Pràctica 3: Equacions, inequacions i extrems relatius de funcions

1 Resolució d'equacions

Hem vist ja dues instruccions per a calcular (algebraica i numèricament) les solucions d'una equació (o d'un sistema d'equacions): `Solve` i `NSolve`. Hauràs observat que no sempre funcionen.

Una instrucció alternativa per a calcular una arrel d'una funció $f(x)$ (és a dir, una solució de l'equació $f(x) = 0$) és `FindRoot`. Aquesta instrucció aplica un mètode iteratiu per calcular una aproximació numèrica a **una** arrel de f (només una). "Mètode iteratiu" significa el següent: comença per un valor de x, x_0, i, mitjançant un cert procés, genera un altre valor x_1; aplica el procés a x_1 i genera un altre valor x_2, ... Procedint successivament d'aquesta manera, va generant una seqüència de nombres reals $x_0, x_1, x_2, \ldots$ que es van aproximant cada vegada més a una solució de l'equació $f(x) = 0$. El programa para el procés quan el valor x_i obtingut està suficientment pròxim a una solució.

La sintaxi és la següent:

```
FindRoot[f,{x,x_0}]
```

f és la funció de la qual volem calcular una arrel, x és la variable de la qual depèn la funció, i x_0 és el valor inicial del mètode iteratiu utilitzat per `FindRoot`. És convenient que x_0 estiga prop de la solució que volem aproximar.

Per exemple, si representeu gràficament la funció $f(x) = e^x + sin(x)$ veureu que té una arrel prop del 0. Si apliquem `FindRoot` agafant com a valor inicial $x_0 = 0$ obtenim el següent:

```
In[1] := f[x_]=E^x+Sin[x]
Out[1] = e^x+Sin[x]
In[2] := FindRoot[f[x],{x,0}]
Out[2] = {x -> -0.588533}
```

Per tant, -0.588533 es una aproximació de l'arrel que té la función prop de l'origen.

`FindRoot` també pot aplicar-se directament sobre una equació. Per exemple:

```
In[3] := FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]
Out[3] = {x->0.739085}
```

calcula la solució de l'equació $cos(x) = x$ té prop del 0.

Si volem una precissió determinada, afegirem l'opció

$$WorkingPrecision \to n,$$

on n és el nombre de xifres significatives exactes que volem[1]. Per exemple:

```
In[4] := FindRoot[Sin[x]+E^x,{x,0},WorkingPrecision->20]
Out[4] = {x->-0.58853274398186109890}
```

2 Inequacions

Per resoldre una inequació del tipus $f(x) \leq g(x)$ (o amb $\geq$, $<$ o $>$ en lloc de $\leq$) podem emprar la instrucció `Reduce`. Per exemple:

```
In[5] := Reduce[x^2 + 2 x >= 2, x]
Out[5] = x <= -1 - Sqrt[3] || x >= -1 + Sqrt[3]
```

Amb aquestes instruccions hem resolt la inequació $x^2 + 2x \geq 2$. La resposta ens diu que els valors de x que satisfan la desigualtat són aquells tals que $x \leq -1 - \sqrt{3}$ **o** $x \geq -1 + \sqrt{3}$. **El símbol `||` significa "o" (disjunció), i el símbol `&&` significa "i" (conjunció)**. Per tant, la solució de la inequació és la unió d'intervals:

$$(-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}, +\infty).$$

Anem a veure un altre exemple. Tractarem de resoldre la inequació

$$\operatorname{arctg}(x^3 + x) < 0.$$

```
In[6] := Reduce[ArcTan[x^3 + x] < 0, x]
```

Veurem que *Mathematica* retorna el missatge "Reduce::nsmet: This system cannot be solved with the methods available to Reduce" i, per tant, no ens dóna la solució. Moltes vegades aquest problema es pot resoldre afegint l'opció **Reals**:

```
In[7] := Reduce[ArcTan[x^3 + x] < 0, x, Reals]
Out[6] = x < 0
```

Per tant, la solució és l'interval $(-\infty, 0)$.

Amb `Reduce` també podem resoldre sistemes d'inequacions. Per exemple:

In[8] := `Reduce[{x^2 - 2 >= 0, x - 4 <= 0}, x]`
Out[7] = $x \leq -\sqrt{2} \;||\; \sqrt{2} \leq x \leq 4$

La solució és, per tant: $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 4]$.

3 Extrems relatius de funcions

Com ja saps, els valors crítics d'una funció derivable $f(x)$ s'obtenen resolent l'equació $f'(x) = 0$. A més a més, per esbrinar els intervals de creixement i decreixement de f i els valors crítics que són extrems relatius, s'ha d'estudiar el signe de $f'(x)$. Per tant, el que s'ha explicat als dos apartats anteriors pot utilitzar-se per a determinar aquests aspectes utilitzant *Mathematica*.

[1] Aquesta opció també es pot utilitzar amb `NSolve`.