

### Exercici en grup del tema 2 (fora de l'aula)

**Formació del grup:** el grup està format per tres alumnes. Els alumnes creen i gestionen els grups.

**ENUNCIAT:** L'exercici consisteix a modificar les semàntiques *small-step* i *big-step* per al llenguatge imperatiu vist en classe. La modificació afecta tant a la *configuració* com a les *regles de transició*. El grup pot triar solucionar alguns o tots els següents problemes i ampliar l'enunciat segons els seus propis criteris.

- A Comptar la quantitat d'assignacions que es realitzen en l'execució d'un programa.
- B Comptar la quantitat d'expressions que s'avaluen en l'execució d'un programa.
- C Comptar la quantitat de vegades que s'apliquen les regles.

Aplicar les noves regles de la semàntica operacional que heu realitzat al següent programa:

```
if X <= Y
  then while X <= Y do
    X := X + Y
  else X := X - Y
```

amb l'estat inicial  $\{X \mapsto 2, Y \mapsto 4\}$

#### **Algunes consideracions:**

1. Les configuracions vistes en classe ( $\langle \text{instrucció}, \text{estat} \rangle$ ) utilitzades en les especificacions als estils *small-step* i *big-step*, només s'usen per a poder especificar la execució d'un programa. Cal modificar-les perquè puguin portar els comptes proposats. Encara que aquesta modificació podria realitzar-se definint variables especials guardades en l'estat, es recomana ampliar la configuració amb més elements  
 $\langle \text{instrucció}, \text{estat}, \text{variable1}, \text{variable2}, \dots \rangle$   
o usar nou conjunt d'assignacions:  
 $\langle \text{instrucció}, \text{estat}, \{\text{variable1} \mapsto \text{valor1}, \text{variable2} \mapsto \text{valor2}, \dots\} \rangle$
2. Per a comptar la quantitat d'avaluacions d'expressions realitzades o fer qualsevol altre comptatge, es recomana modificar el resultat de l'avaluació d'expressions, de manera que no solament expressen el resultat de l'avaluació, sinó també el recompte realitzat durant l'avaluació, de manera que es vagin acumulant els valors anteriors als nous.  
P. ej:  $\langle \text{exp}, \text{estat}, \text{recompteAcumulat} \rangle \Rightarrow \langle \text{resultat}, \text{recompteAcumulat}' \rangle$

3. En a l'estil *big-step* ha de tenir-se en compte que no solament interessa l'estat en les parts dretes de  $\Downarrow$ , sinó també el compte resultant.

**Exemple:** si volguéssim comptar les vegades que s'apliquen les regles de transició *big-step* i la quantitat d'avaluacions realitzades separatament, podíem afegir les variables ( $c_{reg}$ ) i  $c_{eval}$  a la configuració. Per exemple: la modificació per a usar les noves variables en la regla per a la instrucció *while-do* a l'estil *big-step* havent triat ampliar la configuració amb les dues variables, la regla del **while** podria quedar com:

$$\frac{\langle b, e, 0 \rangle \Rightarrow \langle false, n \rangle}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ i, e, c_{reg}, c_{eval} \rangle \Downarrow \langle e, c_{reg} + 1, c_{eval} + n \rangle}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \langle b, e, 0 \rangle \Rightarrow \langle true, n_0 \rangle \\ \langle i, e, 0, 0 \rangle \Downarrow \langle e', m_1, n_1 \rangle \\ \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ i, e', 0, 0 \rangle \Downarrow \langle e'', m_2, n_2 \rangle \end{array}}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ i, e, c_{reg}, c_{eval} \rangle \Downarrow \langle e'', c_{reg} + 1 + m_1 + m_2, c_{eval} + n_0 + n_1 + n_2 \rangle}$$

Per descomptat, per a cada estil, si fóra necessari, caldria modificar totes les regles transició, incloent els canvis per a totes les regles de transició d'avaluació d'expressions  $\Rightarrow$ . A més, en la configuració inicial per a un programa  $P$  amb un estat inicial  $e$  s'ha de tenir en compte els valors inicials dels comptes perquè el comptatge fóra correcte.

