2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane

Euclid definește *punctul* ca o entitate indivizibilă, *linia* ca o lungime fără lărgime, *suprafața* ca entitate avînd lungime și lărgime, iar *solidul* ca entitate avînd lungime, lărgime și grosime. Aceste definiții nu sînt riguros științifice, dar au calitatea de a fixa noțiunile de bază, prin proprietăți intuitive, care permit purtarea unui dialog.

Corpurile solide au caracter mai intuitiv decît punctele sau liniile și suprafețele. Dacă am admite ca date solidele, am putea defini suprafețele ca limite ale solidelor, liniile ca limite ale suprafețelor și punctele ca limite ale liniilor. Liniile drepte sînt linii particulare, anume ele pot fi considerate ca poziții limită ale unor fire foarte bine întinse. Noțiunea de *linie dreaptă*, care apare în *Elementele* lui Euclid, corespunde noțiunii de *segment*.

Euclid a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții, pe care le-a admis ca adevărate și pe care le-a numit *postulate*:

1. *Între două puncte se poate duce o linie dreaptă.*
2. *Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.*
3. *Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.*
4. *Toate unghiurile drepte sînt congruente între ele.*
5. *Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două linii drepte, formează, de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne avînd suma mai mică decît două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sînt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decît două unghiuri drepte.*

În aceste enunțuri apar termenii de prelungire nelimitată, parte a unei drepte, congruență a două unghiuri și cerc. Pentru aceste noțiuni, Euclid a dat explicații intuitive, dar vagi din punct de vedere științific. De exemplu, noțiunea de congruență, la Euclid, se definește prin posibilitatea de a suprapune o figură peste alta, de exemplu un unghi peste alt unghi sau un segment peste alt segment.

Noțiunile fundamentale ale geometriei sînt acelea de *punct*, *dreaptă*, *plan* și *Spațiu*, la care se adaugă relațiile de *ordonare* între punctele unei drepte și de *congruență* între două segmente sau între două unghiuri. Aceste noțiuni au caracter intuitiv, ele fiind extrase din experiențe ce au fost efectuate de oameni de-a lungul multor milenii. Prin Spațiu înțelegem Spațiul în care trăim, care se numește uneori Univers sau Cosmos sau Spațiu fizic. Ansamblul științelor Naturii studiază proprietățile acestui Spațiu. Geometria, ca știință a Naturii, urmărește anumite proprietăți ale acestui Spațiu, neglijînd aspectele fizice, chimice, biologice și geologice și are drept obiect de studiu proprietățile corpurilor rigide (nedeformabile), care au forme mai simple. Geometria experimentală studiază proprietățile corpurilor de dimensiuni direct perceptibile și măsurabile cu ajutorul instrumentelor obișnuite (riglă gradată, raportor, goniometru etc.). Geometria experimentală nu studiază

părți ale materiei, care au dimensiuni subatomice sau planetare. Măsurarea mărimilor de acest fel se face în mod indirect, pe baza unor ipoteze fizice sau chimice, și a unei abstractizări a geometriei experimentale, numită *geometria euclidiană și definită prin sistemul de axiome dat de Hilbert.* Sistemul de axiome dat de Hilbert va fi predat în clasa a X-a, deoarece se referă la geometria în Spațiu.

3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

Vom admite, fără demonstrații, următoarele proprietăți:

1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

2. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.

3. În orice plan, există trei puncte care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă.

Cu ajutorul proprietăților indicate, putem demonstra că:

Două drepte distincte dintr-un plan cu cel mult un punct comun.

Într-adevăr, dacă ultima afirmație n-ar fi adevărată, atunci ar exista două drepte d și d' astfel incît intersecția $d \cap d'$ conține cel puțin două puncte. Dar proprietatea 1 arată că prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci intersecția $d \cap d'$ conține cel mult un punct.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație este metoda reducerii la absurd, care constă în a arăta că negarea unei proprietăți, pe care vrem s-o demonstrăm, conduce la o contradicție cu una sau mai multe proprietăți admise sau demonstrate anterior.

Exercițiu

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați următoarele proprietăți:

a. *Dacă A este un punct al unei drepte d, atunci dreapta d conține cel puțin un punct diferit de A.*

b. *Dacă d este o dreaptă dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct nesituat pe dreapta d.*

c. *Dacă A și B sînt două puncte distincte dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct C, astfel ca punctele A, B, C să fie necoliniare.*

d. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.*

4. Proprietăți de ordonare

Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci nici unul dintre aceste puncte nu se găsește între celelalte două.

Dacă A, B, C sînt trei puncte distincte coliniare, atunci unul din aceste puncte se va găsi între celelalte două. În figura I.1, punctul B se găsește între A și C, dar C nu se găsește între A și B.

