

Exemple d'utilització de les regles de transició :

Programa:

```
x:=14;  
y:=3;  
while y≤x do  
  x:=x-y;  
  resto:=x
```

Execució de l'assignació $x:=14$;

$$\frac{\langle 14, \{\} \rangle \Rightarrow 14}{\langle x := 14, \{\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 14\} \rangle = \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 14\} \rangle}$$

$$\langle x := 14; y := 3; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}; y := 3; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14\} \rangle$$

Programa

Configuració inicial

Simplificació

$$\langle \text{skip}; y := 3; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14\} \rangle \rightarrow \langle y := 3; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14\} \rangle$$

Execució de l'assignació $y:=3$;

$$\langle 3, \{x \rightarrow 14\} \rangle \Rightarrow 3$$

$$\langle y:=3, \{x \rightarrow 14\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 14\}[y \rightarrow 3] \rangle = \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle$$

$$\langle y:=3; \text{while } y \leq x \text{ do } x:=x-y; \text{resto}:=x, \{x \rightarrow 14\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x:=x-y; \text{resto}:=x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Simplificació

$$\langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x:=x-y; \text{resto}:=x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{while } y \leq x \text{ do } x:=x-y; \text{resto}:=x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Primera iteración del bucle while $y \leq x$ do $x := x - y$;

Comprovació de la guarda $y \leq x$

$$\begin{array}{c} \langle x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\}(x) = 14 \quad \wedge \quad \langle y, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\}(y) = 3 \\ \hline \langle y \leq x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \text{true} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{3 es menor o igual que 14} \\ (1) \end{array}$$

$$\langle \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle x := x - y; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Execució del cos $x := x - y$

$$\begin{array}{c} \langle x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\}(x) = 14 \quad \wedge \quad \langle y, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\}(y) = 3 \\ \hline \langle x - y, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow 14 - 3 = 11 \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \langle x := x - y, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} [x \rightarrow 11] \rangle = \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \\ \hline \langle x := x - y; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 14, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \end{array}$$

Simplificació

$$\langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Segona iteració del bucle $\text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y;$

Comprovació de la guarda $y \leq x$

... igual que (1) però amb $x \rightarrow 11$...

$$\langle y \leq x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \text{true}$$

$$\langle \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle x := x - y; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Execució del cos $x := x - y$

... igual que (2) però amb $x \rightarrow 11$...

$$\langle x := x - y, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} [x \rightarrow 8] \rangle = \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 8, y \rightarrow 3\} \rangle$$

$$\langle x := x - y; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 11, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 8, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Simplificació

$$\langle \text{skip}; \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 8, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 8, y \rightarrow 3\} \rangle$$

Tercera iteració del bucle `while y ≤ x do x := x - y;`

Aplicant les mateixes deduccions per a la guarda, el cos i la simplificació

`<while y ≤ x do x := x - y; resto := x, {x → 8, y → 3}>` $\rightarrow \dots \rightarrow$ `<while y ≤ x do x := x - y; resto := x, {x → 5, y → 3}>`



Quarta iteració del bucle `while y ≤ x do x := x - y;`

Aplicant les mateixes deduccions per a la guarda, el cos i la simplificació

`<while y ≤ x do x := x - y; resto := x, {x → 5, y → 3}>` $\rightarrow \dots \rightarrow$ `<while y ≤ x do x := x - y; resto := x, {x → 2, y → 3}>`



Eixida del bucle while $y \leq x$ do $x := x - y$;

$$\frac{\langle x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow 2 \wedge \langle y, \{y \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow 3}{\langle y \leq x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \text{false}} \quad \text{3 no es menor o igual que 2}$$

$\langle \text{while } y \leq x \text{ do } x := x - y; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle$

Simplificació

$\langle \text{skip}; \text{resto} := x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{resto} := x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle$

Execució de la instrucció **resto:=x;**

$$\langle x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} (x) = 2$$



$$\langle \text{resto}:=x, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\} \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3\}[\text{resto} \rightarrow 2] \rangle = \langle \text{skip}, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 3, \text{resto} \rightarrow 2\} \rangle$$

Configuració final

Resum de la traça d'execució del programa

En *blau* la instrucció que “s'executa” en la línia

Evolució del programa

```
< x:=14;y:=3;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;y:=3;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < y:=3;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;while y≤x do x:=x-y; resto:=x,  
→ < while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < x:=x-y;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < x:=x-y;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < x:=x-y;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip; while y≤x do x:=x-y;resto:= x,  
→ < while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < x:=x-y;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < while y≤x do x:=x-y;resto:=x,  
→ < skip;resto:= x,  
→ < resto:=x,  
→ < skip,
```

Evolució de l'estat

```
{ } > →  
{x→14} > →  
{x→14} > →  
{x→14 ,y→3} > →  
{x→14, y→3} > →  
{x→14, y→3} > →  
{x→11, y→3} > →  
{x→11, y→3} > →  
{x→11, y→3} > →  
{x→8, y→3} > →  
{x→8, y→3} > →  
{x→8, y→3} > →  
{x→5, y→3} > →  
{x→5, y→3} > →  
{x→5, y→3} > →  
{x→2, y→3} > →  
{x→2, y→3} > →  
{x→2, y→3} > →  
{x→2, y→3} > →  
{x→2, y→3,resto → 2}>
```