Pràctica 7: Aproximació de solucions d'equacions

L'objectiu d'aquesta pràctica és aproximar la solució d'una equació del tipus $f(x) = 0$ aplicant el mètode de la Bisecció i el mètode de Newton.

El mètode de la Bisecció està basat en el Teorema de Bolzano, que afirma que si una funció contínua té signe oposat en els extrems d'un inverval tancat i acotat, aleshores s'anul·la en un valor de l'interior de l'interval:

Teorema de Bolzano. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una funció contínua tal que $f(a)$ i $f(b)$ són diferents de zero i tenen signes oposats, aleshores existeix un nombre real $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

La demostració d'aquest teorema proporciona les idees bàsiques del mètode de la Bisecció per al càlcul aproximat d'una solució d'una equació donada. La idea es basa en construir subintervals encaixats de longituds cada vegada menor que contiguen a la solució que busquem.

El mètode de Newton consisteix en construir rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x)$, amb la qual cosa serà necessari que f siga derivable en un interval convenient. Començant d'una estimació inicial x_0 de la solució buscada, trobarem una nova estimació calculant la intersecció $(x_1, 0)$ de la recta tangent a f en el punt $(x_0, f(x_0))$ amb l'eix d'abcisses. El valor x_1 és la nova estimació. Calculant el punt d'intersecció $(x_2, 0)$ de la recta tangent a f en el punt $(x_1, f(x_1))$ amb l'eix d'abcisses, trobem una tercera aproximació x_2. Seguint aquest procés, obtenim una seqüència de valors x_0, x_1, x_2, ... que, en les condicions adequades, convergeixen a la solució de $f(x) = 0$ que busquem.

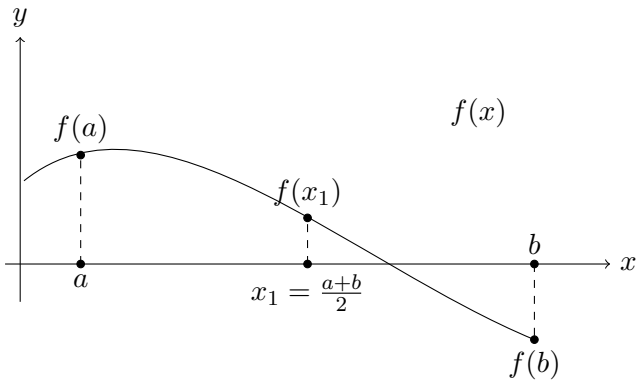
Descriurem a continuació els dos procediments i implementarem les funcions de *Mathematica* que ens permitiran aplicar-los amb facilitat.

1 Mètode de la bisecció

Asumim que coneixem un interval $[a, b]$ tal que la funció $f(x)$ és contínua en $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ (és a dir, estem en les condicions del Teorema de Bolzano) i tal que l'equació $f(x) = 0$ **té una única solució** α en $[a, b]$ (és a dir, tal que la gràfica de la funció f talla a l'eix d'abcisses en només un punt α de l'interval $[a, b]$.

Es considera el punt mig de l'interval $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$



Si $f(x_1) = 0$ aleshores ja tenim la solució de l'equació i parem. En cas contrari, ens quedem amb un dels subintervals $[a_1, b_1] = [a, x_1]$ o $[a_1, b_1] = [x_1, b]$: aquell en el que, en els extrems, la funció f té signes diferents. Agafem, com abans, el punt mig del nou interval: $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Si $f(x_2) = 0$ aleshores ja tenim la solució i parem. En cas contrari procedim igual que abans, agafant un dels subintervals, $[a_2, b_2] = [a_1, x_2]$ o $[a_2, b_2] = [x_2, b_1]$, on hi haja alternància de signe en els extrems. Procedint successivament d'aquesta manera obtenim una successió d'intervals encaixats

$$[a_0, b_0] = [a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

que contenen a la solució α.

En cadascún dels passos del procediment anterior, el punt mig de l'interval $[a_{n-1}, b_{n-1}]$,

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

es considera com una aproximació de la solució exacta, α. L'error comès quan aproximem la solució exacta α per x_n es pot acotar molt fàcilment:

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

La desigualtat anterior queda justificada ja que, en cada pas, l'error es redueix a la meitat:

$$|x_n - \alpha| < \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^{n-1}}\right).$$

D'aquesta manera, a partir de l'interval inicial $[a, b]$, és possible determinar la solució α amb la precisió desitjada.

Per exemple, si volem una aproximació amb 10 decimals exactes, imposant la condició

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-11}$$

podrem calcular el menor nombre d'iteracions n necessàries per a poder obtindre la precisió desitjada.

L'avantatge del mètode de la Bisecció és que és sempre convergent, encara que la velocitat de convergència sol ser més lenta que la del mètode de Newton. El mètode de Newton no sempre convergeix.

Implementació amb *Mathematica*

Una possible implementació de l'algorisme de la Bisecció en *Mathematica* és la següent (la trobareu al fitxer *FuncionsPredefinides.nb*):

```
Biseccio[f_, {a_, b_, M_}] := Module[{an, bn, xn},
  an = a;
  bn = b;
  For[i = 1, i <= M, i++,
   xn = (an + bn)/2;
   If[f[xn] == 0, Break[],
    If[f[an]*f[xn] < 0, bn = xn,
     If[f[xn]*f[bn] < 0, an = xn]
     ]
    ]
   ];
  N[xn, 20]
  ]
```

Donada una equació `f`$(x) = 0$ en les condicions del Teorema de Bolzano en un interval `[a, b]`, `Biseccio[f,{a,b,M}]` dóna com a resultat l'aproximació obtinguda en aplicar `M` iteracions del mètode de la Bisecció (és a dir, `M` aproximacions agafant els punts mitjos dels intervals).

Els extrems dels successius intervals encaixats que s'obtenen en aplicar el mètode venen donats pels valors de les variables locals `an` i `bn`. Les successives aproximacions (punts mitjos dels intervals) es corresponen amb els valors de la variable (local) `xn`.

Dins de la funció `Biseccio` s'utilitza la instrucció For, que serveix per programar un bucle (és a dir, un conjunt de instruccions que es repeteixen un determinat nombre de vegades) i té la següent sintaxi:

```
For[inici, condicio, increment, cos]
```

Aquesta funció executa `inici` i avalua `cos` i `increment` repetidament mentres `condicio` siga veritat. El bucle s'acaba bé quan `condicio` ja no es satisfà, o bé quan apareix la instrucció `Break[]`. Trobarem informació detallada sobre el bucle `For` al següent enllaç: http://reference.wolfram.com/language/ref/For.html

2 Mètode de Newton

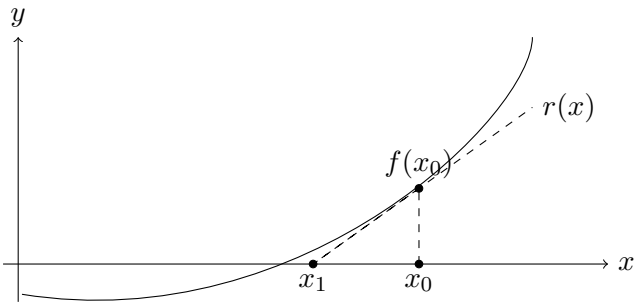
Estudiarem a continuació un altre mètode per calcular les solucions d'una equació $f(x) = 0$. Aquest mètode requereix, en general, menys iteracions que l'anterior,

encara que necessita que la funció f satisfaga més propietats per assegurar la convergència.

Siga $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció de classe C^2, és a dir, amb segona derivada contínua. El mètode de Newton consisteix en canviar l'equació $f(x) = 0$ per una més senzilla. Com les equacions més senzilles que coneixem són les lineals, el que farem serà resoldre l'equació lineal en lloc de l'original.

Considerem un valor inicial x_0 que estiga prop d'una de les solucions de l'equació. Considerem, en el punt $(x_0, f(x_0))$, la recta tangent a la gràfica de f. Aquesta recta té per equació $y = r(x)$, on

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



La funció lineal $r(x)$ pot considerar-se com una bona aproximació a la funció f prop del valor x_0. Així, en lloc de resoldre l'equació $f(x) = 0$, resolem $r(x) = 0$; dit d'una altra manera: calculem el punt d'intersecció del a recta tangent amb l'eix d'abcisses. La solució d'aquesta última equació és:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Podem repetir el procés amb el valor x_1, és a dir, calculem l'equació de la recta tangent de la funció f en el punt $(x_1, f(x_1)$ i calculem la seua intersecció amb l'eix d'abcisses. Així obtenim el punt

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Iterant aquest procés obtindríem una aproximació de la solució de l'equació.

El següent resultat garanteix quan el mètode de Newton proporciona una aproximació d'una solució de l'equació:

Teorema. Siga $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció de classe C^2. Siga $\alpha \in]a, b[$ tal que $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$. Aleshores existeix $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, la successió de valors definida per

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N},$$

convergeix a α.

Implementació amb *Mathematica*

Una possible implementació de l'algorisme de Newton en *Mathematica* és la següent (la trobareu al fitxer *FuncionsPredefinides.nb*):

```
Newton[f_, x0_, M_] := Module[{xn},
  xn = x0;
  For[i = 1, i <= M, i++,
   xn = xn - f[xn]/f'[xn]
   ];
  N[xn, 20]
  ]
```

`f` és la funció f, `x0` és el valor inicial x_0 i `M` és el nombre d'iteracions.