2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane

Euclid definește *punctul* ca o entitate indivizibilă, *linia* ca o lungime fără lărgime, *suprafața* ca entitate avînd lungime și lărgime, iar *solidul* ca entitate avînd lungime, lărgime și grosime. Aceste definiții nu sînt riguros științifice, dar au calitatea de a fixa noțiunile de bază, prin proprietăți intuitive, care permit purtarea unui dialog.

Corpurile solide au caracter mai intuitiv decît punctele sau liniile și suprafețele. Dacă am admite ca date solidele, am putea defini suprafețele ca limite ale solidelor, liniile ca limite ale suprafețelor și punctele ca limite ale liniilor. Liniile drepte sînt linii particulare, anume ele pot fi considerate ca poziții limită ale unor fire foarte bine întinse. Noțiunea de *linie dreaptă*, care apare în *Elementele* lui Euclid, corespunde noțiunii de *segment*.

Euclid a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții, pe care le-a admis ca adevărate și pe care le-a numit *postulate*:

1. *Între două puncte se poate duce o linie dreaptă.*
2. *Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.*
3. *Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.*
4. *Toate unghiurile drepte sînt congruente între ele.*
5. *Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două linii drepte, formează, de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne avînd suma mai mică decît două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sînt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decît două unghiuri drepte.*

În aceste enunțuri apar termenii de prelungire nelimitată, parte a unei drepte, congruență a două unghiuri și cerc. Pentru aceste noțiuni, Euclid a dat explicații intuitive, dar vagi din punct de vedere științific. De exemplu, noțiunea de congruență, la Euclid, se definește prin posibilitatea de a suprapune o figură peste alta, de exemplu un unghi peste alt unghi sau un segment peste alt segment.

Noțiunile fundamentale ale geometriei sînt acelea de *punct*, *dreaptă*, *plan* și *Spațiu*, la care se adaugă relațiile de *ordonare* între punctele unei drepte și de *congruență* între două segmente sau între două unghiuri. Aceste noțiuni au caracter intuitiv, ele fiind extrase din experiențe ce au fost efectuate de oameni de-a lungul multor milenii. Prin Spațiu înțelegem Spațiul în care trăim, care se numește uneori Univers sau Cosmos sau Spațiu fizic. Ansamblul științelor Naturii studiază proprietățile acestui Spațiu. Geometria, ca știință a Naturii, urmărește anumite proprietăți ale acestui Spațiu, neglijînd aspectele fizice, chimice, biologice și geologice și are drept obiect de studiu proprietățile corpurilor rigide (nedeformabile), care au forme mai simple. Geometria experimentală studiază proprietățile corpurilor de dimensiuni direct perceptibile și măsurabile cu ajutorul instrumentelor obișnuite (riglă gradată, raportor, goniometru etc.). Geometria experimentală nu studiază

părți ale materiei, care au dimensiuni subatomice sau planetare. Măsurarea mărimilor de acest fel se face în mod indirect, pe baza unor ipoteze fizice sau chimice, și a unei abstractizări a geometriei experimentale, numită *geometria euclidiană și definită prin sistemul de axiome dat de Hilbert*. Sistemul de axiome dat de Hilbert va fi predat în clasa a X-a, deoarece se referă la geometria în Spațiu.

3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

Vom admite, fără demonstrații, următoarele proprietăți:

1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
2. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.
3. În orice plan, există trei puncte care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă.

Cu ajutorul proprietăților indicate, putem demonstra că:

Două drepte distincte dintr-un plan au cel mult un punct comun.

Într-adevăr, dacă ultima afirmație n-ar fi adevărată, atunci ar exista două drepte d și d' astfel încît intersecția $d \cap d'$ conține cel puțin două puncte. Dar proprietatea 1 arată că prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci intersecția $d \cap d'$ conține cel mult un punct.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație este metoda reducerii la absurd, care constă în a arăta că negarea unei proprietăți, pe care vrem s-o demonstrăm, conduce la o contradicție cu una sau mai multe proprietăți admise sau demonstrate anterior.

Exercițiu

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați următoarele proprietăți:

a. *Dacă A este un punct al unei drepte d, atunci dreapta d conține cel puțin un punct diferit de A.*

b. *Dacă d este o dreaptă dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct nesituat pe dreapta d.*

c. *Dacă A și B sînt două puncte distincte dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct C, astfel ca punctele A, B, C să fie necoliniare.*

d. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.*

4. Proprietăți de ordonare

Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci nici unul din aceste puncte nu se găsește între celelalte două.

Dacă A, B, C sînt trei puncte distincte coliniare, atunci unul din aceste puncte se va găsi între celelalte două. În figura I.1, punctul B se găsește între A și C, dar C nu se găsește între A și B.

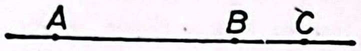

Fig. I.1

Fenomenele de eclipsă sînt legate de situația exprimată prin cuvîntul „între". De exemplu, eclipsele totale de Soare se produc atunci cînd Luna se găsește între Pămînt și Soare, iar eclipsele totale de Lună se produc atunci cînd Pămîntul se găsește între Soare și Lună. Aceste fenomene se produc cu o periodicitate de 18 ani și 11 zile. Cunoașterea acestei perioade, numită de vechii chaldeeni „saros", a avut o mare importanță pentru dezvoltarea științei despre Spațiul cosmic, deci și pentru dezvoltarea geometriei. Thales cunoștea perioada eclipselor totale de Soare și, pe baza acesteia, a putut anticipa eclipsa ce s-a produs în anul 584 î.e.n. și care a căpătat numele de eclipsa lui Thales.

Vom admite fără demonstrații următoarele proprietăți, numite proprietăți de ordonare:

1. Dacă punctul B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sînt coliniare și distincte, și B se găsește între C și A (fig. I.1).

2. Dacă A, B sînt două puncte distincte, atunci există cel puțin un punct C astfel ca B să se găsească între A și C (fig. I.1).

3. Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci A nu se găsește între C și B (fig. I.1).

4. (*axioma lui Pasch*). Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan cu aceste puncte, astfel încît d trece printr-un punct situat între C și B, dar nu trece prin nici unul din punctele A, B, C și nu trece prin nici un punct situat între A și C, atunci dreapta d trece printr-un punct situat între A și B (fig. I.2).

5. *Fiind date trei puncte distincte și coliniare A, B, C, astfel încît A nu este între B și C, iar C nu este între A și B, cu siguranță punctul B se va găsi între A și C* (fig. I.1).

6. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă L, M, N sînt trei puncte astfel încît L este între B și C, M este între C și A și N este între A și B, punctele L, M, N nu pot fi coliniare* (fig. I.3).

7. *Fiind date două puncte distincte A și B, există cel puțin un punct M situat între A și B* (fig. I.4).

8. *Dacă A, B, C, D sînt puncte astfel încît B este între A și C și C este între B și D, punctele B, C se vor găsi între A și D* (fig. I.5).

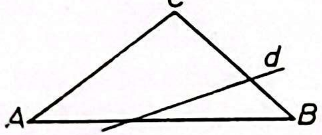

Fig. I.2

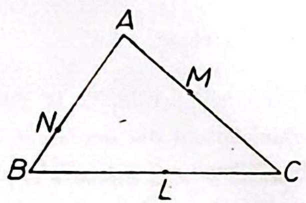

Fig. I.3

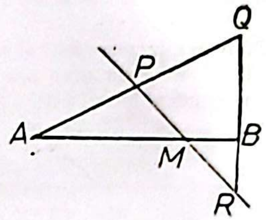

Fig. I.4

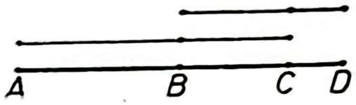

Fig. I.5

9. *Dacă C este între D și A și dacă B este între A și C, atunci B este între A și D, iar C este între B și D* (fig. I.6).

Dacă A și B sînt două puncte distincte, notăm prin $|AB|$ mulțimea punctelor situate între A și B și vom spune că $|AB|$ este *segmentul deschis* limitat de punctele A, B. Avem (fig. I.7):

$$|AB| = |BA|,\quad |AB| \subset AB,\quad A \notin |AB|,\quad B \notin |AB|.$$

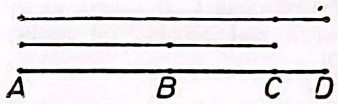

Fig. I.6

Fig. I.7

Punctelor A, B li se poate asocia și mulțimea $|AB| \cup \{A, B\}$, care va fi notată $[AB]$ și va fi numită *segmentul închis* limitat de punctele A, B. Avem $[AB] \subset AB$, $A \in [AB]$, $B \in [AB]$, $|AB| \subset [AB]$.

Trei puncte necoliniare, luate într-o anumită ordine, definesc un *triunghi*.

Fiind date punctele A, B, C, în ordinea scrisă, necoliniare, triunghiul definit de aceste puncte va fi notat ABC. Punctele A, B, C se numesc *vîrfurile* triunghiului ABC, iar segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc *laturile* triunghiului ABC (fig. I.8).

