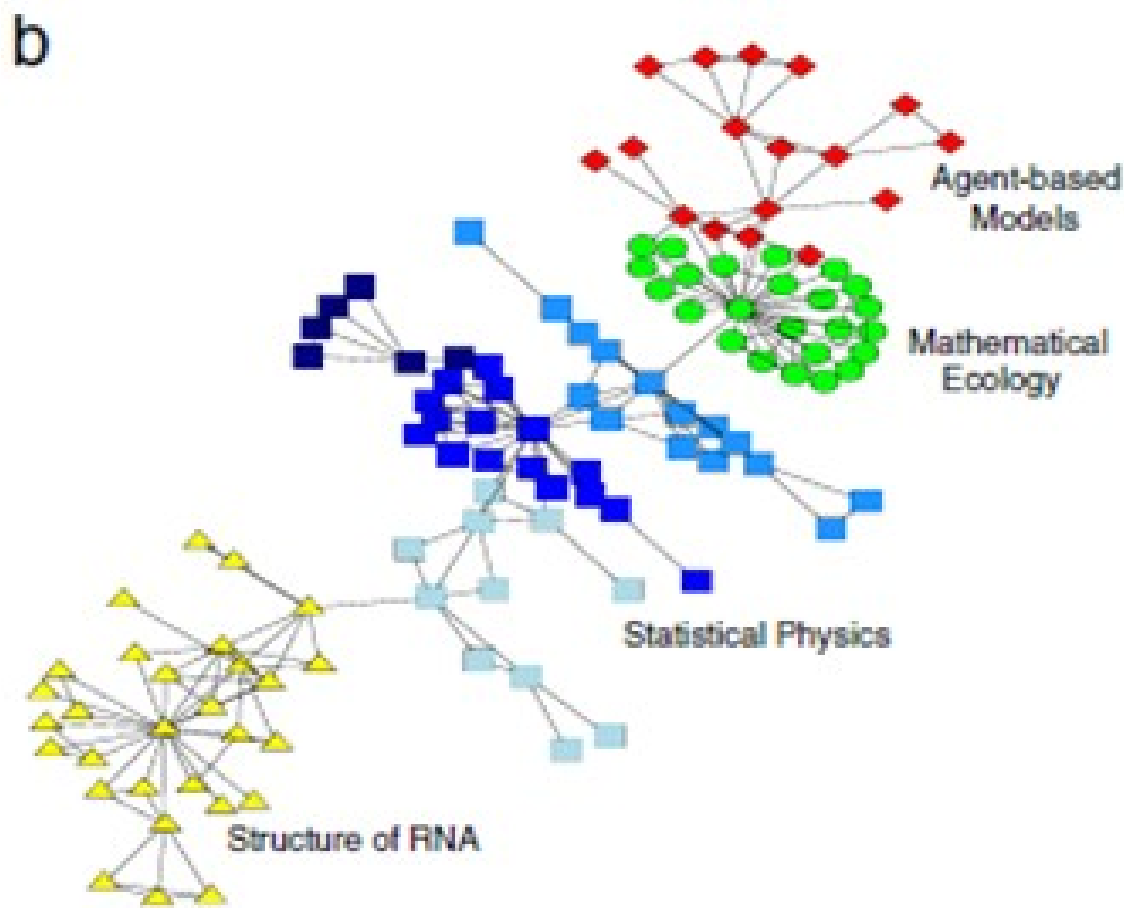




Un grafo es esencialmente cualquier cosa que se pueda representar mediante un conjunto de puntos, vértices, y un conjunto de líneas, arcos o aristas, que unan algunos de esos puntos.

Las líneas que unen los vértices pueden tener dirección, o funcionar en ambos sentidos, en el primer caso les llamaremos arcos, en el segundo aristas.

Informalmente, un grafo es un conjunto de vértices y otro de aristas que unen estos vértices. Según que las aristas sean orientadas o no lo sean, distinguiremos dos tipos de grafos: dirigidos y no dirigidos.



(b) Collaboration network between scientists working at the Santa Fe Institute. The colors indicate high level communities obtained by the algorithm of Girvan and Newman (Section 5.1) and correspond quite closely to research divisions of the institute. Further subdivisions correspond to smaller research groups, revolving around project leaders. Reprinted figure with permission from Ref. [12].

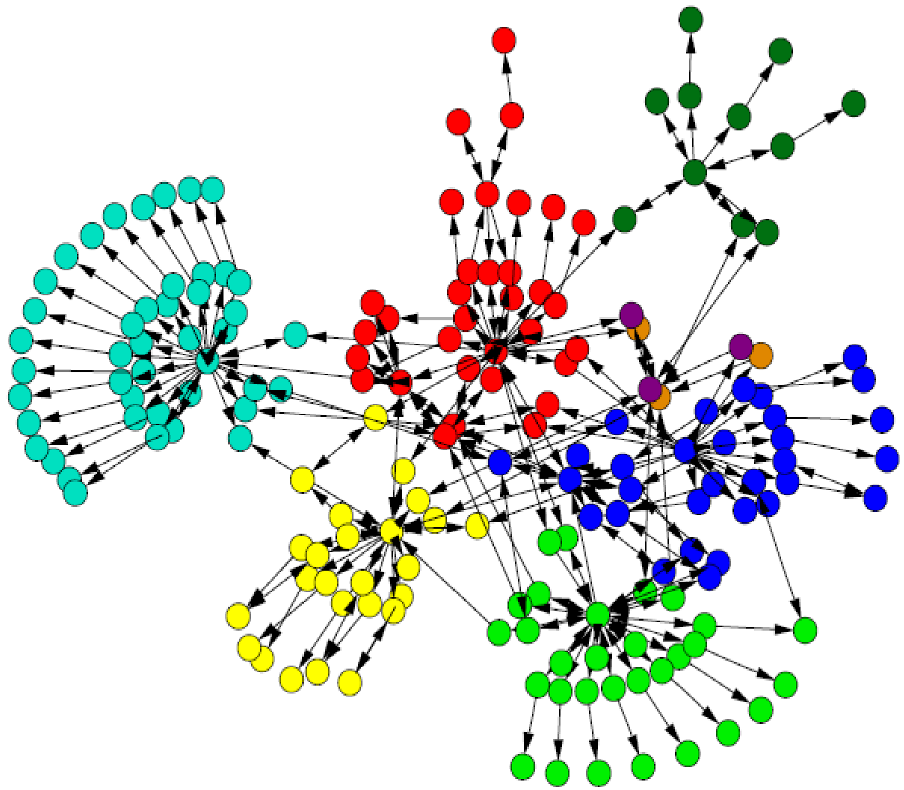
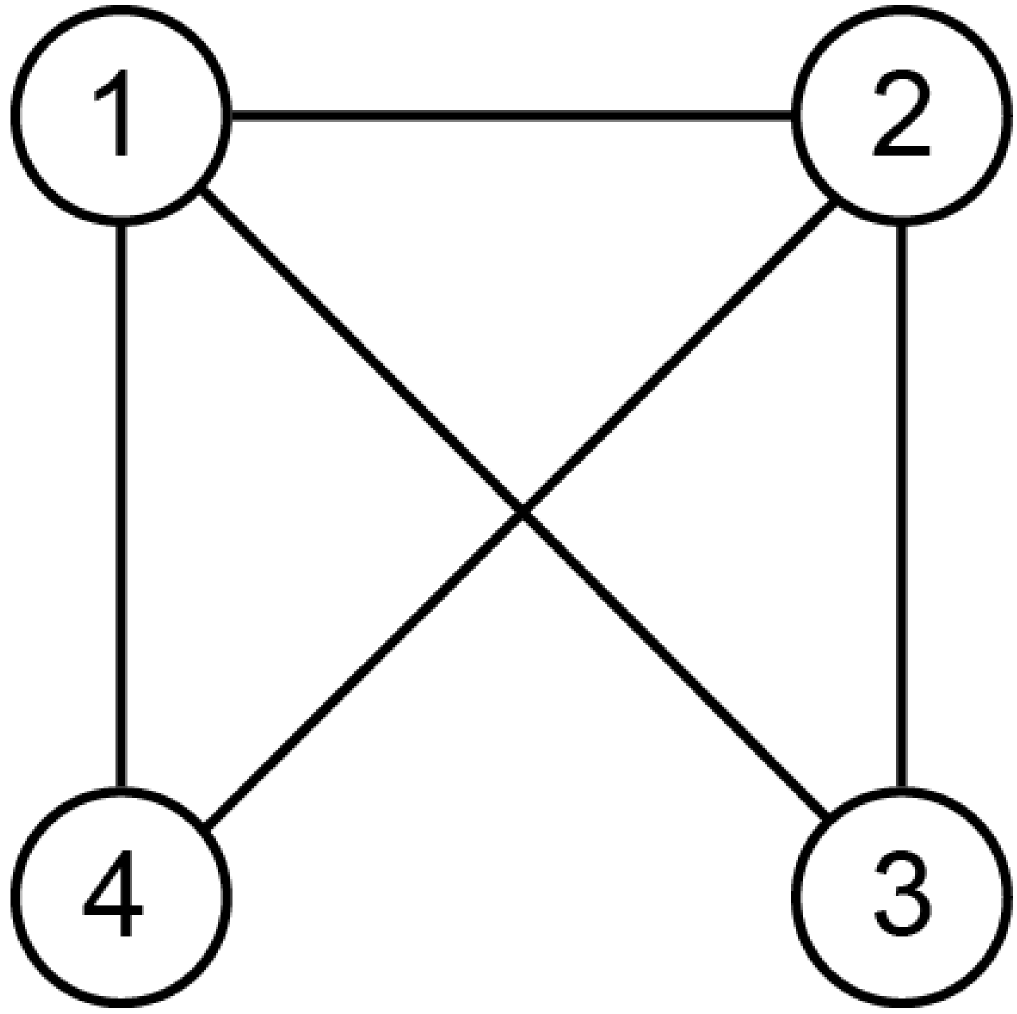


Fig. 4. Community structure in technological networks. Sample of the web graph consisting of the pages of a web site and their mutual hyperlinks, which are directed. Communities, indicated by the colors, were detected with the algorithm of Girvan and Newman (Section 5.1), by neglecting the directedness of the edges. Reprinted figure with permission from Ref. [54].

Grafos no dirigidos



DEFINICIÓN FORMAL

Definición 1.1 (Grafo (no dirigido)) *Un* grafo $G = (V(G), A(G), \psi)$[1] *es un triple ordenado de*

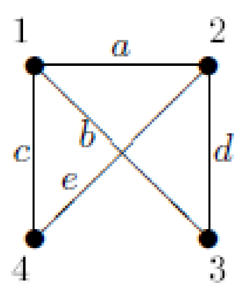
(a) Un conjunto finito y no vacío, $V(G)$*,*

