INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS
SESIÓN 4

Antonio Hervás Jorge
2017

OBJETIVOS

1

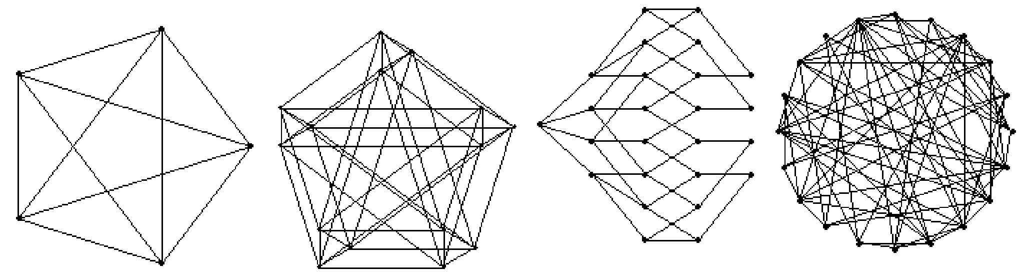
- Vamos a ver grafos con propiedades especiales

2

- Grafos que parece que se parecen, pero que no se parecen tanto.

3

- Sirven para resolver problemas. Veremos los problemas tipo y los algoritmos para resolverlos.



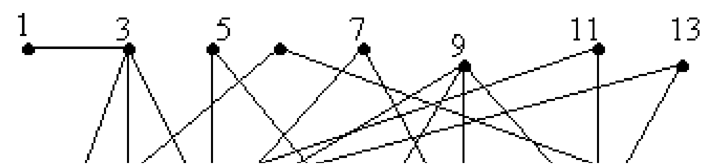
GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

GRAFOS EULERIANOS

que te piden que dibujes una figura, como la de abajo, sin levantar el lápiz del papel ni sobreescribir una línea.

ver este problema podrías ayudarte del concepto de grafo. Si representas la siguiente figura mediante el siguiente grafo:

el problema se traduce en recorrer todas las aristas del grafo exactamente una vez.



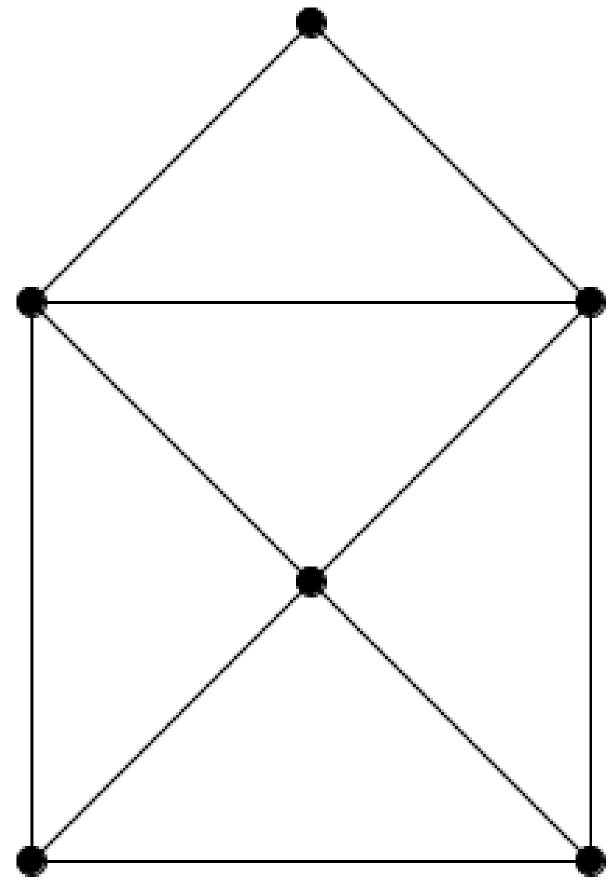
Definición:

Sea G=(V,E) un multigrafo, |V| = n, |E| = m . Diremos que un camino P=(v0,v1,...,vm) es un <v0,vm> CAMINO EULERIANO en G si recorre todas las aristas de G exactamente una vez.

Una solución a nuestro problema sería el siguiente camino Euleriano:

(1, 3, 2, 11, 12, 13, 4, 3, 6, 5, 8, 9, 10, 7, 6, 9, 12, 14)

GRAFOS EULERIANOS



GRAFOS EULERIANOS

Definición:

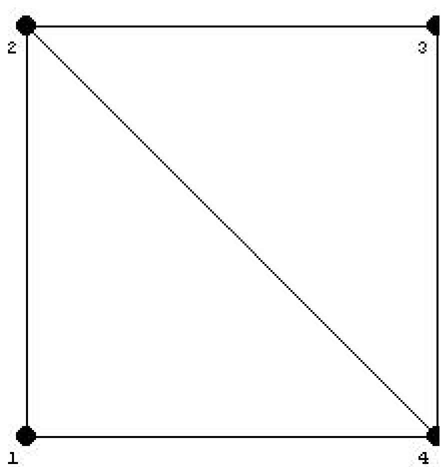
Sea G=(V,E) un multigrafo. Llamaremos TOUR de G a una cadena cerrada que recorre cada arista de G al menos una vez.

