INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS: FLUJOS Y REDES

Antonio Hervás Jorge

2017

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

OBJETIVOS

1

- Ahora tendremos capacidades en las aristas.

2

- Vamos a combinar varias técnicas

3

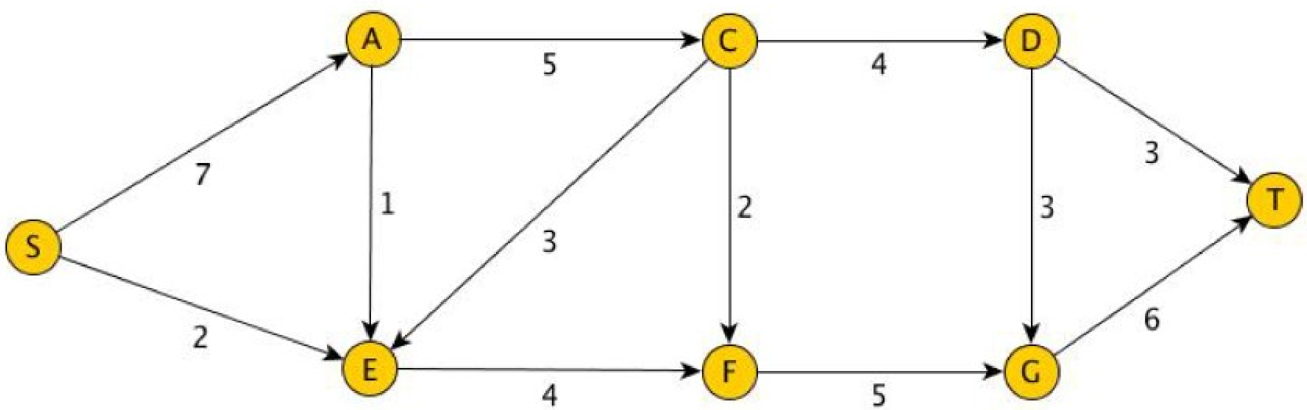
- Vamos a ver como resolver un problema de flujos utilizando nuestros recursos

Definición 2.1 ***Red.***
*Una **red** N es un grafo dirigido débilmente conexo $G = (V, E)$ con dos vértices especiales:*

- *s, al que llamaremos **fuente**, con $d_0(s) > 0$, y*
- *t, al que llamaremos **sumidero**, con $d_i(t) > 0$;*

*y una función no-negativa $c : E \to \mathbb{N}$, llamada **capacidad** de la red N. Denotaremos a esta red como $N(G, s, t, c)$.*

Ejemplo 2.1 *En el siguiente dibujo tenemos una red donde hemos representado en cada arista la capacidad de la misma.*



Definición 2.2 ***Flujo.***
*Sea $N(G, s, t, c)$ una red. Un **flujo** f en N es una función $f : E \to \mathbb{N}$ tal que*

- $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ *para toda* $(u, v) \in E$ *(**El flujo de** u **a** v **no puede exceder la capacidad**).*

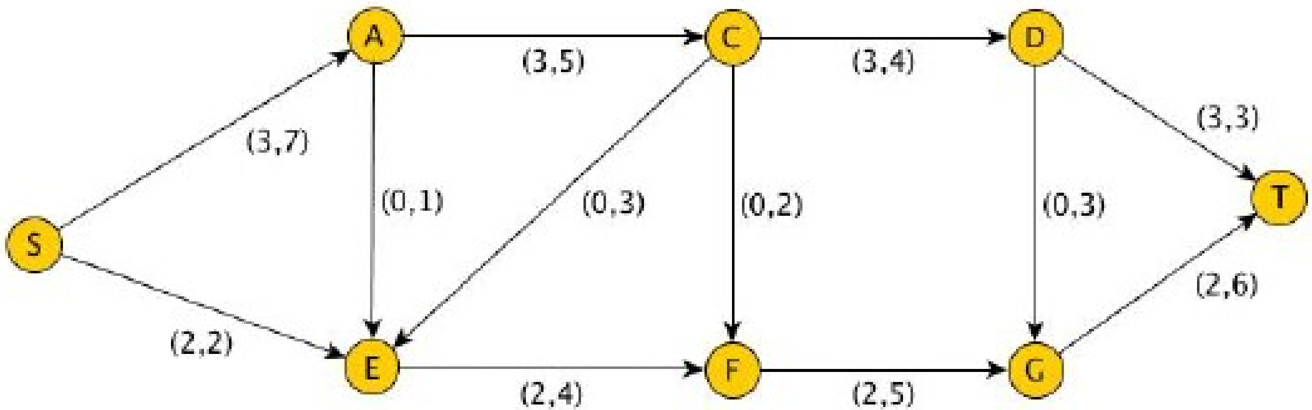
- $\sum_{v \in \Gamma(u)} f(u, v) = \sum_{w \in \Gamma^{-1}(u)} f(w, u)$ *(Para cualquier vértice que no sea ni la fuente ni el sumidero se cumple la **Ley de conservación del flujo**.*

Representamos por $f(N)$ *el valor del flujo* f *en* N que va de la fuente s al sumidero t asociado a f, esto es

$$f(N) = \sum_{v \in \Gamma(s)} f(s, v) = (\text{que es igual a}) = \sum_{v \in \Gamma^{-1}(t)} f(v, t).$$

Un flujo decimos que es **máximo** si $f'(N) \leq f(N)$ para cada flujo f' en N. En estos problemas, el flujo máximo podría no ser único.

Ejemplo 2.2 *En el siguiente dibujo tenemos una red donde hemos representado en cada arista el flujo y la capacidad de cada arista. Se puede comprobar que se verifican las restricciones de flujo en las aristas y en los vértices. Asímismo, se puede comprobar que el valor del flujo es 5.*



Definición 3.1 ***Semicamino f-incrementable.***

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido El semicamino $u_0, u_2, \ldots, u_r$ es un ***semicamino f-incrementable*** *si se cumplen una de las siguientes condiciones para cada arista $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ con $1 \leq i \leq r$:*

- *Si e_i es una arista propiamente dirigida, entonces $c(e_i) > f(e_i)$.*
- *Si e_i es una arista iimpropiamente dirigida, entonces $f(e_i) > 0$.*

Esto es, **podemos aumentar el flujo en la dirección de las aristas propiamente dirigidas y disminuirlo en la dirección de las impropiamente dirigidas.**

Teorema 3.1 *Sea f un flujo en la red $N(G, s, t, c)$. Sea P un semicamino f-incrementable $u_0, u_1, \ldots, u_r$, con $u_0 = s$ y $u_r = t$. Denotemos $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ con $1 \leq i \leq r$. Sea*

$$\Delta_i = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i) & \textit{si } e_i \textit{ es una arista propiamente dirigida,} \\ f(e_i) & \textit{si } e_i \textit{ es una arista impropiamente dirigida,} \end{cases}$$

y $\Delta = \min\{\Delta_i \,;\, 1 \leq i \leq r\}$.

Entonces la función $\tilde{f} : E \to \mathbb{N}$ definida como

$$\tilde{f}(e_i) = \begin{cases} f(e_i) + \Delta & \textit{si } e_i \textit{ es una arista propiamente dirigida,} \\ f(e_i) - \Delta & \textit{si } e_i \textit{ es una arista impropiamente dirigida, y} \\ f(e_i) & \textit{if } e_i \textit{ no pertenece a } P; \end{cases}$$

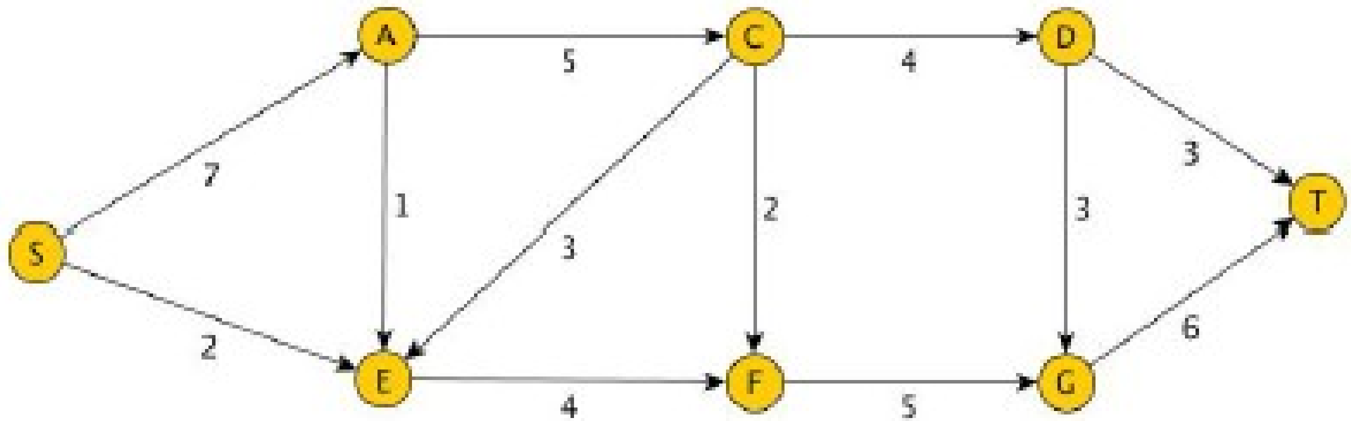
es un flujo en N y $\tilde{f}(N) = f(N) + \Delta > f(N)$

En este teorema queda claro que $\tilde{f}(N) > f(N)$ para $\Delta > 0$ puesto que P es un semicamino f-incrementable.

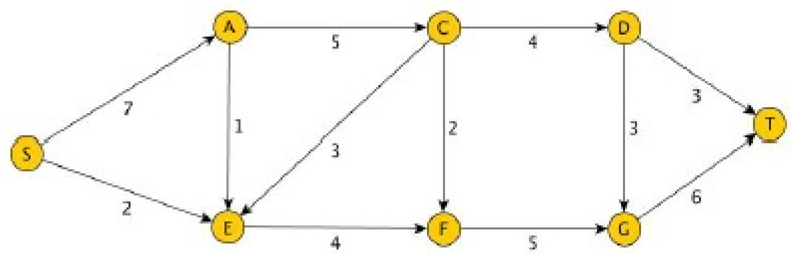
FLUJOS Y REDES

Teorema 3.2 *Sea $N(G, s, t, c)$ una red y f un flujo en la red N. Un flujo es máximo en N si, y solamente si, no existe ningún semicamino f-incrementable en N.*

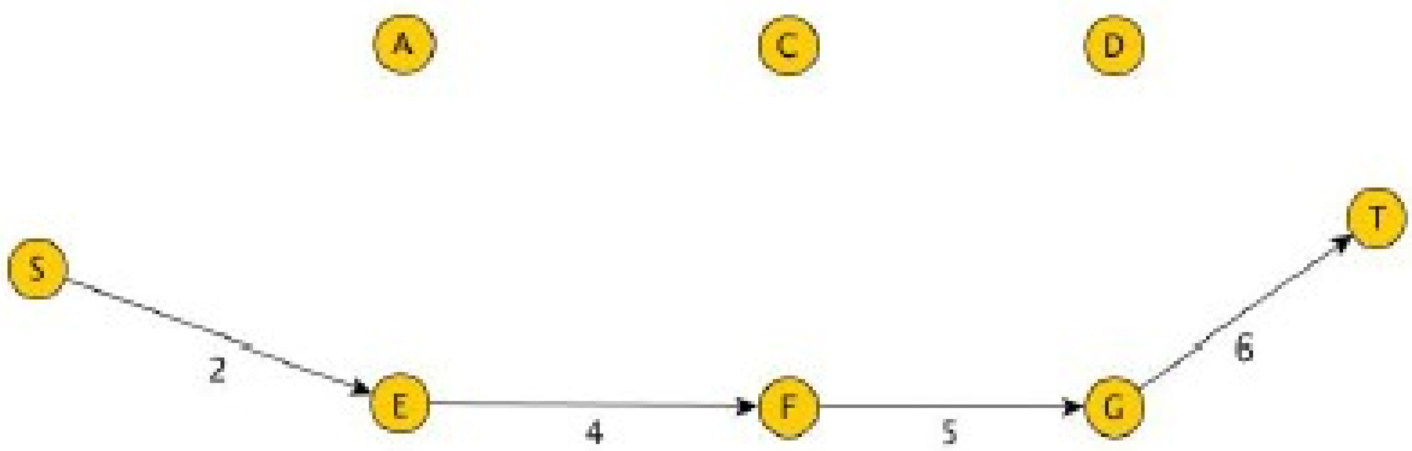
Ejemplo 3.1 *Veamos cómo se puede incrementar un flujo a partir de semicaminos incrementables. Consideremos la siguiente red en la que en cada arista está indicada la capacidad.*



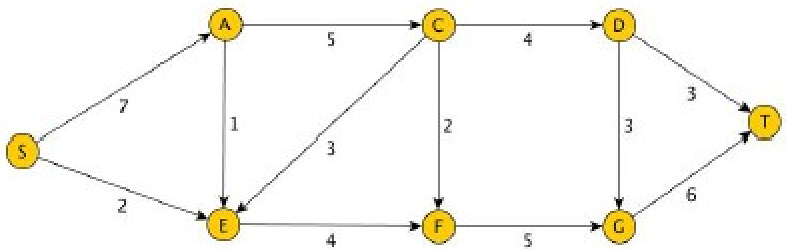
Ejemplo 3.1 *Veamos cómo se puede incrementar un flujo a partir de semicaminos incrementables. Consideremos la siguiente red en la que en cada arista está indicada la capacidad.*

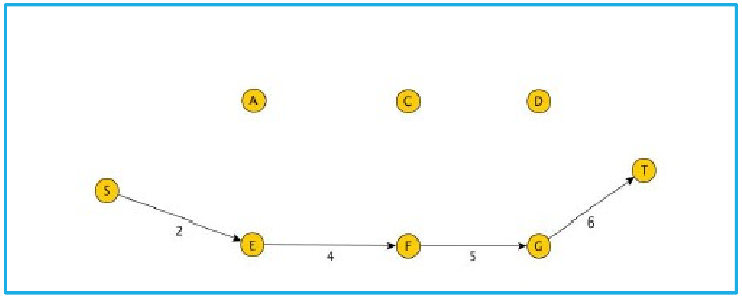


Buscamos un camino de S a T que sea incrementable.

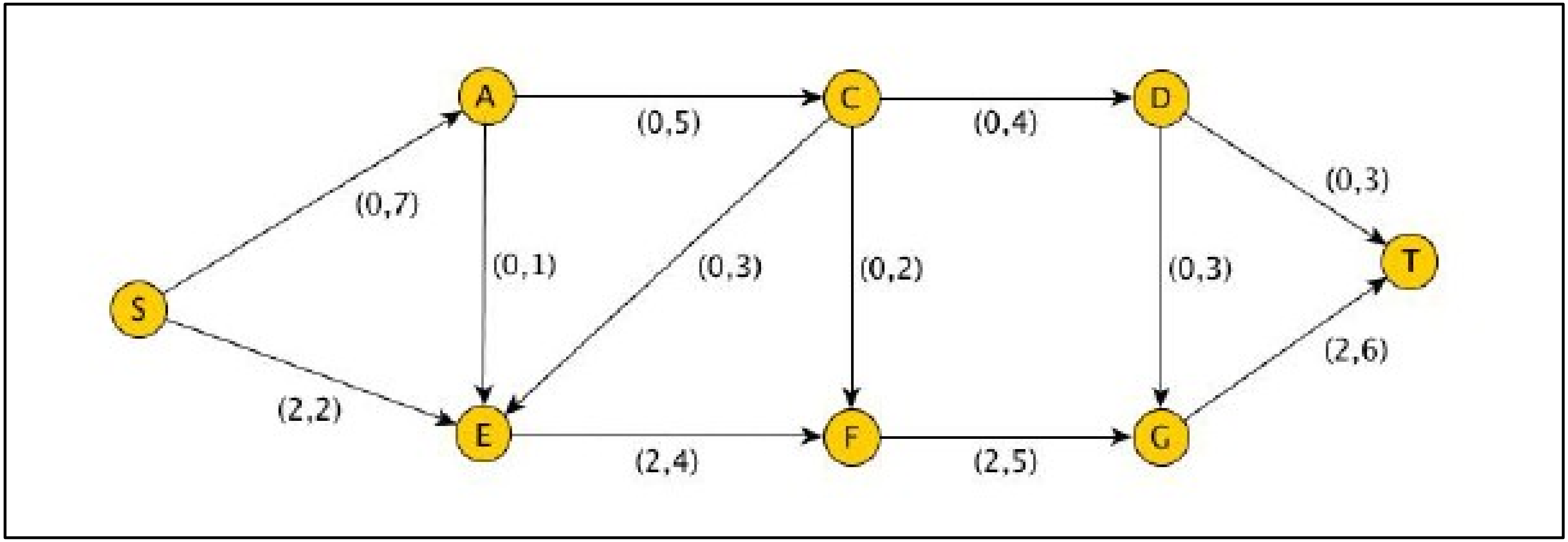


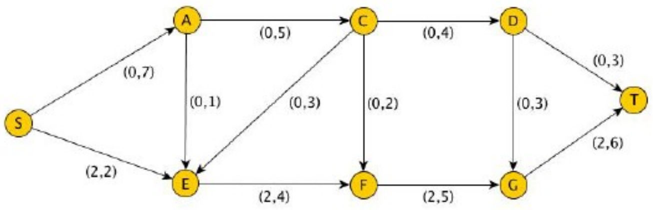
Ejemplo 3.1 *Veamos cómo se puede incrementar un flujo a partir de semicaminos incrementables. Consideremos la siguiente red en la que en cada arista está indicada la capacidad.*



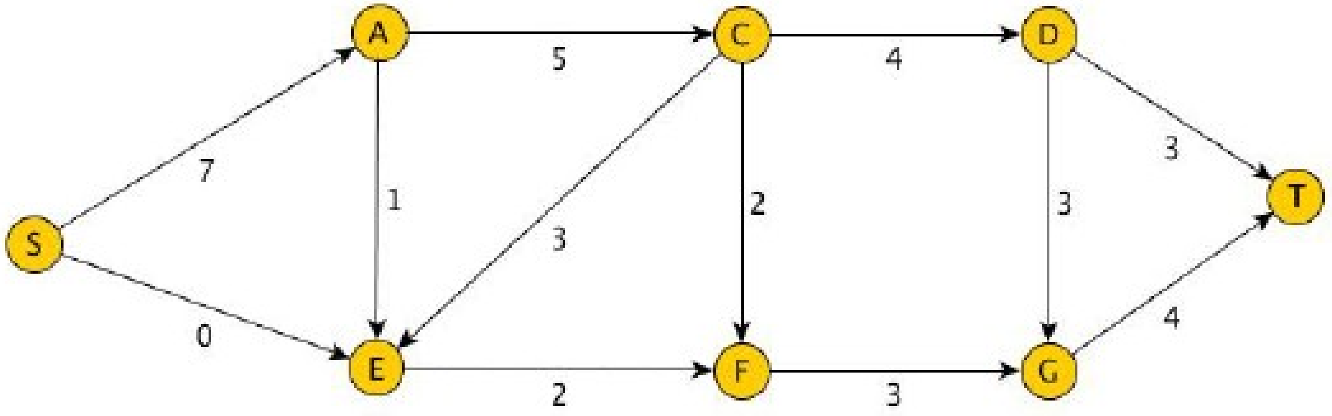


Enviamos el flujo máximo posible a través de camino incrementable.

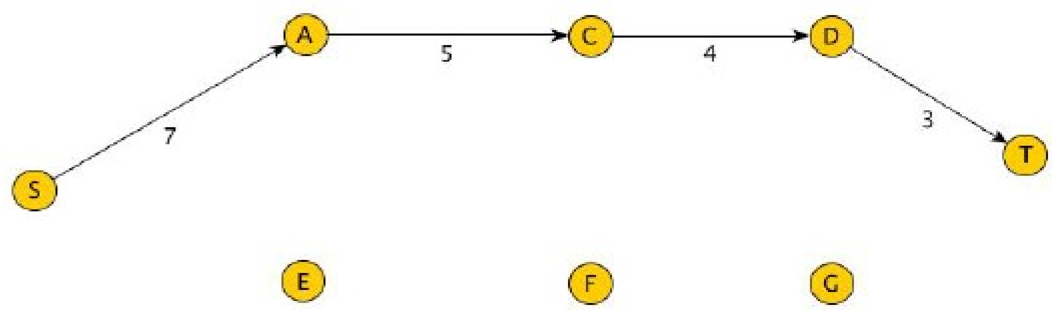




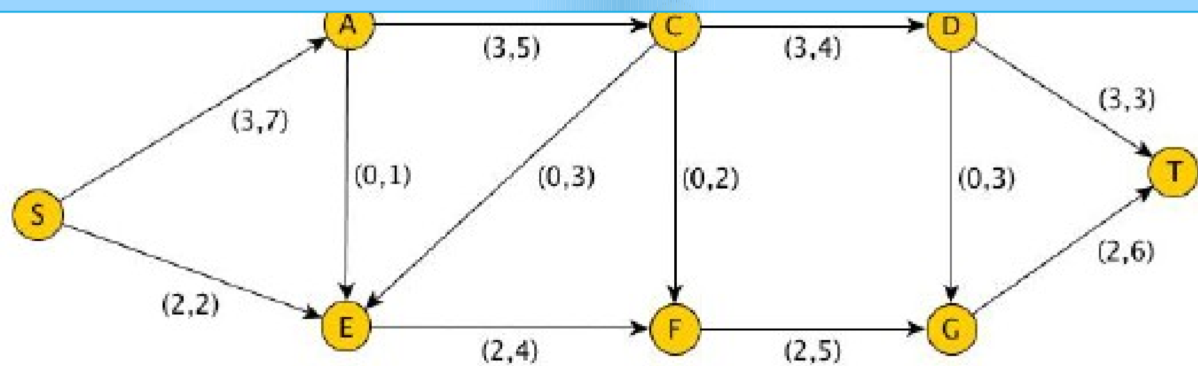
Si calculamos la diferencia entre capacidad y flujo obtenemos las "nuevas" capacidades que indican en cuànto se puede incrementar el flujo todavía.



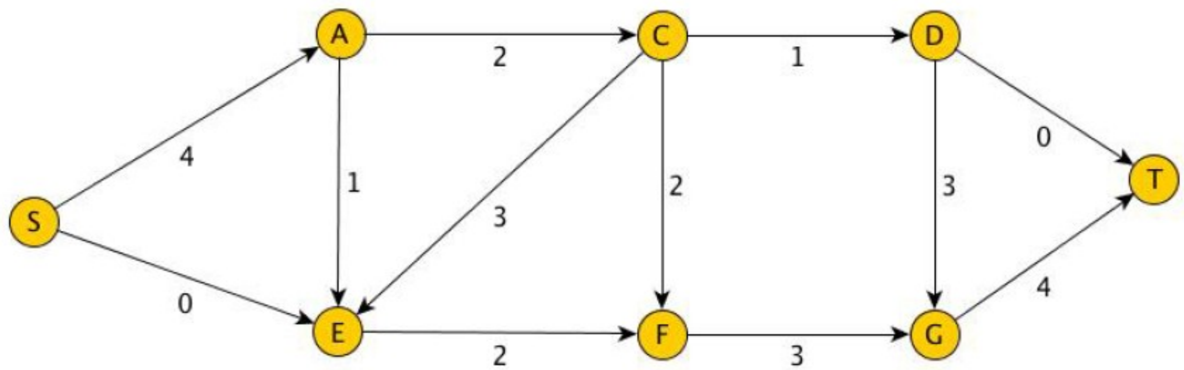
Buscamos otro camino semicamino incrementable.



