

Nume, prenume: .....

Grupa: .....

Examen Structuri algebrice în informatică, seria 15  
30.01.2024

(1) (2 pct.) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6, & x \leq -2 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, & -2 < x < 1 \\ x - 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Aflați  $f([-3, 1])$  și  $f^{-1}((0, 1))$ .

(b) Determinați acei  $y \in \mathbb{R}$  pentru care mulțimea  $f^{-1}(\{y\})$  are 2 elemente.

(2) (2 pct.)

(a) Determinați ordinele elementelor grupului  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$  considerat cu operația de adunare uzuală pe componente.

(b) Sunt izomorfe grupurile  $G$  și  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{20}$ ? Argumentați.

(c) Găsiți morfismele de grup  $f: (\mathbb{Z}_5, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_8, +)$ .

(3) (2 pct.) Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 1 & 8 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(a) Calculați  $\sigma^{2024}$ .

Dați exemplu de scriere, sau argumentați că nu se poate descompune  $\sigma$

(b) ca produs de transpoziții;

(c) ca produs de cicluri de lungime 3;

(d) ca produs de cicluri de lungime 4.

(4) (2 pct.)

(a) Determinați inversul lui  $1 + \widehat{x + x^2}$ , dacă există, în inelul factor  $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - x - 1)$ .

(b) Aflați acei  $g \in \mathbb{Q}[x]$  pentru care  $\widehat{g^2} = \widehat{0}$  în  $A$ .

(5) (1 pct.) Decideți dacă polinomul  $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x + 1$  este ireductibil în  $\mathbb{Q}[x]$ .

Se acordă 1 pct din oficiu.

Justificați toate răspunsurile date, arătând calculele efectuate.

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute