Pràctica 4: Integració

1 Integració: càlcul d'àrees

La instrucció bàsica que *Mathematica* ens ofereix per calcular integrals és `Integrate`. Concretament, amb

```
Integrate[f, x]
```

Mathematica retorna **una** de les primitives de la funció introduïda com a input. Vegem-ne alguns exemples:

```
In[1] := Integrate[1/(x^2 - 1), x]
```

$$Out[1] = \frac{\text{Log}[1 - x]}{2} - \frac{\text{Log}[1 + x]}{2}$$

```
In[2] := Integrate[a x^2, x]
```

$$Out[2] = \frac{a\ x^3}{3}$$

```
In[3] := Integrate[x b[x]^2, b[x]]
```

$$Out[3] = \frac{x\ b[x]^3}{3}$$

Amb aquest últim exemple, podem comprovar que la variable d'integració pot ser qualsevol expressió.

La funció

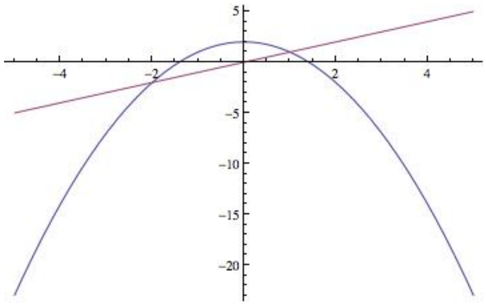
```
Integrate[f, {x, a, b}]
```

avalua la integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Si $f(x) \geq 0$, aquesta integral representa l'àrea de la regió compresa entre les corbes $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i $y = f(x)$.

Exemple: Calculeu l'àrea de la regió limitada por les gràfiques de les funcions $f(x) = 2 - x^2$ i $g(x) = x$.

En primer lloc, representarem gràficamente la regió:

```
Plot[{2 - x^2, x}, {x, -5, 5}]
```



Per obtindre els límits d'integració, calcularem la intersecció de les corbes:

```
In[4] := Solve[2 - x^2 == x, x]
Out[4] = {{x -> -2}, {x -> 1}}
```

Per últim, calculem l'àrea:

```
In[5] := Abs[Integrate[2 - x^2 - x, {x, -2, 1}]]
```

Out[5] = $\frac{9}{2}$

2 Mètodes d'integració numèrica: Trapezis i Simpson.

Els mètodes d'integració numèrica proporcionen la possibilitat de calcular de forma aproximada la integral definida de funcions de les quals no es sap calcular una primitiva.

Mathematica disposa d'una instrucció, `NIntegrate`, que ens calcula una aproximació d'una integral definida

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

La sintaxi és `NIntegrate[f, {x, a, b}]`, on f és la funció a integrar, x és la variable, i a i b són els extrems d'integració. Per exemple:

```
In[6] := NIntegrate[E^(-x^2), {x, 0, 1}]
Out[6] = 0.746824
```

A la classe de Teoria s'han vist dos mètodes específics d'aproximació d'integrals definides: el mètode dels Trapezis i el mètode de Simpson. Anem a estudiar com podem utilitzar *Mathematica* per a aplicar aquests dos mètodes.

Con ja saps el primer pas consisteix en fer una partició de l'interval d'integració $[a, b]$:

$$P = \{a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh = b\},$$

on n és el nombre de subintervals i $h = (b - a)/n$ és la longitud de cada subinterval.

2.1 Mètode dels Trapezis

Recorda que la fórmula que permet aproximar la integral definida anterior aplicant el Mètode dels Trapezis és

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right).$$

Amb *Mathematica* podem construir una funció que aplique la fórmula anterior:

```
In[7] := Trapezis[f_,{a_,b_,n_}:=

    Module[{h},
    h = (b - a)/n;
    N[ (f[a]+2*Sum[ f[a+k*h],{k,2,n-1} ]+f[b])*h/2,  20 ]  ]
```

La funció `Trapezis` implementa un petit "programa" en *Mathematica* (observeu els dos punts abans del signe =). Els seus inputs son: una funció f, els extrems d'integració a i b, i el nombre de subintervals n. Utilitza la instrucció `Module`, la qual declara la variable `h` com a variable local, de forma que si s'ha emprat en la mateixa sessió de *Mathematica*, el seu valor no influeix en el resultat. Per exemple, suposem que definim la variable `t` igual a `2`.

```
In[8] := t = 2
Out[7] =  2
```

i desitgem utilitzar el nombre de la variable i no el seu valor assignat.

```
In[9] := Module[{t}, t = 7; t^2]
Out[8] = 49
```

El valor retornat per la instrucció `Module` és 49 (el valor calculat dins de `Module`, i no 2.

La funció `Module` té diverses parts: la primera és una llista de les variables locals (entre claus i separades per comes), després ve una coma, després de la coma una sèrie de instruccións separades per "`;`" que efectuen càlculs amb les variables locals i els inputs, i finalment (abans de tancar el claudàtor) l'expressió que desitgem calcular.

Al fitxer *FuncionsPredefinides.nb* trobareu aquest codi de la funció `Trapezis`, què podeu *copiar* i *enganxar* al vostre document de treball.

Recordeu que la fórmula que ens dóna una cota de l'error comès quan apliquem el Mètode dels Trapezis és la següent:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

on M_2 és una cota superior del valor absolut de la derivada **segona** de la funció en $[a,b]$.

2.2 Mètode de Simpson

La fórmula que permet aproximar la integral definida anterior aplicant el Mètode de Simpson és

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh) + f(b) \right).$$

Recordeu que n **ha de ser un nombre parell**.

Una implementación en *Mathematica* ve donada per la següent funció (amb inputs similars als de la funció `Trapezis`):

```
In[10] := Simpson[f_,{a_,b_,n_}:=
    Module[{h},
    h = (b - a)/n;
    N[ (f[a]+4*Sum[ f[a+(2*k+1)*h],{k,0,n/2-1} ] +
        2*Sum[ f[a+2*k*h],{k,1,n/2-1} + f[b])*h/3,  20 ]  ]
```

Al fitxer *FuncionsPredefinides.nb* trobareu aquest codi de la funció `Simpson`, què podeu *copiar* i *enganxar* al vostre document de treball.

Recordeu que la fórmula que ens dóna una cota de l'error comès quan apliquem el Mètode dels Trapezis és la següent:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4,$$

on M_4 és una cota superior del valor absolut de la derivada **quarta** de la funció en $[a, b]$.