(b) un conjunto finito, $A(G)$*, y*

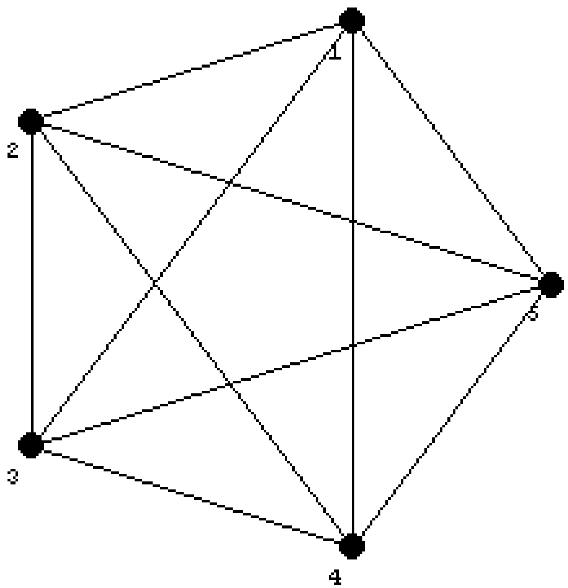
(c) una función de incidencia ψ*.*

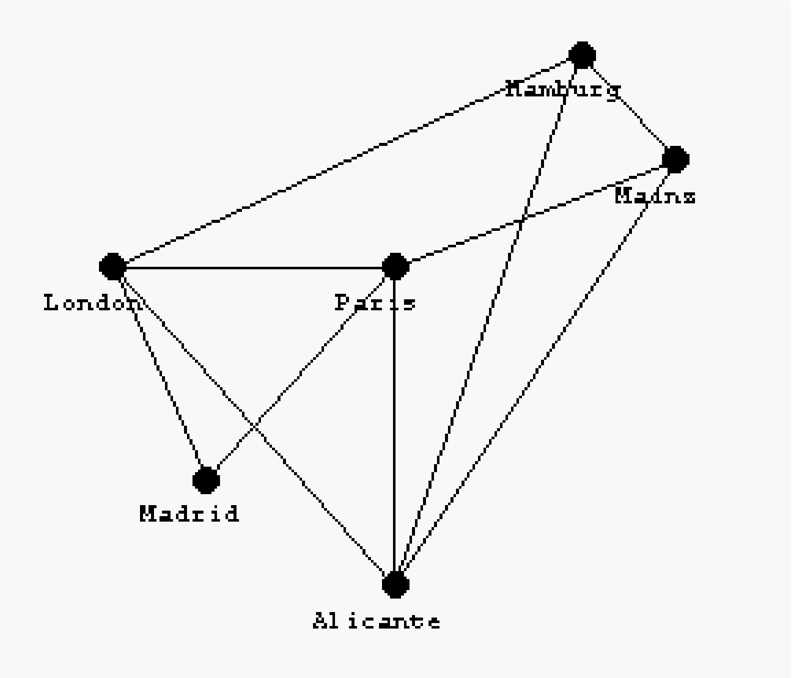
$$\forall a \in A(G),\ \psi(a) = \{u, v\} \subset V(G)$$

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A(G) = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\psi(a) = \{1,2\}, \quad \psi(b) = \{1,3\}, \quad \psi(c) = \{1,4\}, \quad \psi(d) = \{2,3\}, \quad \psi(e) = \{2,4\}$$



EJEMPLOS





GRAFOS DIRIGIDOS: DEFINICIÓN FORMAL

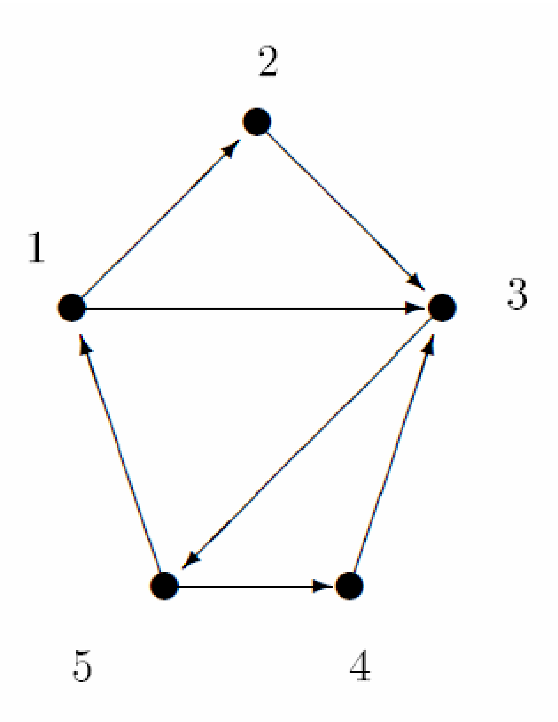
Definición 1.2 (Grafo dirigido) *Un grafo dirigido $G = (V(G), A(G), \psi)$ es un triple ordenado de*

(a) Un conjunto finito y no vacío, $V(G)$,

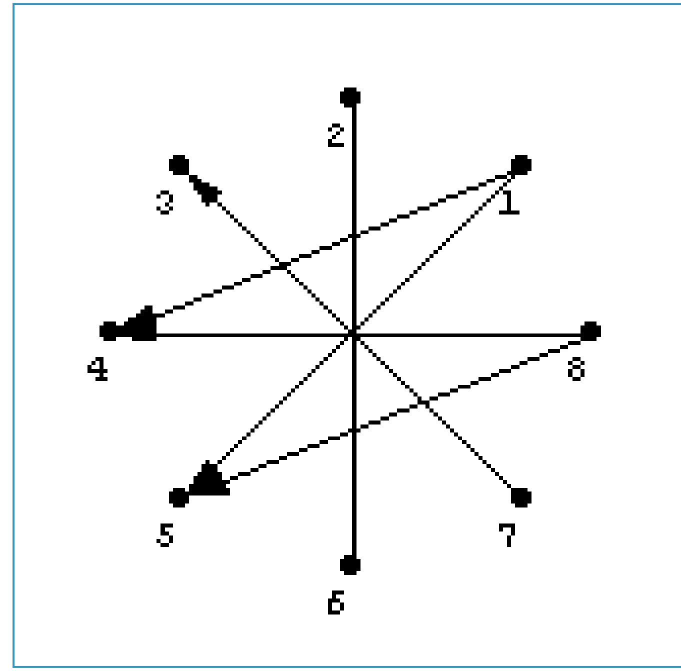
(b) un conjunto finito, $A(G)$, y

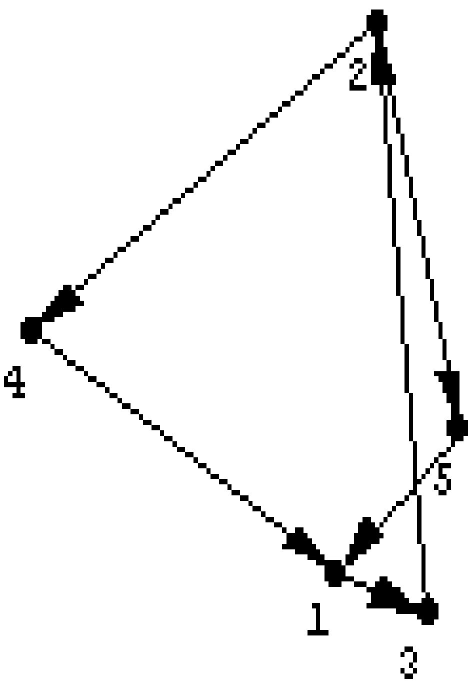
(c) una función de incidencia ψ.

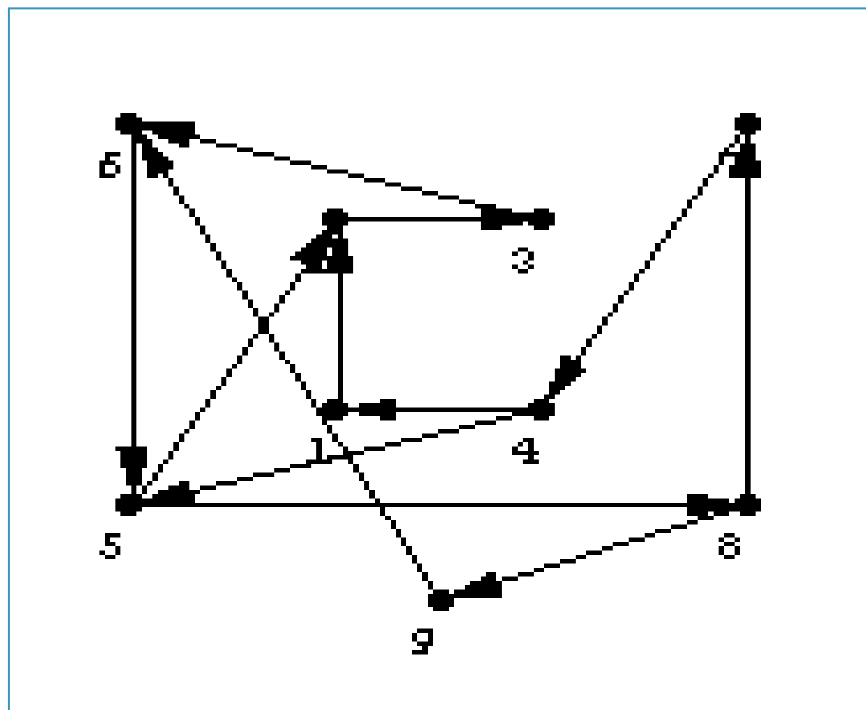
$$\forall a \in A(G),\ \psi(a) = (u, v) \in V(G) \times V(G)$$



$\langle u,v \rangle \neq \langle v,u \rangle$


2
3
1
4
8
5
7
6


2
4
5
1
3

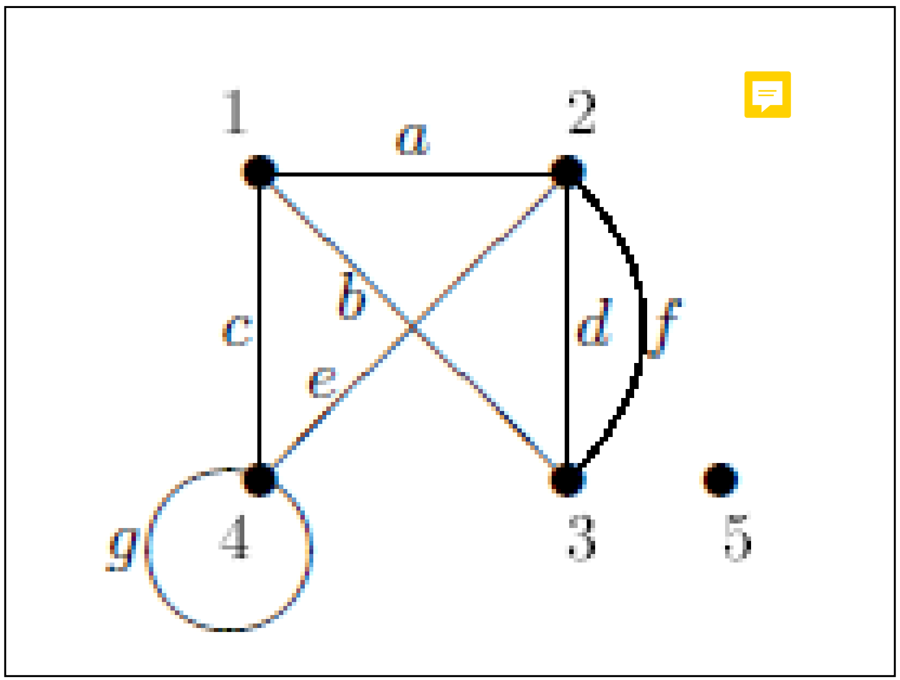

6
3
1
4
5
8
9

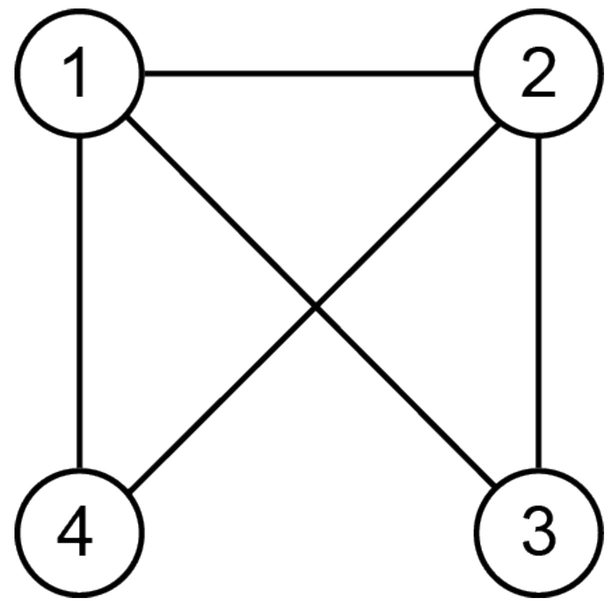
GRAFOS NO DIRIGIDOS
Adyacencia e Incidencia

Definiciones 1.3 *Un* bucle *o* lazo *es una arista cuyos vértices extremos coinciden.*

Dos aristas a y b son paralelas si tienen los mismos extremos (es decir, si $\psi(a) = \psi(b)$).

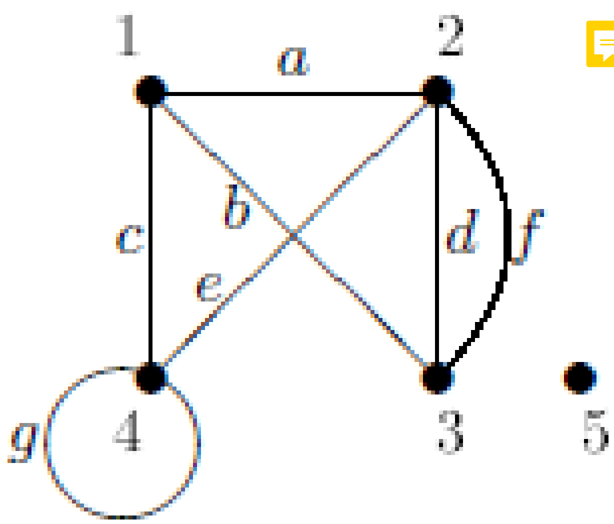
Un vértice diremos que es es un vértice aislado *si no es extremo de ninguna arista.*

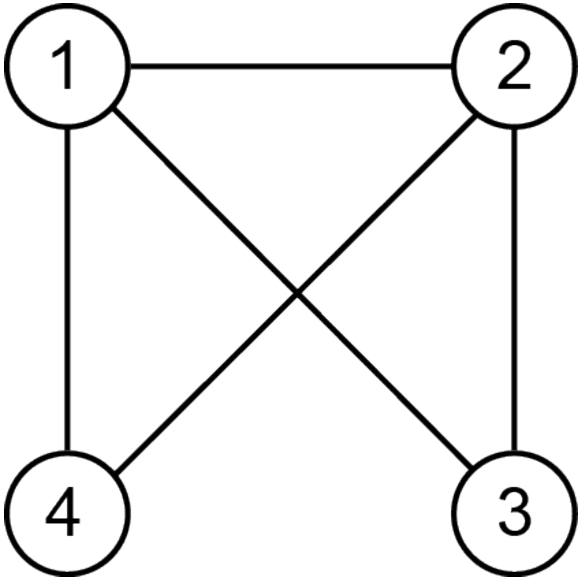




GRAFOS NO DIRIGIDOS
Adyacencia e Incidencia

Definición 1.4 *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Dos vértices u y v de G son adyacentes si son vértices extremos de una misma arista a de A. En ese caso, diremos que la arista a es incidente con los vértices u y v.*



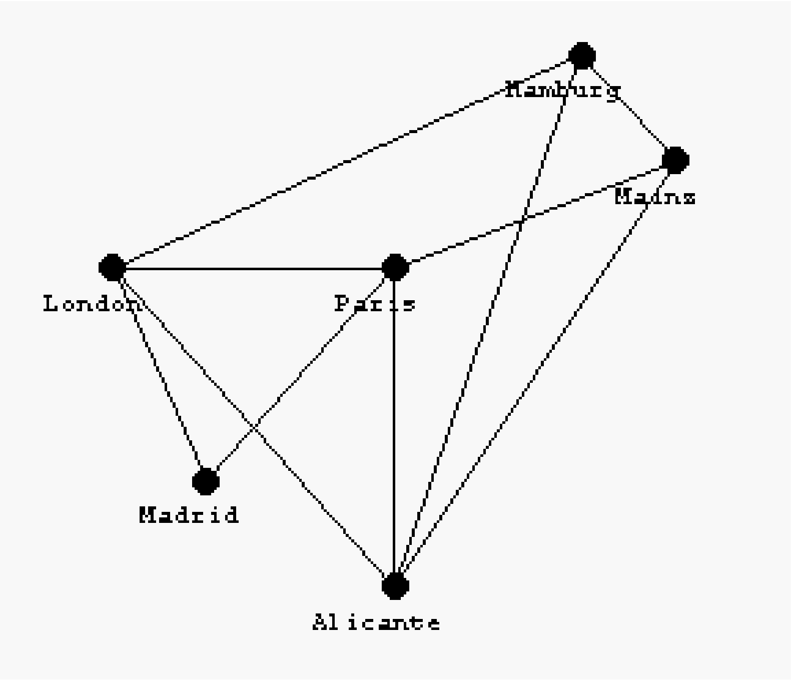


Definición 6 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Definiremos el conjunto de vértices adyacentes a uno dado, y que representaremos por* $\Gamma(v)$*, como el conjunto de todos aquellos vértices del grafo adyacentes a v:*

$$\Gamma(v) \quad = \quad \{u \in V/(v,u) \in E\}$$

De forma análoga definiremos

$$\begin{aligned} \Gamma^2(v) &= \Gamma(\Gamma(v)) \\ &\cdots \\ \Gamma^{n+1}(v) &= \Gamma(\Gamma^n(v)) \end{aligned}$$



GRAFOS NO DIRIGIDOS
Grafos especiales

Definición 1.6 (Grafo simple) *Un grafo no dirigido* $G = (V, A)$ *es* simple *si no tiene aristas múltiples (paralelas).*

Definición 10 *Un grafo* $G=(V,E)$ *es* vacío *si el conjunto de aristas* E *es vacío.*

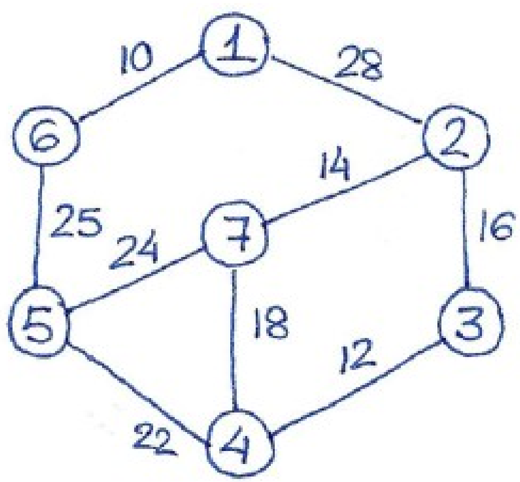
Es decir el grafo vacío es el que no tiene aristas.

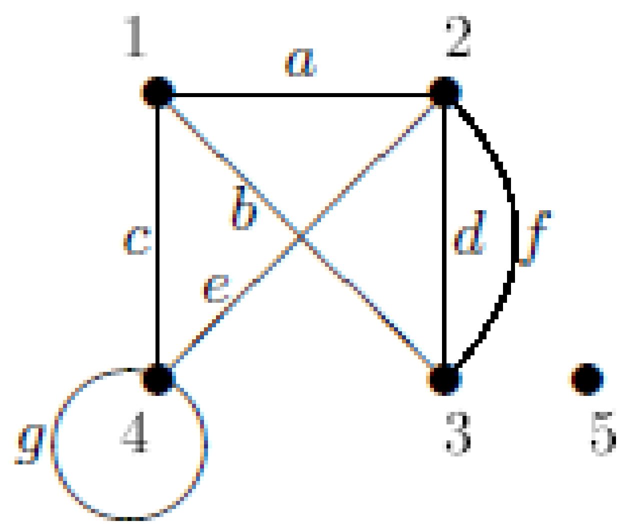
Definición 11 *Llamaremos grafo trivial a aquel que solamente contiene un vértice.*

Definición 12 *Sea* $G=(V,E)$ *un grafo. Diremos que* G *es un* grafo etiquetado *si todos los vértices del grafo tienen asociada una etiqueta.*

GRAFOS NO DIRIGIDOS
GRAFO PONDERADO

Definición 13 *Sea G=(V,E) un grafo. Diremos que G es un* grafo ponderado *si cada arista lleva asociada un número real. A este número real se le llama peso, coste o capacidad de la arista.*

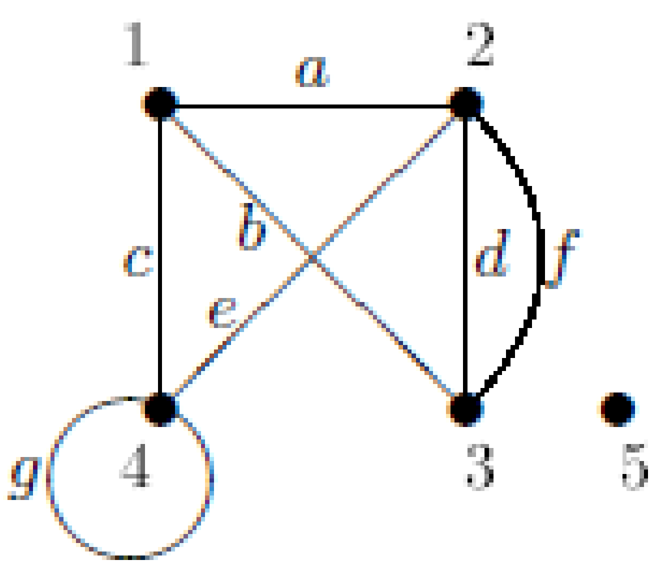




GRAFOS NO DIRIGIDOS
GRADO DE UN VÉRTICE

Definición 1.11 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Llamaremos grado de un vértice v, y lo representaremos por $d(v)$, al número de aristas incidentes en ese vértice.*

Nótese que un bucle incide dos veces en el mismo vértice.



