INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS
SESIÓN 2.

Antonio Hervás Jorge. 2017

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

OBJETIVOS

1

- Vamos a comparar grafos

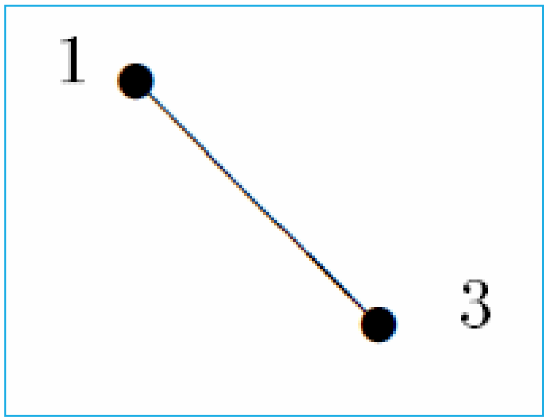
2

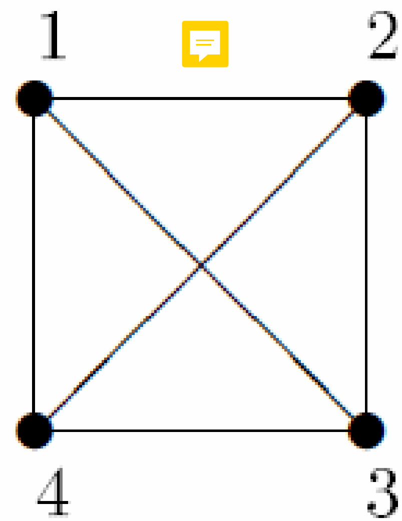
- Introducir los diferentes tipos de subgrafos de un grafo dado.

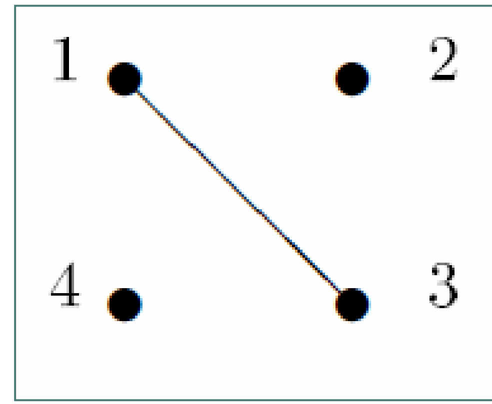
3

- Ver como representamos los grafos no NO DIRIGIDOS

Definición 1.4 (Subgrafo) *Sea $G = (V, A)$ un grafo cualquiera. Diremos que un grafo $G' = (V', A')$ es un* subgrafo *de G si V' es subconjunto de V, $(V' \subseteq V)$ y A' es subconjunto de A, $(A' \subseteq A)$.*



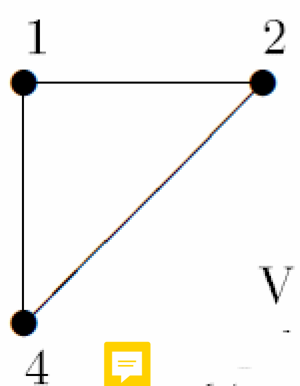




Definición 1.5 (Subgrafo generador) *Sea $G' = (V', A')$ un subgrafo de $G = (V, A)$. Diremos que G' es un* subgrafo generador *de G si $V' = V$, es decir tiene exactamente todos los vértices del grafo, aunque no necesariamente todas las aristas.*

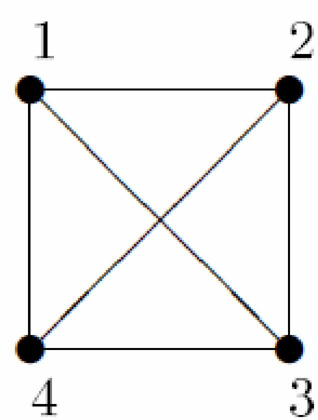
Definición 1.6 *Sea $G = (V(G), A(G))$ un grafo, y sea un conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$. Llamaremos* subgrafo generado por *V' a un grafo $G' = (V', E')$ donde las aristas de E' son aquellas aristas del grafo G, $E' \subseteq A(G)$ que tienen como vértices extremos los vértices de $V(G)$.*

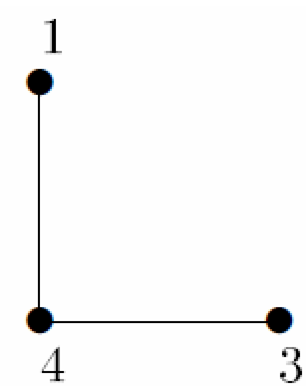
Definición 1.7 *Sea $G = (V(G), A(G))$ un grafo, y sea un conjunto de aristas $E' \subset A(G)$. Llamaremos* subgrafo generado por *E' a un grafo $G' = (V', E')$ donde los elementos de V' son los vértices extremos de las aristas de E' en el grafo G, es decir, $V' \subseteq V(G)$*



V'={1,2,4}.

