DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

QÜESTIONARI DE LA CINQUENA PRÀCTICA

1. Anem a explorar la successió $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Defineix-la amb *Mathematica* com una funció del tipus $\texttt{a}[n\_] = \ldots$.

   Calcula (i aproxima després): $a_1 \approx$ ☐; $a_{10} \approx$ ☐; $a_{1000} \approx$ ☐

   Fes una gràfica dels valors aproximats de a_n per a n de 1 a 50 amb

   `DiscretePlot[a[n],{n,1,50}].`

   Es pot **observar** que la successió és creixent?

   Calcula el límit: $\lim_{n\to\infty} a(n) =$ ☐ $\approx$ ☐. Com ja saps, **aquest límit és el número** e.

   Aquesta successió **tendeix al número** e però ho fa lentament:

   - Calcula $a_{10} \approx$ ☐ Quantes xifres decimals coincideixen amb les del número e? ☐
   - Calcula $a_{100} \approx$ ☐ Quantes xifres decimals coincideixen amb les del número e? ☐
   - Calcula $a_{1000} \approx$ ☐ Quantes xifres decimals coincideixen amb les del número e? ☐

   La que ho fa molt ràpidament és la següent:

   $$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

   - Comprova amb *Mathematica* que tendeix al número e.
   - Calcula $b_{10} \approx$ ☐ Quantes xifres decimals coincideixen amb les del número e? ☐
   - Calcula $b_{20} \approx$ ☐ Quantes xifres decimals coincideixen amb les del número e? ☐

2. Calcula: $\quad s = \lim_n \left(\dfrac{2n+1}{2n-\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+2}} =$ ☐

3. Calcula $\lim_n \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} =$ ☐ (primer "a mà" i, després, amb *Mathematica*).

4. Comprova que les successions $a_n = \sqrt{n^5} - \sqrt{n^3+1}$ i $b_n = \log(n)$ tenen límit infinit.

   Compara l'**ordre de magnitud** de les successions anteriors: $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \boxed{}$ i, en conclussió, a_n $\boxed{\ll / \approx / \gg}$ b_n.

5. Tendeixen a infinit totes les successions següents? $\boxed{}$

$$n \qquad n^2 \qquad \sqrt{n^3} \qquad \log(n) \qquad e^n$$

   En cas afirmatiu, ordeneu-les segons el seu ordre de magnitud

$$\boxed{} \ll \boxed{} \ll \boxed{} \ll \boxed{} \ll \boxed{}$$

6. Comprova que la successió de terme general $a_n = \sqrt{n^5+2} - \sqrt{n^4-1}$ tendeix a infinit. Troba un nombre natural k tal que

$$n^k \ll a_n \ll n^{k+1}$$

   $k = \boxed{}$. Visualitza gràficament el resultat representant les tres successions amb

   DiscretePlot[{n^k, $a[n], n^{k+1}\}, \{n, 1, 100\}]$