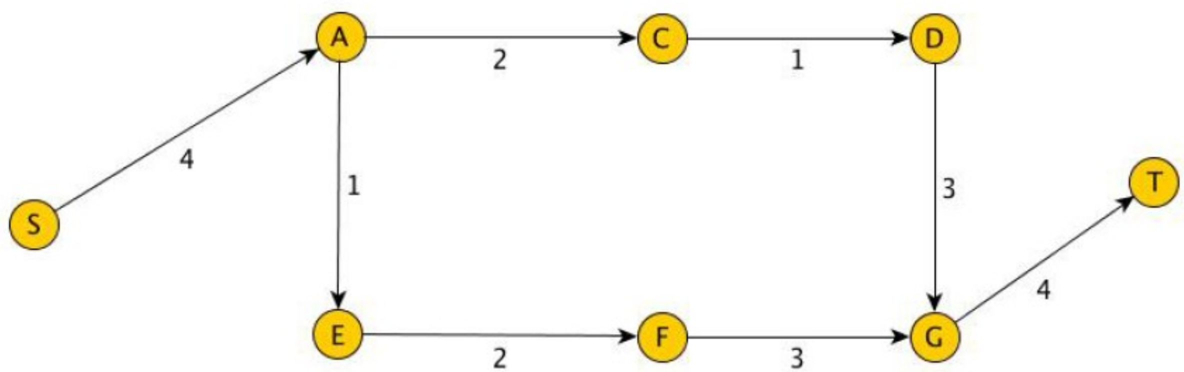
Enviamos el flujo máximo posible a través de camino incrementable.



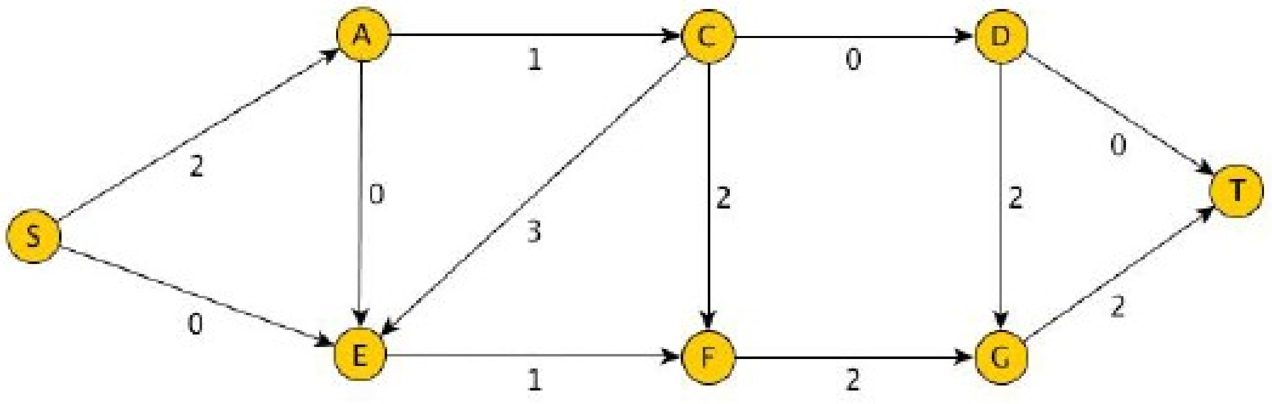
Calculamos nuevamente la diferencia entre capacidades y flujos.



Los siguientes semicaminos muestran como se puede incrementar el flujo en 2 unidades, en 1 utilizando el semicamino S,A,B,D,G,T *y en otra unidad utilizando* S,E,F,G,T.

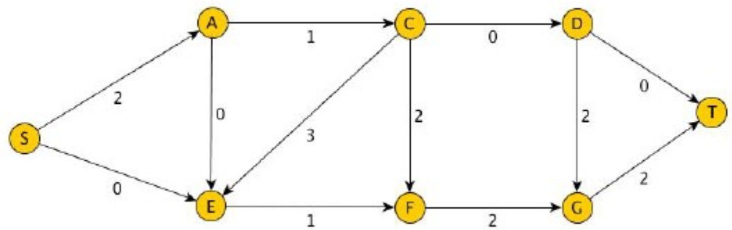


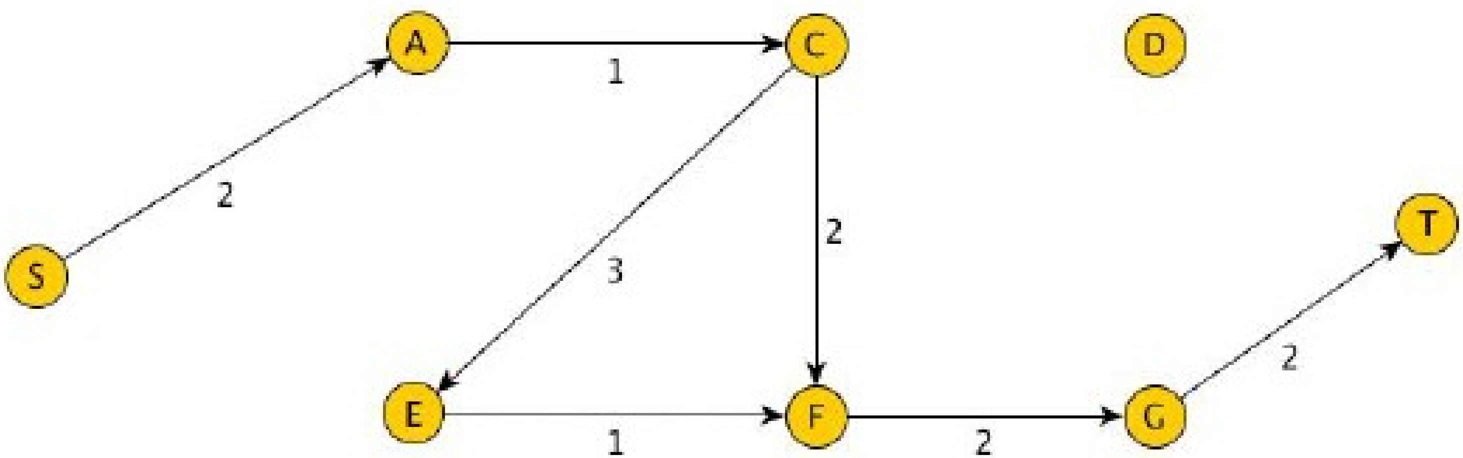
La diferencia entre capacidad y flujo en estos momentos es



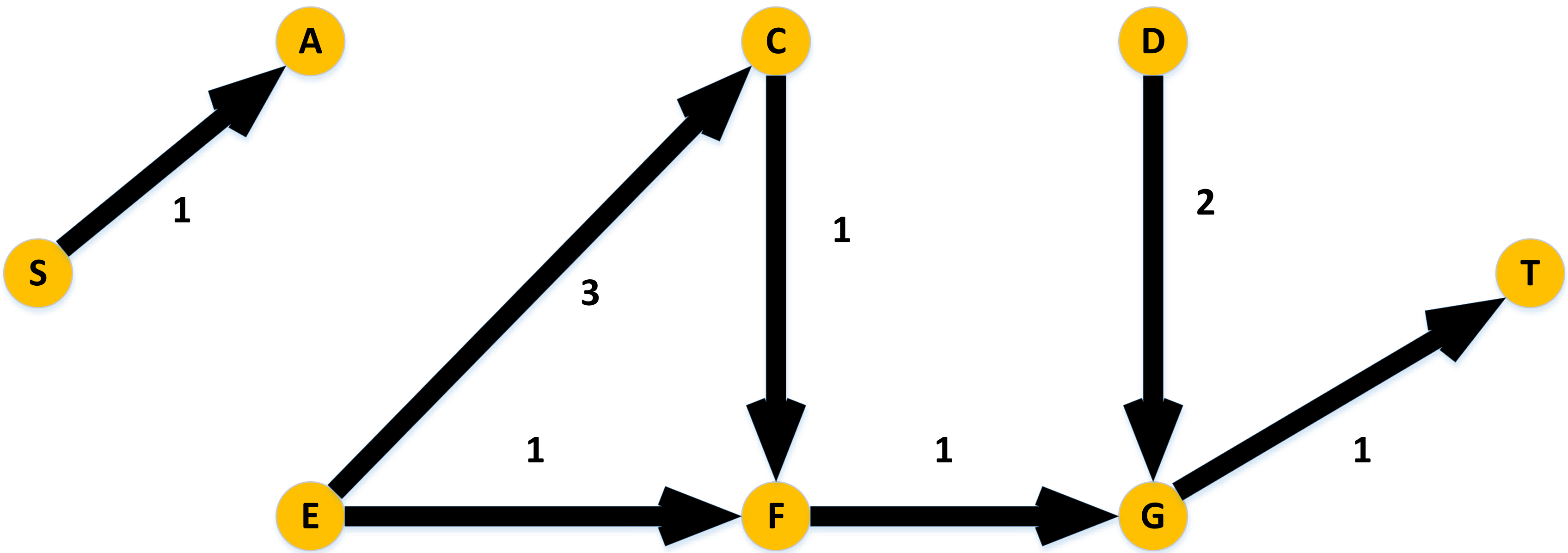
FLUJOS Y REDES

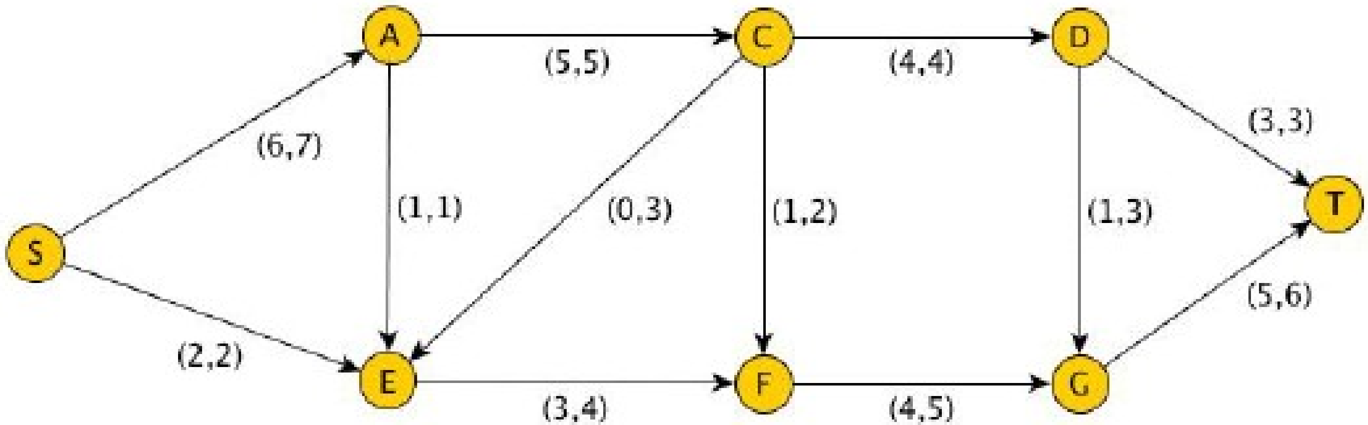
La diferencia entre capacidad y flujo en estos momentos es