E'={(1,2),(1,4),(2,4)}.



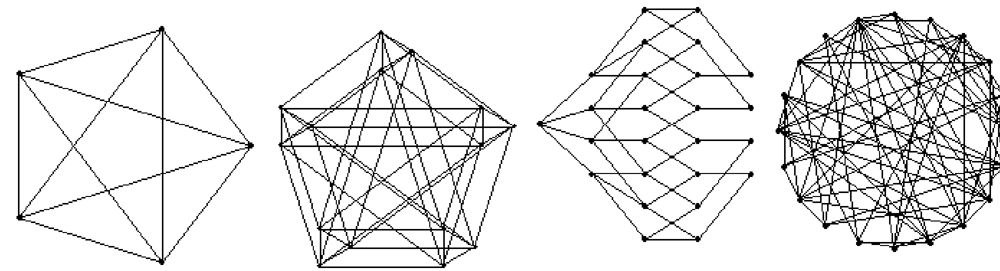


E'={(1,4),(3,4)}

Definición 1.11 *Sean* $G \equiv (V(G), A(G), \psi_G)$ *y* $H \equiv (V(H), A(H), \psi_H)$ *grafos. Diremos que* G *y* H *son* isomorfos *si existen biyecciones*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & V(G) & \longrightarrow & V(H) \\ & u & \rightsquigarrow & \theta(u) \\ & v & \rightsquigarrow & \theta(v) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi: & A(G) & \longrightarrow & A(H) \\ & e & \rightsquigarrow & \varphi(e) \end{array}$$

compatibles con las funciones de incidencia, esto es, si $a = (u, v) \in A(G)$, *entonces* $\varphi(a) = (\theta(u), \theta(v)) \in A(H)$.



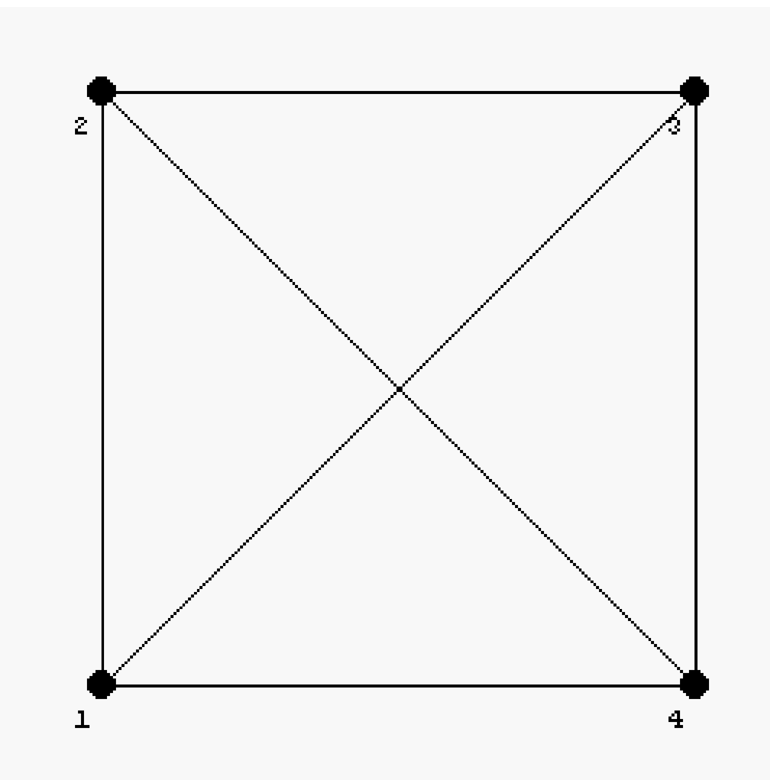
$$G \equiv (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(2,4)(3,4)\}, \psi_G)$$
$$H \equiv (\{a,b,c,d\}, \{(a,b),(a,c),(b,d)(c,d)\}, \psi_H)$$

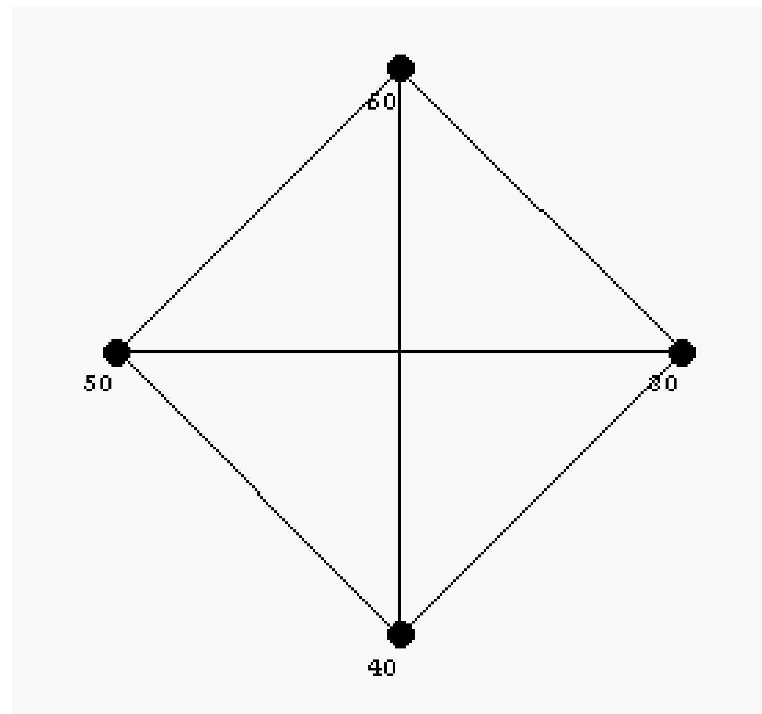
Podemos construir θ y φ de la forma:

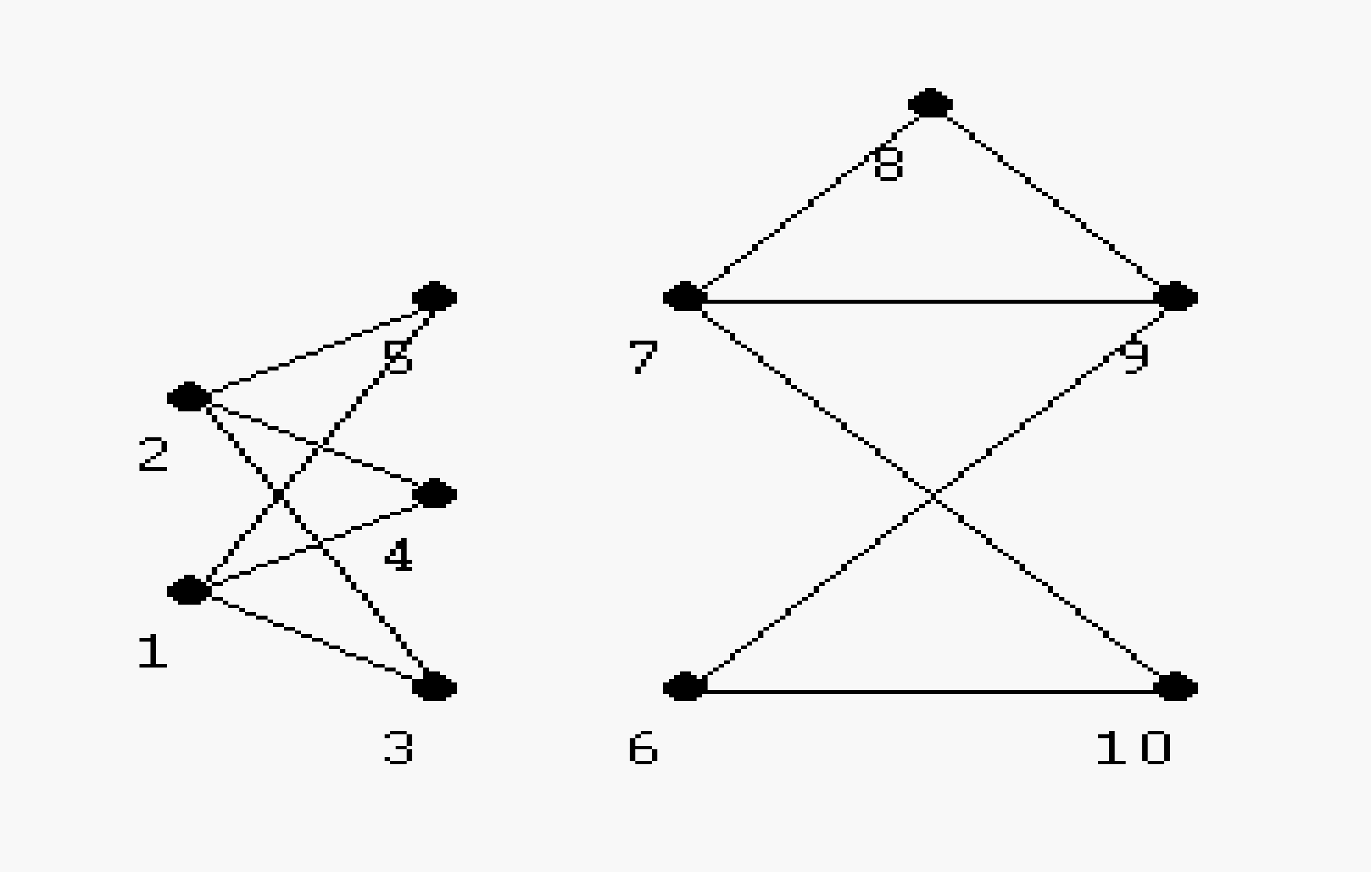
$$\begin{array}{rccc}
\theta: & V(G) & \longrightarrow & V(H) \\
 & 1 & \rightsquigarrow & a \\
 & 2 & \rightsquigarrow & b \\
 & 3 & \rightsquigarrow & c \\
 & 4 & \rightsquigarrow & d
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\varphi: & E(G) & \longrightarrow & E(H) \\
 & (1,2) & \rightsquigarrow & (a,b) \\
 & (1,3) & \rightsquigarrow & (a,c) \\
 & (2,4) & \rightsquigarrow & (b,c) \\
 & (3,4) & \rightsquigarrow & (c,d)
\end{array}$$

