Pràctica 1: Breu introducció a Mathematica

1 Introducció

En enginyeria es realitzen una gran quantitat de càlculs i manipulacions matemàtiques a mà. La majoria d'aquests càlculs és possible realitzar-los per mitjà d'un programa d'ordinador com *Mathematica*, el qual és una ferramenta útil per a realitzar manipulacions simbòliques i numèriques, així como per a treballar amb gràfics.

Mathematica disposa d'una gran quantitat de funcions ja definides (funcions incorporades) amb les quals es poden cobrir els aspectes més generals de les enginyeries. A més a més, *Mathematica* és programable; qualsevol funció no disponible pot ser generada.

Mathematica consisteix en dues parts: el *Kernel* (nucli) i el *Front End* (façana). El *Kernel* és el motor computacional; procesa i calcula els resultats; és idèntic en els diversos ordinadors. El *Front End* és la interfície entre el *Kernel* de *Mathematica* i l'usuari. En el nostre cas el *Front End* està muntat sobre *Windows.*

El *Front End* i el *Kernel* estan separats. Primer escriurem l'ordre o instrucció que volem executar. El *Front End* l'enviarà al *Kernel* només quan se li ordene que ho faça. Tal petició s'efectua mitjançant les tecles

$$\Uparrow \ + \text{ENTER}$$

és a dir, mantenint premuda la tecla $\Uparrow$ heu de prémer ENTER.

El *Kernel* del *Mathematica* es carregarà automàticament en la memòria de l'ordinador quan li demaneu que calcule la primera operació.

Mathematica és un llenguatge interpretat. Açò vol dir que llig expressions, avalua el resultat i després ho mostra a la pantalla.

Utilitzar *Mathematica* és com mantenir una conversa. Es fa una pregunta i *Mathematica* respon amb un resultat. *Mathematica* assigna un número seqüencial a cada parella *input/output.* El n-èsim *input* de l'usuari porta l'encapçalament *In[n]* i el corresponent *output* de l'ordinador el *Out[n].*
En escriure les diverses ordres cal posar atenció en

- la diferència entre majúscula i minúscula.
- el tipus de parèntesi o clau.
- la quantitat d'espais.
- la puntuació (comes, punts, ...).

2 Operacions aritmètiques elementals

Mathematica pot efectuar operacions aritmètiques com ho faria una calculadora. *Mathematica* treballa amb nombres enters, decimals, racionals i complexos. *Mathematica* representa les quantitats tan exactament com siga possible i intenta donar el resultat de la mateixa forma que les dades.

Amb *Mathematica* es poden utilitzar la majoria dels símbols matemàtics als quals estem acostumats i alguns més. Veurem, de seguida, alguns exemples.

$x + y$	Suma
$x - y$	Diferència
$x * y$ (o $x\ y$)	Producte
x/y	Divisió
$x\hat{\ }y$	Potència

Recordeu que, perquè *Mathematica* faça els càlculs indicats, heu de prémer les tecles $\Uparrow$ + ENTER.

Per exemple, calculeu:

$$\mathit{In[1]}\ := \ 3 + \frac{2\hat{\ }(3\hat{\ }2 - 4) - 2}{3 \ \cdot \ 5}$$

$$\mathit{Out[1]}\ = \ \boxed{}$$

El resultat correcte és 5.

Noteu que una volta efectuada la primera operació apareixen

In[1]:= la instrucció o entrada que heu introduït
Out[1]= el resultat o eixida que ens dóna l'ordinador

Les dades d'eixida (els *Out*) queden emmagatzemades a la memòria de l'ordinador i es poden aprofitar utilitzant el símbol $\%n$, on n és el número que apareix acompanyant el *Out* corresponent. El símbol % (sense argument n) representa a l'última dada d'eixida *Out*.

2.1 Funcions no incorporades

Com s'ha indicat en la introducció, *Mathematica* és programable i, per tant, podem afegir funcions a *Mathematica*. Un exemple molt senzill és definir una funció que eleve al quadrat el seu argument:

```
In[2] := f[x_]=x^2
Out[2] = x^2
In[3] := f[2]
Out[3] = 4
```

El caràcter _ en la part de l'esquerra és molt important. No cal posar un espai en blanc en la part de la dreta de la definició. Una funció pot tenir més d'un argument. Ací definim la funció $g(x, y) = x * y$:

```
In[4] := g[x_,y_]= x*y
Out[4] = xy
In[5] := g[2, 3]
Out[5] = 6
```

2.2 Sumatoris

El sumatori $\sum_{i=n}^{m} f(i)$ en *Mathematica* s'expressa com

```
Sum[f[i], {i, n, m}]
```

Per exemple, per a fer la suma dels deu primers nombres naturals, fem

```
In[6] := Sum[i, {i, 1, 10}]
Out[6] = 55
```

En la seua forma més general la funció `Sum` té la següent sintaxi:

```
Sum[expr, {i, min, max, pas}]
```

Per exemple, per a calcular la suma dels nombres naturals imparells menors que 10, fem

```
In[7] := Sum[i, {i, 1, 10, 2}]
Out[7] = 25
```

3 Aproximacions numèriques

Hem vist com *Mathematica* treballa amb aritmètica exacta. Sovint això no serà possible o, si més no, no serà operatiu. Com veurem més endavant molts problemes s'han de resoldre de forma aproximada. *Mathematica* utilitza la instrucció `N` per traure aproximacions d'un resultat amb la precisió que desitgem. Per exemple, calculem l'arrel quadrada de 2: introduïu

In[8] := `Sqrt[2]`

Out[8] = $\boxed{}$

Mathematica ens torna la mateixa expressió, perquè la forma exacta d'expressar $\sqrt{2}$ és aquesta per ser un nombre irracional.

Llavors, per traure'n una aproximació utilitzarem el comandament N

In[9] := `N[Sqrt[2]]`

Out[9] = $\boxed{}$

Per defecte *Mathematica* treballa amb nombres de sis xifres. Podem canviar el nombre de dígits amb què *Mathematica* ens presenta l'aproximació:

In[10] := `N[Sqrt[2],20]`

Out[10] = $\boxed{}$

4 Possibilitats simbòliques i algebraiques

A més de treballar amb expressions numèriques, *Mathematica* pot manipular expressions algebraiques. Abans de veure'n alguns exemples cal que us fixeu en la sintaxi de les diverses instruccions:

- La primera lletra sempre s'escriu amb majúscula
- Els arguments van sempre entre claudàtors [ ]
- Si admet més d'un argument aquests van separats per comes

Aquestes regles també les segueixen les funcions i constants predefinides en *Mathematica*, per exemple

Sin[x]   Tan[0]   Log[2]   Sqrt[8]   . . .

E   Pi   I   . . .

Veurem tot seguit alguns exemples d'instruccions que serveixen per a operar amb expressions algebraiques:

In[11] := `Expand[(a+b)^2]`

Out[11] = $\boxed{}$

In[12] := `Factor[x^2-y^2]`

Out[12] =

In[13] := `Factor[6x^3+35 x^2 y + 58 x y^2 + 21 y^3]`

Out[13] =

En escriure el producte de variables x per y s'ha de deixar un espai en blanc entre les dues o posar-hi un $*$. Açò no és necessari quan escrivim el producte d'un número per una variable.

La funció `Apart` descomposa una fracció algebraica en suma de en fraccions simples:

In[14] := $\frac{\mathtt{x}}{(\mathtt{x}+2)(\mathtt{x}-2)}$

Out[14] = $\frac{\mathtt{x}}{(\mathtt{x}+2)(\mathtt{x}-2)}$

In[15] := `Apart[%]`

Out[15] =

La funció `Together` combina dues o més fraccions a comú denominador i simplifica els factors comuns:

In[16] := `Together[%]`

Out[16] =

La instrucció `D` calcula la derivada d'una funció respecte de la variable que desitgem:

In[17] := `D[Cos[E^x], x]`

Out[17] =

Aquesta instrucció admet arguments opcionals que ens permeten calcular derivades segones, terceres,. . . :

In[18] := `D[x^2 E^x,{x, 2}]`

Out[18] = $\boxed{}$

Quan tenim una funció predefinida $f[x]$ *Mathematica* calcula també les successives derivades seguint la notació habitual: $f'[x]$, $f''[x]$, etc. Per exemple:

In[19] := `f[x_] = E^(-x^2);`

In[20] := `f'[x]`

Out[19] = $\boxed{}$

Per calcular límits tenim la instrucció `Limit`, per exemple

In[21] := `Limit[1/x, x->0]`

Out[20] = $\boxed{}$ La fletxa $->$ s'escriu tal com apareix, és a dir, amb el guionet $-$ i el signe de major que $>$.

In[22] := `Limit[Sin[x]/x,x->0]`

Out[21] = $\boxed{}$

In[23] := `Limit[Sin[1/x], x->0]`

Out[22] = $\boxed{}$

Podem calcular **límits laterals** afegint l'opció `Direction`. Quan li assignem el valor -1 calcula el límit per la dreta i quan li assignem el valor 1 calcula el límit per l'esquerra. Per exemple:

In[24] := `Limit[Abs[x]/x, x->0, Direction->-1]`

Out[23] = $\boxed{}$ ens calcula $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ i

In[25] := `Limit[Abs[x]/x, x->0, Direction->1]`

Out[24] = $\boxed{}$ ens calcula $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Per resoldre equacions *Mathematica* té la instrucció `Solve`:

In[26] := `Solve[x^2-1==0, x]`

Out[25] = $\boxed{}$

Pareu atenció a la forma d'escriure les equacions, amb dos signes =

Un sistema d'equacions s'expressa mitjançant una llista d'equacions i una llista de variables:

In[27] := `Solve[{x^2+y==0,x-y^2==0},{x,y}]`

Out[26] = $\boxed{}$

La instrucció `NSolve` calcula aproximacions de les solucions d'una equació. Resulta especialment útil quan la instrucció `Solve` no pot resoldre l'equació de forma exacta.

In[28] := `NSolve[x^5+x-1==0,x]`

Out[27] = $\boxed{}$

5 Assignacions

Copieu l'expressió

In[29] := $\dfrac{\texttt{ab} - \texttt{a\^{}b}}{\texttt{ab} - 1}$

Out[28] = $\dfrac{\texttt{ab} - \texttt{a\^{}b}}{\texttt{ab} - 1}$

i suposeu que voleu avaluar-la en $a = 3, \quad b = -2$. No necessitem definir-la com una funció. Simplement apliquem una regla o llista de regles, amb la instrucció /. (sense cap espai entre / i .):

In[30] := `% /. {a->3,  b->-2}`

Out[29] = $\boxed{}$

Avalueu-la en $a = 1, \quad b = 1$ $\boxed{}$

Què ocorre?