Capitolul V

Geometrie euclidiană în spațiu

1. Geometrie experimentală și geometrie abstractă

Așa cum s-a arătat în clasa a IX-a, geometria a apărut ca știință experimentală cu mai mult de 4 000 de ani în urmă. După acumularea unui mare număr de proprietăți geometrice legate de distanțe, segmente, rapoarte de segmente, arii sau volume și de unghiuri, oamenii de știință ai antichității, începînd cu matematicienii și filozofii greci, au pus problema construirii unei discipline abstracte, care să aibă la bază un sistem de noțiuni legate de anumite obiecte din spațiul fizic și de proprietăți ale acestor obiecte, stabilite pe baza unui mare număr de experiențe, și care să se dezvolte apoi pe baza unor reguli de gîndire incontestabile. În acest fel, au apărut simultan geometria euclidiană, aritmetica și logica, întemeietorii acestor științe fiind Thales, Pitagora, Eudoxus, Teetet, Platon, Aristotel, Euclid, Arhimede și Apollonius.

În mod paradoxal, după elaborarea acestor științe, pe care le-au îmbogățit cu rezultate și metode de demonstrații care uimesc și astăzi pe cei care studiază Știința antichității, ei au abandonat izvorul experimental care i-a inspirat, aderînd la punctul de vedere al lui Aristotel, care susținea că Universul în care trăim este alcătuit dintr-un sistem finit de sfere concentrice de cristal, pe care sînt așezați aștrii de pe bolta cerească.

Concepția lui Aristotel a dominat gîndirea științifică multe sute de ani, pînă cînd un savant italian, Galileo Galilei, și un învățat englez, Isaac Newton, au pus bazele unei noi teorii a Universului. Potrivit acestei teorii, există un spațiu absolut cu trei dimensiuni, care conține toate corpurile din Univers și în care aceste corpuri se deplasează conform unor legi generale. Una din aceste legi afirmă că, dacă un corp material este izolat de toate celelalte corpuri, sau dacă este suficient de depărtat de acestea pentru ca el să nu sufere nici o influență, atunci acel corp se va deplasa, în spațiul absolut, în linie dreaptă, cu o viteză constantă.

Galilei și Newton au admis că liniile drepte și distanțele în spațiul absolut au proprietățile cuprinse în Geometria lui Euclid și au formulat legile fizice descoperite de ei, folosind noțiunile și proprietățile acestei geometrii. Lucrarea

[illegible] punctele O, B, C, a va fi planul ce conține punctele

[illegible] principia mathematica", apărută în anul 1686 (tradusă în limba română în anul 1956 de V. Marian, sub titlul „Principiile matematice ale filozofiei naturale", Ed. Academiei R.P.R.), poate fi considerată ca o continuare a cărților lui Euclid, datorită asemănării în ce privește modul de înlănțuire a definițiilor, postulatelor și propozițiilor și modul de prezentare a demonstrațiilor.

Spațiul absolut al lui Newton a stat la baza întregii fizici clasice, pînă la începutul secolului nostru; dar după descoperirea particulelor care intră în componența atomilor (electroni, protoni, neutroni) și a unor noi galaxii în Univers, care au pus în evidență proprietăți neașteptate și imposibil de formulat cu ajutorul noțiunilor clasice, s-a pus problema reexaminării ipotezelor care stăteau la baza Științei clasice, și în particular a Geometriei.

Această reexaminare a avut rezultate importante pe două direcții. Pe de o parte, s-au cristalizat ipotezele care stau la baza geometriei euclidiene. Rolul principal în această direcție a fost îndeplinit de David Hilbert, prin lucrarea sa „Grundlagen der Geometrie" (Bazele geometriei), apărută în 12 ediții, începînd din anul 1899. În această lucrare, Hilbert arată că întreaga geometrie euclidiană poate fi construită plecînd de la trei noțiuni fundamentale, ce nu se definesc (puncte, drepte și plane) și de la trei relații fundamentale (de incidență, de ordine și de congruență) și admițînd un sistem de 20 de axiome, care leagă între ele noțiunile și relațiile fundamentale. În paralel s-a dezvoltat Teoria mulțimilor și Logica matematică, care au permis construcția pe baze riguroase a unor noi geometrii, care au cuprins geometriile neeuclidiene ale lui Bolyai și Lobacevski și pe cea a lui Riemann, apoi geometriile proiective, geometria spațiilor Riemann și multe altele.

Toate aceste descoperiri și elaborări au intrat rapid în gîndirea și limbajul fizicienilor acestui secol, dornici a găsi geometria cea mai apropiată de structura spațiului fizic. Drept urmare, au apărut numeroase lucrări, din cele mai îndrăznețe, care au avut ca rezultat o îmbinare a geometriei cu fizica, asemănătoare celeia din vremea lui Galilei și Newton, dar îmbrățișînd o gamă de noțiuni, fenomene și modele mult lărgită. Din aceste realizări și ipoteze, știința viitorului va păstra desigur o mare parte, dar va da uitării o altă parte.

Cum trebuie instruit omul modern, viitor om de știință sau tehnician, pentru a se putea înscrie pe linia realizărilor durabile? Pentru aceasta, este necesară o cultură vastă, încadrată într-o gîndire logică.

În ce privește studiul geometriei, cunoașterea temeinică a geometriei euclidiene, care rămîne model de comparație pentru orice altă geometrie și cadru natural pentru multe ramuri ale Științei și Tehnicii moderne, este o necesitate. Cunoașterea geometriei euclidiene înseamnă cunoașterea ipotezelor care stau la baza acestei discipline, apoi cunoașterea celor mai importante teoreme ce pot fi demonstrate pe baza ipotezelor admise, precum și a limitelor în care aceste teoreme pot fi verificate experimental, sau în care aceste teoreme pot fi admise în activitatea practică.

Manualul de față caută să răspundă la primele aspecte. În ce privește limitele validității experimentale, elevii vor primi informațiile corespunzătoare urmărind celelalte manuale consacrate științelor naturii.

Lucrări practice

1. Fixați pe o foaie de hîrtie două puncte A, B. Trasați segmentul $|AB|$. Măsurați cu ajutorul unei rigle gradate lungimea segmentului $|AB|$. Prelungiți segmentul $|AB|$ dincolo de B cu un segment de 1 cm și dincolo de A cu un segment de 5 cm.

2. Desenați două drepte și indicați punctul lor de intersecție.

3. Uniți două puncte alese la întîmplare pe o foaie de hîrtie printr-o linie oarecare și așezați o ață astfel încît să se suprapună pe acea linie. Măsurați lungimea aței și apoi lungimea segmentului definit de cele două puncte. Care dintre cele două lungimi este mai mare?

4. Desenați zece segmente $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|GH|$, $|HI|$, $|IJ|$, $|JK|$ astfel încît extremitățile lor să fie puncte coliniare și ordinea lor pe dreapta care le conține să coincidă cu ordinea alfabetică a literelor care le desemnează. Măsurați lungimile fiecăruia din cele zece segmente, calculați suma acestor zece lungimi și comparați cu lungimea segmentului $|AK|$. Explicați rezultatul.

5. Desenați segmente de 2,3 cm; 7,1 cm; 9,2 cm. Construiți segmente care să reprezinte suma celor trei segmente construite.

6. Construiți un segment a de 8,8 cm și un segment b de 6,9 cm. Construiți apoi un segment congruent cu segmentul $a - b$.

7. Construiți la întîmplare un segment a și construiți apoi segmente congruente cu $3a$, $4,5\ a$, $a/5$, $a/7$, $a/10$.

8. Care este raportul segmentelor a, b, știind că a are 4,8 cm, iar b 1,2 cm?

9. Construiți cercuri de raze de 1 cm, de 3,5 cm, de 10 cm și de 15 cm. Indicați pentru fiecare din cercurile construite cîte un punct interior și cîte un punct exterior.

10. Fixați pe o hîrtie un punct A și arătați care este locul geometric al punctelor care au distanța la A egală cu 1 (cm).

11. Desenați pe două foi de hîrtie două cercuri avînd razele de 1 cm. Încercați apoi să suprapuneți cele două cercuri unul peste celălalt.

12. Trasați două corzi paralele $|AB|$, $|A'B'|$ într-un cerc C. Rotind apoi cercul C în jurul centrului său, arătați că putem suprapune arcul $\widehat{B'B}$ peste arcul $\widehat{AA'}$.

13. Construiți într-un cerc avînd raza de 1 cm o coardă de 1,5 cm.

14. Indicați la întîmplare un arc $\widehat{AB}$ pe un cerc K și construiți apoi un arc de lungime dublă, în același cerc.

15. Construiți un cerc la întîmplare. Fixînd apoi un punct A pe acest cerc, construiți un triunghi echilateral, un pătrat și un pentagon regulat, astfel ca aceste poligoane să aibă toate vîrfurile pe cercul construit la început și astfel că A să fie vîrf comun.

16. Construiți un triunghi echilateral avînd laturile de lungime 3 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

17. Construiți un triunghi cu laturile de 1,5 cm, 2 cm și 2,5 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

18. Construiți un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm și 11 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi. Trasați apoi medianele și bisectoarele aceluiași triunghi.

19. Confecționați un disc circular din carton astfel ca raza discului să fie de 10 cm. Rostogoliți apoi discul pe masă, astfel încît să urmeze o linie dreaptă, fără să alunece. Marcînd un punct pe disc, notați pe linia dreaptă două poziții succesive ocupate de punctul marcat pe cerc.

20. Cîte rotații complete va face discul de la lucrarea 19, dacă discul parcurge pe linia dreaptă un segment de 3 m?

21. Tulpina unui copac poate fi înfășurată cu o sfoară lungă de 3 m, dar nu poate fi înfășurată cu o sfoară mai scurtă. Care este diametrul acelui copac în porțiunea lui cea mai subțire?

22. Construiți un dreptunghi $ABCD$ dintr-un material nedeformabil și trasați axele lui de simetrie. Rotiți apoi acest dreptunghi în jurul uneia din axe. Ce descriu laturile dreptunghiului în timpul unei rotații complete?

23. Rotiți un disc circular în jurul unui diametru al său. Ce descrie marginea discului în timpul unei rotații complete? Dar după o rotație de 180°?

24. Introduceți un tetraedru regulat cu muchiile de 10 cm într-un vas cu apă gradat. Măsurați volumul tetraedrului urmărind pe gradație cu cît s-a ridicat nivelul apei.

25. Repetați experiența, considerînd în locul tetraedrului o minge de rază cunoscută, apoi un con circular drept și un cilindru. Verificați în fiecare caz formulele cunoscute, care dau volumele acestor corpuri.

