Data: 20.06.2024

Geometrie și Algebră liniară

Examen

I Algebră Liniară

(A1) În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ cu structura canonică, se consideră următoarele subspații vectoriale:

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$

Determinați baze și dimensiunea pentru subspațiile vectoriale

a) U, V

b) $U \cap V$

c) $U + V$

d) Este adevărată relația $U \oplus V = \mathbb{R}^3$, în acest caz?

(A2) Considerăm aplicația liniară

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x - 2y, -2x + 2y - 2z, -2y + 3z)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

a) Determinați $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$.

b) Precizați dacă f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă.

c) Aflați spectrul endomorfismului f și subspațiile proprii corespunzătoare

d) Stabiliți dacă endomorfismul f este diagonalizabil

e) Determinați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, unde A este matricea asociată endomorfismului f, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

II Geometrie

(G1) Se consideră conica Γ de ecuație generală:

$\Gamma: x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$

a) Precizați natura și genul conicii Γ.

b) Stabiliți dacă conica Γ are centru unic și în caz afirmativ determinați coordonatele acestuia.

(G2) Subiecte prof. dr. A.M. Teleman

Examen
Geometrie și Algebră liniară

I. Se consideră $B_1 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ baza canonică în E^2

Se consideră $R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ și

$$S_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Fie $f, g \in End(\mathbb{R}^2, +)$ a.î. $M_{B_1}(f) = R_{\frac{\pi}{3}}$ și $M_{B_1}(g) = S_{\frac{\pi}{3}}$.

-1- 1) Arătați că $R_{\frac{\pi}{3}} \in SO(2)$, $S_{\frac{\pi}{3}} \in O(2)$ și $f, g \in Izot(E^2)$.

-1- 2) Reprezentați f, g și $g \circ f$
a) în coordonate în raport cu baza B_1
b) matriceal

-1- 3) Determinați sistemele de vectori $B = \{f(e_1), f(e_2)\}$ și $C = \{g(e_1), g(e_2)\}$. Arătați că B și C sunt baze ortonormate în E^2.

-1- 4) Determinați matricea de trecere M de la B la C.

-1- 5) Calculați aria triunghiului Oe_1e_2.

-1- 6) Descompuneți f în produs de simetrii față de drepte.

II. Se consideră în E_0^3 cuadrica de ecuație
$$\frac{(x^1)^2}{9} - \frac{(x^2)^2}{4} + \frac{(x^3)^2}{64} = 1$$

-1- a) Calculați invarianții relativi ai cuadricei

-1- b) Desen

-1- c) Cum se numește o astfel de cuadrică

III'. În spațiul vectorial euclidian orientat (E^3, baza canonică) se consideră vectorii $u = (2,-1,3)$, $v = (4,5,6)$ și $w = (-4,-5,6)$.

Calculați: a) $\langle u, v \rangle$ și $u \times v$, b) $\langle u \times v, w \rangle$.
c) $\|u \times v\|$ și $\cos(\widehat{u, v})$.