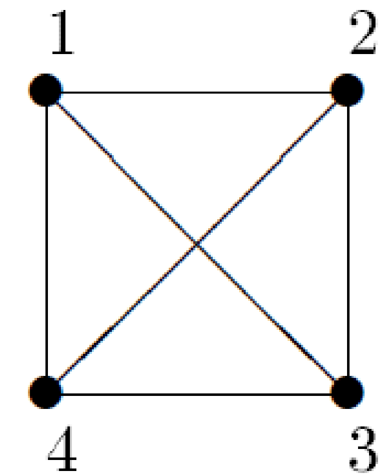
V(g16) ----> V(g17)
1 ---------> 60
2 ---------> 50
3 ---------> 40
4 ---------> 30

E(g16) ----> E(g17)
(1,2) ---> (60,50)
(1,3) ---> (60,40)
(2,4) ---> (50,30)
(3,4) ---> (40,30)

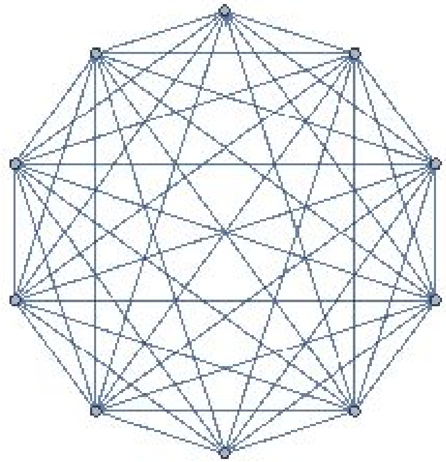


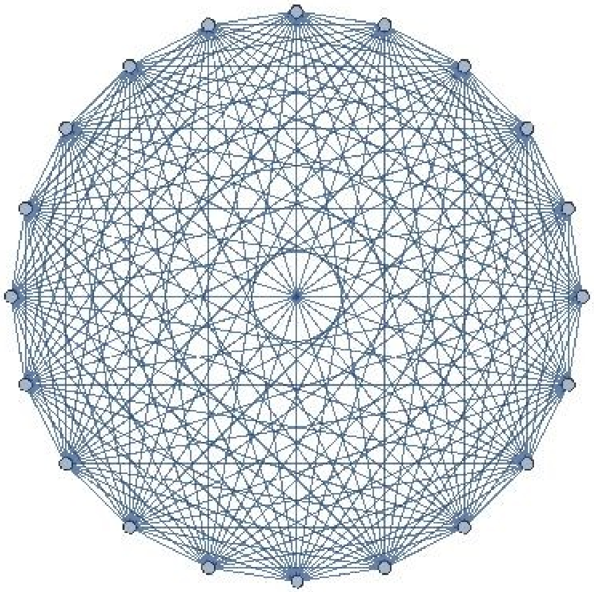


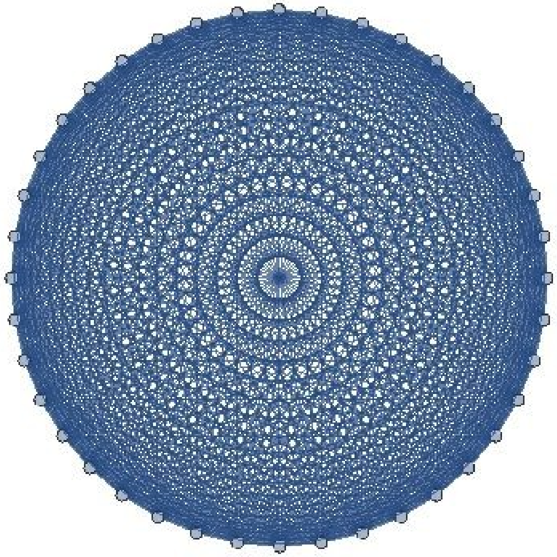

5
2
4
1
3
8
7
9
6
10



(a) El grafo K_4







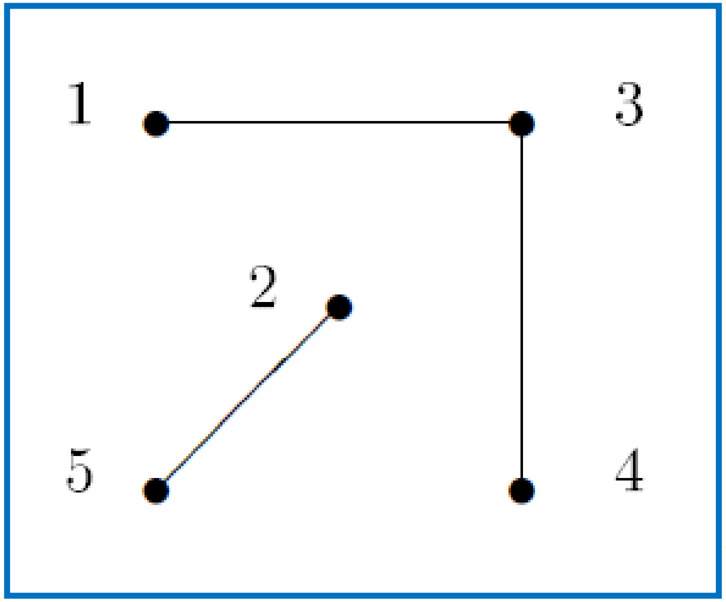
Definición 1.1 (Matriz de Adyacencia) *Llamaremos matriz de adyacencia de un grafo no dirigido* $G = (V(G), A(G))$ *de* n *vértices, a una matriz de dimensiones* $n \times n$ *denotada por* $M_A(G) = [a(i,j)]_{n \times n}$ *donde* $a(i,j)$ *es el número de aristas que une los vértices* v_i *y* v_j.

En el caso de que el grafo sea simple, entonces:

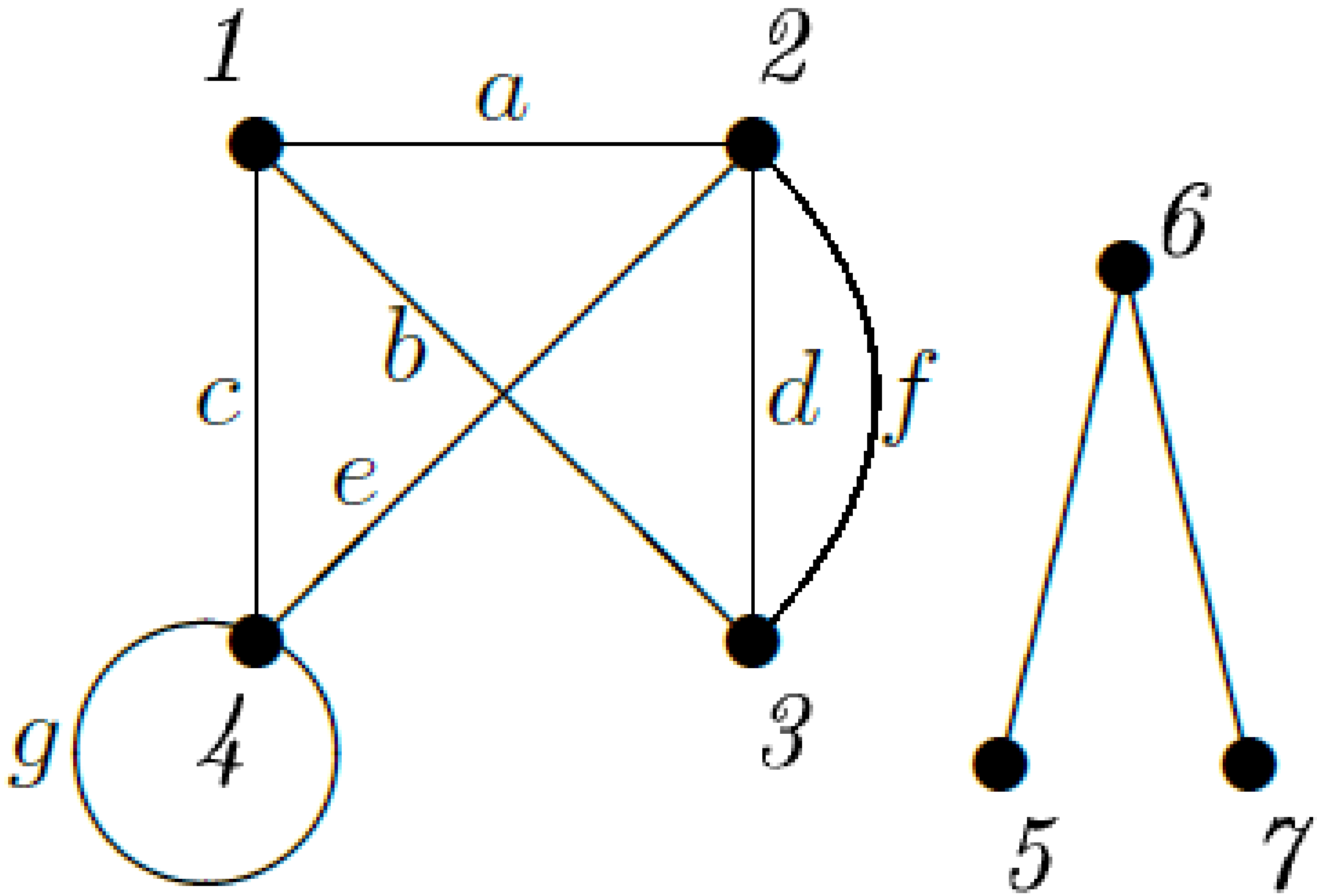
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 \ , & (i,j) \in A(G) \\ 0 \ , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Grafos no dirigidos

MATRIZ DE ADYACENCIA



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


1
2
a
6
b
c
d
f
e
g
4
3
5
7

- La matriz de adyacencia $M_A(G)$ es simétrica y si el grafo no tiene bucles, todos los elementos de la diagonal son cero.

- Una fila o una columna de ceros representa un vértice aislado.

- Los elementos no nulos de la diagonal representan los bucles

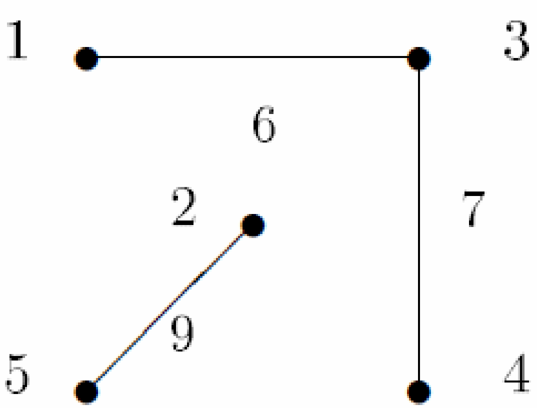
- Además se tiene que la suma de una fila o de una columna es el grado del vértice correspondiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = d(i)$$