26. Construiți din carton 20 triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime de 3 cm. Alcătuiți cu aceste triunghiuri un tetraedru, apoi un octaedru și un icosaedru, luînd patru, respectiv opt și 20 de triunghiuri și lipindu-le după laturi, astfel ca fiecare triunghi să fie vecin cu exact alte trei triunghiuri.

27. Construiți din carton un cub, apoi o piramidă pentagonală și o prismă patrulateră. Calculați apoi volumele acestor corpuri folosind metoda indicată mai sus, deci folosind un vas cu apă.

28. Construiți din carton un unghi diedru de 45°, apoi unul de 30° și unul de 60°. Indicați în fiecare caz unghiuri plane care reprezintă unghiurile diedre construite.

29. Confecționați din sîrmă de oțel opt vergele rectilinii și notați aceste vergele prin a, b, c, d, a', b', c' și d'. Fixați într-un fel vergelele a, b, c, apoi vergelele a', b', c' astfel ca ultimele trei să se sprijine pe fiecare din primele trei. Așezați apoi vergelele d, d' astfel ca d să se sprijine pe a', b' și c', iar d' să se sprijine pe a, b, c. Ce se poate spune despre vergelele d și d'?

30. Într-un vas de formă cubică înalt de 1 m introduceți un număr cît mai mare de mingi de diametru de 30 cm, astfel ca vasul să poată fi acoperit, fără a presa mingile. Cîte mingi ați putut introduce?

31. Cu ajutorul unor plăci de tr[illegible]aj și a unor vergele de sîrmă confecționați două linii drepte perpendiculare, o linie perpendiculară pe un plan și două plane perpendiculare. Puneți în evidență trei plane perpendiculare două cîte două.

32. Realizați un model care să conțină o linie dreaptă d, care face un unghi de 30° cu un plan. Arătați apoi o dreaptă în acel plan, care să facă un unghi de 60° cu linia dreaptă d.

33. Construiți un triunghi la întîmplare și calculați suma unghiurilor sale.

34. Pămîntul se rotește în jurul axei sale, efectuînd o rotație completă în 24 ore. Cu ce unghi se rotește Pămîntul într-o oră, admițînd că viteza de rotație este constantă?

R: $360° : 24 = 15°$

35. Care este lungimea unui arc de meridian terestru de 1°, știind că lungimea unui cerc meridian întreg este de 40 000 000 m.

R. 111,111 km.

36. Care este lungimea unui arc de meridian de $1'$?

R: 1852 m (mila marină).

37. Să se calculeze suprafața și volumul globului terestru, admițind că acesta este o sferă de rază 6378164 m (raza Ecuatorului) sau de rază 6356780 m (raza unui meridian).

38. Să se calculeze viteza medie cu care se deplasează Pămîntul pe orbita sa, admițind că el parcurge, în 365 zile, 5 ore, 48 minute și 46 secunde, o orbită circulară cu raza de 149598500 km.

2. Axiomele de incidență

Se presupune că punctele formează o mulțime S, numită *spațiu*. Dreptele și planele sînt submulțimi particulare ale mulțimii S și aceste submulțimi au următoarele proprietăți:

I.1. Prin orice două puncte trece o dreaptă.

I.2. Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.

I.3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare. Există cel puțin un plan.

I.4. Prin orice trei puncte necoliniare trece un plan.

I.5. Prin orice trei puncte necoliniare trece un singur plan.

I.6. Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate într-un plan p, atunci toate punctele dreptei d sînt situate în planul p.

I.7. Dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane mai au cel puțin un al doilea punct comun.

I.8. Există patru puncte nesituate într-un același plan.

Exerciții

1. Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conținută într-un plan p, atunci intersecția $d \cap p$ este fie mulțimea vidă, fie este formată dintr-un singur punct.

2. Să se arate că dacă p, p' sînt două plane distincte, atunci intersecția $p \cap p'$ este fie mulțimea vidă, fie este o dreaptă.

3. Să se arate că dacă d este o dreaptă, atunci există cel puțin un punct nesituat pe această dreaptă.

4. Să se arate că dacă p este un plan, atunci există cel puțin un punct nesituat în planul p.

5. Să se arate că dacă d este o dreaptă și dacă A este un punct nesituat pe d, atunci există un plan și unul singur care conține dreapta d și punctul A.

6. Să se arate că dacă dreptele d, d' au un punct comun, atunci există un plan p, care să conțină aceste drepte. Planul p este unic, dacă dreptele d, d' sînt distincte.

7. Fie p, p', p'' trei plane astfel ca intersecția $p \cap p' \cap p''$ să conțină un singur punct. Să se arate că fiecare din intersecțiile $p \cap p'$, $p \cap p''$, $p' \cap p''$ este o dreaptă și că dreptele date de aceste intersecții sînt concurente, dar necoplanare.

planul ce conține punctele O, B, C, q va fi planul ce conține punctele

intersecția nevidă, dar oricare trei din aceste drepte să aibă intersecția vidă. Să se arate că există un plan care conține toate dreptele mulțimii M.

9. Fie M o mulțime de drepte, astfel ca oricare două drepte din mulțimea M să aibă intersecția nevidă și astfel ca să nu existe niciun plan care să conțină toate dreptele mulțimii M. Să se arate că există un punct care aparține fiecărei drepte din mulțimea M.

10. Să se arate că există patru plane, astfel ca intersecțiile acestor plane, luate cîte două, să fie drepte, intersecțiile acestor plane luate trei cîte trei să fie formate din cîte un punct, iar intersecția celor patru plane să fie mulțimea vidă. Care este numărul dreptelor și care este numărul punctelor date de intersecțiile considerate?

Indicație. Se consideră patru puncte necoplanare. Fiecare trei din aceste puncte va determina un plan și se obțin astfel patru plane avînd proprietățile cerute.

3. Axiomele de ordonare

II.1. Dacă un punct B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sînt coliniare și distincte și punctul B se găsește între C și A.

II.2. Fiind date două puncte distincte A, B există un punct C astfel încît B să se găsească între A și C.

II.3. Fiind date trei puncte coliniare și distincte A, B, C astfel încît B se află între A și C, A nu se poate afla între B și C, iar C nu se poate afla între A și B.

II.4. (Axioma lui Pasch). Fiind date, într-un același plan, trei puncte necoliniare A, B, C și o dreaptă d, astfel ca d să treacă printr-un punct situat între B și C, dar d să nu treacă prin nici unul din punctele A, B, C, dreapta d va trece fie printr-un punct situat între A și B, fie printr-un punct situat între A și C.

Reamintim că, fiind date două puncte distincte A, B, am notat prin $|AB|$ mulțimea punctelor situate între A și B și că am numit această mulțime: *segmentul* deschis de extremități A, B. Avem $|AB| = |BA| \subset AB$.

A p l i c a ț i e. *Fie A, B, C trei puncte necoliniare și fie $M \in |AC|$, $N \in |AB|$. Să se arate că segmentele $|BM|$ și $|CN|$ au un punct comun.*

Soluție. Aplicînd axioma lui Pasch triunghiului ABM și secantei CN, obținem un punct $P \in CN \cap |BM|$, deoarece dreapta CN intersectează latura $|AB|$, dar nu intersectează latura $|AM|$. Aplicînd apoi aceeași axiomă triunghiului ACN și secantei BM, deducem că există un punct $Q \in BM \cap |CN|$. Avem $P \in CN \cap BM$, $Q \in CN \cap BM$. Dar dreptele BM, CN sînt distincte, deci ele au un singur punct comun. Rezultă $Q = P$ și atunci $P \in |BM| \cap |CN|$.

Exerciții

1. Dacă A, B, C sînt trei puncte coliniare și distincte, astfel încît A nu este între B și C, iar C nu este între A și B, cu siguranță B va fi între A și C.

(*Indicație.* Se construiesc punctele E, F, G, H astfel ca $E \in AB$, $E \in |BF|$, $G \in AE \cap |CF|$, $H \in CE \cap |AF|$ și se arată că $E \in |AG|$ și că $B \in |AC|$ (fig. V.1).)

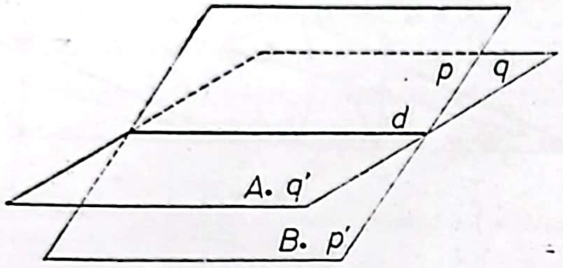

Fig. V.19

respectiv q', *interiorul* unghiului diedru $\widehat{p'q'}$ este intersecția semispațiului limitat de p, care conține fața q', cu semispațiul care conține p' și care este limitat de planul q. Dacă $A \in q'$ și $B \in p'$ putem scrie (fig. V. 19)

$$\text{Int } \widehat{p'q'} = |pA \cap |qB.$$

Se numește *mulțime convexă* în spațiul S orice mulțime M conținută în S, care are proprietatea:

$$A \in M,\ B \in M,\ A \neq B \Rightarrow |AB| \subset M.$$

Exercițiu. Să se arate că segmentele, segmentele închise, semidreptele, semidreptele închise, semiplanele, semiplanele închise, semispațiile, semispațiile închise, interiorul unui unghi diedru propriu și interiorul unui unghi diedru propriu, la care se adaugă una din fețe sau ambele fețe, sau muchea, sînt mulțimi convexe.

În general, orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă. De exemplu, dacă M, M' sînt două mulțimi convexe și dacă A, B sînt două puncte situate și în M și în M', atunci vom avea $|AB| \subset M$ și $|AB| \subset M'$, deci $|AB| \subset M \cap M'$. Aceasta arată că intersecția $M \cap M'$ este o mulțime convexă.

Să dăm unele exemple.

Fie a, b, c trei semidrepte necoplanare, avînd aceeași origine O. Luînd aceste semidrepte în ordinea a, b, c, se obține un triplet (a, b, c) care va fi numit *unghi triedru* și va fi notat $\widehat{abc}$. Punctul O va fi numit *vîrful* unghiului triedru $\widehat{abc}$, iar semidreptele a, b, c vor fi numite *muchiile* lui $\widehat{abc}$ (fig. V.20).

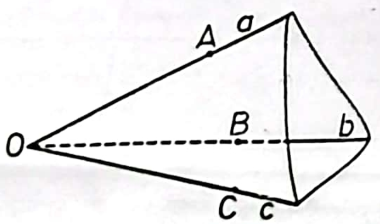

Fig. V.20

Fiind dat unghiul triedru $\widehat{abc}$, să considerăm planele $p = bc$, $q = ca$, $r = ab$, unde bc reprezintă planul ce conține semidreptele b, c. Dacă alegem punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, planul p va fi

planul ce conține punctele O, B, C, q va fi planul ce conține punctele O, A, C iar r va fi planul ce conține punctele O, A, B. Putem considera semispațiile

$$|pA,\ |qB,\ |rC.$$

Intersecția $|pA \cap |qB \cap |rC$ se numește *interiorul* unghiului triedru $\widehat{abc}$. Interioarele unghiurilor $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ vor fi numite *fețele* unghiului triedru $\widehat{abc}$.

Interiorul unui unghi triedru este o mulțime convexă, deoarece este intersecție de trei mulțimi convexe.

Exercițiu. Dacă adăugăm interiorului unui unghi triedru vîrful, una sau mai multe muchii și una sau mai multe fețe, avînd grijă să adăugăm, odată cu două muchii și fața definită de aceste muchii, obținem alte mulțimi convexe.

Fie p, q două plane *paralele*, adică două plane avînd intersecția $p \cap q = \varnothing$. Considerăm punctele $A \in p$, $B \in q$ și semispațiile $|pB$, $|qA$. Avem $q \subset |pB$ și $p \subset |qA$. Intersecția $|pB \cap |qA$ este o mulțime convexă, care va fi numită *zona* limitată de planele paralele p, q.

6. Axiome de congruență

Se presupune că anumite perechi de segmente $|AB|$, $|CD|$ sînt legate prin relația „$|AB|$ este congruent cu $|CD|$", care corespunde situației intuitive: segmentul $|AB|$ are aceeași mărime cu segmentul $|CD|$. Se mai presupune că anumite perechi de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ se găsesc în relația „$\widehat{hk}$ este congruent cu $\widehat{mn}$". Relațiile de congruență ale segmentelor și unghiurilor au următoarele proprietăți, care se admit fără demonstrație.

III.1. (Axioma purtării congruente a segmentelor.) Fiind date un segment $|AB|$ și o semidreaptă s cu originea O, există pe s un punct P și numai unul, astfel ca $|AB| \equiv |OP|$.

III.2. Orice segment este congruent cu el însuși. Dacă segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$, atunci $|CD|$ este congruent cu $|AB|$. Dacă $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ sînt segmente astfel încît $|AB|$ este congruent cu $|CD|$ și $|CD|$ este congruent cu $|EF|$, atunci $|AB|$ este congruent cu $|EF|$.

III.3. (Axioma de adunare a segmentelor). Fiind date segmentele $|AC|$, $|A'C'|$ și punctele $B \in |AC|$, $B' \in |A'C'|$ astfel ca

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$

avem $|AC| \equiv |A'C'|$. (fig V. 21).

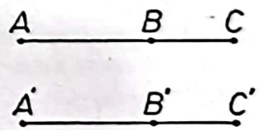

Fig. V.21

III.4. (Axioma purtării congruente a unghiurilor.) Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$, un semiplan u

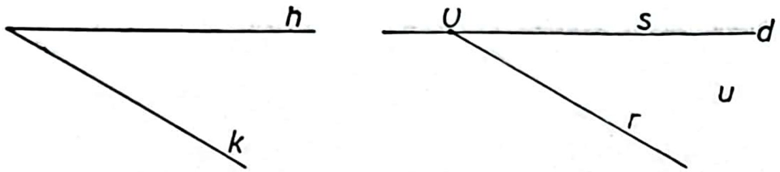

Fig. V.22

limitat de dreapta d şi o semidreaptă $s \subset d$, cu originea O, există o semidreaptă r şi numai una, astfel ca să avem $r \subset u$, r să aibă originea O şi $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$ (fig. V.22). Orice unghi este congruent cu el însuşi.

III.5. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca

(1) $$\hat{A} \equiv \hat{A}', \; |AB| \equiv |A'B'|, \; |AC| \equiv |A'C'|.$$

În aceste condiţii, avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (fig. V. 23).

Observaţie. Aplicînd axioma III.5. triunghiurilor ACB, $A'C'B'$, obţinem şi $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Deci, în definitiv, axioma III.5. arată că, în ipotezele (1), avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ şi $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Definiţie. Fie $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ două sisteme ordonate formate din cîte n puncte. Vom spune că sistemele P, Q sînt congruente, dacă avem relaţiile

$$|P_iP_j| \equiv |Q_iQ_j|, \; \widehat{P_iP_jP_k} \equiv \widehat{Q_iQ_jQ_k},$$

oricare ar fi indicii distincţi i, j, k, aleşi din mulţimea $\{1, 2, \dots, n\}$. Dacă aceste relaţii sînt satisfăcute, scriem $P \equiv Q$.

Dacă $n = 3$, sistemele P, Q sînt triunghiuri, în cazul în care punctele care formează fiecare din aceste sisteme sînt necoliniare. În acest caz, folosim notaţiile prescurtate $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$.

În clasa a IX-a, am demonstrat patru teoreme de congruenţă pentru triunghiuri. Aceste teoreme arată că triunghiurile $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$ sînt congruente în fiecare din următoarele situaţii:

1. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1$, $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$, $|P_1P_3| \equiv |Q_1Q_3|$;

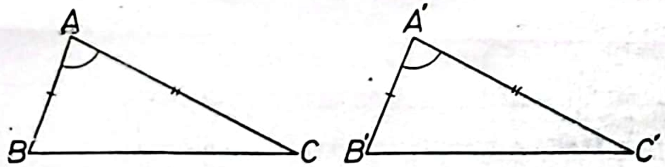

Fig. V.23

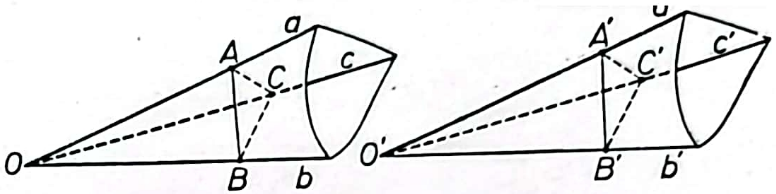

Fig. V.24

2. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1$, $\hat{P}_2 \equiv \hat{Q}_2$, $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$;
3. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$, $|P_2P_3| \equiv |Q_2Q_3|$, $|P_3P_1| \equiv |Q_3Q_1|$;
4. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$, $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1$, $\hat{P}_3 \equiv \hat{Q}_3$.

Definiţie. Fiind date două unghiuri triedre $\widehat{abc}$, $\widehat{a'b'c'}$, vom spune că aceste unghiuri sînt congruente dacă avem (fig. V.24):

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}, \; \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'}, \; \widehat{ca} \equiv \widehat{c'a'}.$$

Fie O respectiv O' vîrfurile celor două unghiuri triedre şi fie punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $A' \in a'$, $B' \in b'$, $C' \in c'$ astfel ca

$$|OA| \equiv |O'A'|, \; |OB| \equiv |O'B'|, \; |OC| \equiv |O'C'|.$$

Aplicînd teorema I de congruenţă a triunghiurilor, deducem relaţiile

$$|AB| \equiv |A'B'|, \; |BC| \equiv |B'C'|, \; |CA| \equiv |C'A'|;$$

aplicînd apoi teorema a III-a de congruenţă, deducem că sistemul de puncte (O, A, B, C) este congruent cu sistemul (O', A', B', C').

Punctele O, A, B, C sînt necoplanare, deoarece dreptele care conţin semidreptele, a, b, c sînt necoplanare.

Un sistem ordonat format din patru puncte necoplanare O, A, B, C defineşte un *tetraedru*. Punctele O, A, B, C se numesc vîrfurile tetraedrului (O, A, B, C), segmentele $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc **muchiile** iar interioarele triunghiurilor OAB, OBC, OCA, ABC se numesc *feţele* lui (O, A, B, C), (fig. V.25).

Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, convenim să notăm prin (ABC) planul ce conţine aceste puncte.

Fiind dat un tetraedru (O, A, B, C), putem considera cele patru plane care conţin feţele lui:

$$p = (OBC), \; q = (OCA), \; r = (OAB),$$
$$h = (ABC).$$

Să considerăm semispaţiile

$$S_O = |hO, \; S_A = |pA, \; S_B = |qB, \; S_C = |rC.$$

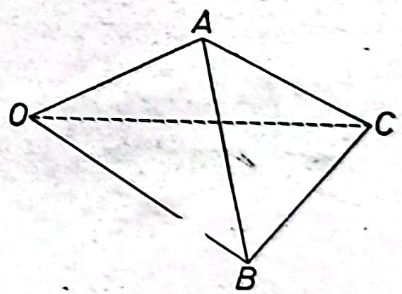

Fig. V.25

Avem $\qquad A \in S_A,\ B \in S_B,\ C \in S_C,\ O \in S_O.$

Definim *interiorul* tetraedrului (O, A, B, C) prin formula

$$\mathrm{Int}(O, A, B, C) = S_O \cap S_A \cap S_B \cap S_C.$$

Fiind intersecția a patru semispații, *interiorul oricărui tetraedru este o mulțime convexă.*

Putem acum să introducem noțiunea de *simplex*. Vom defini 0-simplexe, 1-simplexe, 2-simplexe și 3-simplexe.

