INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS GD
SESIÓN 3.

Antonio Hervás Jorge.
2017

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

OBJETIVOS

1

- Vamos a ver como se relacionan los vértices de un grafo DIRIGIDO

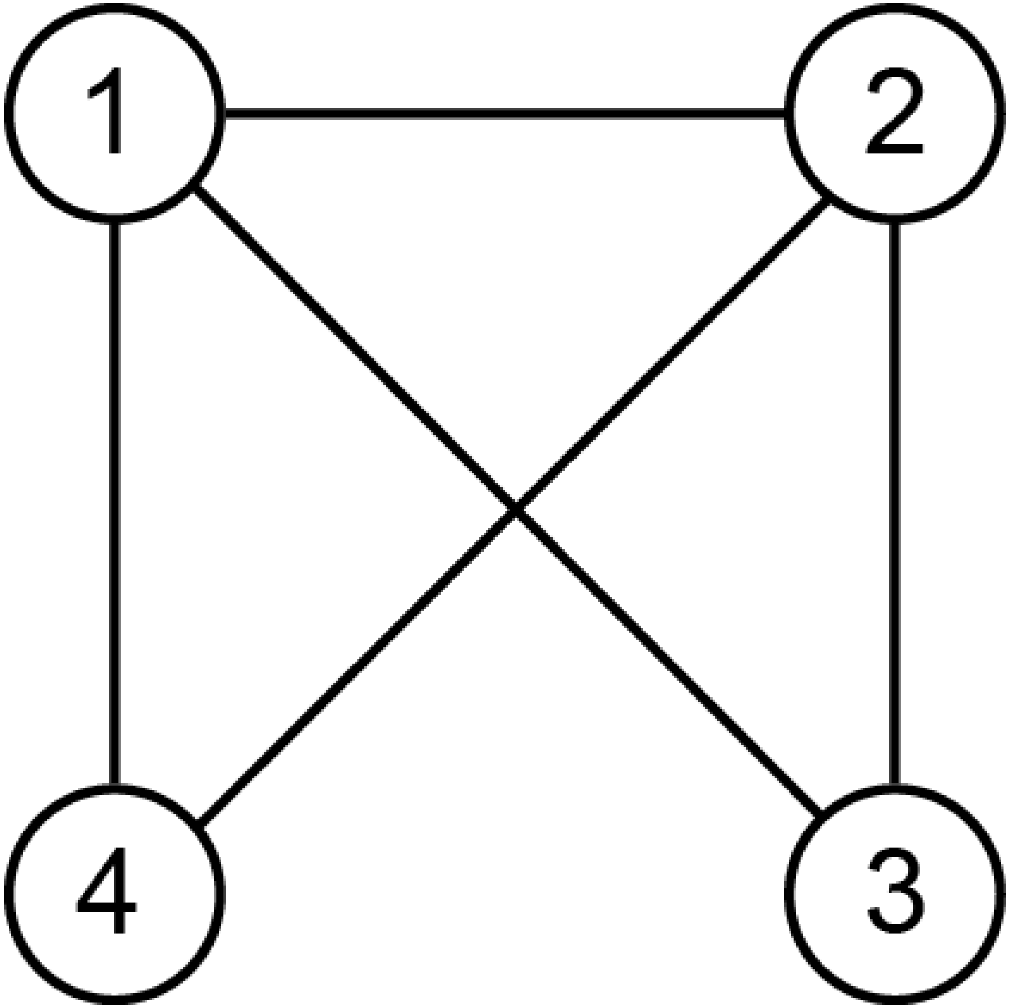
2

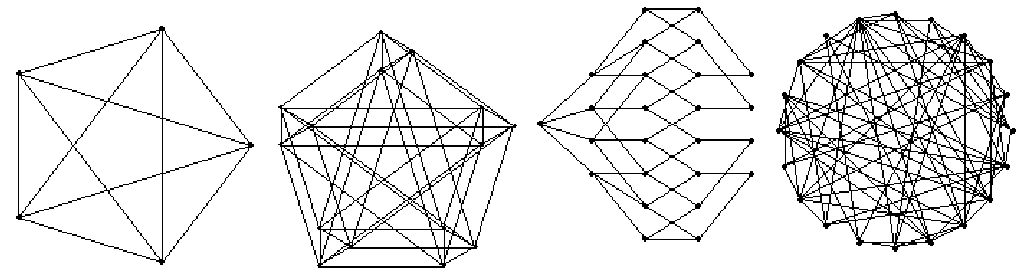
Aparecen nuevos conceptos, nuevas maneras de caracterizar un grafo dirigido y nuevas maneras de representarlo..

3

- Conceptos fundamentales: Tipos de Conexión y tipos de componentes conexas en un grafo DIRIGIDO

Grafos NO dirigidos



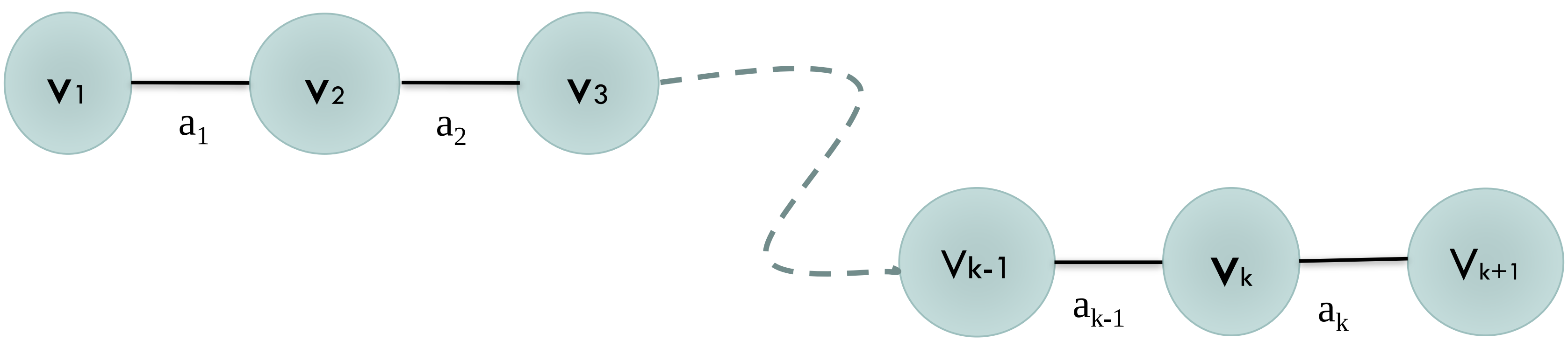


CAMINOS Y CONEXIÓN

Definición 1.1 (cadena, camino y ciclo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ su conjunto de aristas. Llamaremos* cadena *del vértice v_1 al vértice v_k, a una sucesión de vértices y aristas:*

$$P = v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1} \tag{1}$$

de manera que $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\quad a_j = (v_j, v_{j+1})$. Es decir cada arista a_i tiene como vértices extremos los mismos que tiene en el camino.



CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

Definición 1.2 (Conexión) *Supongamos G=(V,E) un grafo no dirigido y* $u, v \in V$*. Diremos que los vértices u y v están* **conectados** *si y solamente si existe algún (u-v)-camino en el grafo.*

Propiedades de la relación de conexión:

- Un vértice esta conectado consigo mismo por un camino de longitud cero.
- Si existe un camino de u a v, también existe un camino de v a u.
- Si existe un camino de u a v y otro de v a w, entonces los vértices u y w están también conectados.

$$\boxed{[u] = \{\ v \in\ V\ /\ \exists\ un\ u - v\ camino\ en\ G\}}$$

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

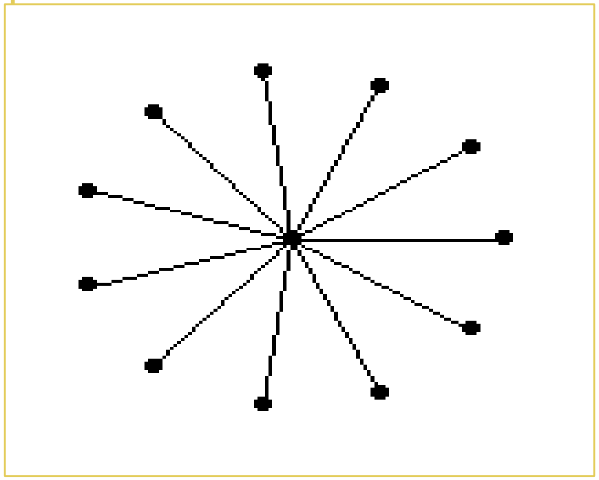
Definición 1.3 (Componente conexa) *Llamaremos* componente conexa *de un grafo no dirigido* $G = (V, A)$, *al* subgrafo generado *por cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación de conexión sobre el conjunto de vértices* V, *es decir el grafo cuyos vértices son los de* $[u] \subseteq V$, *y las aristas las del grafo* G *incidentes con los vértices de* $[u]$

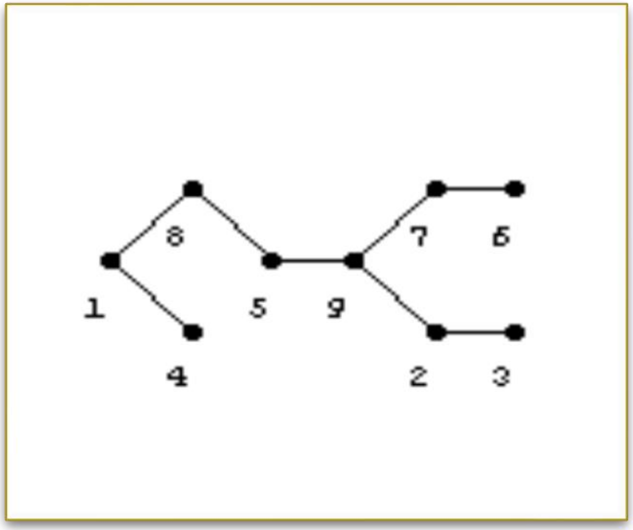
Propiedades de las componentes conexas:

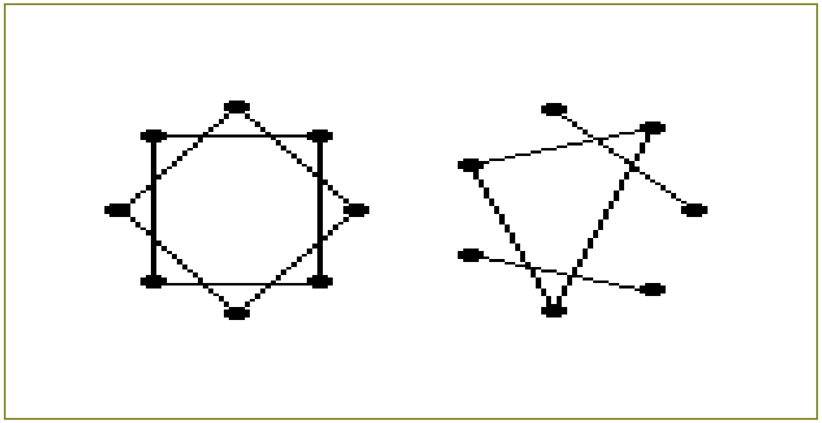
- No tienen vértices comunes
- No tienen aristas comunes
- No hay aristas entre componentes conexas distintas de un grafo.

Definición 1.4 (Grafo conexo) *Un grafo diremos que es conexo si todos sus vértices estan conectados entre sí.*

CONEXIÓN EN GRAFOS NO DIRIGIDOS

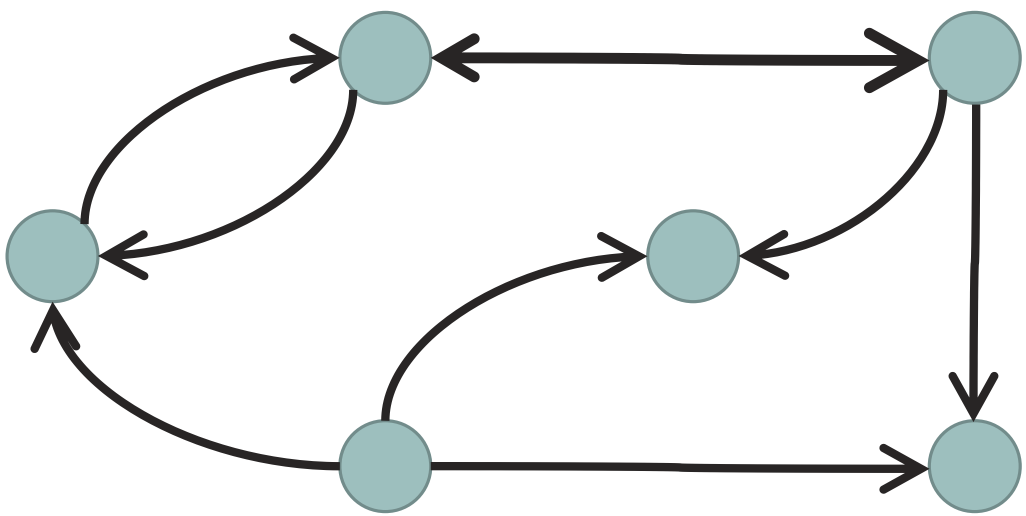






DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

GRAFOS DIRIGIDOS



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

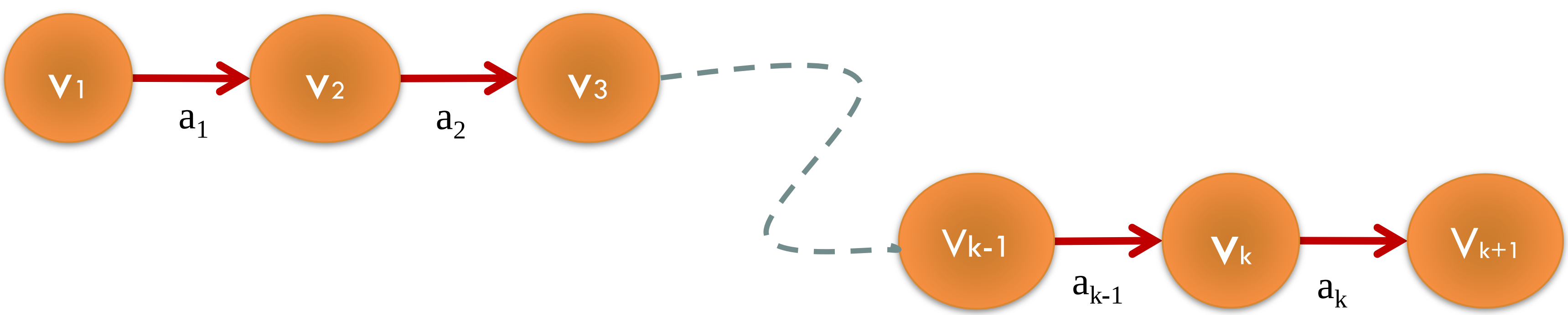
GRAFOS DIRIGIDOS: CAMINO DIRIGIDO

Definición 36 *Sea* $G=(V,E)$ *un grafo dirigido, sea* $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *su conjunto de vértices y* $E=\{a_1,a_2,\ldots,a_e\}$ *su conjunto de aristas. Llamaremos* semicamino *dirigido del vértice* v_1 *al vértice* v_k*, a una sucesión de vértices y aristas:*

$$P=v_1,a_1,v_2,a_2,\ldots,v_k,a_k,v_{k+1} \tag{3}$$

de manera que $\forall j,\ 1\leq j\leq k,\ \ a_j=<v_j,v_{j+1}>$ *o* $a_j=<v_{j+1},v_j>$.

Diremos que (3) es un camino dirigido *si* $\forall j,\ 1\leq j\leq k,\ \ a_j=<v_j,v_{j+1}>$.



GRAFOS DIRIGIDOS: CAMINO DIRIGIDO

Definición 36 *Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ su conjunto de aristas. Llamaremos* semicamino *dirigido del vértice v_1 al vértice v_k, a una sucesión de vértices y aristas:*

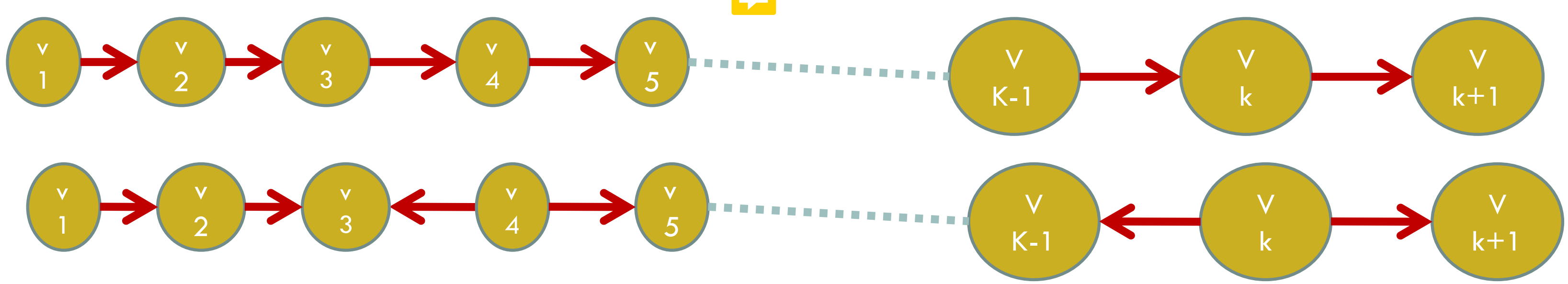
$$P = v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1} \tag{3}$$

de manera que $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\ \ a_j =< v_j, v_{j+1} >$ o $a_j =< v_{j+1}, v_j >$.

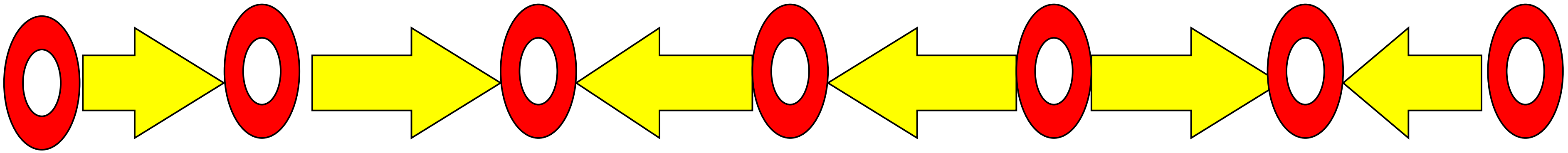
Diremos que (3) es un camino dirigido *si $\forall j,\ 1 \leq j \leq k,\ \ a_j =< v_j, v_{j+1} >$.*

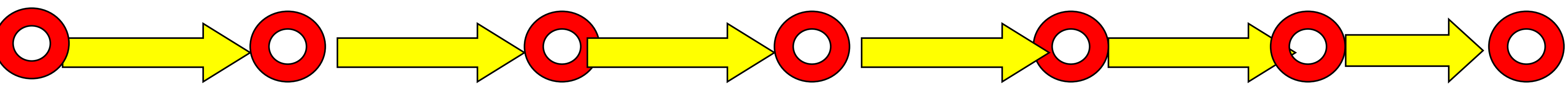
Llamaremos semiciclo dirigido, *a un semicamino cuyos vértices inicial y final coinciden.*

Llamaremos ciclo dirigido, *a un camino dirigido cuyos vértices inicial y final coinciden.*



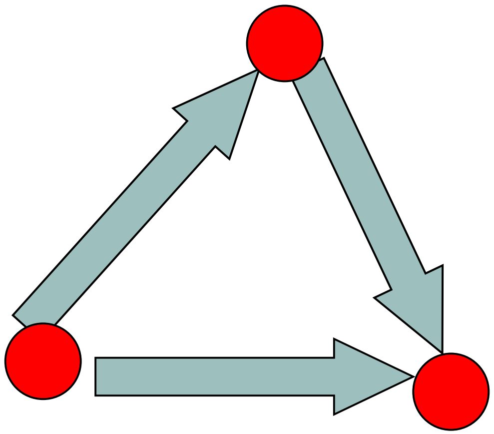
GRAFOS DIRIGIDOS:



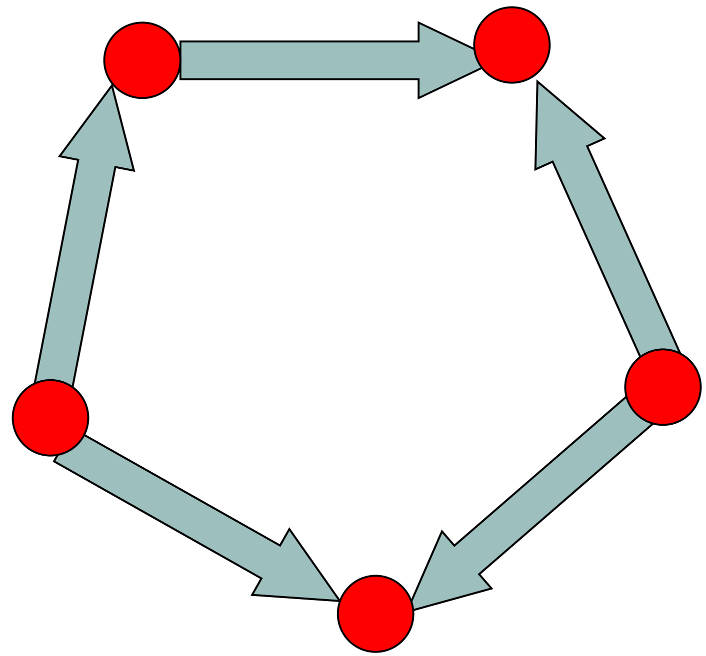


GRAFOS DIRIGIDOS:

