Pràctica 8: Sèries numèriques i sèries de potències

1 Sèries numèriques

1.1 Sumatoris amb *Mathematica*

Mathematica disposa de la instrucció *Sum* per al càlcul de sumes iterades. Així doncs

```
Sum[n, {n,1,100}]
```

calcula la suma dels 100 primers naturals= $\boxed{}$;

```
Sum[1/n, {n, 1, 1000}]
```

troba el valor de $\sum_1^{1000} \frac{1}{n}$= $\boxed{}$

També realitza sumes infinites:

```
N[Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}], 10]
```

ens calcula la suma de la sèrie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} =$ $\boxed{}$

1.2 Sumació aproximada de sèries

Si una sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent, aleshores té una suma finita S, és a dir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Com que les sumes parcials S_n tenen per límit S, un valor aproximat de la suma de la sèrie serà S_n.

Per exemple, calculeu:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \boxed{}$
- Les sumes parcials
  - $S_{10} = \boxed{}$
  - $S_{30} = \boxed{}$
  - $S_{50} = \boxed{}$
  - $S_{100} = \boxed{}$

i observeu com cada suma parcial millora l'aproximació anterior.

Quan calculem una suma aproximada, és desitjable avaluar també de quina magnitud és l'error comès, és a dir, acotar l'error. Direm que $\epsilon > 0$ és una cota de l'error comés en aproximar S per S_n si $|S - S_n| < \epsilon$.

Per falta de temps i per simplicitat, ens dedicarem només a l'estudi de les cotes de l'error de sèries alternades, és a dir, sèries del tipus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ on $a_n \geq 0$. En aquest cas, si $\{a_n\}$ és decreixent i tendeix a zero (condicions de Leibniz) aleshores es verifica que

$$|S - S_n| < a_{n+1}.$$

2 Sèries de potències

2.1 Polinomis de Taylor

En Càlcul Numèric solen utilitzar-se els polinomis, funcions relativament senzilles, per a proximar altres funcions d'estudi més complex. Donada una funció f, es tracta de trobar un polinomi de grau menor o igual que n que aproxime la funció amb una certa precisió. els *polinomis de Taylor* són un tipus de polinomis utilitzats molt freqüentment per aproximar funcions.

El Teorema de Taylor permet escriure, donada una funció f derivable fins a ordre $n+1$ n un interval $I = \,]a-h, a+h[$, l'expressió, para $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

sent

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

el *polinomi de Taylor* de f *centrat en* a, d'ordre n, i on

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

és el *Residu de Lagrange* corresponent, en el qual s representa cert valor entre a i x. Quan $a = 0$ parlem de *polinomi de McLaurin de* f o *desenvolupament de McLaurin de* f. El polinomi de Taylor **aproxima** a la funció per a valors x que estan prop de a.

Quan f és infinitament derivable en I, aleshores es pot construir el polinomi de Taylor de qualsevol ordre i, per tant, es pot definir la *sèrie de Taylor* de f centrada en a com

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

La suma parcial n-èssima d'aquesta sèrie és el polinomi de Taylor de grau n. La serie és convergent a $f(x)$ si i només si

$$\lim_n R_n(x) = 0.$$

Aleshores, en este cas, és evident que

$$\lim_n P_n(x) = f(x)$$

i podem escriure (per a $x \in I$)

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

En general, una expressió del tipus

$$\sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n$$

s'anomena *sèrie de potècies* centrada en a.

Una sèrie de potències centrada en a convergeix en algun interval de centre a i de radi R

$$]a-R,\ a+R[$$

anomenat *interval de convergència* de la sèrie de potències.

La sèrie de potències és convergent per a qualsevol x de l'interval de convergència (és a dir, si $|x-a| < R$) i és divergent fora d'aquest interval (és a dir, si $|x-a| > R$). Als extrems de l'interval la sèrie pot ser convergent o divergent. El radi R de l'interval de convergència s'anomena *radi de convergència* de la sèrie de potències.

Les propietats d'una funció f definida mitjançant una sèrie de potències en el seu interval de convergència són similars a les d'un polinomi. En particular, f tindrà derivada, la representació de la qual en sèrie de potències es pot calcular derivant terme a terme la sèrie inicial. Anàlogament, es poden calcular integrals integrant terme a terme.

Concretament, si
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n$$
amb radi de convergència R, f és derivable en $]a-R,\ a+R[$ i
$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n\,(x-a)^{n-1} \qquad , \qquad x \in\ ]a-R,\ a+R[\,.$$
A més a més, si $x \in\ ]a-R,\ a+R[$,
$$\int f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n+1)}\,(x-a)^{n+1} \quad + C$$

2.2 Polinomis de Taylor amb *Mathematica*

La instrucció `Series[expr, {x, a, n}]` calcula els n primers termes de la sèrie de Taylor de `expr` respecte a la variable x i centrada en a. Per exemple:

```
In[1] := Series[Sin[x], {x, 0, 9}]
Out[1] = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 + x^9/362880 + O[x]^10
```

ens calcula els 9 primers termes de la sèrie de Taylor de $\sin(x)$ centrada en 0 (és a dir, la sèrie de Mc Laurin). El terme $O[x]^{10}$ representa el *residu*. Si, a partir de l'expressió anterior, volem *capturar* només el polinomi de Taylor de grau 9 (és a dir, la mateixa expressió sense el residu) escriurem

```
In[2] := Normal[%]
Out[2] = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 + x^9/362880
```