Definiții. **Un 0-simplex este o mulțime $\{A\}$ formată dintr-un singur punct. Un 1-simplex este o mulțime de forma $[A\ B] = |AB| \cup \{A, B\}$, deci un 1-simplex este un segment închis. Un 2-simplex este o mulțime de forma**

$$[A\ B\ C] = \mathrm{Int}\ ABC \cup |AB| \cup |BC| \cup |CA| \cup \{A, B, C\},$$

unde ABC este un triunghi. Un 3-simplex este o mulțime de forma

$$[O\ A\ B\ C] = \mathrm{Int}\ (O, A, B, C) \cup [A\ B\ C] \cup [O\ A\ B] \cup [O\ B\ C] \cup [O\ C\ A],$$

unde (O, A, B, C) este un tetraedru.

Punctele O, A, B, C se numesc *vîrfuri* ale simplexelor astfel definite.

Două simplexe distincte se numesc *incidente*, dacă vîrfurile unuia din ele se găsesc printre vîrfurile celuilalt (fig. V.26).

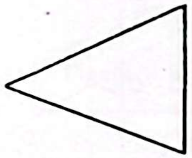

Fig. V.26

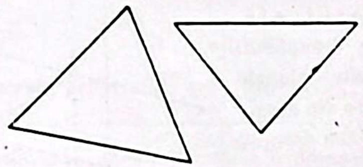

Fig. V.27

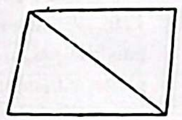

Fig. V.28

Două simplexe se numesc *disjuncte*, dacă intersecția lor este mulțimea vidă (fig. V.27).

Două simplexe distincte se numesc *adiacente*, dacă intersecția lor este un simplex incident cu fiecare din cele două simplexe (fig. V.28).

7. Drepte și plane perpendiculare

Reamintim că două drepte concurente AB, AC se zic perpendiculare, dacă unghiul $\widehat{BAC}$ este congruent cu un suplement al său. O dreaptă nu poate fi perpendiculară pe ea însăși.

Fie d o dreaptă și A un punct nesituat pe d. Alegem două puncte distincte B, C pe dreapta d. Să notăm prin p planul care conține punctul A și punctele B, C. Acest plan va conține întreaga dreaptă d, deoarece d și p au două puncte comune.

Ne propunem să construim în planul p, perpendiculara pe dreapta d care trece prin punctul A. Pentru aceasta, considerăm semidreapta s, care are originea în B, care este situată în planul p, de partea opusă lui A față de d și astfel ca s să formeze cu semidreapta $|BC$ un unghi congruent cu

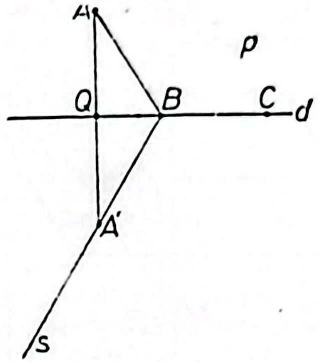

Fig. V.29

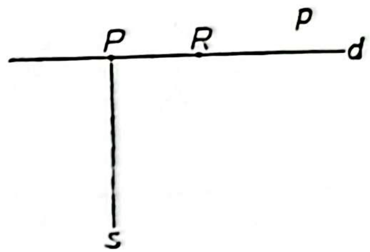

Fig. V.30

unghiul $\widehat{ABC}$. Axioma III.4. ne asigură că semidreapta s, avînd proprietățile indicate, există și este unică (fig. V.29).

Pe semidreapta s considerăm acel punct A', pentru care $|BA| \equiv |BA'|$. Axioma III.1. asigură existența și unicitatea punctului A' avînd proprietățile indicate. Punctele A și A' se găsesc în semiplane opuse față de dreapta d. Rezultă că segmentul $|AA'|$ are un punct comun cu dreapta d. Fie Q acest punct.

Triunghiurile ABQ, $A'BQ$ sînt congruente, în virtutea teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{BQA} \equiv \widehat{BQA'}$. Dar unghiurile $\widehat{BQA}$, $\widehat{BQA'}$ sînt suplementare deci unghiul $\widehat{BQA}$ este drept. Aceasta înseamnă că dreptele AQ și d sînt perpendiculare.

Dreapta AQ este *singura perpendiculară* ce se poate duce în planul p, din punctul A, pe dreapta d, deoarece nu există nici un triunghi cu două unghiuri drepte.

Construcția indicată arată că *există unghiuri drepte.*

Știind că orice unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept, putem arăta că, fiind date un plan p (fig. V.30), o dreaptă $d \subset p$ și un punct P pe d, există o dreaptă în planul p, perpendiculară pe d și trecînd prin punctul P. Într-adevăr, alegînd un punct $R \in d$ diferit de P, construim, în planul p, trecînd prin dreapta d, de o parte fixată a lui d, o semidreaptă s astfel ca s să formeze cu semidreapta $|PR$ un unghi congruent cu un unghi drept, construit așa cum s-a arătat. Atunci unghiul format de s și de $|PR$ va fi drept. Dreapta care conține semidreapta s este perpendiculara ridicată în punctul P, pe dreapta d, în planul p.

Definiție. **Vom spune că o dreaptă d este perpendiculară pe un plan p dacă d și p au un punct comun P și dacă orice dreaptă a, trecînd prin P și conținută în planul p, este perpendiculară pe dreapta d (fig. V.31).**