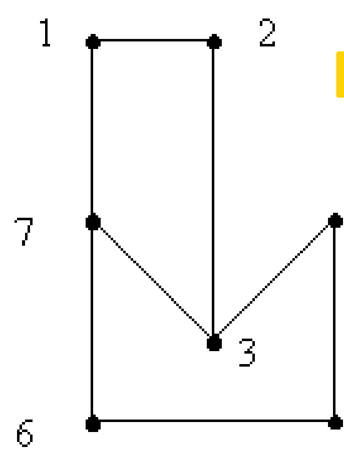
Definición:

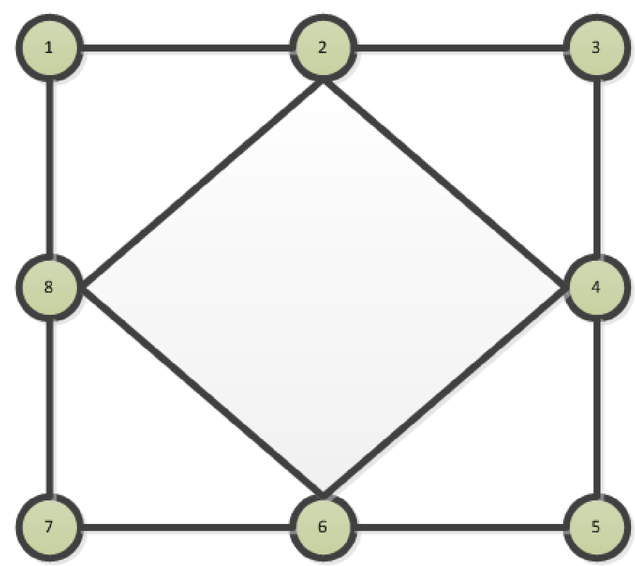
Sea G=(V,E) un multigrafo. Llamaremos CICLO EULERIANO en G a un camino Euleriano cuyos vértices extremos coinciden.

Definición:

Sea G=(V,E) un multigrafo. Diremos que G es EULERIANO si contiene un ciclo Euleriano.







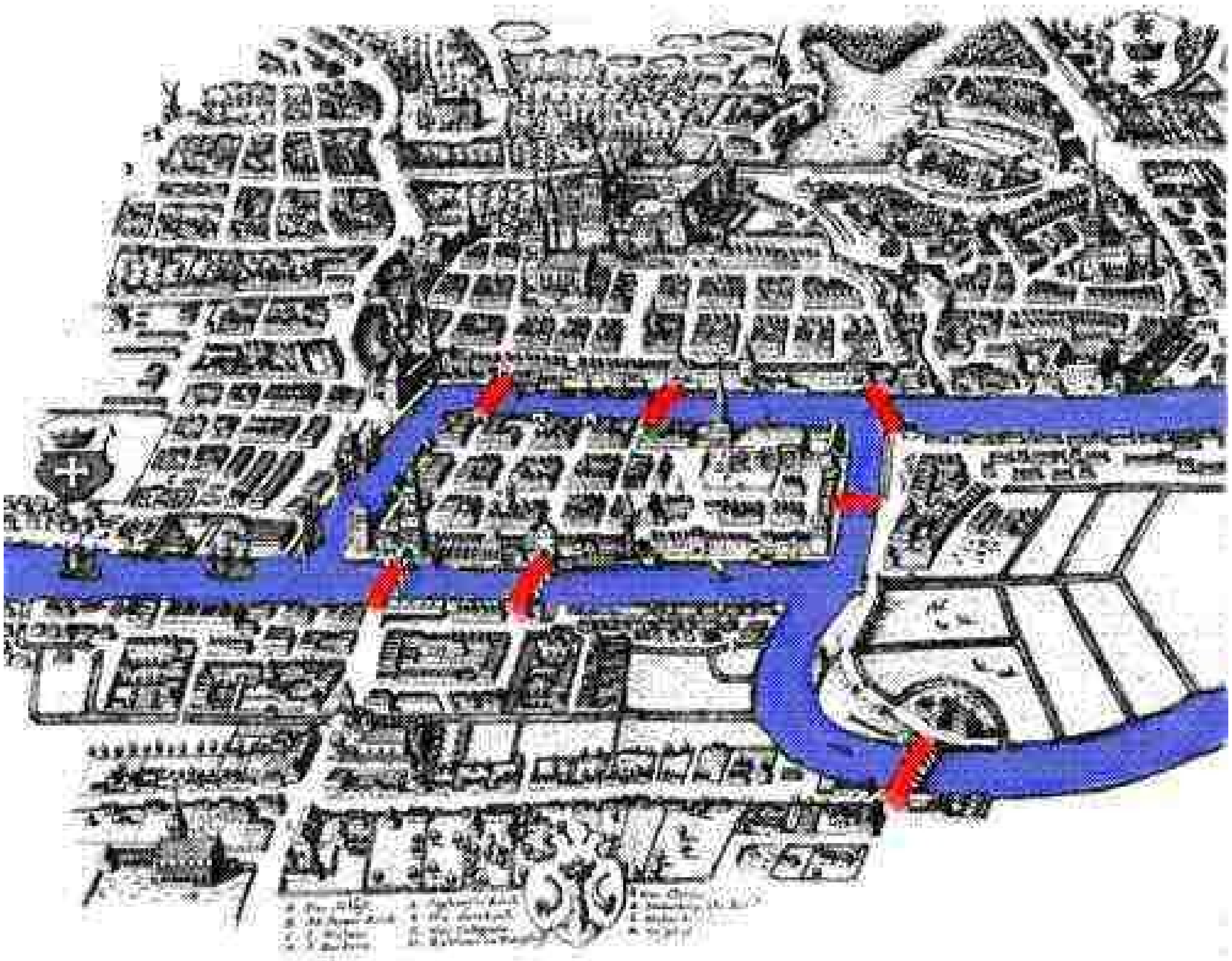
GRAFOS EULERIANOS

"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"

("*Solución de un problema relativo a la geometria de posición*").

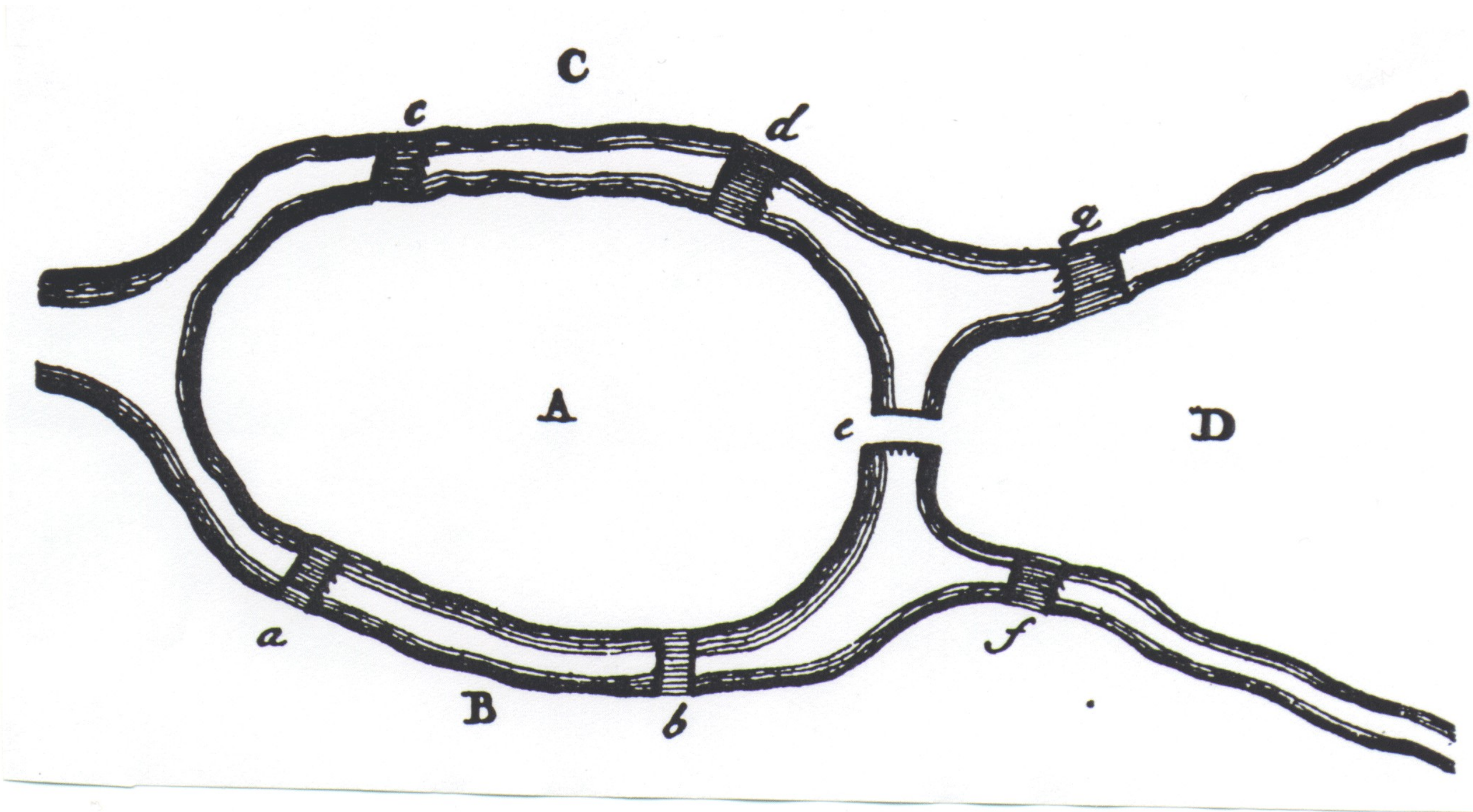
Se considera este articulo como el origen de la Topología i la Teoría de grafos; se trataba de un problema en el que la distancia no era relevante como lo era en la geometría

