

**Examen Structuri algebrice în informatică, seria 13**  
**27.01.2025**

(1) (1.5 pct.) Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, & -1 < x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 20, & x > 5. \end{cases}$$

- (a) Este  $f$  injectivă? Dar surjectivă?  
(b) Aflați  $f([-3, 6])$  și  $f^{-1}((0, 1))$ .
- (2) (1 pct.) Determinați cel mai mare număr natural  $k$  pentru care  $10^k$  divide numărul  $N = 12!$ . Care sunt ultimele trei cifre nenule ale lui  $N$ ?
- (3) (1.5 pct.) Notăm  $a = 29$  și  $b = 50$  și  $d = \gcd(a, b)$ .  
(a) Aflați cel mai mic  $u \in \mathbb{N}$  pentru care există  $v \in \mathbb{Z}$  cu  $ua + vb = d$ .  
(b) Aflați cel mai mic  $v \in \mathbb{N}$  pentru care există  $u \in \mathbb{Z}$  cu  $ua + vb = d$ .  
(c) Aflați ordinul elementului  $\widehat{29}$  în grupul multiplicativ  $(U(\mathbb{Z}_{50}), \cdot)$  al elementelor inversabile din inelul  $\mathbb{Z}_{50}$ .
- (4) (1.5 pct.) Considerăm polinoamele  $f = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1$  și  $g = x^2 + x + 1$  din  $\mathbb{R}[x]$ .  
(a) Determinați câtul și restul împărțirii lui  $f$  la  $g$ .  
(b) Determinați  $\gcd(f, g)$ .  
(c) În inelul  $A = \mathbb{R}[x]/(g)$  aflați divizorii lui zero și inversul lui  $\widehat{f}$ , dacă există.
- (5) (1 pct.) Descompuneți în factori ireductibili în  $\mathbb{Z}_2[x]$  polinomul

$$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \widehat{1}.$$

- (6) (1 pct.) Găsiți elementele de ordin 12 din grupul aditiv  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ .
- (7) (1.5 pct.) Considerăm permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 3 & 2 & 7 & 4 & 10 & 1 & 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

- (a) Aflați ordinul și semnul permutării  $\sigma$ .  
(b) Scrieți  $\sigma$  ca produs de cicluri de lungime 2.  
(c) Se poate scrie  $\sigma$  ca produs de cicluri de lungime 3? Dacă da, dați exemplu de astfel de scriere folosind un număr minim de cicluri.

Se acordă 1 pct din oficiu.

Justificați toate răspunsurile date, arătând calculele efectuate.

**Timp de lucru:** 2 ore și 30 minute