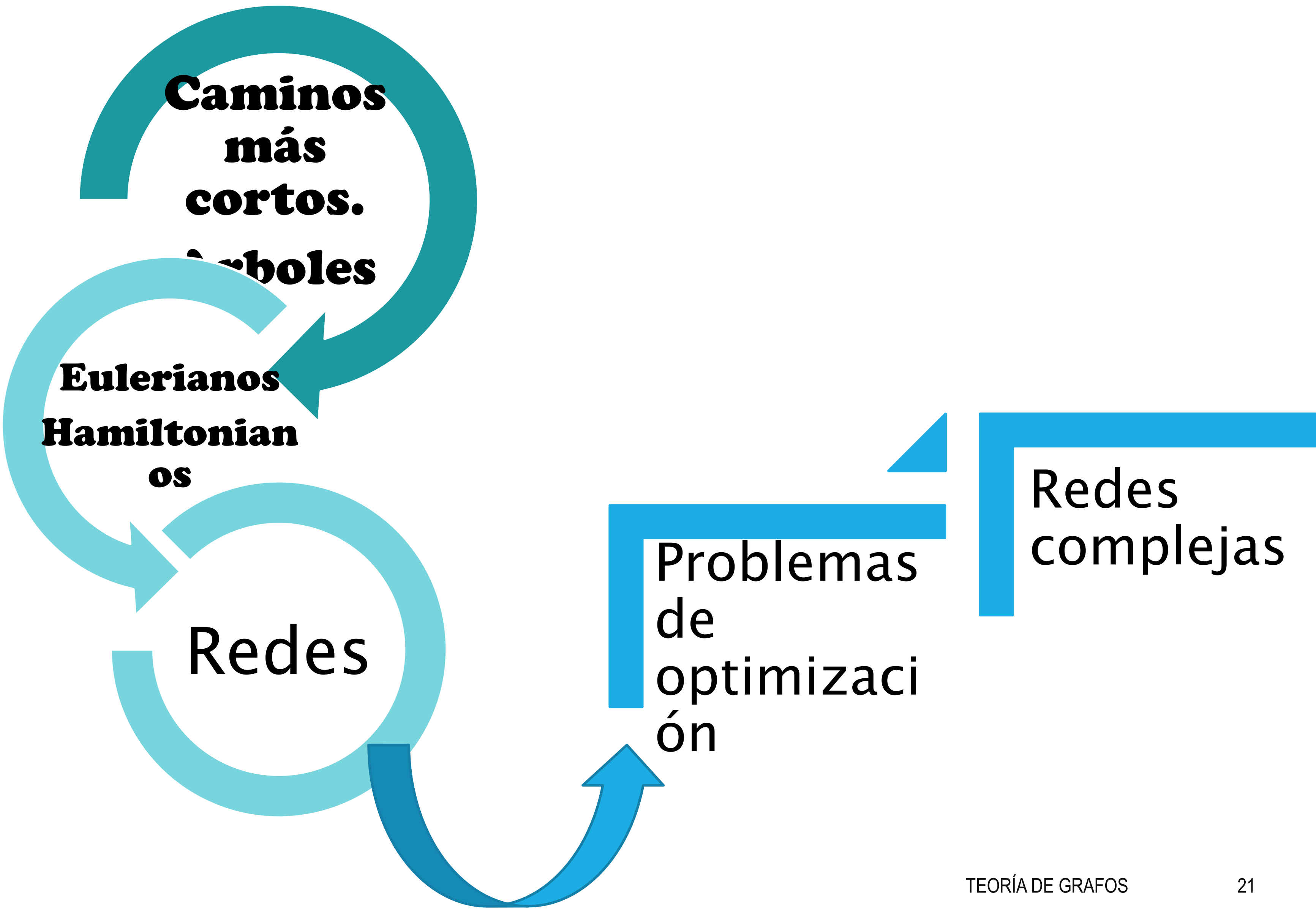


¿Qué habría que hacer ahora?


A
C
D
1
1
2
S
3
T
1
1
1
E
F
G



Este flujo es máximo ya que no hay semicaminos incrementables de S a T.


Caminos más cortos.
rboles
Eulerianos
Hamiltonianos
Redes
Problemas de optimización
Redes complejas