- La suma de todos los elementos de la matriz es el doble del número de aristas del grafo.

MATRIZ DE COSTES

Definición 47 *Hay una matriz asociada a un grafo ponderado que es la de matriz de pesos o costes. Esta matriz es similar en cuanto a su estructura a la de adyacencia, pero en vez de asignar un uno si la arista existe se le asigna el peso de la arista. De esta forma, en la matriz de costes, el elemento* $c(i,j)$ *representa el coste de la arista (i,j). Sólo tiene sentido esta definición si estamos tratando con grafos simples.*



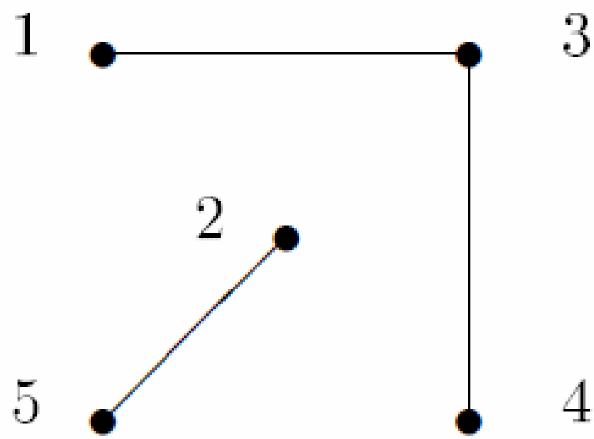
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA

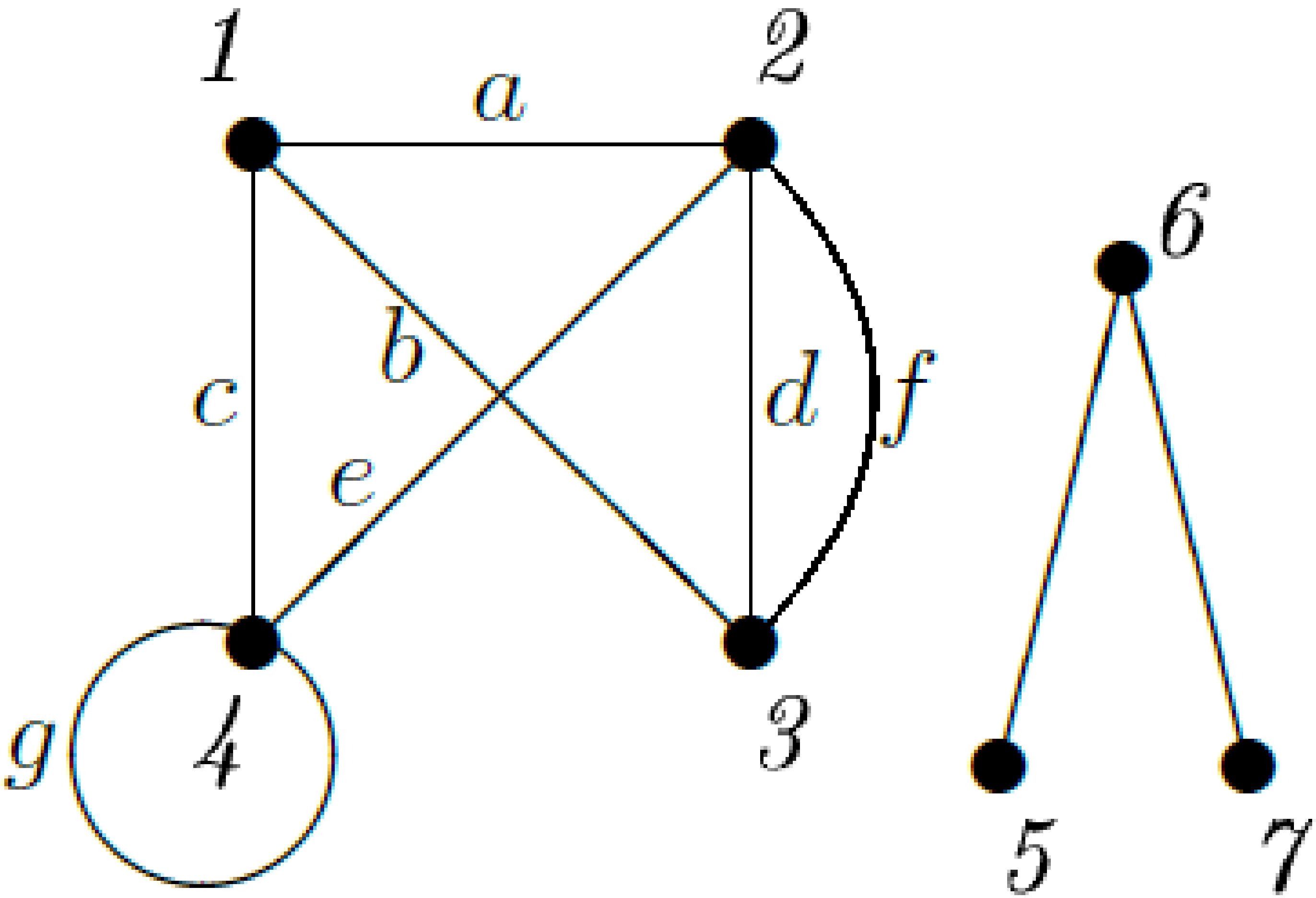
Definición 1.3 (Matriz de Incidencia.) *Llamaremos matriz de incidencia de un grafo no dirigido* $G = (V(G), A(G))$, *con* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *su conjunto de vértices y* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_e\}$ *su conjunto de aristas, a una matriz de dimensiones* $n \times e$ *denotada por* $I = I(i,j)$ *donde:*

$$I(i,j) = \begin{cases} 1\ , & \textit{si la arista } e_j \textit{ es incidente con } v_i \textit{ y no es un bucle} \\ 2\ , & \textit{si la arista } e_j \textit{ es incidente con } v_i \textit{ y es un bucle} \\ 0\ , & \textit{en otro caso} \end{cases}$$



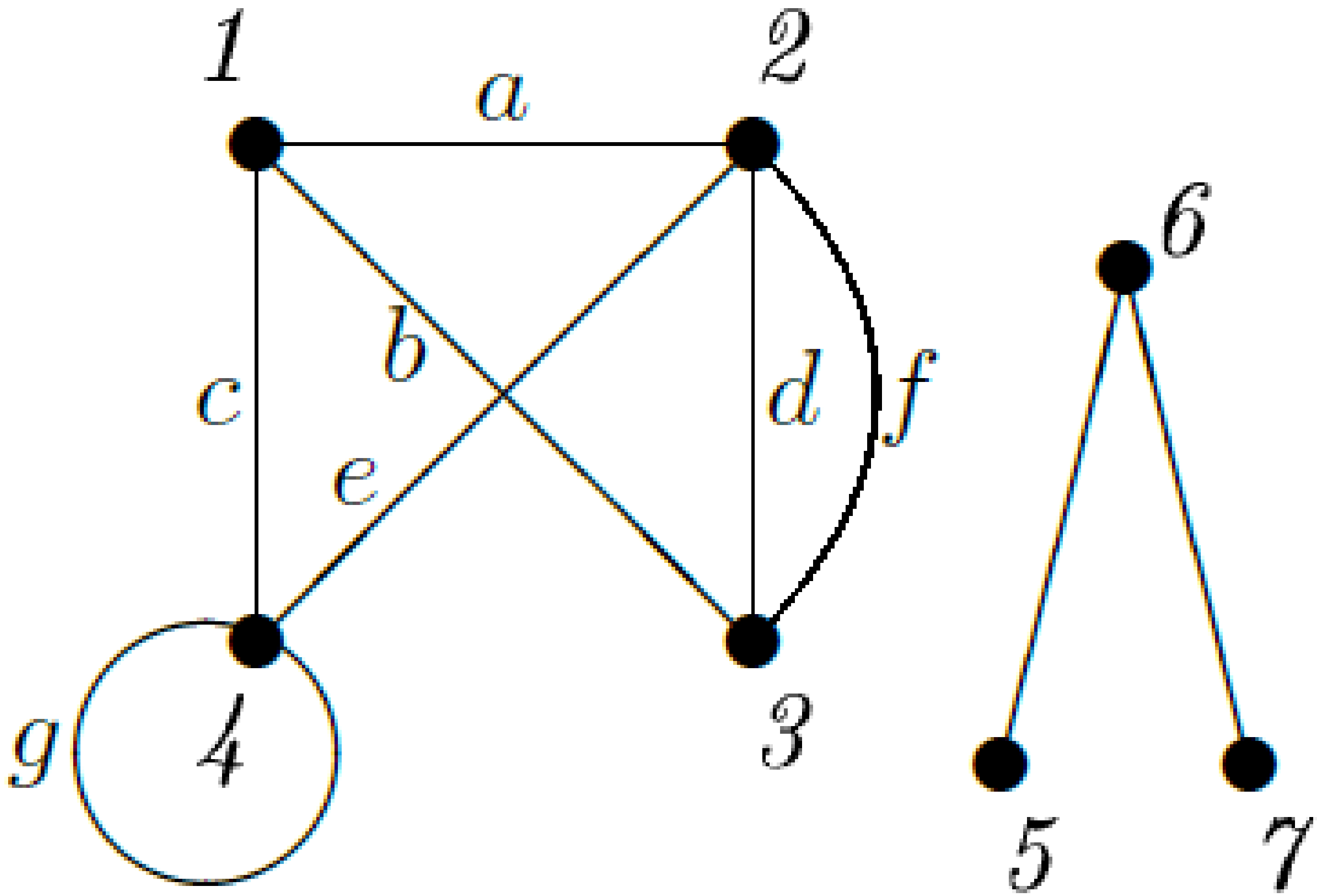
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


1
2
3
4
5
6
7
a
b
c
d
e
f
g

MATRIZ DE INCIDENCIA

- La matriz de incidencia I es una matriz $n \times e$, por lo que en general será una matriz rectangular.
- La suma de todos los elementos de una fila es el grado del vértice correspondiente.
- La suma de los elementos de cualquier columna es 2.
- Una fila de ceros representa un vértice aislado.
- Dos columnas iguales representan dos aristas paralelas.
- La suma de todos los elementos de la matriz es el doble del número de aristas del grafo.


1
2
a
6
c
b
d
f
e
g
4
3
5
7