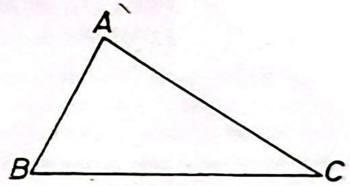

Fig. I.8

Exerciții

1. *Fiind dat un punct A, să se arate că există puncte B, C astfel ca $B \in |AC|$.*

2. *Fie ABC un triunghi și fie punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$. Să se arate că segmentele $|BN|$, $|CM|$ au un punct comun.*

3. *Ce putem spune despre trei puncte distincte A, B, C, dacă știm că $A \notin |BC|$, $B \notin |CA|$ și $C \notin |AB|$? Dar dacă știm că cele trei puncte sînt coliniare și că $A \notin |BC|$ și $C \notin |AB|$?*

4. *Reformulați axioma lui Pasch, utilizînd noțiunea de triunghi și aceea de latură a unui triunghi*

(R. Dacă o dreaptă d din planul unui triunghi ABC trece printr-un punct al laturii $|BC|$, dar nu trece prin nici unul din vîrfurile A, B, C și dacă d nu trece prin nici un punct al laturii $|AB|$, atunci dreapta d trece printr-un punct al laturii $|AC|$.)

5. Semidrepte și semiplane

Proprietatea fundamentală 1. Fie O un punct pe o dreaptă d. Există atunci două și numai două mulțimi d' și d'' astfel încît să avem (fig. 1.9):

a. $d' \cup d'' = d - \{O\}$.

b. Dacă $A \in d'$, $B \in d'$, $C \in d''$ și $D \in d''$, atunci $O \notin |AB|$, $O \notin |CD|$, $O \in |AC|$.

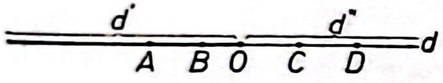

Fig. 1.9

Această proprietate se demonstrează plecînd de la observația că dreapta d conține cel puțin un punct P diferit de O și că d mai conține cel puțin un punct Q, astfel încît să avem $O \in |PQ|$.

Să definim atunci mulțimile:

(1) $d' = \{M \in d;\ O \in |QM|\}$, $d'' = \{N \in d;\ O \in |PN|\}$.

În clasa a X-a, se va arăta că mulțimile d' și d'' îndeplinesc condițiile a și b și că d', d'' sînt singurele mulțimi care îndeplinesc aceste condiții.

Definiție. Mulțimile d', d'', care îndeplinesc condițiile a și b din proprietatea fundamentală 1, și care pot fi definite prin formule de forma (1), se numesc semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d.

Dacă notăm prin s una din semidreptele d', d'', spunem că O este *originea* semidreptei s, iar d este *suportul* semidreptei s. Două semidrepte, care au același suport și aceeași origine, se numesc *opuse*.

O semidreaptă este complet definită prin originea sa și printr-un punct oarecare aparținînd semidreptei. Dacă semidreapta s are originea O și dacă s conține un punct A, scriem $s = |OA$.

Originea unei semidrepte s nu aparține acelei semidrepte, datorită condiției a. Deci dacă $s = |OA$, atunci $A \neq O$ și $|OA \subset OA$.

Exerciții

1. *Fie* $s = |OA = |OB$. *Să se arate că* $|OA \subset OA$ *și că dacă* $A \neq B$, *atunci* $|AB| \subset s$.

2. *Dacă* A, B *sînt puncte distincte, atunci* $|AB| = (|AB) \cap (|BA)$ *și* $AB = (|AB) \cup (|BA)$.

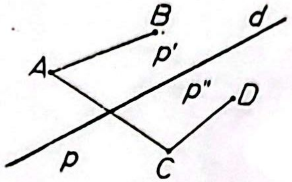

Fig. 1.10

Proprietatea fundamentală 2. Fie d o dreaptă într-un plan p. Există atunci două și numai două mulțimi p' și p'' astfel încît să avem (fig. 1.10)

a'. $p' \cup p'' = p - d$.

b'. Dacă $A \in p'$, $B \in p'$, $C \in p''$ și $D \in p''$, atunci

$|AB| \cap d = \emptyset$, $|CD| \cap d = \emptyset$, $|AC| \cap d \neq \emptyset$.

Demonstrația se face observînd că există în planul p cel puțin un punct $P \notin d$. Alegînd apoi în mod arbitrar un punct $O \in d$ și apoi un punct Q astfel ca $O \in |PQ|$, vom putea defini mulțimile

(2) $p' = \{M \in p;\ |QM| \cap d \neq \emptyset\}$, $p'' = \{N \in p;\ |PN| \cap d \neq \emptyset\}$.

În manualul de clasa a X-a, se va arăta că aceste mulțimi sînt singurele mulțimi, care verifică condițiile a' și b'.

Definiție. Mulțimile p', p'' care verifică condițiile a' și b' se numesc semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Dreapta d se va numi frontieră a fiecăreia din mulțimile p', p''. Vom mai spune că două semiplane, avînd aceeași frontieră și incluse în același plan, sînt opuse.

Pentru a defini un semiplan, este suficient să indicăm frontiera sa și unul din punctele sale. Semiplanul avînd ca frontieră dreapta d și care conține punctul A, va fi notat $|dA$.

Nici un semiplan nu-și conține frontiera.

Exerciții

1. *Fie* d, d' *două drepte conținute într-un plan* p *și concurente într-un punct* O. *Fie* p', p'' *semiplanele limitate de dreapta* d *în planul* p. *Să se arate că mulțimile* $d' \cap p'$, $d' \cap p''$ *reprezintă semidreptele limitate de punctul* O *pe dreapta* d'.

2. *Fie* d *și* a *două drepte disjuncte situate într-un plan* p *și fie* $A \in a$. *Să se arate că* $a \subset |dA$.

3. *Fie semiplanul* $S = |dA$ *și semidreapta* $s = |OA$, *unde* $O \in d$. *Să se arate că* $s \subset S$.

4. *Fie* A, B *două puncte situate pe o semidreaptă* s *și într-un semiplan* S. *Să se arate că* $|AB| \subset s$ *și* $|AB| \subset S$.

6. Unghiuri

Un *unghi* este o pereche de semidrepte avînd aceeași origine (fig. I. 11).

Unghiul format din semidreptele h, k va fi notat $\widehat{hk}$. Originea comună a semidreptelor h, k se numește *vîrful* unghiului $\widehat{hk}$, iar semidreptele h, k se numesc *laturile* acestui unghi.

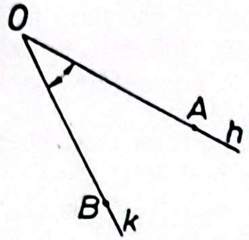

Fig. I.11

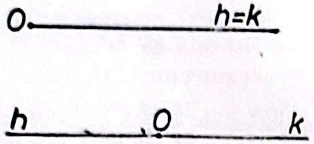

Fig. I.12

Dacă avem punctele $A \in h$ și $B \in k$, vom mai nota unghiul $\widehat{hk}$ prin $\widehat{AOB}$ unde O este vîrful unghiului $\widehat{hk}$ (fig. I. 11).

Dacă $h = k$, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi nul*, iar dacă h și k sînt semidrepte opuse, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi alungit*. (fig. I. 12). Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numește *unghi propriu*. Să considerăm un unghi propriu $\widehat{hk}$. Fie a, b suporții laturilor h și k ale unghiului $\widehat{hk}$, astfel ca $h \subset a$ și $k \subset b$. Semidreapta h se găsește într-un același semiplan H limitat de dreapta b, iar k se găsește într-un semiplan K, limitat de dreapta a. Intersecția $H \cap K$ a celor două semiplane este o mulțime de puncte numită *interiorul unghiului propriu* $\widehat{hk}$. Această mulțime va fi notată Int $\widehat{hk}$ (fig. I.13).

Avem pentru orice unghi, $\widehat{hk} = \widehat{kh}$ și pentru orice unghi propriu,

$$\text{Int } \widehat{hk} = \text{Int } \widehat{kh}.$$

Două unghiuri proprii care au același vîrf, o latură comună și interioarele disjuncte, se numesc unghiuri *adiacente* (fig. I.14).

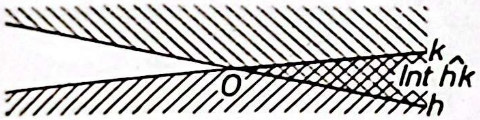

Fig. I.13

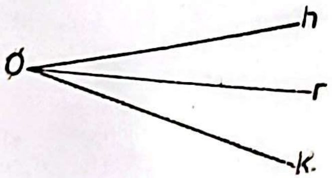

Fig. I.14

Două unghiuri adiacente, care au laturile necomune opuse, se numesc unghiuri *suplementare* (fig. I.15).

Două unghiuri care au același vîrf și care au laturile opuse două cîte două, se numesc unghiuri *opuse la vîrf* (fig. I.16).

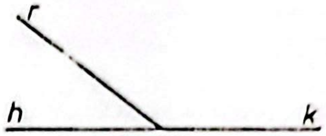

Fig. I.15

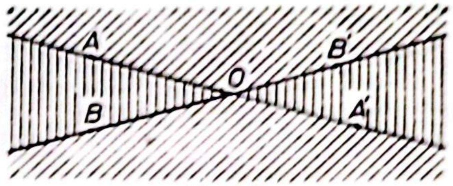

Fig. I.16

Exemple

1. Fie punctele A, B, A', B', O astfel ca $O \in]AA'[\cap]BB'[$. În acest caz, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA'}$ sînt suplementare, iar unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ sînt opuse la vîrf (fig. I. 16).

2. Fie ABC un triunghi. Unghiurile $\hat{A} = \widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, $\hat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ și $\hat{C} = \widehat{ACB} = \widehat{BCA}$ se numesc *unghiurile triunghiului* ABC, iar suplementele acestor unghiuri se numesc *unghiurile exterioare* ale triunghiului ABC.

3. Intersecția interioarelor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu intersecția a trei semiplane, limitate de dreptele AB, BC, CA și conținînd vîrfurile C, respectiv A, B. Această intersecție se numește *interiorul* triunghiului ABC și se notează Int ABC (fig. I. 17).

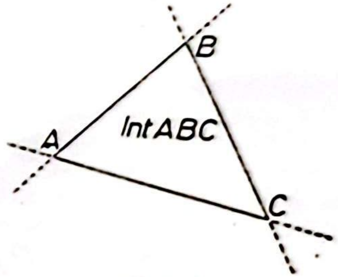

Fig. I. 17

Definiție. **Se numește mulțime convexă orice mulțime M de puncte, care are următoarea proprietate: dacă A, B sînt două puncte distincte ale mulțimii M, atunci M conține toate punctele segmentului $]AB[$.**

O mulțime formată dintr-un singur punct este convexă, deoarece pentru o astfel de mulțime nu se pune nici o condiție.

O mulțime formată din două puncte distincte nu este niciodată convexă, deoarece o astfel de mulțime nu conține nici un punct al segmentului deschis limitat de punctele care o formează. În general, o mulțime finită conținînd $n > 1$ puncte, nu poate fi convexă.

Planele, dreptele, semidreptele, segmentele deschise sau închise, semiplanele, interiorul unui unghi propriu, interiorul unui triunghi sînt mulțimi convexe. Orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă.

Exerciții

1. *Să se arate că două unghiuri opuse la vîrf au un suplement comun.*

2. *Să se arate că interioarele celor patru unghiuri formate de două drepte distincte și concurente sînt disjuncte două cîte două.*

3. *Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu și fie punctele $A \in h$, $B \in k$. Să se arate că $|AB| \subset \mathrm{Int}\,\widehat{hk}$.*

4. *Fie O un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC și fie s o semidreaptă cu originea O și conținută în interiorul unghiului $\widehat{AOC}$. Să se arate că $s \cap |AC| \neq \emptyset$ și că $s \cap |AB| = \emptyset$.*

5. *Să considerăm un plan p, o dreaptă $d \subset p$ și un punct $O \in d$. Să se arate că mulțimile $p - d$, $p - \{O\}$, $d - \{O\}$ nu sînt convexe.*

6. *Fie ABC un triunghi în planul p. Să se arate că mulțimile $p - |AB|$, $p - \mathrm{Int}\,ABC$* nu sînt convexe.

7. *Fie O un punct interior triunghiului ABC și fie d o dreaptă în planul triunghiului ABC, astfel ca $O \in d$. Să se arate că intersecția $d \cap \mathrm{Int}\,ABC$ este un segment.*

7. Proprietăți de congruență

Am arătat că figurile sînt mulțimi de puncte, de segmente, de drepte, de semidrepte, de semiplane, sau de alte mulțimi ce pot fi definite cu ajutorul acestora. De exemplu, un segment este o mulțime de puncte, un unghi este o mulțime formată din două semidrepte; putem considera o mulțime de segmente, care va fi de asemenea o figură, sau o mulțime de unghiuri etc.

Două mulțimi se consideră egale, dacă și numai dacă ele sînt formate din aceleași elemente. Dacă mulțimile A, B sînt egale, se scrie $A = B$. Dacă mulțimile M, N diferă cel puțin printr-un element, deci dacă există $x \in M$ astfel ca $x \notin N$, sau dacă există $y \in N$ astfel ca $y \notin M$, atunci spunem că mulțimile M, N nu sînt egale sau că ele sînt distincte și scriem $M \neq N$.

În matematica modernă, aproape toate obiectele studiate sînt mulțimi. Prin urmare, dacă vrem să ne încadrăm în matematica modernă, trebuie să folosim cuvîntul egal atunci și numai atunci cînd ne referim la mulțimi egale, și să folosim semnul „=" numai în aceste situații.

Cărțile mai vechi de geometrie foloseau termenul de egalitate pentru a desemna figuri ce au aceeași mărime, sau care se pot suprapune una peste cealaltă, fără a deforma vreuna din ele. Astăzi, ne referim la această situație, relativă la anumite perechi de figuri, spunînd că figurile sînt *congruente*. Dacă figurile F, F' sînt congruente, scriem

$$F \equiv F'.$$

Două segmente desenate pe o foaie de hîrtie cu ajutorul unei rigle gradate și avînd fiecare lungimea de 1 cm sînt congruente. Un segment de 1 cm nu este congruent cu nici un segment avînd mai puțin de 1 cm sau mai mult de 1 cm. Două unghiuri de $30°$ sînt congruente.

Pentru a explica termenul de congruență am dat exemple din geometria experimentală. În geometria abstractă, care nu folosește nici rigle, nici raportoare, congruența se introduce prin cinci proprietăți, care o caracterizează și anume:

1. Fie s o semidreaptă cu originea O și fie $|AB|$ un segment. Există pe semidreapta s un singur punct M, astfel ca segmentul $|OM|$ să fie congruent cu segmentul $|AB|$ (fig. I.18).

Notație. Dacă un segment $|A'B'|$ este congruent cu un segment $|AB|$, se va scrie $|A'B'| \equiv |AB|$.

D e f i n i ț i e. Se numește relație de echivalență într-o mulțime M orice mulțime $\mathcal{R}$ de perechi de elemente din M, astfel încît să fie verificate următoarele proprietăți:

1) Dacă x este un element oarecare din mulțimea M, atunci $(x, x) \in \mathcal{R}$.
Această proprietate se exprimă spunînd că orice element al mulțimii M este echivalent cu el însuși.

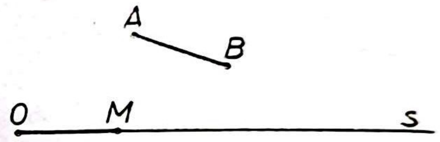

Fig. I.18

Proprietatea 1) este proprietatea de reflexivitate.

2) Dacă x, y sînt elemente ale mulțimii M astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$ atunci avem și $(y, x) \in \mathcal{R}$.

Deci, dacă x este echivalent cu y, atunci și y este echivalent cu x.

Proprietatea 2) este proprietatea de simetrie.

3) Dacă x, y, z sînt elemente ale mulțimii M, astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, și $(y, z) \in \mathcal{R}$, atunci avem și $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Deci, dacă x este echivalent cu y și dacă y este echivalent cu z, atunci x este echivalent cu z.

Proprietatea 3) este proprietatea de tranzitivitate.

Una din cele mai importante proprietăți ale figurilor în general, și ale segmentelor în particular, constă în faptul că *relația de congruență a segmentelor este o relație de echivalență.*

2. Dacă $|AB|$, $|A'B'|$, $|A''B''|$ sînt trei segmente astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|A'B'| \equiv |A''B''|$ atunci avem $|AB| \equiv |AB|$, $|A'B'| \equiv |AB|$ și $|AB| \equiv |A''B''|$, (fig. I. 19).

3. Dacă avem șase puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca B' se găsește între A' și C', B se găsește între A și C și $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$ (fig. I.20).

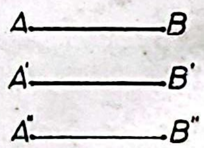

Fig. I.19

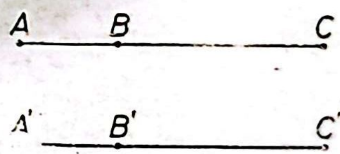

Fig. I.20

2*

Scanat cu CamScanner

4. Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$ și o semidreaptă s într-un plan p și notînd prin p' unul din semiplanele limitate de suportul lui s în planul p, există o singură semidreaptă t în semiplanul p' astfel ca s și t să formeze un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. Orice unghi este congruent cu el însuși.

Notație. Pentru a exprima că unghiul $\widehat{st}$ este congruent cu unghiul $\widehat{hk}$, vom scrie $\widehat{st} \equiv \widehat{hk}$.

5. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, astfel ca $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|AC| \equiv |A'C'|$, avem și $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$. (fig. 1.21).

Proprietatea de congruență 1 se numește uneori *axioma de purtare congruentă a segmentelor*. Proprietatea de congruență 3 se numește *axioma de adunare a segmentelor*. Proprietatea 4 se numește uneori *axioma de purtare congruentă a unghiurilor*.

Definiție. Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente și fie P, Q, R trei puncte astfel ca punctul Q să se găsească între punctele P, R și să avem $|AB| \equiv |PQ|$, $|CD| \equiv |QR|$ (fig. 1.22).

Se spune atunci că segmentul $|PR|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|CD|$ și se scrie $|PR| \equiv |AB| + |CD|$.

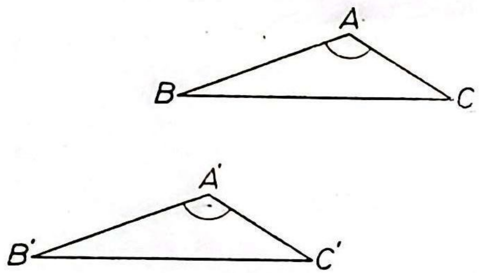

Fig. 1.21

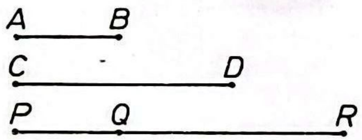

Fig. 1.22

Dacă segmentele $|PR|$, $|P'R'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|PR| \equiv |P'R'|$.

Definiție. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ două unghiuri și fie r, s, t trei semidrepte cu aceeași origine, astfel ca $\widehat{rt}$ să fie unghi propriu și s să fie conținută în interiorul unghiului $\widehat{rt}$ și astfel ca $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$ și $\widehat{st} \equiv \widehat{mn}$. Se spune atunci că unghiul $\widehat{rt}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ (fig. 1.23) și se scrie $\widehat{rt} \equiv \widehat{hk} + \widehat{mn}$.

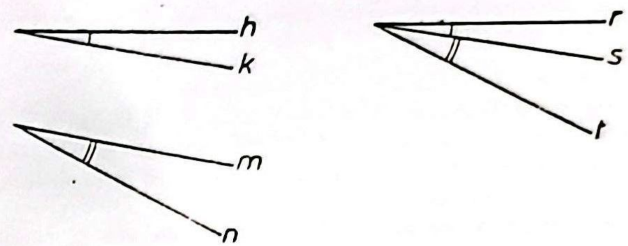

Fig. 1.23

Observație importantă. Pentru oricare două segmente $|AB|$, $|CD|$ există segmente care reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, dar nu orice pereche de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ admite o sumă. De exemplu, un unghi alungit nu poate fi adunat cu un unghi nenul.

Convenim să spunem că un unghi oarecare $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiului $\widehat{hk}$ cu un unghiu nul. Vom mai conveni să spunem că suma a două unghiuri suplementare este un unghi alungit. Dacă unghiul $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hm}$, $\widehat{mk}$ și dacă m, m' sînt semidrepte opuse, atunci unghiurile $\widehat{hm'}$, $\widehat{m'k}$ admit o sumă numai dacă $\widehat{hk}$ este alungit.

Următoarele relații sînt incompatibile:

$$B \in |AC|,\ C' \in |A'B'|,\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

Definiție. Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente și fie s o semidreaptă cu originea O. Considerăm punctele P, Q pe semidreapta s, astfel ca $|OP| \equiv |AB|$, $|OQ| \equiv |CD|$ (fig. 1.24).

Dacă $P \in |OQ|$, vom spune că segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, relativ la semidreapta s, sau că segmentul $|CD|$ este mai mare decît segmentul $|AB|$ relativ la s.

Dacă avem două segmente $|AB|$ și $|CD|$ și două semidrepte s, s' și dacă $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ relativ la s, atunci $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ și relativ la s'.

Definiție. Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, vom spune că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ sau că $|CD|$ este mai mare decît $|AB|$, și vom scrie $|AB| < |CD|$ sau $|CD| > |AB|$, dacă $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ relativ la o semidreaptă arbitrară s.

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, este adevărată una și numai una din relațiile

$$|AB| = |CD|,\ |AB| < |CD|,\ |AB| > |CD|.$$

Fiind date trei segmente $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ astfel ca $|AB| < |CD|$ și $|CD| < |EF|$, avem $|AB| < |EF|$.

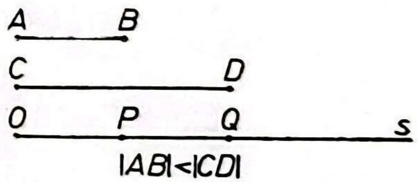

Fig. 1.24

Relația de comparare a segmentelor este o relație tranzitivă. Relația $|AB| < |CD|$ nu este nici reflexivă, nici simetrică.

Să reținem că:

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, dacă fixăm o semidreaptă s, cu originea într-un punct O, suma celor două segmente se reprezintă printr-un segment $|OM|$, unde $M \in s$. Două segmente care reprezintă suma a două segmente date sînt congruente între ele.

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, ele pot fi comparate, dacă alegem o semidreaptă s, cu originea O și dacă luăm punctele $M \in s$, $N \in s$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$, $|ON| \equiv |CD|$. În acest caz, dacă $M \in |ON|$ spunem că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$. Această regulă de comparare nu depinde de alegerea semidreptei s.

Exerciții

1. *Să se arate că dacă segmentul $|OP|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|OP|$ reprezintă și suma segmentelor $|CD|$, $|AB|$ (adunarea segmentelor este comutativă).*

(*Indicație.* Se construiește suma $|CD| \dotplus |AB|$ alegînd ca semidreaptă ajutătoare semidreapta $|PO|$.)

2. *Să se arate că dacă segmentul $|OS|$ reprezintă suma*

$$(|AB| \dotplus |CD|) \dotplus |EF|,$$

atunci $|OS|$ reprezintă și suma

$$|AB| \dotplus (|CD| \dotplus |EF|)$$

(adunarea segmentelor este asociativă).

3. *Să se arate că dacă segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, atunci există un segment $|EF|$ astfel încît $|CD|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|EF|$.*

4. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca*

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

Să se arate că $\hat{C} \equiv \hat{C'}$.

8. Teoremele de congruență a două triunghiuri

D e f i n i ț i e. **Se spune că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt congruente, dacă avem**

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ \hat{B} \equiv \hat{B'},\ \hat{C} \equiv \hat{C'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$
$$|AC| \equiv |A'C'|.$$

În acest caz, notăm: $ABC \equiv A'B'C'$

T e o r e m a I d e c o n g r u e n ț ă. Relațiile

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|$$

implică congruența triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ (fig. 1.25).

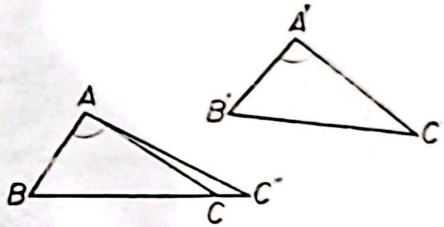

Fig. 1.25

Demonstrație. Pe semidreapta $|BC$ se consideră un punct C'' astfel ca $|BC''| \equiv |B'C'|$. Proprietatea 5 de congruență dă $\hat{B} \equiv \hat{B'}$. Aplicînd aceeași proprietate triunghiurilor BAC'', $B'A'C'$ deducem $\widehat{BAC''} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Dar $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Din unicitatea purtării congruente a unghiurilor (proprietatea 4) rezultă $|AC'' = |AC$, deci $C'' = C$ și atunci $|BC| \equiv |B'C'|$.

Din proprietatea 5 de congruență deducem apoi $\hat{C} \equiv \hat{C'}$. Deci triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt congruente.

T e o r e m a u n g h i u r i l o r s u p l e m e n t a r e. Fie unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ astfel că $\widehat{hk}$ este un suplement al unghiului $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$ este un suplement al unghiului $\widehat{k'm'}$ și $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$. În aceste condiții, avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

Demonstrație. Alegem pe semidreptele h, k, m, h', k', m' punctele A respectiv B, C, A', B', C' astfel încît să avem $|OA| \equiv |O'A'|$, $|OB| \equiv |O'B'|$, $|OC| \equiv |O'C'|$, unde O și O' sînt originile semidreptelor h respectiv h' (fig. 1.26). Din ipoteze rezultă $O \in |AC|$, $O' \in |A'C'|$. Din teorema I de congruență rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, iar din proprietatea 3 de congruență deducem că $|AC| \equiv |A'C'|$. Aplicînd teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, deducem $|BC| \equiv |B'C'|$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Apoi din triunghiurile BOC, $B'O'C'$ deducem $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$, deci $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$. Deci am arătat că două unghiuri congruente au suplemente congruente.

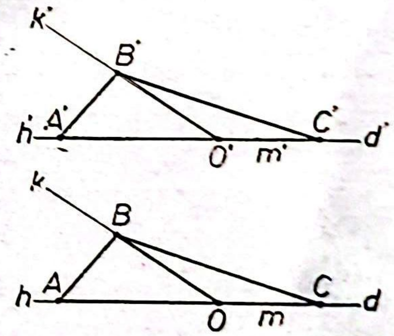

Fig. 1.26