PRÀCTICA 6: ORTOGONALITAT I PROJECCIONS ORTOGONALS
(Resum)

PRELIMINARS:

Considerarem dos vectors u i v (vectors columna en *Scilab*, no ho oblidem) de la mateixa dimensió.

1. **Producte escalar:**
   Es el producte component a component. En matemàtiques escribim $u \cdot v$. En *Scilab,*
   $$u \cdot v = u' * v$$
   Observa que hem de trasposar u per a poder realitzar un producte fila×col i obtenir un escalar. Els vectors u i v són ortogonals si el seu producte escalar és nul. Escribim aleshores $u \perp v$.

2. **Norma:**

   Es la longitud d'un vector (el seu mòdul) que escriurem $||u||$ i es calcula com $||u||=\sqrt{u \cdot u}$. En *Scilab,*
   $$||u|| = norm(u)$$

Un vector es diu unitari si la seua norma és la unitat. Si v és qualsevol vector (no nul), el vector $u = v/||v||$ és un vector unitari en la direcció de v.

3. **Distància:**

   Com en $\mathbb{R}$,la distància entre dos vectors,escriurem $d(x, y)$, és la norma de la seua diferència. En *Scilab*,
   $$d(x, y) = norm(x - y)$$

4. **Subespai columna. Ortogonalitat:**

   Si A és una matriu $m \times n$, la podrem escriure en *Scilab* com
   $$A = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

on $u_1, u_2, \ldots, u_n$ són les seues columnes. Anomenem subespai columna de A i escribim $Col(A)$ a l'espai vectorial de $\mathbb{R}^m$ generat per aquestes columnes; és a dir, al conjunt de les combinacions lineals d'aquests vectors. Així, $v \in Col(A)$ si i només si existeix un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = A * x$, ja que el producte d'una matriu per un vector es pot veure com el producte de cada component del vector per cada columna de la matriu.

El subespai ortogonal a $Col(A)$, que escriurem $Col(A)^{\perp}$, és el subespai format pels vectors perpendiculars a totes les columnes de A. D'ací,
$$x \in Col(A)^{\perp} \iff A' * x = 0$$
ja que haurem de trasposar A per a convertir columnes en files (recorda que x és vector columna) i poder multiplicar fila×col. En conseqüència,
$$Col(A)^{\perp} = \text{kernel}(A')$$

PROYECCIÓ D'UN VECTOR SOBRE UNA RECTA:

Considerem el vector $x \in \mathbb{R}^n$ i la recta W generada pel vector $a \in \mathbb{R}^n$. El vector x es pot descomposar de forma única com

$$x = x_p + x_\perp$$

on $x_p \in W$ és la seua projecció ortogonal[1] sobre W i $x_\perp$ ortogonal a W. Es tracta de trobar la projecció[2] x_p . Per a fer-ho tindrem en compte dues condicions:

- $x_p \in W$ doncs existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_p = \lambda * a$ (hem de trobar λ)
- $x_\perp = x - x_p = x - \lambda * a$ és ortogonal a W, doncs

$$a' * (x - \lambda * a) = 0 \Longleftrightarrow a' * x = \lambda a' * a = \lambda * norm^2(A) \Longrightarrow \lambda = \frac{a' * x}{norm^2(A)}$$

D'ací[3],

$$x_p = \frac{(a' * x)}{norm^2(A)} * a$$

PROYECCIÓ D'UN VECTOR SOBRE UN SUBESPAI:

Es, simplemene, una generalització del cas anterior. Una recta està generada per un vector (columna en *Scilab)* i un subespai W en general està generat per r vectors columna[4][5] de $\mathbb{R}^n$; és a dir, $W = Col(M)$, on

$$M = [u_1, u_2, \ldots, u_r]$$

De nou $x \in \mathbb{R}^n$ i com abans $x = x_p + x_\perp$, amb $x_p \in W$ i $x_\perp \in W^\perp$.Es tracta de trobar la projecció ortogonal x_p tenint en compte que:

- $x_p \in W$ així que x_p és combinació lineals de les columnes de A i per tant, existe existeix $y \in \mathbb{R}^r$ tal que $x_p = M * y$ (hem de trobar y)
- $x_\perp = x - x_p = x - M * y$ és ortogonal a W, doncs

$$M' * (x - M * y) = 0 \Longrightarrow (M' * M) * y = M' * x$$

Ara, en el cas més favorable, si la matriu $M' * M$ $(r \times r)$ és invertible[6] (i això ocorre si les columnes de M són vectors linealment independents), podem aïllar $y = inv\,(M' * M) * M' * x$, d'on

$$x_p = M * y = \underbrace{M * inv\,(M' * M) * M'}_{\text{Matriu projecció, } P_W} * x$$

així que la projecció de x sobre W es calcula, simplement, multiplicant la matriu projecció[7] P_W per x.

[1] Observa que el vector x (si no és paral.lel a la recta) forma, amb la seua projecció, un triangle rectangle amb catets x_p i $x_\perp$. La hipotenusa és x.

[2] En el butlletí s'escriu $\mathrm{Proj}_W(x)$.

[3] Aquesta expressió per a x_p és la que apareix en el formulari. En el butlletí es dedueix a partir del vector q unitari en la direcció de la recta. Ambdues són equivalents.

[4] El sistema generador $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ del butlletí. Ací estem simplificant la notació.

[5] Si $r = 1$, W és una recta; si $r = 2$, W serà un pla i així successivament.

[6] Si no ho és, resoldrem el sistema $(M' * M) * y = M' * x$, trobem y (qualsevol solució condueix a la mateixa projecció) i calculem $x_p = M * y$. Si la matriu és invertible es pot fer així o multiplicant P_W per x. Ambdues condueixen al mateix resultat.

[7] Recorda que en P_W, M no és més que la matriu que té per columnes els generadors de W.