

Examen Structuri algebrice în Informatică, seria 15
05.09.2024

(1) (2 pct.) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 50x - 121, & x \leq -4, \\ x, & -4 < x \leq 3, \\ -x + 4, & x > 3. \end{cases}$$

- (a) Determinați $Im(f)$.
- (b) Aflați $f((-6, 0))$ și $f^{-1}((-2, 2))$.
- (c) Determinați acei $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) < x$.

(2) (2 pct.) Considerăm grupul $G = (\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}, +)$ cu operația de adunare pe componente.

- (a) Determinați ordinul elementului $h = (\hat{1}, \bar{2}) \in G$.
- (b) Aflați ordinele elementelor din G .
- (c) Câte elemente din G au ordinul egal cu 10?
- (d) Sunt izomorfe grupurile G și $G_1 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}, +)$?

(3) (2 pct.) Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (a) Calculați ordinul lui σ .
- (b) Calculați σ^{2024} .
- (c) Determinați, dacă există, o permutare $x \in S_9$ astfel încât $x^2 = \sigma$.

(4) (2 pct.) Fie polinoamele $f = x^8 - 1$, $g = x^5 - 1$ în inelul $\mathbb{R}[x]$.

- (a) Determinați $d = c.m.m.d.c(f, g)$.
- (b) Determinați polinoame $u, v \in \mathbb{R}[x]$ astfel încât $u \cdot f + v \cdot g = d$.
- (c) Aflați inversul lui \hat{f} în inelul $\mathbb{R}[x]/(g)$, dacă există.

(5) (1 pct.) Decideți dacă polinomul $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 2$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

Se acordă 1 pct din oficiu.

Justificați toate răspunsurile date, arătând calculele efectuate.

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute