

Examen Structuri algebrice în informatică, seria 13
27.01.2025

(1) (1.5 pct.) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, & -1 < x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 20, & x > 5. \end{cases}$$

- (a) Este f injectivă? Dar surjectivă?
(b) Aflați $f([-3, 6])$ și $f^{-1}((0, 1])$.
- (2) (1 pct.) Determinați cel mai mare număr natural k pentru care 10^k divide numărul $N = 12!$. Care sunt ultimele trei cifre nenule ale lui N ?
- (3) (1.5 pct.) Notăm $a = 29$ și $b = 50$ și $d = \gcd(a, b)$.
(a) Aflați cel mai mic $u \in \mathbb{N}$ pentru care există $v \in \mathbb{Z}$ cu $ua + vb = d$.
(b) Aflați cel mai mic $v \in \mathbb{N}$ pentru care există $u \in \mathbb{Z}$ cu $ua + vb = d$.
(c) Aflați ordinul elementului $\hat{29}$ în grupul multiplicativ $(U(\mathbb{Z}_{50}), \cdot)$ al elementelor inversabile din inelul \mathbb{Z}_{50} .
- (4) (1.5 pct.) Considerăm polinoamele $f = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ și $g = x^2 + x + 1$ din $\mathbb{R}[x]$.
(a) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la g .
(b) Determinați $\gcd(f, g)$.
(c) În inelul $A = \mathbb{R}[x]/(g)$ aflați divizorii lui zero și inversul lui \hat{f} , dacă există.
- (5) (1 pct.) Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomul

$$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \hat{1}.$$

- (6) (1 pct.) Găsiți elementele de ordin 12 din grupul aditiv $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$.
- (7) (1.5 pct.) Considerăm permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 3 & 2 & 7 & 4 & 10 & 1 & 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

- (a) Aflați ordinul și semnul permutării σ .
(b) Scrieți σ ca produs de cicluri de lungime 2.
(c) Se poate scrie σ ca produs de cicluri de lungime 3? Dacă da, dați exemplu de astfel de scriere folosind un număr minim de cicluri.

Se acordă 1 pct din oficiu.

Justificați toate răspunsurile date, arătând calculele efectuate.

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute