Descomposición LU de una matriz cuadrada

Matrices diagonales

Un matriz cuadrada se dice que es **diagonal** si todos los números que no estén en la diagonal principal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

Ejemplos

1. La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.
2. La matriz identidad de orden n es una matriz diagonal, para cualquier n

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Cualquier matriz nula (con todos sus entradas igual a cero) es diagonal.

Matrices triangulares

Sea A una matriz cuadrada.

- A es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$ (es decir, por debajo de la diagonal principal hay ceros).
- A es **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$ (es decir, por encima de la diagonal principal hay ceros).

Ejemplos

1. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es triangular superior.
2. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es triangular inferior.

Nota: Las matrices diagonales son, en particular, matrices triangulares superiores y triangulares inferiores.

Matrices triangulares

Propiedades de las matrices triangulares

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n y α un número real. Si A y B son matrices triangulares superiores (triangulares inferiores (diagonales)) entonces:

1. $A + B$, $\alpha \cdot A$, y $A \cdot B$ son triangulares superiores (triangulares inferiores (diagonales)).
2. A es invertible si y sólo si $a_{ii} \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Además, A^{-1} es también triangular superior (triangular inferior (diagonal)).

Propiedades de las matrices elementales

1. Las matrices elementales de **tipo 1**, $E_{i,j}$, **no son triangulares**,
2. Las matrices elementales de **tipo 2**, $E_i(\alpha)$, **son diagonales**,
3. Las matrices elementales de **tipo 3**, $E_{i,j}(\alpha)$, son
   - **triangulares superiores** cuando $i < j$ y
   - **triangulares inferiores** cuando $i > j$.

Ejemplos

$$E_2(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{diagonal}} \qquad E_{12}(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}}$$

$$E_{21}(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{inferior}}} \qquad E_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{no es} \\ \text{triangular}}}$$

Inversas de las matrices elementales

Todas las matrices elementales son invertibles y además sus inversas son del mismo tipo. Concretamente:

1. $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$
2. $(E_i(\alpha))^{-1} = E_i(\frac{1}{\alpha})$ (recordad que $\alpha \neq 0$)
3. $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$

El resultado anterior es fácil de deducir si pensamos en términos de operaciones elementales: la inversa de una matriz elemental será otra matriz que multiplicada por ella a izquierda de la matriz identidad. Por tanto, estamos buscando realizar una operación elemental que "deshaga" la operación asociada a esa matriz.

Descomposición LU de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A, podemos factorizarla como el producto $A = L \cdot U$ donde U es una matriz triangular superior y L es una matriz triangular inferior o bien la permutación de una triangular inferior.

Cálculo de las matrices L y U

$$A \overset{Op_1}{\rightarrow} E_1 \cdot A \overset{Op_2}{\rightarrow} E_2 \cdot E_1 \cdot A \rightarrow \cdots \overset{Op_k}{\rightarrow} \underbrace{E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1}_{\text{invertible}} \cdot A = U$$

$$\text{Luego} \quad A = (E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot U = \underbrace{E_1{}^{-1} \cdot E_2{}^{-1} \cdots E_k{}^{-1}}_{L} \cdot U$$

- Si sólo hacemos operaciones elementales de Tipo II y Tipo III (con $i > j$), esas matrices elementales (y también sus inversas) serán todas triangulares inferiores y por tanto la matriz L será triangular inferior.
- Si en algún momento del proceso utilizamos operaciones elementales de Tipo I, la matriz L será una permutación de una triangular inferior.

Descomposición LU de una matriz cuadrada

Notas

- Al aplicar el Algoritmo de Gauss para obtener una matriz triangular superior nunca se utilizan operaciones de Tipo III con $i < j$ (luego mediante este proceso podemos obtener una descomposición LU de la matriz).
- No es necesario que U sea escalonada, sólo triangular superior.
- Una vez aplicado el Algoritmo de Gauss, la matriz L se obtiene multiplicando las inversas de las matrices elementales asociadas a las operaciones utilizadas (en el mismo orden de actuación): $L = {E_1}^{-1} \cdot {E_2}^{-1} \cdots {E_k}^{-1}$. Como esas inversas son matrices elementales, también podemos calcular esas multiplicaciones a izquierda como operaciones sucesivas sobre la última matriz.
- Si sólo efectuamos operaciones elementales de Tipo III con $i > j$ para obtener U entonces L será triangular inferior con unos en la diagonal principal.

Ejemplo

Calcula una descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primero hallamos una matriz triangular superior U a partir de la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = U$$

Este proceso puede interpretarse matricialmente como:

$$E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{31}(-1) \cdot A = U$$

Multiplicando por la inversa de ese producto de matrices obtenemos L:

$$L = \left(E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{31}(-1)\right)^{-1} = \left(E_{31}(-1)\right)^{-1} \cdot \left(E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$$

Ejemplo (continuación)

Calculamos las inversas de las matrices elementales:

$$(E_{31}(-1))^{-1} = E_{31}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = E_{32}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = E_{31}(1) \cdot E_{32}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

En este último paso podemos multiplicar los dos matrices elementales o simplemente realizar la operación asociada a la matriz $E_{31}(1)$ (Fila 3+Fila 1) sobre la matriz $E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejemplo (continuación)

Finalmente la descomposición LU de la matriz A es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{U}$$

Ejercicio: Calcula una descomposición LU de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Descomposición LU de una matriz cuadrada

Propiedad

Si A es una matriz cuadrada y $A = L \cdot U$ (donde L y U se han obtenido con el proceso descrito anteriormente) entonces A es invertible si y sólo si U es invertible.

Luego si tenemos una matriz cuadrada A factorizada como $L \cdot U$ es muy fácil saber si es invertible. Como U es triangular, bastará con comprobar si los elementos de la diagonal de U son todos no nulos (pues en ese caso, U será invertible) y, por la propiedad anterior, A también será invertible.

Si $A = L \cdot U$ es una descomposición de A, podemos resolver cualquier sistema de ecuaciones de la forma $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, es decir cuya matriz de coeficientes sea A, transformándolo en dos sistemas más sencillos. Para ello sustituimos $A = L \cdot U$ en la expresión del sistema:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (L \cdot U) \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L \cdot (\underbrace{U \cdot \vec{x}}_{\vec{y}}) = \vec{b}.$$

Si llamamos $\vec{y}$ al vector columna $U \cdot \vec{x}$, el sistema quedará de la forma

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b}.$$

Este sistema es siempre COMPATIBLE DETERMINADO pues L es una matriz invertible. Una vez obtenido el vector solución $\vec{y}$, procederemos a resolver el segundo sistema:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{y}.$$

Por tanto, la resolución del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (donde $A = L \cdot U$) se reduce a la resolución de dos sistemas triangulares:

$$\begin{cases} 1^\circ) \quad L \cdot \vec{y} = \vec{b} & \text{(por sustitución progresiva)} \\ 2^\circ) \quad U \cdot \vec{x} = \vec{y} & \text{(por sustitución regresiva)} \end{cases}$$