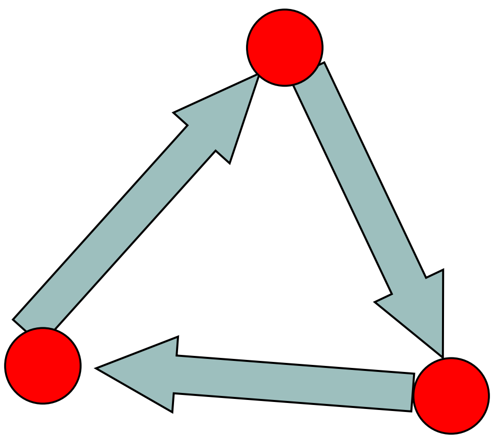
SEMI-CICLO DIRIGIDO

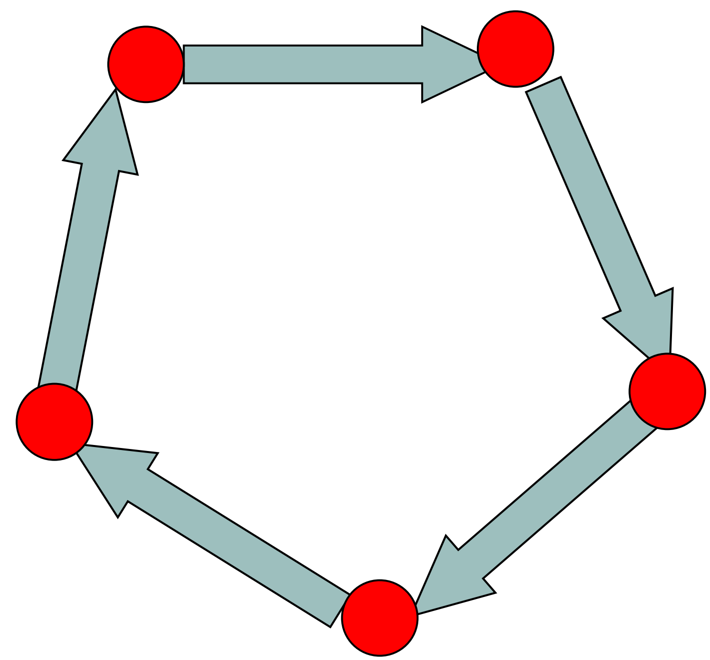


SEMI CICLO DIRIGIDO

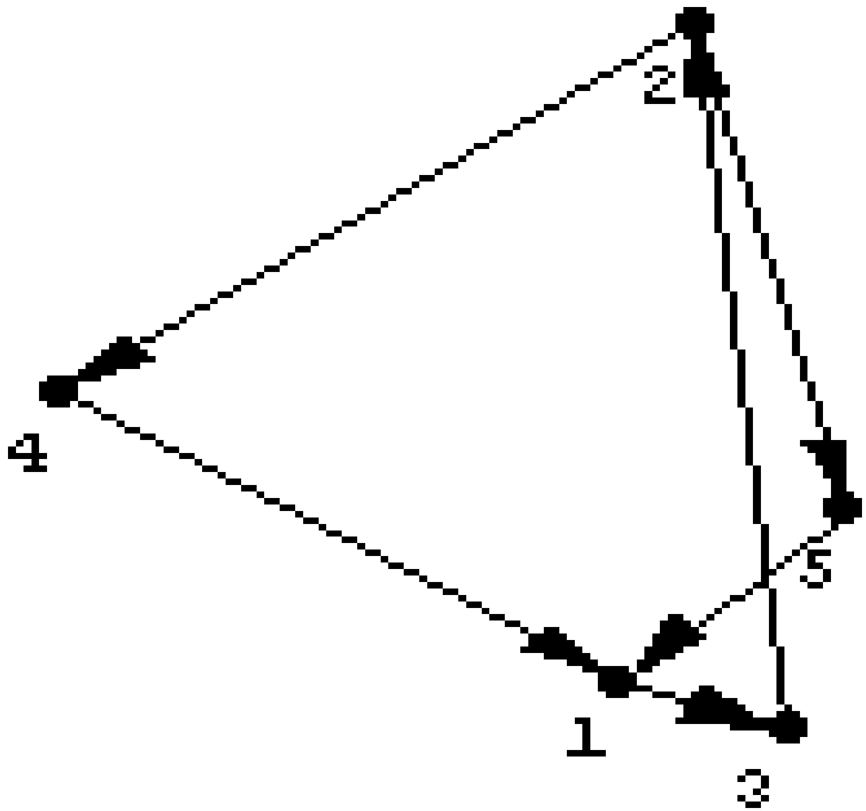


CICLOS DIRIGIDOS

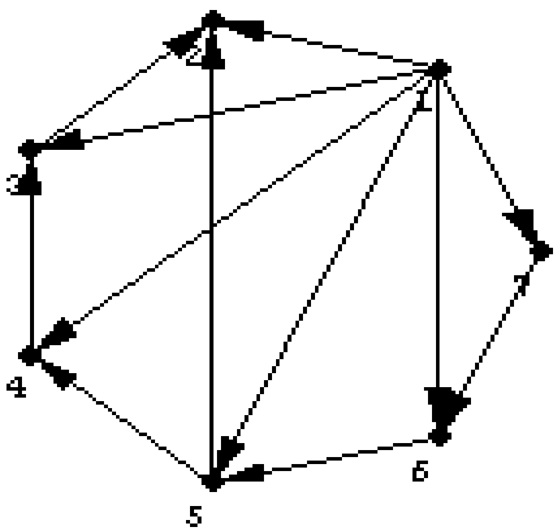


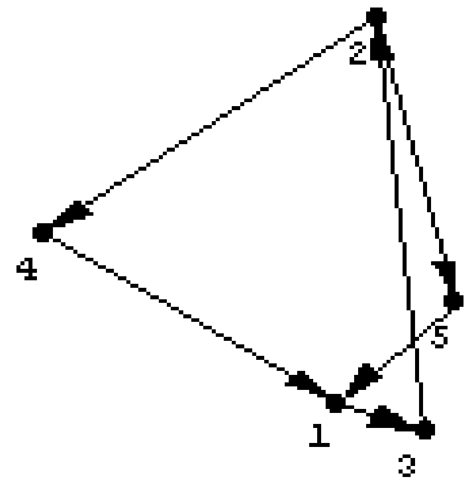


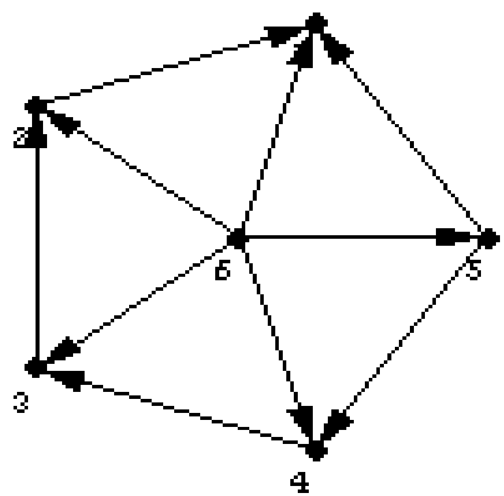
GRAFOS DIRIGIDOS:



GRAFOS DIRIGIDOS:





