PRÀCTICA 5: CÀLCUL D'INVERSES, DESCOMPOSICIÓ LU

(Resum)

INVERSES:

Disposem de dos mètodes para el càlcul d'inverses amb *Scilab*
Previament, podem comprovar si la matriu quadrada A ($n \times n$) és invertible si *rank(A)* és màxim ($= n$).

1. Mitjançant *inv(A)*

   Si la matriu no és invertible podriem trobar-nos missatges d'advertència.

   Podem comprovar si *A*inv(A)=eye(A)* per a major seguretat.

2. Mitjançant l'algorisme de Gauss-Jordan. Concretament, obtenint l'esglaonada reduïda per files de la parella *[A,eye(A)]*.

Si la matriu A té inversa i R és la matriu que la redueix, $R * A = eye(A)$, així que R és la inversa que volem:

$$rref([A, eye(A)]) = [R * A, R] = [eye(A), R] = [eye(A), inv(A)]$$

i les columnes de la $n + 1$ a la $2n$ del resultat anterior ens proporcionen la inversa demanada. Si no apareix $eye(A)$ en les primeres n columnes de $rref([A, eye(A)])$, la matriu A no tindrà inversa.

DESCOMPOSICIO LU

Es tracta d'escriure una matriu quadrada $A(n \times n)$ com a producte d'una triangular inferior, L, per una triangular superior, U.

Ull!, no heu de confondre aquestes matrius amb les que apareixen en els algorismes de Jacobi i Gauss-Seidel de la Pràctica 2

El procés segueix al d'esglaonar la matriz. Si treballem *a mà*, no hi ha intercanvi de files i fem servir només operacions elementales de tipus 3,

$$R * A = U$$

on R és producte de matrius elementals (triangulars inferiors) i U l'esglaonada (triangular superior). Com les matrius elementals tenen inversa, R també, i la seua inversa també és triangular inferior, doncs

$$R * A = U \Longrightarrow A = A = inv(R) * U = L * U$$

i ja tenim la descomposició. L té uns en la seua diagonal.
Fent ús de *Scilab*, la funció *lu(A)* ens fa el treball. Escriurem:

$$[L, U] = lu(A)$$

que ens torna una L i una U, probablement diferents al resultat a mà. Hi ha infinites maneres de fer-ho.

Ull!, *Scilab* quasi seempre intercanvia files així que la seua L pot aparéixer permutada. Més informació en el butlletí.

APLICACIONS DE LA DESCOMPOSICIÓ LU

1. *Resolució de sistemes:*

Siga
$$A * x = b$$
un SCD amb A quadrada, $(n \times n)$. Si tenim una descomposició LU de A, el sistema equival a
$$L * U * x = b$$
i açò ens porta a resoldre'l mitjançant dos sistemes triangulars (molt més simples que el primer). En primer lloc farem una mena de canvi de variable,
$$U * x = y$$
i resolem el sistema
$$L * y = b$$
amb Sustitució Progressiva (a mà o amb *Scilab*) o, simplement, mitjançant
$$y = L \backslash b$$
Ara posem la y acabada d'obtenir en el canvi de variable y trobem
$$x = U \backslash y$$
que serà la solució del sistema inicial. Aquest darrer sistema es podria resoldre també (a mà o amb *Scilab*) per Sustitució Regressiva.

2. *Càlcul de determinants:*
   Si A és quadrada, $(n \times n)$, donat que
   $$\det(A) = \det(L * U) = \det(L) * \det(U)$$
   el càlcul del determinant de A resulta quasi trivial. Has de tenir en compte que el determinant de U es, simplement, el producte dels elements de la seua diagonal. El determinant de L serà 1 si la obtenim sense intercanvi de files i ± 1 si està permutada, segons el nombre de permutacions que la converteixen en la seua forma triangular inferior.

3. *Càlcul d'inverses:*
   Si A és quadrada, $(n \times n)$, donat que
   $$inv(A) = inv(U) * inv(L)$$
   el càlcul de la inversa de A es redueix al producte de dues inverses molt més fàcils d'obtenir. Com L sempre és invertible, la matriu A ho serà si i només si ho és U, i això ocorre sempre que aquesta matriu (triangular superior) no tinga cap zero en la seua diagonal.