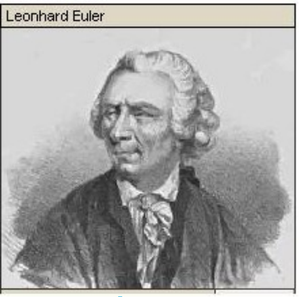
GRAFOS EULERIANOS



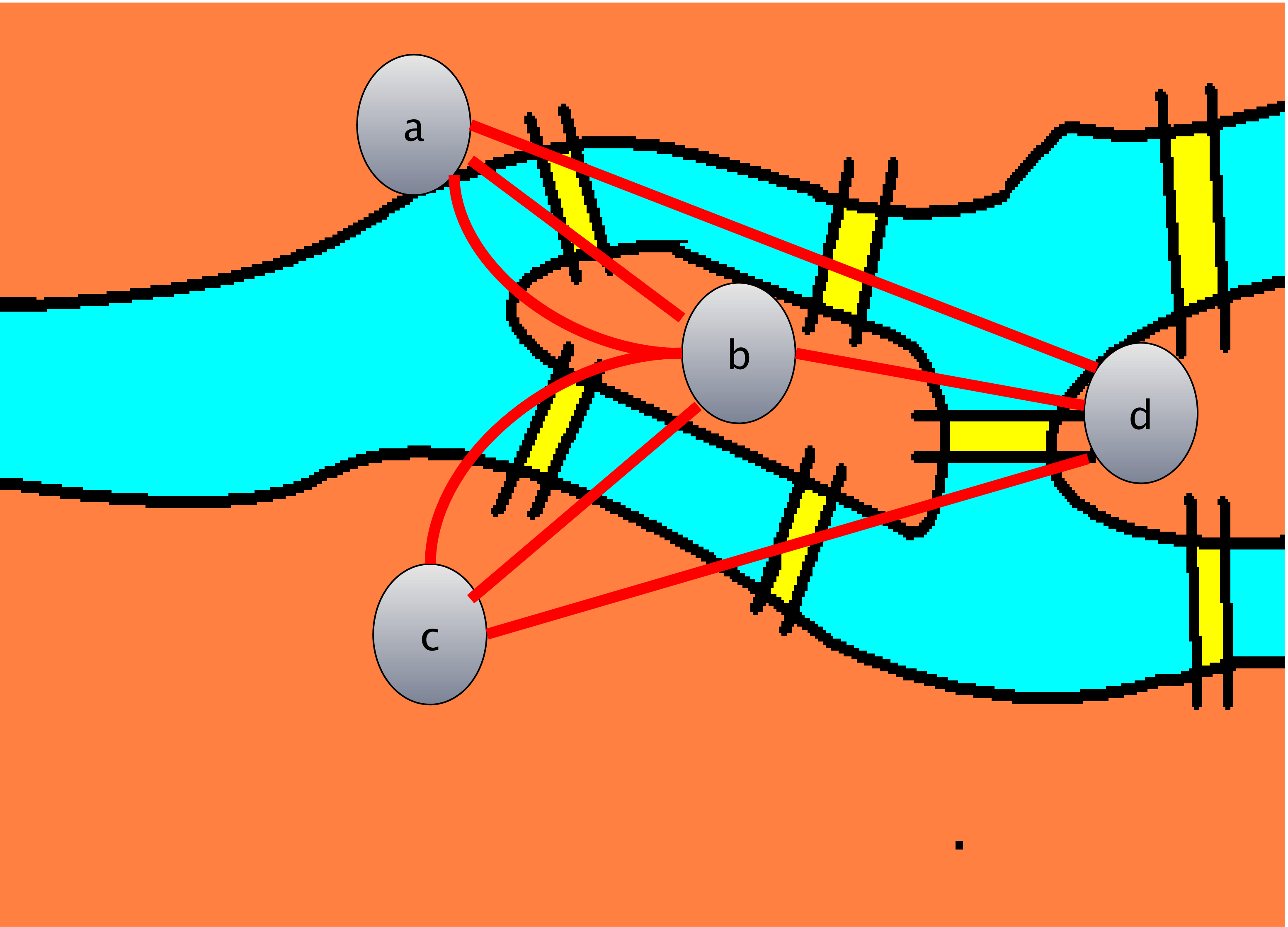
La ciudad de Könisberg, disponía de 7 puentes que cruzaban el río Pregel y unían la ciudad y la isla Keniphopf

GRAFOS EULERIANOS





GRAFOS EULERIANOS



GRAFOS EULERIANOS

Teorema1:

Sea G=(V,E) un multigrafo no dirigido conexo. G es Euleriano si y sólo si no contiene vértices de grado impar.

Teorema 2:

Sea G=(V,E) un multigrafo no dirigido conexo.G es Euleriano si y sólo si E puede particionarse en un conjunto de ciclos disjuntos en G.

Teorema 3:

Sea G=(V,E) un multigrafo conexo no dirigido. G contiene un camino Euleriano si y sólo si contiene exactamente dos vértices de grado impar.

Teorema 4:

Sea G = (V,E) un multigrafo dirigido fuertemente conexo. G es Euleriano si y sólo si el grado de entrada de cada vértice es igual a su grado de salida.

Teorema 5:

Sea G = (V,E) un multigrafo no dirigido unilateralmente conexo. G contiene un camino dirigido Euleriano si y sólo si existen exactamente dos vértices u , v tal que: el grado de entrada de u es una unidad mayor que el de salida, y el grado de salida de v es una unidad mayor que el de entrada; y además,el resto de vértices tiene su grado de entrada y de salida iguales.

GRAFOS EULERIANOS

Regla de Fleury

La regla de la Fleury es un procedimiento que permite encontrar un ciclo euleriano en un grafo euleriano.

La regla consiste en, partiendo de un vértice dado, para ir cruzando todos las aristas del grafo sucesivamente.

Cuando se cruza una arista, esta se elimina del grafo, aunque no se puede atravesar una arista que deje el grafo desconectado en dos componentes conexas no triviales.

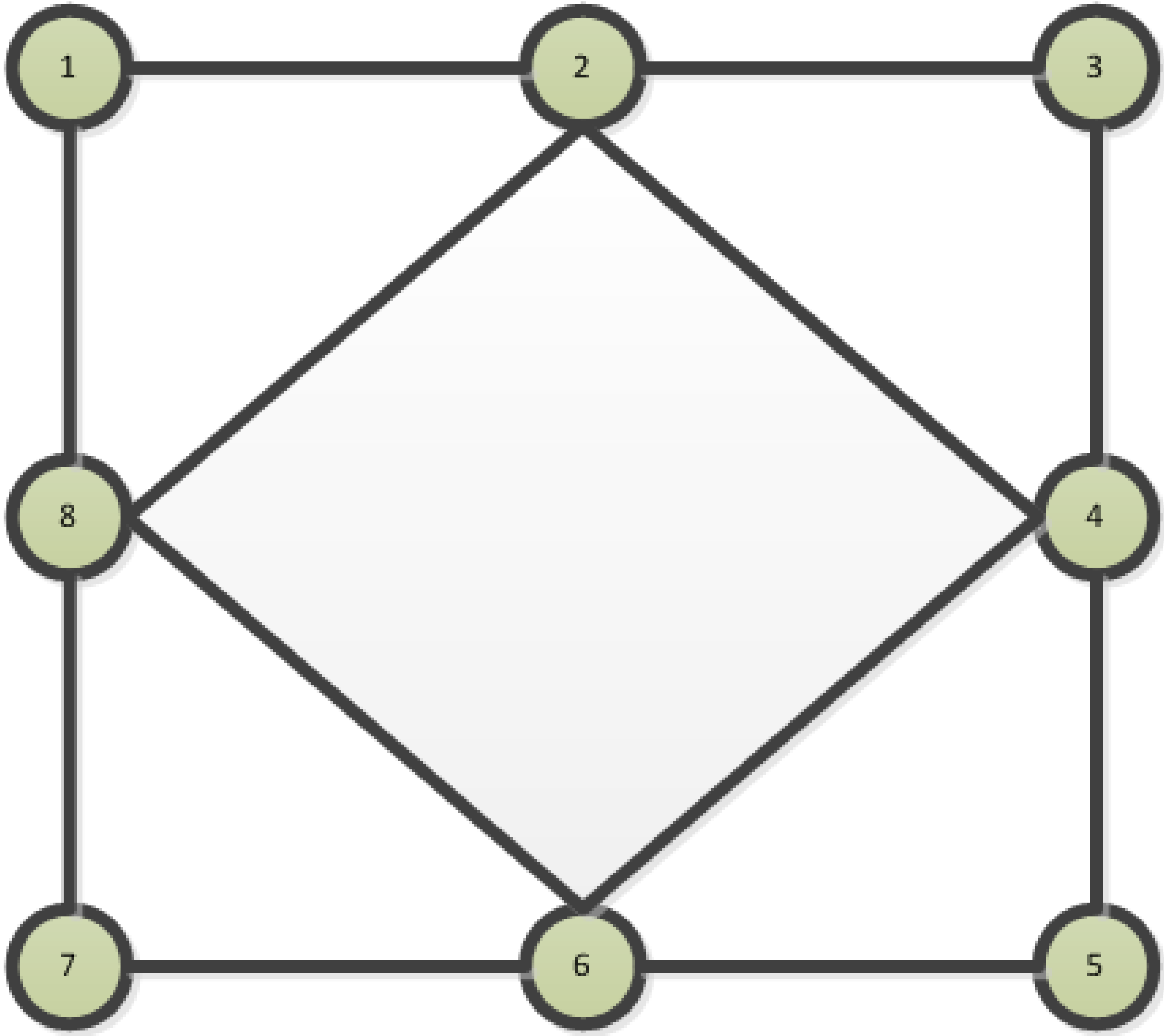
Si es posible volver al punto de partida después de haber eliminado todas las aristas, entonces habremos encontrado un ciclo euleriano y estaremos en condiciones de concluir que el grafo es euleriano.

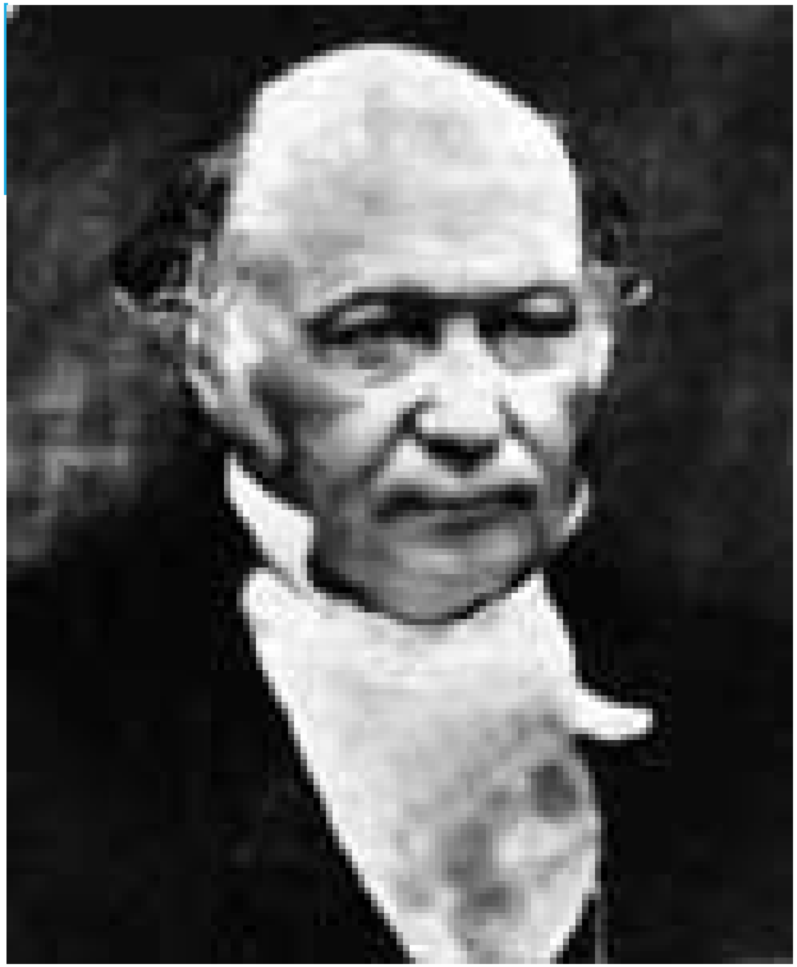
REGLA DE FLEURY:
ALGORITMO

GRAFOS EULERIANOS

El Algoritmo de Fleury permite obtener, si existe, un camino o un ciclo euleriano en un grafo no dirigido G.

Step 1 – Comprobar que G es conexo y no trivial.
Step 2 – Comprobar que se cumple el teorema de Euler.
Si todos lo vértices tienen grado par elegir uno culaquiera si solamente hay dos con grado impar elgir uno de los dos como vértice de partida.
Step 3 – CEuler=(v)
Step 4 – While E(G)≠Ø do
Step 5 – If d(v)=1 then
Step 6 – w = adjacent(v)
Step7 – V(G) = V(G)-{v},
If not
Step 8 – Buscar w ϵ {Adyacentes(v) tal que (v,w) no sea arista de corte }
Step 9 – E(G) = E(G)-{v}
Endif
Step 10 – CEuler=Ceuler+(w)
Step 11 – v = w
End While
Step 12 – End CEuler

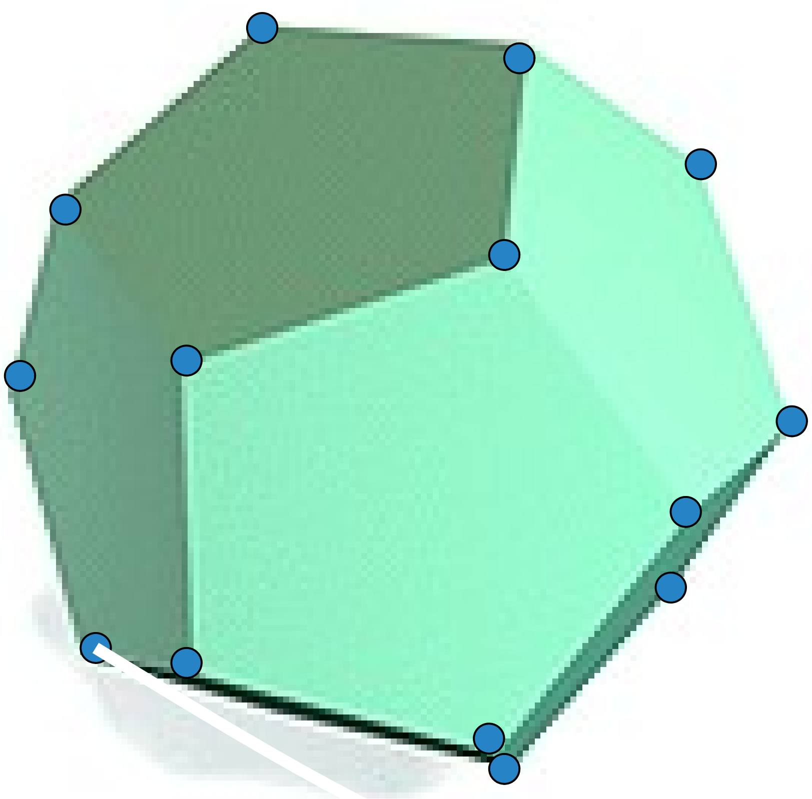

1
2
3
8
4
7
6
5



GRAFOS HAMILTONIANOS

Sir William Rowan Hamilton

GRAFOS HAMILTONIANOS



AROUND THE WORLD.

Dodecaedro Regular

- 20 vértices
- 30 aristas
- 12 caras
- 20 clavos (Uno insertado en cada vértice)
- Una cuerda
- En cada vértice el nombre de una ciudad.

GRAFOS HAMILTONIANOS

Sea $G=(V,E)$ un grafo:

Definicion 1: Camino Hamiltoniano

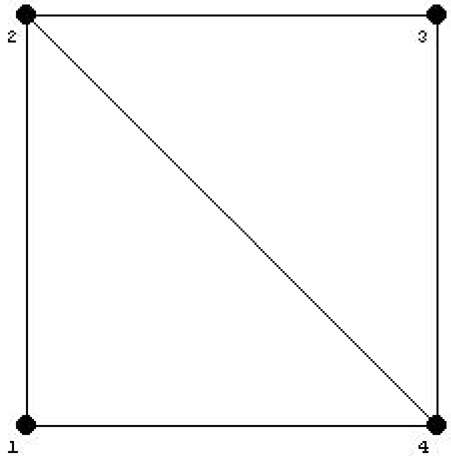
Un camino hamiltoniano es aquel que pasa por cada vértice del grafo exactamente una vez, una y solo una.

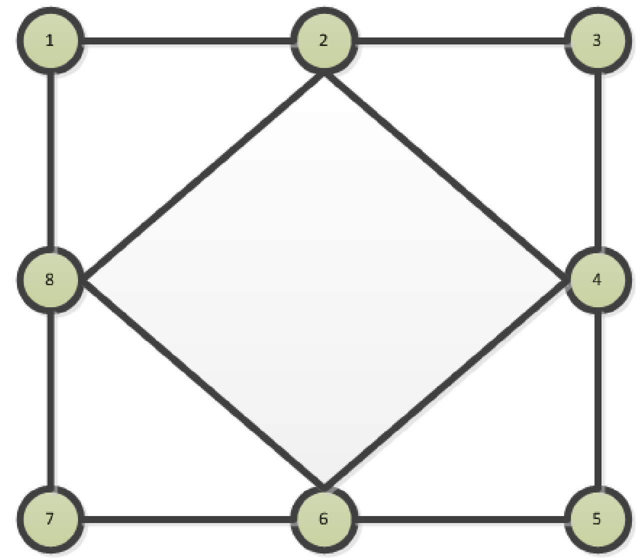
Definition 2: Ciclo Hamiltoniano

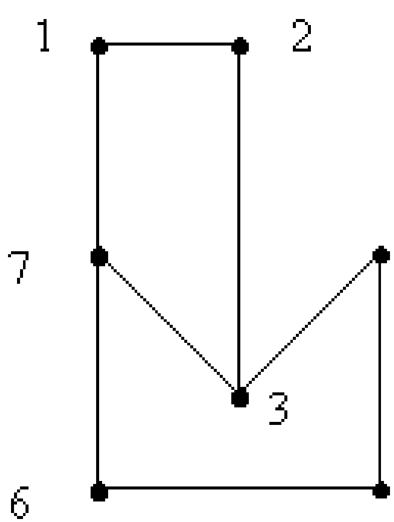
Un camino hamiltoniano, que sea un ciclo es llamado ciclo Hamiltoniano

Sea $G=(V,E)$ un grafo, si tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces diremos que es un grafo hamiltoniano.

Nótese que esta definición es equivalente a decir que un grafo hamiltoniano tiene un ciclo generador..


2
3
1
4


1
2
3
4
5
6
7
8


1
2
7
3
6

GRAFOS HAMILTONIANOS

Sea $G=(V,E)$ un grafo

Sea $k(G)$ el número de componentes conexas del grafo G

Teorema 1:

Si G es hamiltoniano, entonces $k(G-S)\leq|S|$, para cualquier conjunto no vacío S de $V(G)$

Teorema 2:

……………………………………………………

GRAFOS HAMILTONIANOS

El problema de determinar si un grafo es Hamiltoniano es un problema NP-completo.

Como no existe ninguna caracterización para saber si un grafo es hamiltoniano, resulta interesante conocer condiciones bajo las cuales un grafo puede ser hamiltoniano..

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden p. El orden de un grafo es el número de vértices :

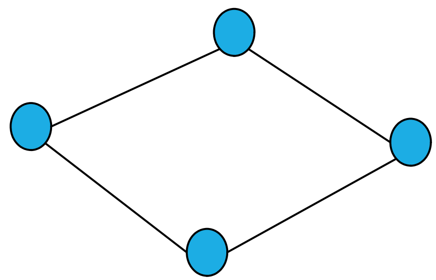
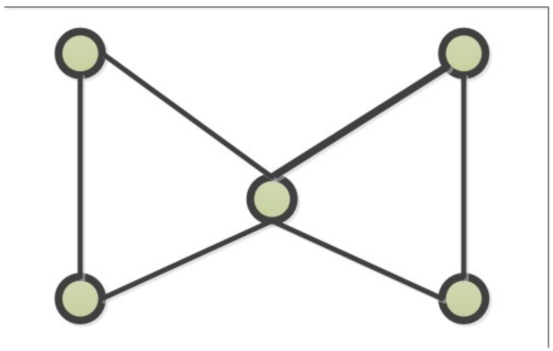
Teorema S-1: (Dirac).

Sea G un grafo de orden $p\geq 3$. Si $d(v)\geq p/2$, para cualquier vértice de G, entonces G es hamiltoniano

Corolario S-2:

Sea G un grafo de orden $p\geq 3$. Si $d(v)\geq (p-1)/2$, para cualquier vértice de G, entonces G contiene un camino hamiltoniano.

GRAFOS HAMILTONIANOS - GRAFOS EULERIANOS

	HAMILTONIANO	NO HAMILTONIANO
EULERIANO		
NO EULERIANO