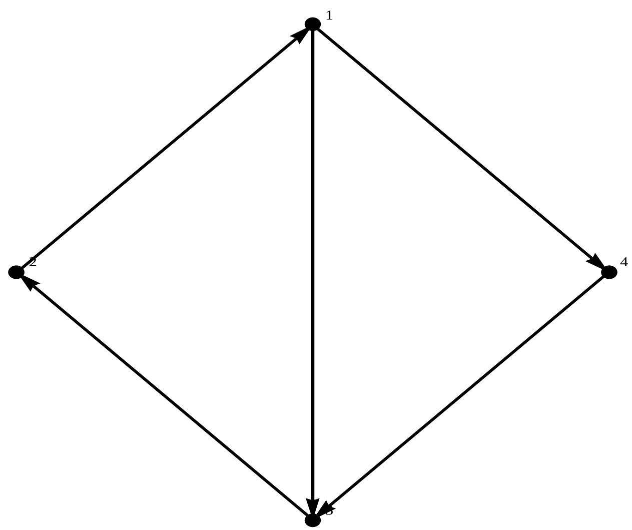


CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS: CONEXIÓN FUERTE

Definición 40 *Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. Dos vértices u y v estan fuertemente conectados si y sólo si $\exists u - v$ y $v - u$ camino dirigido*

Definición 41 *Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. G es* fuertemente conexo *si y sólo si:*

$$\forall u, v \in V, \ \exists u - v \ y \ v - u \ caminos \ dirigidos$$

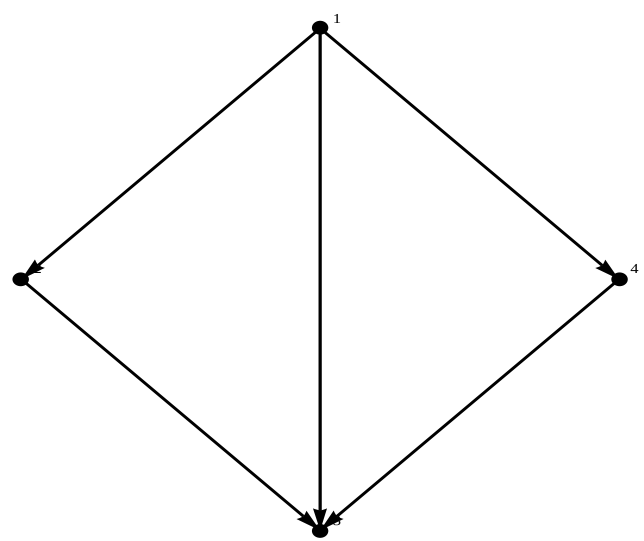


CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS: CONEXIÓN UNILATERAL

Definición 42 *Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. Dos vértices u y v estan unilateralmente conectados si y sólo si $\exists u-v$ o $v-u$ camino dirigido*

Definición 43 *Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. G es* unilateralmente conexo *si y sólo si:*

$$\forall\ u,v \in V,\ \exists\ u-v \text{ o } v-u \text{ camino dirigido.}$$

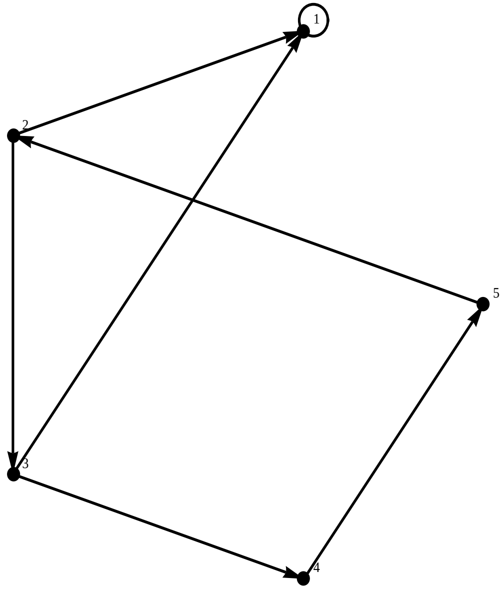


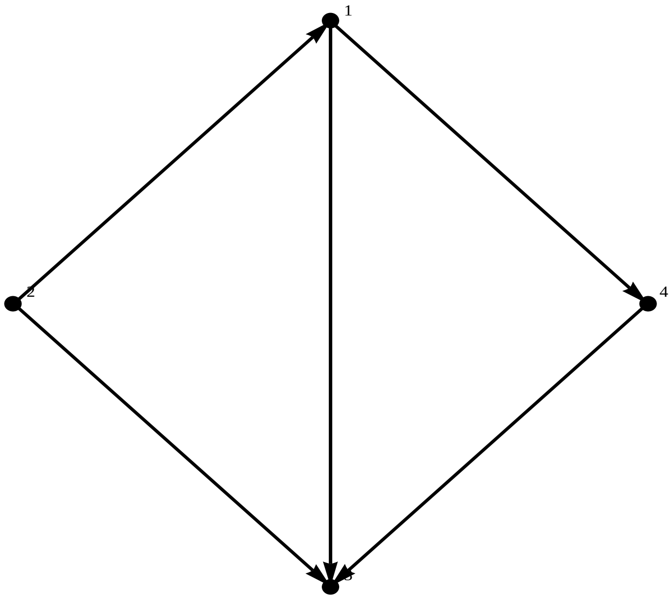
CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS: CONEXIÓN DÉBIL

Definición 44 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. Dos vértices u y v están débilmente conectados si y sólo si* $\exists u - v$ *semicamino dirigido*

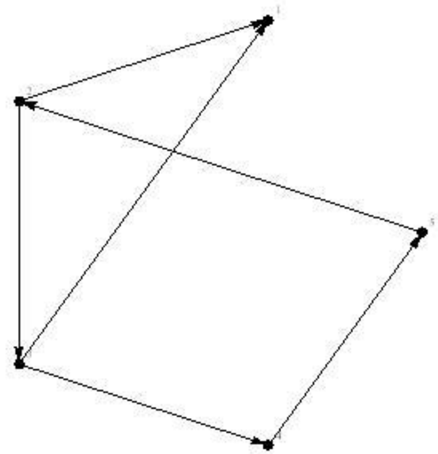
Definición 45 *Sea G=(V,E) un grafo dirigido. G es* débilmente conexo *si y sólo si:*

