Pràctiques 5 i 6: Successions

1 Successions amb *Mathematica*

Una successió de nombres reals $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és, en realitat, una funció real definida en el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$, és a dir, una funció $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Per exemple, la successió de terme general $a_n = n^2$ pot veure's com la funció que assigna, a cada nombre natural n, el valor $a(n) = n^2$ (el seu quadrat). Per tant, en *Mathematica* podem definir una successió de la mateixa manera que una funció real de variable real. En el cas de l'exemple:

```
a[n_]=n^2
```

Els termes successius $a_1, a_2, a_3, \ldots$ són `a`[1], `a`[2], `a`[3], etc.

Si volem observar "empíricament" el comportament d'una successió, podem definir una llista amb uns quants elements de la mateixa amb la instrucció `Table`. Per exemple:

```
Table[a[n],{n,1,10}]
```

ens mostrarà una llista amb els 10 primer elements de la succesió $\{a_n\}$[1].

Si el que volem és representar gràficament alguns termes de la successió, podem utilitzar la instrucció DiscretePlot, que ens mostrarà la gràfica de la successió de forma similar a Plot, però tenint en compte només els valors naturals de la variable. Per exemple

```
DiscretePlot[a[n],{n,1,10}]
```

ens mostrarà la gràfica dels 10 primer termes de la successió.

[1] `Table`$[f, \{n, a, b, c\}]$ dóna com a resultat una llista de dels valors de f fent variar n des de a fins a b, però de c en c unitats. Per exemple:

In[1] :=`Table`[$\mathtt{n}^3, \{n, 1, 10, 2\}$]
Out[1] =$\{1, 27, 125, 343, 729\}$

2 Límits amb *Mathematica*

El programa *Mathematica* pot resoldre límits de successions de la següent manera:

```
Limit[successió, n -> Infinity]
```

Per exemple:

```
In[2] := Limit[(6n^2 +1)/(3-2n^2),n-> Infinity]
Out[2] = -3
In[3] := Limit[((2n +1)/(3n -Sqrt[n]))^(n+2),n-> Infinity]
Out[3] = 0
In[4] := Limit[Sqrt[n+1](Sqrt[n+1]-Sqrt[n-1]),n-> Infinity]
Out[4] = 1
In[5] := Limit[((n +1)/n )^(Sqrt[n]/(Sqrt[n+1]-Sqrt[n])),n-> Infinity]
Out[5] = e^2
```

L'últim exemple és una mostra de que *Mathematica* resol indeterminacions del tipus 1^∞ (mitjançant la fórmula d'Euler).

3 Successions definides per recurrència

La instrucció `If` permet definir, en *Mathematica*, una successió definida per recurrència. La seua sintaxi és la següent:

```
If[Condició,v,f]
```

Condició és la condició a avaluar. Si aquesta és certa, `If` retorna v i, si és falsa, retorna f. Per exemple, si volem definir la successió

$$\begin{cases} a_1 & = & 2 \\ a_n & = & 3 \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

utilitzarem

```
a[n_] = If[ n==1, 2, 3*a[n-1] ]
```

Si volem definir la successió de Fibonacci:

$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

utilitzarem

```
a[n_] = If[ n==1, 1, If[ n==2, 1, a[n-1]+a[n-2] ] ]
```

La instrucció que s'utilitza en *Mathematica* per calcular el terme general d'una successió definida per recurrència és la següent:

```
Rsolve[{Equació, Condicions inicials}, a[n], n]
```

on *Equació i condicions inicials* és l'equació de la recurrència, *Condicions inicials* són els valors dels r primers termes de la successió (separats per comes), on r és l'ordre de la recurrència, `a[n]` és el "nom" de la successió dins de l'equació, i n és la variable de la qual depèn la successió.

Per exemple, si volem resoldre la recurrència lineal $a_n = 2a_{n-1} + 1$ amb condició inicial $a_1 = 1$:

```
In[6] := Clear[a]
In[7] := RSolve[{a[n]==2a[n-1]+1,a[1]==1},a[n],n]
Out[6] = {{a[n]->-1+2^n}}
```

El terme general de la successió és, per tant, $a_n = 2^n - 1$. La instrucció `Clear[a]` esborra valors anteriors de la funció $a(n)$, per evitar errors.

Si volem resoldre la recurrència lineal $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = n4^n$ amb condicions inicials $a_1 = 1$ i $a_2 = 4$ escriurem:

```
In[8] := Clear[a]
In[9] := RSolve[{a[n+2]-4a[n+1]+3a[n]==n 4^n,a[1]==1, a[2]==4},a[n],n]
Out[7] = {{a[n]->1/18 (-13-2^(5+2 n)+5 3^(2+n)+3 2^(1+2 n) n)}}}
```

L'expressió del terme general de la solució és, per tant:

$$a_n = \frac{1}{18}\left(-13 - 2^{5+2n} + 5 \cdot 3^{2+n} + 3 \cdot 2^{1+2n} \cdot n\right).$$

Mathematica també pot resoldre equacions en recurrència sense especificar les condicions inicials. El resultat final, per tant, serà la *solució general* de la recurrència. Per exemple:

```
In[10] := Clear[a]
In[11] := RSolve[a[n+2]-4a[n+1]+3a[n]==n 4^n,a[n],n]
Out[8] = {{a[n]->1/9 2^(2 n) (-16+3 n)+C[1]+3^n C[2]}}
```

indica que la *solució general* de la recurrència

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = n4^n$$

és

$$a_n = C_1 + C_2 3^n + \frac{1}{9} 2^{2n}(3n - 16), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$