## **Exemple de modificació de la semàntica operacional**

### **Modificacions**

1. Regles de transició (pag. 2)
2. Semàntica small-step (pag. 5)
3. Traça en small-step (pag. 7)
4. Semàntica big-step (pag. 9)
5. Traça en big-step (pag. 1)

### **Explicació:**

El treball està dividit en cinc parts, una de les quals correspon a les regles de transició que són comunes a ambdues semàntiques operacionals i les quatre restant depenen del tipus de semàntica operacional.

## 1. Avaluació d'expressions

Al llarg del treball ens referirem als comptadors com:

**c1** = Comptador de assignacions

**c2** = Comptador de avaluacions de expressions

**c3** = Comptador de instruccions realitzades

### Constants numèriques

$$\langle n, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle n, c1, c2+1, c3+1 \rangle$$

### Variables

$$\langle x, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle s(x), c1, c2+1, c3+1 \rangle$$

### Valors booleans

$$\langle \text{false}, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1, c2+1, c3+1 \rangle$$

$$\langle \text{true}, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1, c2+1, c3+1 \rangle$$

#### Addició

$$\langle a1, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle a2, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n2, c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle a1+a2, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle n, c1+c1'+c1'', c2+c2'+c2''+1, c3+c3'+c3''+1 \rangle$$

#### Igualtat

$$\langle a1, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle a2, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n2, c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle a1==a2, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1+c1'+c1'', c2+c2'+c2''+1, c3+c3'+c3''+1 \rangle$$

$$\langle a1, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle a2, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n2, c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle a1==a2, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1+c1'+c1'', c2+c2'+c2''+1, c3+c3'+c3''+1 \rangle$$

#### Menor o igual

$$\langle a1, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle a2, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n2, c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle a1 \leq a2, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1+c1'+c1'', c2+c2'+c2''+1, c3+c3'+c3''+1 \rangle$$

$$\langle a1, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle a2, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n2, c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle a1 \leq a2, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1+c1'+c1'', c2+c2'+c2''+1, c3+c3'+c3''+1 \rangle$$

**Negació**

$$\langle b, s, \theta, \theta, \theta \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \neg b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1+c1', c2+c2'+1, c3+c3'+1 \rangle$$

$$\langle b, s, \theta, \theta, \theta \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \neg b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1+c1', c2+c2'+1, c3+c3'+1 \rangle$$

## 2. Estil Small-step

### Assignació

---

$$\langle a, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle x := a, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s[x \mapsto n], c1 + c1' + 1, c2 + c2', c3 + c3' + 1 \rangle$$

### Seqüència

---

$$\langle \text{skip}, i, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle i, s, c1, c2, c3 + 1 \rangle$$

---

$$\langle i, s, 0, 0, 0 \rangle \rightarrow \langle i1', s', c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle i1; i2, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle i1', i2, s', c1 + c1', c2 + c2', c3 + c3' + 1 \rangle$$

### Condicional

---

$$\langle b, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \text{if } b \text{ then } i1 \text{ else } i2, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle i1, s, c1 + c1', c2 + c2', c3 + c3' + 1 \rangle$$

---

$$\langle b, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \text{if } b \text{ then } i1 \text{ else } i2, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle i2, s, c1 + c1', c2 + c2', c3 + c3' + 1 \rangle$$

### Bucle while

$$\langle b, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \text{while } b \text{ do } i, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s, c1+c1', c2+c2', c3+c3'+1 \rangle$$
$$\langle b, s, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle \text{while } b \text{ do } i, s, c1, c2, c3 \rangle \rightarrow \langle i; \text{while } b \text{ do } i, s, c1+c1', c2+c2', c3+c3'+1 \rangle$$



### 3. Traça en small-step

{X = 2, Y = 4, c1 = 0, c2 = 0, c3 = 0}

if X <= Y

then while X <= Y do

X := X + Y

else X := X - Y

P = {if X <= Y then while X <= Y do X := X + Y else X := X - Y}

1. <if X <= Y then while X <= Y do X := X + Y else X := X - Y, {x->2, y->4}, {c1->0}, {c2->0}, {c3->0}> ->

<X <= Y, 0, 0, 0> => <true, {c1->0}, {c2->3}, {c3->3}>

<X, s, 0, 0, 0> => <2, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>

<Y, s, 0, 0, 0> => <4, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>

2. <while X <= Y do X := X + Y, s, {c1->0}, {c2->3}, {c3->4}> → <X := X + Y; while X <= Y do X := X + Y, s, {c1->0}, {c2->6}, {c3->8}> ->

<X <= Y, 0, 0, 0> => <true, {c1->0}, {c2->3}, {c3->3}>

<X, s, 0, 0, 0> => <2, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>

<Y, s, 0, 0, 0> => <4, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>

```

<X := X + Y> → <skipe, {X |→ 6}, {c1-→1}, {c2-→3}, {c3-→4}>
  <X + Y, s, 0, 0, 0> ⇒ <6, {c1-→0}, {c2-→3}, {c3-→3}>
    <X, s, 0, 0, 0> ⇒ <2, {c1-→0}, {c2-→1}, {c3-→1}>
      <Y, s, 0, 0, 0> ⇒ <4, {c1-→0}, {c2-→1}, {c3-→1}>

```

3. <skip; while X <= Y do X := X + Y, {X-→6, Y-→4}, {c1-→1}, {c2-→9}, {c3-→13}> ->

4. <while X <= Y do X := X + Y, s, {c1-→1}, {c2-→9}, {c3-→14}> ->

```

<X <= Y, 0, 0, 0> ⇒ <false, {c1-→0}, {c2-→3}, {c3-→3}>
  <X, s, 0, 0, 0> ⇒ <6, {c1-→0}, {c2-→1}, {c3-→1}>
    <Y, s, 0, 0, 0> ⇒ <4, {c1-→0}, {c2-→1}, {c3-→1}>

```

5. <skip, {X-→6, Y-→4}, {c1-→1}, {c2-→12}, {c3-→18}>

Resultat final de l'execució: **<skip, {x-→6,y-→4}, {c1-→1}, {c2-→12}, {c3-→18}>**

#### 4. Estil big-step

##### Assignació

$$\langle a, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle n, c1', c2', c3' \rangle$$

---

$$\langle x := a, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s[x \mapsto n], c1' + 1, c2', c3' + 1 \rangle$$

##### Instrucció buida

---

$$\langle \text{skip}, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s, c1, c2, c3 + 1 \rangle$$

##### Seqüència

---

$$\langle i1, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s', c1', c2', c3' \rangle \quad \langle i2, s', c1', c2', c3' \rangle \Downarrow \langle s'', c1'', c2'', c3'' \rangle$$

$$\langle i1, i2, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s'', c1'', c2'', c3'' + 1 \rangle$$

##### Condicional

$$\langle b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1', c2', c3' \rangle$$

$$\langle i1, s, c1', c2', c3' + 1 \rangle \Downarrow \langle s', c1'', c2'', c3'' \rangle$$

---

$$\langle \text{if } b \text{ then } i1 \text{ else } i2, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s', c1'', c2'', c3'' + 1 \rangle$$

$\langle b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1', c2', c3' \rangle$

$\langle i2, s, c1', c2', c3'+1 \rangle \Downarrow \langle s', c1'', c2'', c3'' \rangle$

---

$\langle \text{if } b \text{ then } i1 \text{ else } i2, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s', c1'', c2'', c3''+1 \rangle$

**Bucle while**

$\langle b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{false}, c1', c2', c3' \rangle$

---

$\langle \text{while } b \text{ do } i, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s, c1', c2', c3'+1 \rangle$

$\langle b, s, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, c1', c2', c3' \rangle \quad \langle i, s, c1', c2', c3' \rangle \Downarrow \langle s', c1'', c2'', c3'' \rangle$

$\langle \text{while } b \text{ do } i, s', c1'', c2'', c3'' \rangle \Downarrow \langle s'', c1''', c2''', c3''' \rangle$

---

$\langle \text{while } b \text{ do } i, s, c1, c2, c3 \rangle \Downarrow \langle s'', c1''', c2''', c3''' + 1 \rangle$

## 5. Traça en big-step

$\{X = 2, Y = 4, c1 = 0, c2 = 0, c3 = 0\}$

if  $X \leq Y$

then while  $X \leq Y$  do

$X := X + Y$

else  $X := X - Y$

$P = \{ \text{if } X \leq Y \text{ then while } X \leq Y \text{ do } X := X + Y \text{ else } X := X - Y \}$

$\langle \text{if } X \leq Y \text{ then while } X \leq Y \text{ do } X := X + Y \text{ else } X := X - Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 0\}, \{c3 \rightarrow 0\} \rangle \Downarrow \langle \{x \rightarrow 6, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 1\}, \{c2 \rightarrow 12\}, \{c3 \rightarrow 16\} \rangle$

$\langle X \leq Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, c1, c2, c3 \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 3\}, \{c3 \rightarrow 3\} \rangle$

$\langle X, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle 2, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 1\}, \{c3 \rightarrow 1\} \rangle$

$\langle Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle 4, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 1\}, \{c3 \rightarrow 1\} \rangle$

$\langle \text{while } X \leq Y \text{ do } X := X + Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 3\}, \{c3 \rightarrow 3\} \rangle \Downarrow \langle \{x \rightarrow 6, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 1\}, \{c2 \rightarrow 12\}, \{c3 \rightarrow 15\} \rangle$

$\langle X \leq Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 3\}, \{c3 \rightarrow 3\} \rangle \Rightarrow \langle \text{true}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 6\}, \{c3 \rightarrow 6\} \rangle$

$\langle X, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle 2, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 1\}, \{c3 \rightarrow 1\} \rangle$

$\langle Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow \langle 4, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 1\}, \{c3 \rightarrow 1\} \rangle$

$\langle X := X + Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 6\}, \{c3 \rightarrow 6\} \rangle \Downarrow \langle \{x \rightarrow 6, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 1\}, \{c2 \rightarrow 9\}, \{c3 \rightarrow 10\} \rangle$

$\langle X + Y, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 0\}, \{c2 \rightarrow 6\}, \{c3 \rightarrow 6\} \rangle \Rightarrow \langle \{x \rightarrow 6, y \rightarrow 4\}, \{c1 \rightarrow 1\}, \{c2 \rightarrow 9\}, \{c3 \rightarrow 9\} \rangle$

```

<X, {x->2,y->4}, 0, 0, 0> => <2, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>
<Y, {x->2,y->4}, 0, 0, 0> => <4, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>
<while X <= Y do X := X + Y, {x->6,y->4}, {c1->1}, {c2->9}, {c3->10}> ∪ <{x->6,y->4}, {c1->1}, {c2->12}, {c3->14}>
<X <= Y, {x->6,y->4}, {c1->1}, {c2->9}, {c3->10}> => <false, {x->6,y->4}, {c1->1}, {c2->12}, {c3->13}>
<X, {x->6,y->4}, 0, 0, 0> => <6, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>
<Y, {x->6,y->4}, 0, 0, 0> => <4, {c1->0}, {c2->1}, {c3->1}>

```

Resultat final de l'execució: <{x->6,y->4}, {c1->1}, {c2->12}, {c3->16}>