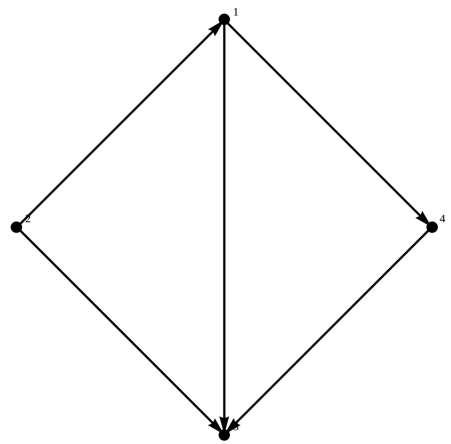
$$\forall\ u,v \in V,\ \exists <u,v>\ \textit{semicamino dirigido}$$

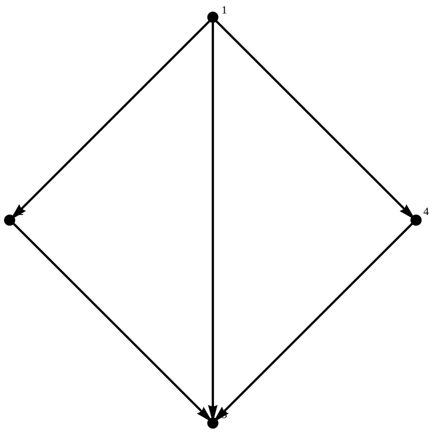


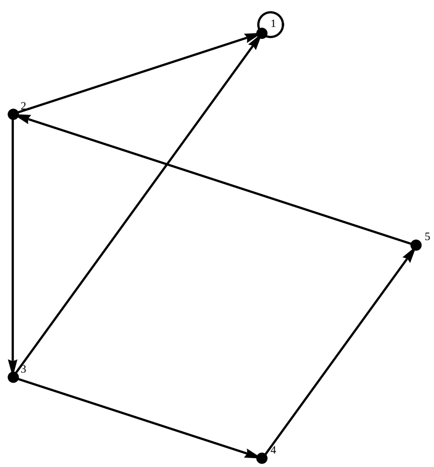


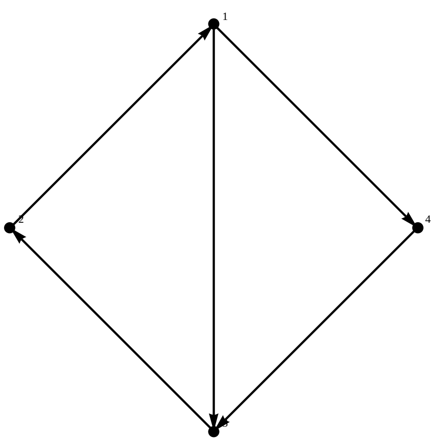
CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS









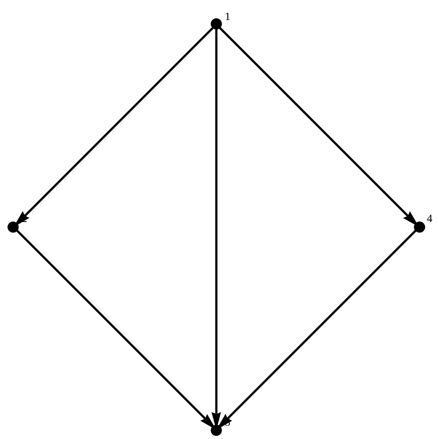


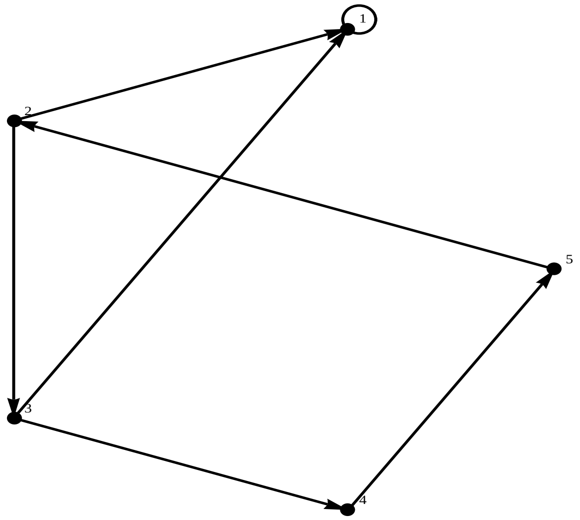
CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS: CONEXIÓN FUERTE

Definición 46 *Sea G un grafo dirigido y $G_1 \subseteq G$ de forma que G_1 es fuertemente conexo. G_1 es una* componente fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexa *de G si y sólo si:*

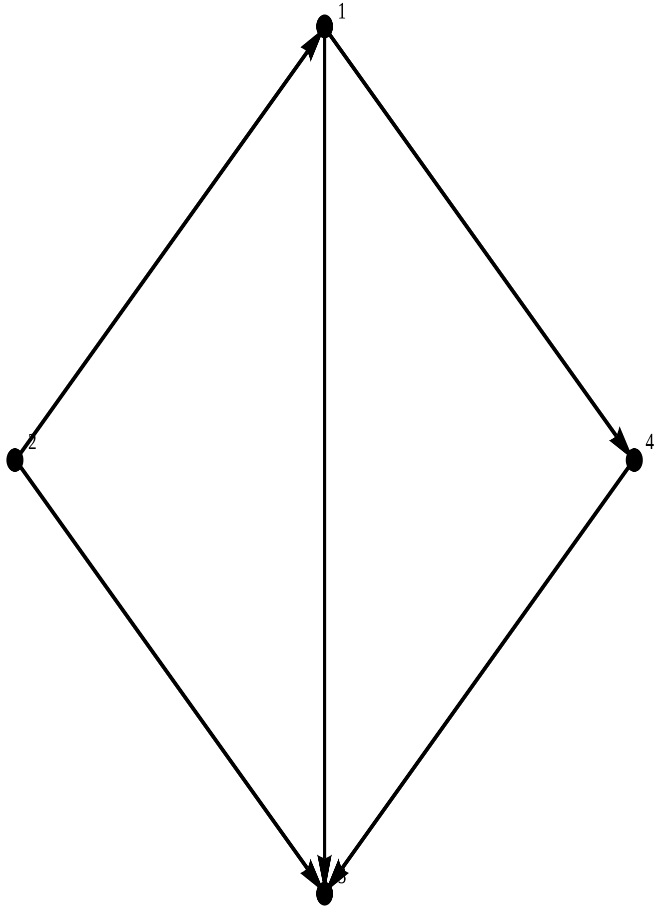
$$\forall\ G_2 \subseteq G \text{ y } G_2 \text{ fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexo } / \ G_2 \supseteq G_1 \Rightarrow G_1 \equiv G_2$$

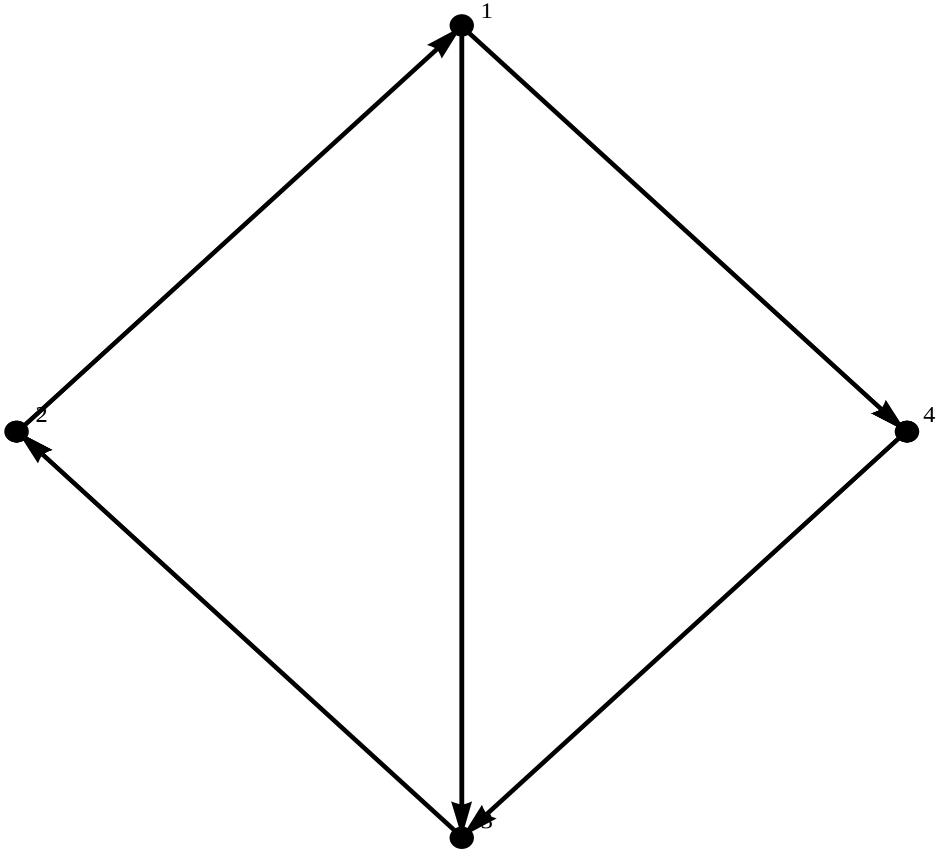
Es decir, no hay ningún otro subgrafo fuertemente (unilateralmente, débilmente) conexo de G que contenga a G_1.





CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS





CONEXIÓN EN GRAFOS DIRIGIDOS: CONEXIÓN FUERTE

Teorema 9 *Si G es dirigido y fuertemente conexo con $|V| \geq 2$, entonces el número de aristas ha de ser mayor o igual que $|V|$.*

Teorema 11 *Sea V un conjunto de vértices, entonces existe un grafo dirigido y fuertemente conexo cuyo número de aristas es igual a $\mid V \mid$.*

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que v_j es accesible desde v_i, si existe un camino (dirigido o no dirigido) desde v_i hasta v_j.

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } v_j \text{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

Definiremos la matriz de Accesibilidad de un grafo de n vértices y la representaremos por $R = [r(i,j)]_{n\times n}$ como

$$r(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } v_j \text{ es accesible desde } v_i \\ 0\ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si llamamos $R(v_i)$ a los vértices alcanzables desde v_i, podemos obtenerlos mediante el uso de la función Γ.

$$\mathrm{R}(\mathrm{v}_i) = \text{Alcanzables desde}(\mathrm{v}_i) = \{\mathrm{v}_i\} \cup \Gamma(\mathrm{v}_i) \cup \ldots \cup \Gamma^n(\mathrm{v}_i)$$

OBJETIVO:

Obtener las componentes conexas

Algoritmo 2.1 (BFS)

```
procedimiento BFS(v)
/* se aplica sobre un grafo G de n vértices */
global G,n,ALCANZADO(1:n);
cola COLA;
x ← v;
ALCANZADO(v) ← 1;
inicializar la cola a vacío;

bucle
    para todos los vértices w adyacentes desde x hacer
        si ALCANZADO(w) = 0
            entonces
                ALCANZADO(w) ← 1
                añadir w a COLA
    si COLA está vacia
        entonces return
    borrar el vértice x de COLA
fin del bucle

fin BFS
```

Algoritmo 2.2 (DFS)

procedimiento DFS(v)

/ se aplica sobre un grafo G de n vértices */*

global G,n,ALCANZADO(1:n);

integer v,w;

ALCANZADO(v) $\leftarrow$ *1;*

para todos los vértices w(no alcanzados) adyacentes desde x hacer

call DFS(w)

fin del para

fin DFS