Teorema 1 *Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido, $|V|=n$, $|E|=e$ Entonces, la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas.*

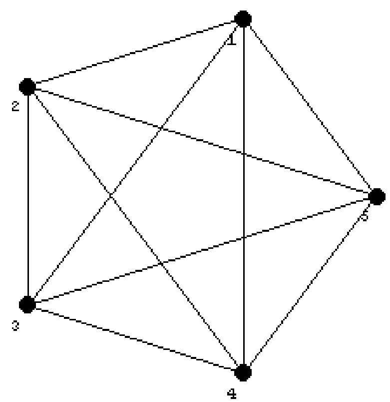
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\,e \tag{1}$$

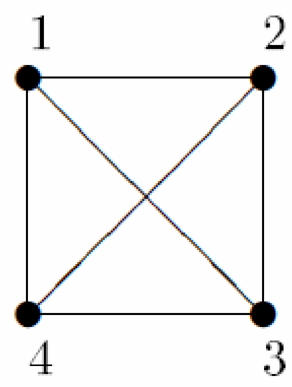
Corolario 1 *Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Entonces, el número de vértices de grado impar es par.*

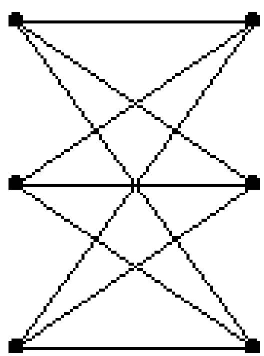
GRAFOS NO DIRIGIDOS
GRADO DE UN VÉRTICE

Definición 17 *Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Diremos que G es* k-regular *si todos los vértices del grafo son de grado k, o lo que es lo mismo, si cada vértice es incidente con exactamente k aristas.*

$$G=(V,E) \text{ } k\text{-regular} \longleftrightarrow \forall\ v \in V,\ d(v) = k$$







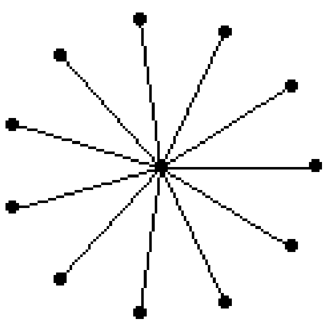
GRAFOS NO DIRIGIDOS
GRADO DE UN VÉRTICE.

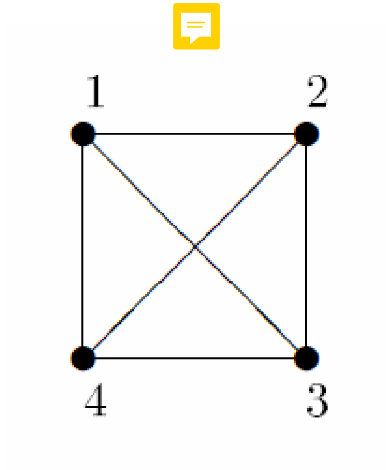
Definición 18 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Llamaremos* grado mínimo *de G al menor de los grados de todos sus vértices.*

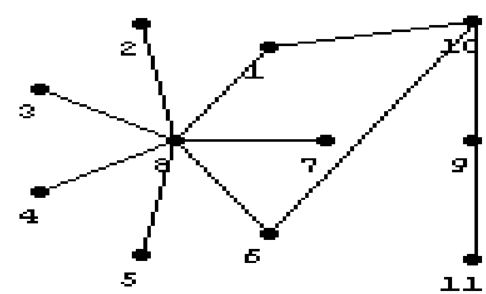
$$\delta = min \ \{ \ d(v) \ / \ v \in V \}$$

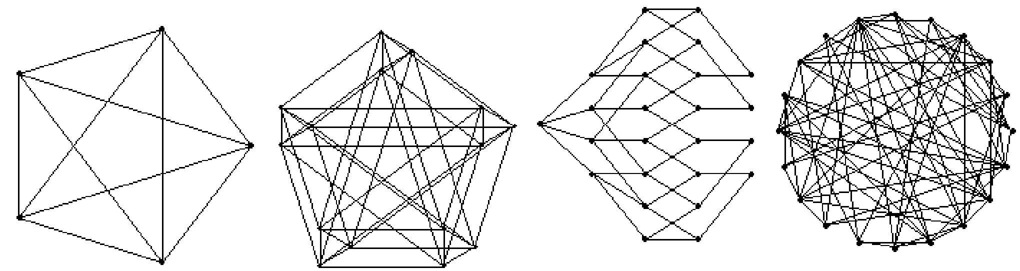
Definición 19 *Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Llamaremos* grado máximo *de G al mayor de los grados de todos sus vértices.*

$$\Delta = max \ \{ \ d(v) \ / \ v \in V \}$$



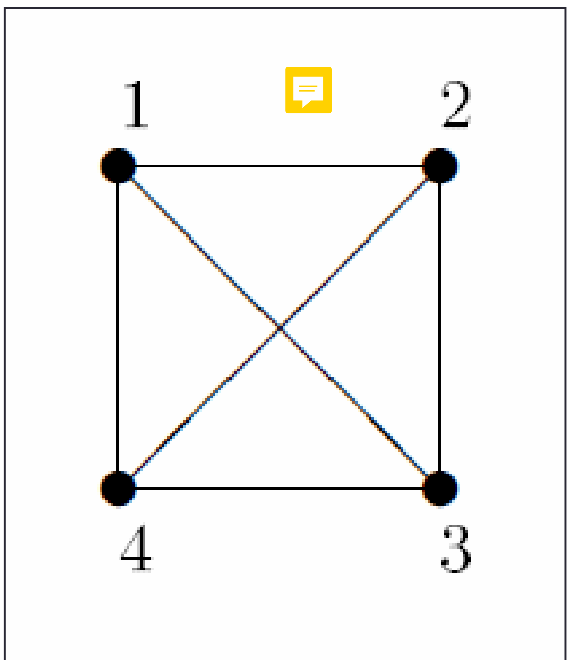


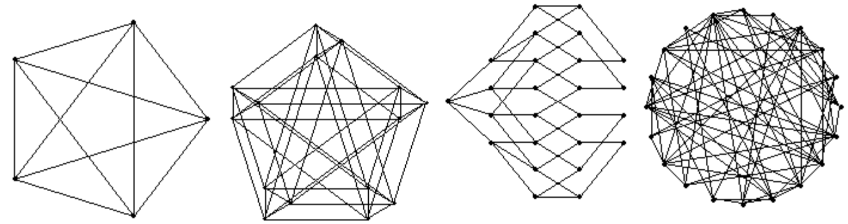




Definición 26 *Sea* $G=(V,E)$ *un grafo. Diremos que* G *es* completo *si cualquier par de vértices son adyacentes.*

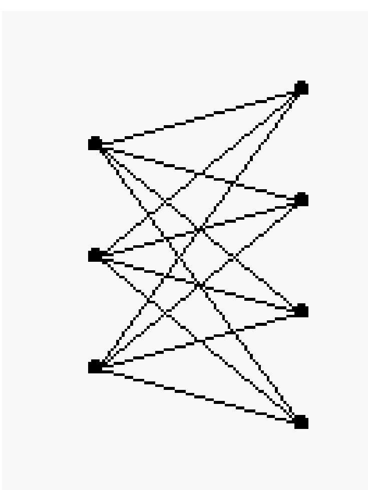
Al grafo completo de n *vértices lo denotamos por* K_n.

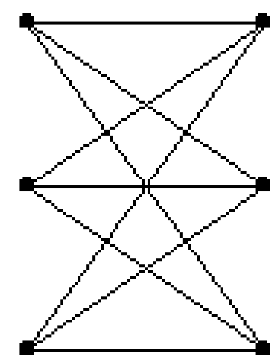


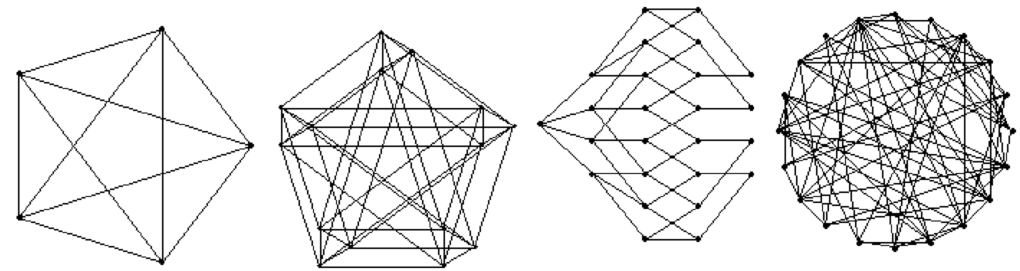


Definición 29 *Sea $G=(V,E)$ un grafo. Diremos que G es un grafo* bipartido *con bipartición X e Y, y lo representaremos por $G=([X,Y],E)$, si:*

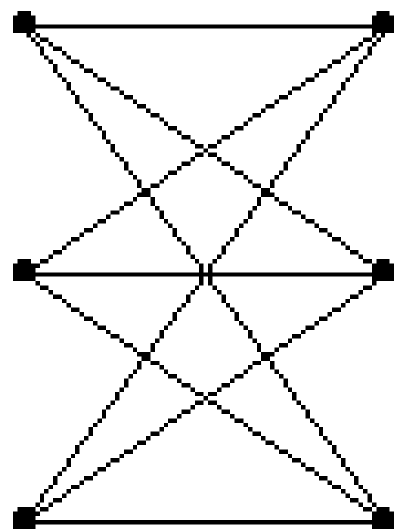
- $V = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- *Si* $(u, v) \in E$, *entonces* $u \in X$ *y* $v \in Y$, *o bien,* $u \in Y$ *y* $v \in X$.

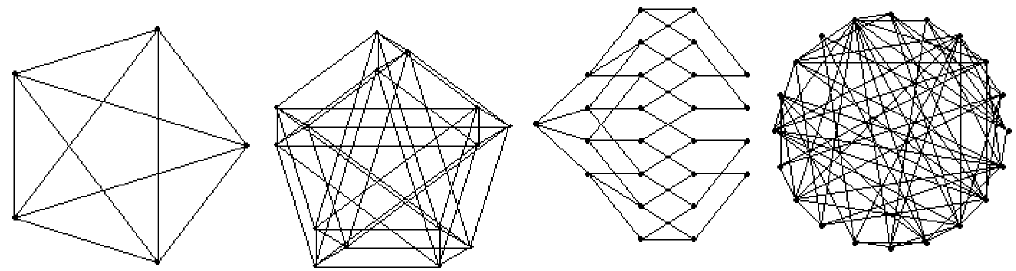






Definición 30 *Sea G=([X,Y],E) un grafo bipartido,* $|X| = i$, $|Y| = j$. *Diremos que G es* bipartido completo, *y lo representamos por* $K_{i,j}$, *si cada vértice de X es adyacente a todos y cada uno de los vértices de Y.*





EJERCICIOS:

1. **Buscar tres ejemplos de problemas cuya representación sea un grafo no dirigido en:**
    a) Ciencias de la salud
    b) Ciencias sociales
    c) Tecnología
    d) Matemáticas
    e) Física.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA