Referate

GAL

CUPRINS

5. Grupul ortogonal $(O(2), \cdot)$
   - SO_2
6. Grupul ortogonal $(O(3), \cdot)$
   - SO_3
7. Cuadrice
   - clasificare
8. Conice
   - clasificare
9. Rezumate cursuri
10. Rezolvare test

Axiomele geometriei euclidiene plane

Geometria lui Euclid reprezintă una dintre cele mai importante contribuții la dezvoltarea matematicii, influențând timp de peste două milenii modul în care înțelegem spațiul și forma. Opera fundamentală a lui Euclid, intitulată „Stoicheia" (Elemente), cuprinde 13 volume în care sunt definite conceptele de bază, sunt enunțate axiome și postulate și sunt demonstrate numeroase teoreme despre puncte, linii, unghiuri, cercuri, poligoane, plane și alte figuri geometrice.

Sistemul creat de Euclid este construit logic, pornind de la număr restrâns de principii generale și definind progresiv tot mai multe concepte. Geometria euclidiană plană se bazează în principal pe ceea ce Euclid a formulat pentru spațiul plan.

Axiomele lui Euclid au un caracter general și se referă la mărimi care sunt definite, dar care capătă ulterior diferite interpretări. Ca exemple de mărimi considerate de Euclid, menționăm numerele naturale, liniile drepte, unghiurile, suprafețele, volumele.

Este important de subliniat că ceea ce Euclid numea linie dreaptă este echivalent cu ceea ce azi înțelegem prin segment, iar unele axiome descriu proprietăți ale acestor obiecte geometrice. În limbajul matematic modern, axiomele euclidiene caracterizează semigrupuri ordonate. Un exemplu celebru din axiomele euclidiene este afirmația: „Partea este mai mică decât întregul", care exprimă o idee fundamentală a ordonării.

Euclid definește punctul ca o entitate indivizibilă, linia ca o lungime fără lățime, și suprafața ca o entitate având lungime și lățime.

Sistemul axiomatic euclidian constă în 5 propoziții fundamentale:

1. Între 2 puncte se poate duce o linie dreaptă.
2. Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.

3. Se poate descrie un cer de centru dat și de rază dată.

4. Toate unghiurile drept sunt congruente între ele.

5. Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte 2 linii drepte, formează, de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne având suma mai mică decât 2 unghiuri drepte, cele 2 linii menționate se vor intersecta, dacă sunt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decât două unghiuri drepte.

Dintre acestea, cel de-al cincilea a fost, de-a lungul timpului, sursa multor dezbateri și încercări de demonstrare. În ediții ulterioare ale „Elementelor" acest postulat a fost reformulat sub forma: „Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă". Prin linii drepte paralele, Euclid înțelege 2 linii drepte coplanare care, oricât s-ar prelungi, rămân nesecante.

Euclid nu a acceptat ideea de infinit actual, motiv pentru care demonstrațiile sale nu folosesc metode moderne de tipul inducției matematice sau raționamentului logic riguros. În schimb, a apelat adesea la intuiție și argumentare informală. Cu toate acestea, sistemul axiomatic al lui Euclid este consistent, adică nu duce la contradicții interne.

Deși matematicienii au încercat să demonstreze postulatul 5 din celelalte patru, acest lucru s-a dovedit imposibil. Această constatare a dus la dezvoltarea a două direcții majore:

1) Geometria absolută, care folosește doar primele patru postulate.

2) Geometria hiperbolică, în care printr-un punct exterior unei drepte pot fi trase mai multe paralele.

În anul 1899, David Hilbert a publicat cartea sa faimoasă „Fundamentele geometriei", în care a arătat că sunt necesare 20 de axiome pentru a putea demonstra toate teoremele lui Euclid. Ulterior, împreună cu alți matematicieni Hilbert a inițiat un vast program de elaborare a unei Teorii matematice a demonstrației.

Acest program a dus la o disciplină nouă, numită Logică matematică, care este versiunea modernă, adaptată matematicii, a teoriei lui Aristotel a noțiunilor, a silogismelor și raționamentelor.

Geometria euclidiană este, în forma ei modernă, parte integrată din matematica actuală. Este diferită de geometria originală a lui Euclid prin precizia limbajului și prin rigoarea demonstrațiilor, dar păstrează spiritul logic și constructiv al acesteia.

Axiomele formulate de Euclid au pus bazele unei discipline care, de-a lungul secolelor, a evoluat în paralel cu logica matematică, aritmetica și teoria mulțimilor.

Astfel, proprietățile de incidență ale punctelor și dreptelor într-un plan sunt:

1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
2. Orice dreaptă conține cel puțin 2 puncte.
3. În orice plan, există 3 puncte care nu sunt situate pe o aceeași dreaptă.

Bibliografie: „Fundamentele geometriei și element de fizică matematică" - Kostake Teleman

Axiomele geometriei euclidiene tridimensionale

Geometria euclidiană tridimensională reprezintă extensia naturală a geometriei plane în spațiul cu trei dimensiuni. În această ramură a geometriei, se face studiul punctelor, liniilor și suprafețelor într-un cadru spațial, unde noțiuni precum planul, perpendicularitatea, paralelismul și volumele capătă noi semnificații.

Lucrarea „Elementele" a lui Euclid se concentrează în primele volume asupra geometriei plane, însă ultimele sale volume abordează și probleme din spațiul tridimensional, culminând cu teorema lui Platon, privind clasificarea poliedrelor regulate. Așadar, deși nu a formulat un set distinct de axiome spațiale, Euclid a pus bazele geometriei tridimensionale prin extinderea postulatelor plane și demonstrarea teoremelor în spațiu.

Pentru a construi geometria tridimensională, axiomele din plan trebuie completate cu principii care descriu poziția și comportamentul obiectelor în spațiu.

Axiomele de incidență în spațiu:

1. Prin orice 2 puncte trece o dreaptă.
2. Prin orice 2 puncte distincte trece o singură dreaptă.
3. Orice dreaptă conține cel puțin 2 puncte.
4. Prin orice 3 puncte necoliniare trece un plan.
5. Prin orice 3 puncte necoliniare trece un singur plan.

În spațiul tridimensional, apar noi obiecte geometrice:

- Plane: suprafețe infinite bidimensionale
- Corpurile geometrice: prisma, paralelipipedul, piramida, cilindrul, conul, sfera
- Poliedrele regulate, clasificate de Platon, ca tetraedru, cubul, octaedrul, etc

În geometria tridimensională, demonstrațiile devin mai complexe, necesitând o înțelegere intuitivă a poziției relative a obiectelor în spațiu. Deși Euclid nu a construit o axiomă specifică pentru spațiu, baza pusă de el a fost suficientă pentru dezvoltarea ulterioară a geometriei tridimensionale. Abia în secolul XIX, David Hilbert a completat sistemul euclidian prin introducerea unui sistem axiomatic riguros, incluzând axiome de incidență, ordine, congruență, continuitate și paralelism, toate adaptate pentru spațiul tridimensional.

Axiomele de ordonare:

- Dacă un punct B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sunt coliniare și distincte.
- Fiind date 2 puncte distincte A, B, există un punct C astfel încât B să se găsească între A și C.
- Axioma lui Pasch: Fiind date 3 puncte necoliniare A, B, C și o dreaptă d, dacă d intersectează segmentul AB, atunci d trebuie să intersecteze și AC sau BC.

Axiomele de congruență:

• Relația de congruență între segmente și unghiuri este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

• Orice segment este congruent cu el însuși.

• Dacă 2 triunghiuri sunt congruente, atunci toate elementele lor corespondente sunt congruente.

Drepte și plane perpendiculare:

1. Două drepte concurente sunt perpendiculare dacă unghiul format este congruent cu un unghi drept.

2. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe toate dreptele din plan care trec prin punctul de intersecție.

Geometria euclidiană tridimensională este o extensie logică și necesară a geometriei plane, bazată pe aceleași principii de ordine, logică și construcție. De la axiome simple despre puncte și drepte, până la clasificarea corpurilor și calculul volumelor, această ramură a matematicii oferă un cadru solid pentru înțelegerea spațiului în care trăim.

Bibliografie: „Matematică manual pentru clasa a X-a"
– K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stătescu

Axiomele geometriei euclidiene plane în limbajul teoriei mulțimilor

Fie : • Punct: un element $A \in \mathbb{R}^2$

• Dreapta: o submulțime $L \subseteq \mathbb{R}^2$, element dintr-o mulțime specială $\mathcal{D}$ (mulțimea tuturor dreptelor din $\mathbb{R}^2$)

• Cerc: mulțimea punctelor din $\mathbb{R}^2$ aflate la distanță fixă de un punct dat

• Segment: o submulțime a unei drepte, formată din toate punctele între 2 puncte date

• Paralelism: relație între 2 submulțimi $L_1, L_2 \in \mathcal{D}$ care nu se intersectează și sunt coplanare.

Axioma de incidență:

• Prin 2 puncte distincte trece numai și numai o dreaptă → exprimă existența unică: între oricare 2 puncte există o singură submulțime care le conține

Axioma de extensabilitate:

Un segment poate fi extins nelimitat în ambele direcții → pentru oricare punct de pe dreaptă, există altul mai departe

Axioma - existența cercului

Se pot construi un cerc cu orice centru și orice rază pozitivă.

Axioma - congruența unghiurilor drepte

Toate unghiurile drepte sunt congruente

Axioma - paralele

Printr-un punct exterior unei drepte trece o și numai o paralelă.

Bibliografie: „Structura matematicii" - Oana Constantinescu

Referat

Spatii vectoriale

Notiunea de spatiu vectorial constituie obiectul de studiu al algebrei liniare și reprezintă una dintre cele mai importante structuri algebrice utilizată în diferite ramuri ale matematicii:

O multime nevidă V se numește spatiu vectorial peste câmpul K, K - spațiu vectorial dacă $(V, +)$ formează o structură de grup abelian, și $\varphi: K \times V$, $\varphi(\alpha, x) = \alpha x$ satisface axiomele:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
4) $1 \cdot x = x$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in V$

Elementele mulțimii V se numesc vectori, elementele lui K se numesc scalari, iar legea de compoziție externă se numește înmulțirea cu scalari. Notăm cu O_V vectorul nul al grupului aditiv V și al scalarului nul, și au loc proprietățile:

1) $O_K x = O_V$
2) $\alpha O_V = O_V$
3) $(-1)x = -x$

Fie V un spatiu vectorial peste câmpul K. O submulțime nevidă $U \subset V$ se numește subspațiu vectorial al lui V dacă operațiile algebrice de pe V induc pe U o structură de K - spațiu vectorial. Dacă U este o submulțime a K-spațiului vectorial V atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) U este subspațiu vectorial în V

2) $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha \in K$ avem: a) $x+y \in U$
b) $\alpha x \in U$

3) $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha, \beta \in U \Rightarrow \forall\ \alpha x + \beta y \in U$

Fie V_1 și V_2 2 subspații în K-spațiu vectorial. Submulțimile $V_1 \cap V_2 \subset V$ și $V_1 + V_2 = \{ v \in V \mid v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2 \} \subset V$ sunt subspații vectoriale. În schimb, dacă V_1 și V_2 sunt 2 subspații vectoriale, și $v \in V_1 + V_2$, descompunerea $V = V_1 + V_2$ este unică dacă și numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K și S o submulțime nevidă a sa. Un vector $v \in V$ de forma $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$, $\lambda_i \in V_1$, $x_i \in R$ se numește combinație liniară finită de elemente din S. Dacă S este o submulțime nevidă a lui V, atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite din S se notează $\langle S \rangle$, este un subspațiu vectorial al lui V, numit subspațiul generat de submulțimea S sau acoperirea liniară a lui S.

O submulțime $S \subset V$ se numește sistem de generatori pentru spațiul vectorial V dacă subspațiul generat de submulțimea S coincide cu V.

Fie V un K - spațiu vectorial. O submulțime B de vectori din V se numește bază a sp. vectorial V dacă B este liniar independent și reprezintă un sistem de generatori pentru V.

Spațiul vectorial V se zice că este finit generat sau finit dimensional dacă există un sistem finit de generatori.

Dacă $V \neq \{0\}$ este un sp. vectorial finit generat și este un sistem de generatori pentru V atunci există o bază $B \subset S$ a sp. vectorial V. Într-un spațiu vectorial V finit generat, orice 2 baze au același număr de elemente.

Se numește dimensiune a unui sp. vectorial finit generat, numărul de vectori dintr-o bază a sa, notat cu dim V. Spațiul nul $\{0\}$ are dim = 0

Teorema schimbului este remarcabilă în acest context și ne spune că dacă $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V_n și $S = \{f_1, \dots, f_p\}$ este un sistem de vectori liniar independenți din V_n atunci $p \leq n$ și după o eventuală renumerotare a vectorilor bazei B, și sistemul $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n\}$ reprezintă de asemenea o bază pentru B.

O altă teoremă importantă este teorema dimensiunii, numită și teorema lui Grossmann care spune că dacă V_1 și V_2 sunt 2 subspații vectoriale ale K-spațiului vectorial V_n atunci:

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Dacă în spațiul vectorial V_n, schimbarea bazei B cu baza B' este dată de relația $B' = A^t B$, atunci relația între coordonatele unui vector $x \in V_n$ în cele 2 baze este dată de $x = Ax'$!

Dacă V_n e un sp. vectorial și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a sa, iar vectorii $v_1, v_2, \dots, v_p \in V_n$, $p \leq n$ sunt exprimați prin $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$ atunci matricea $A = (a_{ij})$, având drept coloane coordonatele vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_p$ va fi numită matricea de trecere de la vectorii $e_1, e_2, \dots, e_n$ la vectorii $v_1, v_2, \dots, v_p$. Rangul matricii A este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană liniar independenți.

O aplicație $T: V \to W$ cu proprietățile:

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$ $\forall x, y \in V$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in V$ se numește

morfism de spații vectoriale sau transformare liniară.

O transformare liniară bijectivă între 2 sp. vectoriale va fi numită izomorfism de sp. vectoriali.

Două spații V și W peste K de dimensiune finită, sunt izomorfe dacă au aceeași dimensiune.

Dacă, pe lângă structura de sp. vectorial, adăugăm noțiunea de produs scalar, atunci într-un astfel de sp. vectorial pot fi definite noțiunile de lungime a unui vector, unghi a 2 vectori, ortogonalitate.

O aplicație $g: V\times V \to \mathbb{R}$, $g((x,y)) = \langle x, y\rangle$ cu proprietățile:

a) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \ \forall x, y, z \in V$

b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in V$

d) $\langle x, x\rangle \geq 0, \ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in V$

se numește produs scalar pe sp. vectorial V.

Un sp. vectorial V pe care s-a definit un produs scalar sn. spațiu vectorial euclidian. Dacă spațiul vectorial V este un sp. vectorial euclidian, atunci avem inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$ care are loc $\Leftrightarrow$

⇔ vectorii x și y sunt liniar independenți

ex1: în $\mathbb{R}^3$ pentru orice 2 elemente

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_3)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

operația $\langle x, y \rangle =: x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ definește

un produs scalar

ex2: $C([a,a])$ mulțimea funcțiilor continue pe $[a, b]$

este un sp. vectorial în raport cu produsul

scalar definit de $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

Într-un sp vectorial euclidian V funcția $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

definită $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in V$ este o normă pe V și

satisface axiomele:

1) $\|x\| > 0$, $\forall x \neq 0$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, numită și inegalitatea

Cauchy - Schwarz, care ne permite să definim

unghiul dintre 2 vectori:

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

În sp. vectorial normat V, funcția reală

$d : V \times V \to \mathbb{R}$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ este

o metrică pe V, adică satisface axiomele

a) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\forall x, y \in V$

b) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in V$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$ $\forall x, y, z \in V$

O mulțime oarecare dată cu o metrică se numește spațiu metric și orice sp. euclidian este un spațiu metric.

În sp. vectorial x și y se numesc vectori ortogonali dacă $\langle x, y \rangle = 0$

O mulțime $S \subset V$ se spune că este ortogonală dacă vectorii săi sunt ortogonali 2 câte 2, iar această mulțime este și ortonormată dacă fiecare element al său are norma egală cu unitatea.

Într-un spațiu euclidian V orice mulțime e ortogonală, formată din elemente nenule este liniar independentă, prin urmare, într-un sp. vectorial euclidian n-dimensional V_n orice submulțime ortogonală formată din n vectori este o bază în V_n.

Orice subspațiu vectorial euclidian admite o bază ortonormată. Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și

$B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ dacă baza e ortonormată în sp. vectorial euclidian V_n relațiile dintre elementele celor 2 baze sunt date de

$$f_j = \sum_{h=1}^{n} a_{hj} e_h \quad \forall j = \overline{1,n}$$

Cum B' este ortonormată, avem:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hi}\, a_{kj} \langle e_h, e_k \rangle =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} a_{hi}\, a_{kj}\, \delta_{hk} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}\, a_{hj} = \delta_{ij}$$

Dacă $A = (a_{ij})$ este matricea de trecere de la baza B la B', atunci relațiile de mai sus se exprimă matriceal sub forma $A^t A = I_n$, adică A este o matrice ortogonală. La o schimbare de bază ortonormată $B' = A^t B$ într-un sp. vectorial V_n, transformarea de coordonate este dată de $x = A x'$ unde A este o matrice ortogonală.

Bibliografie: „Spații vectoriale" – Curs 2 (Universitatea Babeș - Bolyai) – Pintea Cornel

• Subspații afine

Def.: Un spațiu afin peste corpul comutativ K este un triplet $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ format dintr-o mulțime nevidă X, un spațiu vectorial $\vec{X}$ peste K și o funcție $\phi: X \times X \to \vec{X}$ cu proprietățile:

(1) $\exists\, O \in X$ a. î. funcția $\phi_0 : X \to \vec{X}$, $\phi_0(A) = \phi(O, A)$, $\forall A \in X$ este bijectivă

(2) $\phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C)$, $\forall A, B, C \in X$

Elementele lui X se numesc puncte, ale lui $\vec{X}$ vectori, iar funcția ϕ se numește structura afină. Numim $\vec{X}$ spațiul liniar director al spațiului afin $\mathcal{A}$. Dimensiunea spațiului afin $\mathcal{A}$ este egală, prin definiție, cu dimensiunea spațiului său liniar director.

Se poate demonstra că dacă are loc (1), atunci pentru orice $O \in X$, funcția $\phi_0 : X \to \vec{X}$ este bijectivă.

Teoremă: Mulțimea X împreună cu legile de compoziție următoare are o structură de spațiu liniar peste K și $\phi_P : X \to \vec{X}$ este izomorfism de spații liniare:

- $A+B = \phi_P^{-1}(\vec{PA}+\vec{PB})$, $\forall A, B \in X$
- $\alpha A = \phi_P^{-1}(\alpha \vec{PA})$, $\forall \alpha \in K$, $\forall A \in X$

cu $+ : X \times X \to X$ și $\cdot : K \times X \to X$

În cazul spațiului geometric observăm că:

$A+B = C$, unde C este unic determinat de
$$\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC}$$

$\alpha A = D$, unde D este unic determinat de
$$\alpha \vec{PA} = \vec{PD}$$

Def: Dat spațiul afin $A = (X, \vec{X}, \phi)$ definim o operație de adunare a punctelor cu vectori prin
$$+ : X \times \vec{X} \to X$$
$$P + \bar{u} = \phi_P^{-1}(\bar{u})$$

Operația definită anterior are următoarele proprietăți:

(1) $A+(\bar{u}+\bar{v}) = (A+\bar{u})+\bar{v}$, $\forall A \in X$, $\bar{u}, \bar{v} \in \vec{X}$

(2) $A+\bar{0} = A$ $\forall A \in X$

(3) $\forall A, \in X$ $\exists! \bar{v} \in \vec{X}$ a.î. $B = A + \bar{v}$

Bibliografie: „Recapitulare spații afine" - Oana Constantinescu

Referat – Grupul ortogonal $(O(2), \cdot)$

Grupurile ortogonale joacă un rol esențial în matematică, fiind folosite pentru a descrie simetrii și transformări care păstrează distanța. Grupul ortogonal $O(2)$ reprezintă mulțimea tuturor transformărilor liniare care păstrează lungimea vectorilor în planul bidimensional ($\mathbb{R}^2$) și au matrice ortogonale de ordin 2.

Definiție: Grupul ortogonal $O(2)$ este format din toate matricile 2×2 ortogonale cu coeficienți reali. O matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ este ortogonală dacă îndeplinește relația: $A^t \cdot A = I$

$\Rightarrow$ Grupul $O(2)$ constă în toate transformările de rotație în planul bidimensional care păstrează distanțele și originea nemodificate.

$$(O(2), \cdot) = \{R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Proprietăți:

1) $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} = A^*$

2) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

$(SO(2), \cdot)$ (= grupul special ortogonal) : descrie transformările liniare ortogonale cu determinantul 1 ; aceste transformări păstrează produsul scalar și norma vectorilor, precum și volumul spațiului.

$SO(2) = \{A \in O(2) \mid \det A = 1\} \subset O(2)$

Fie $E_2 = (R^2/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ planul euclidian.

considerăm $R \in O(E_2)$, $B = \{e_1, e_2\} \subset E_2$ (baza ortogonală)

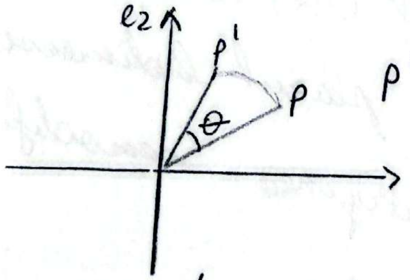
$$\downarrow B$$

$$R \in O(2) \Leftrightarrow R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

matrice ortogonală

I $\det R = 1 \Rightarrow R \in SO(2) \Rightarrow$ rotație de $\angle\theta$, direct trigonometrică

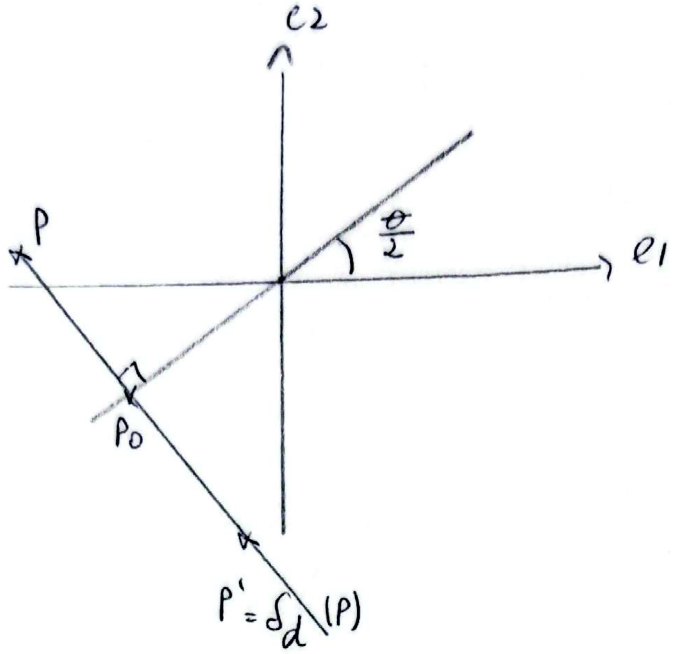
$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ având centrul în originea reperului.



$P' = P_0(\theta)$

II $\det R = -1 \Rightarrow$ simetrie ortogonală în raport cu dreapta vectorială $\langle d \rangle$

$d = (\cos\frac{\theta}{2} e_1, \cos\frac{\theta}{2} e_2) \to$ dreapta vectorială care face un unghi $\frac{\theta}{2}$ cu axa generată de $e_1 (Ox)$, $\langle e_1 \rangle$



Bibliografie: „Grupul ortogonal" - Mircea Crasmareanu
(Facultatea de Matematică, Universitatea
"Al. I. Cuza" Iași)

Referat - Grupul ortogonal $(O(3), \cdot)$

În geometria și algebra liniară, conceptul de simetrie este esențial pentru înțelegerea proprietăților spațiului. Grupul ortogonal $O(3)$ reprezintă mulțimea tuturor transformărilor liniare care păstrează distanțele și unghiurile în spațiul tridimensional real $\mathbb{R}^3$. Aceste transformări includ rotațiile și reflexiile, fiind extrem de importante.

$O(3) = \{A \mid A \in M_3, \ {}^tA \times A = I\}$

$\Rightarrow$ Este mulțimea transformărilor liniare care păstrează produsul scalar și norma vectorilor în spațiul tridimensional.

$SO(3)$ (= grupul special ortogonal): o mulțime a grupului ortogonal $O(3)$ și constă în matricele ortogonale 3×3 care au determinantul 1

$SO(3) = \{A \in O(3) \ \det A = 1\} \subset O(3)$

Fie $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ spațiu euclidian

$\pi \in O(E_3)$, $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ baza ortogonală, onormată

$\downarrow B$

$R \in O(3) \Leftrightarrow \underset{\text{ortogonală}}{\overset{R}{\text{matrice}}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \delta_{ij}$$
$$\forall i, j = \overline{1,3}$$

I $\det R = 1 \Rightarrow R \in SO(3)$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

– rotație de unghi θ, direct trigonometrică cu axa de rotație dreapta vectorială generată de $\langle e_1 \rangle \overset{not}{=} E$, planul de rotație „planul vectorial $\langle \{e_2, e_3\} \rangle \overset{not}{=} E$"

II $\det R = -1$

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

– compunere a unei rotații de unghi θ, în sens direct trigonometric având ca axă de rotație dreapta vectorială $\langle e_1 \rangle = E'$ și plan de rotație, planul vectorial $E'' = \langle \{e_2, e_3\} \rangle$ cu o simetrie ortogonală în raport cu planul E'

Bibliografie: „Grupul ortogonal" – Mircea Crasmareanu (Facultatea de Matematică, Universitatea „Al. I. Cuza" Iași)

Conicele

Conicele sunt locuri geometrice ale punctelor din plan care satisfac o ecuație algebrică de gradul doi de formă generală:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

unde A, B, C, D, E, F sunt coeficienți reali și A, B, C nu sunt toți simultan 0.

Conicele se clasifică în 3 tipuri speciale:

- elipsa (inclusiv cercul, ca și caz particular)
- parabola
- hiperbola

Tipul conicii este determinat de discriminantul:

$$\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$$

- dacă $\Delta < 0$: conica este o elipsă

• dacă $\Delta = 0$: conica este o parabolă

• dacă $\Delta > 0$: conica este o hiperbolă

Astfel, o conică este curba care se obține prin intersectarea unui plan cu un con.

Secțiunea conică:

- cerc: $x^2 + y^2 = r^2$
- elipsă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- parabolă: $y^2 = 4ax$
- hiperbolă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Caz general:

$\{(x_1, \dots, x_m) \in E_m \mid f(x_1, \dots, x_m) = 0\}$

unde $f: E_m \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_m) =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij} + 2 \sum_{i=1}^{m} b_i x_i + c$

unde $a = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,m}}$

Matriceal avem: $f(x) = {}^t X a X + 2 b X + c$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $b = (b_1, \dots, b_m)$

$A = \begin{pmatrix} a & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$

$r = rg\, a$, $r' = rg A \in \{r, r+1, r+2\}$, $\delta = \det a$, $\Delta = \det A$

$P(\lambda) = \det(a - \lambda I_n)$ - polinomul caracteristic

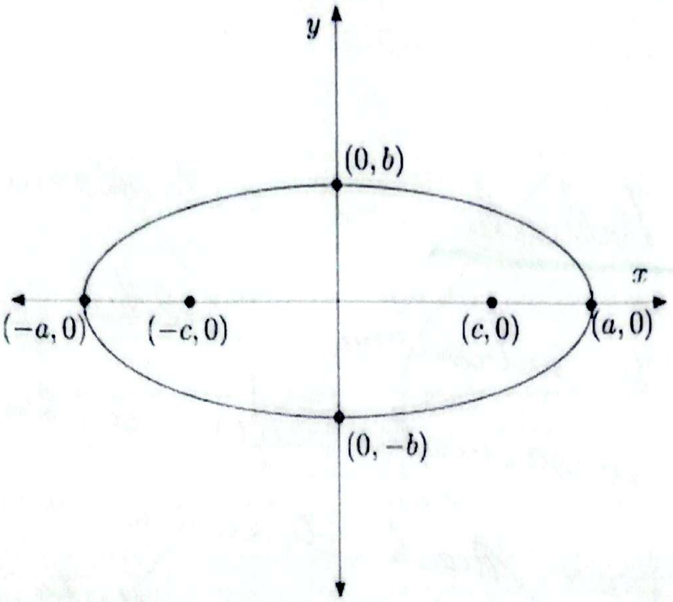
$Spec(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Invarianți absoluți: $r, r', \frac{\Delta}{\delta}, \frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \frac{\delta}{\lambda_i}, \frac{\Delta}{\lambda_j}$

I Conice nedegenerate ($\Delta \neq 0$)

• Elipsa

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$



• $\mathcal{I}_2 > 0$

• $\mathcal{I}_3 \neq 0$

unde $\mathcal{I}_2$ = det matricei coeficienților pătratici, $\mathcal{I}_3$ = determinantul total

În cazul particular $a = b = r$ elipsa devine cerc.

$$(C): x^2 + y^2 = r^2$$

Dacă centrul cercului este $M_0(x_0, y_0)$, iar raza este r, ecuația cercului (implicită) este:

$$(C): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

D.p.d.v. geometric elipsa este locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe F și F' (numite focare) este constantă.

În cazul nostru $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ și

$MF + MF' = 2a$, unde $c^2 = a^2 - b^2$.

$$(E): \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \rightarrow \text{ecuații parametrice}$$

<u>Aplicație</u> - în astronomie

În astronomie, orbitele planetelor sunt aproximativ elipse, cu Soarele într-unul din focare. Aceste traiectorii sunt studiate în planul orbital, un spațiu afin A^2.

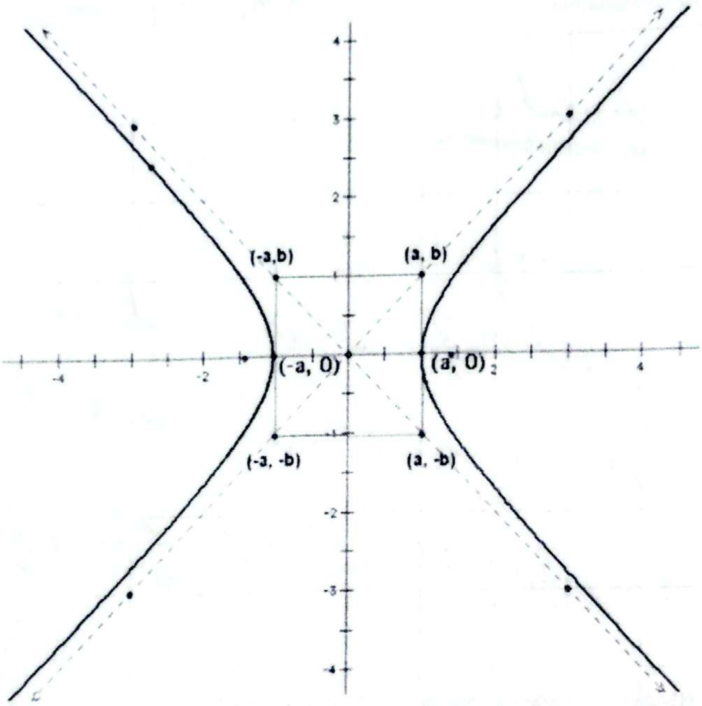
Ecuație standard: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Mișcarea Pământului în jurul Soarelui se descrie printr-o elipsă în plan orbital, care este un subspațiu afin în spațiul ambient tridimensional.

Scanat cu CamScanner

- Hiperbola

$$(H)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$



- $y_2 < 0$
- $y_3 \neq 0$

Admite 2 asimptote (dreptele punctate):

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

D.p.d.v. geometric hiperbola este locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan pentru care diferența distanțelor la două puncte fixe F, F' (focare) este în modul constantă.

În cazul nostru $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$,

$c^2 = a^2 + b^2$, $|MF - MF'| = 2a$.

$$(H): \begin{cases} x = a \cdot \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} & (:= a \cdot \cosh t) \\ y = b \cdot \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} & (:= b \cdot \sinh t), \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

↳ ecuații parametrice

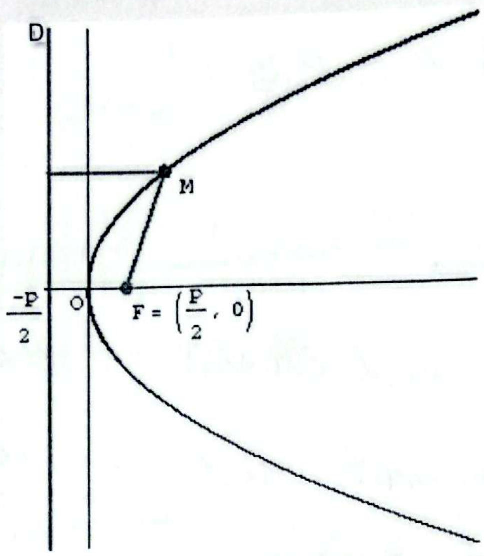
Aplicație

În navigație și comunicații (sistemul Loran), diferența de distanță dintre două surse de semnal este constantă.

Ecuație standard: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

· Parabola

$$(P): y^2 = 2px$$



· $y_2 = 0$

· $y_3 \neq 0$

D.p.d.v. geometric parabola est locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan egal depărtate de o dreaptă fixă (directoare, notată (d), de ecuație $x = -\frac{p}{2}$) și de un punct fix (focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$).

$$(P): \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \text{ecuații parametrice}$$

Parabola este, în general, graficul unei funcții de gradul doi în plan, de forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

sau

$$x = a'y^2 + b'y + c'$$

Aplicație

În mecanică clasică, traiectoria unui obiect aruncat într-un câmp gravitațional este o parabolă

Ecuație standard:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Invarianți pentru conice

invarianții sunt expresii formate din coeficienții ecuației care nu se modifică atunci când se schimbă sistemul de coordonate (rotații, translații) - adică rămân invariabili.

1) Discriminantul conicii : $\Delta = B^2 - 4AC$

$\Delta < 0 \rightarrow$ elipsa, $\Delta = 0 \Rightarrow$ parabolă, $\Delta > 0 \Rightarrow$ hiperbolă

2) Urma matricii pătratice : $M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \Rightarrow tr(M) = A + C$

3) Determinantul matricii pătratice : $det(M) = AC - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = AC - \frac{B^2}{4}$

II. Conice degenerate

Prin reducerea la forma canonică, obținem și conice degenerate care pot fi:

→ reuniune de 2 drepte concurente

$$x^2-y^2=0$$

→ un punct

$$x^2+y^2=0$$

→ reuniune de 2 drepte paralele

$$x^2-2x=0$$

→ mulțimea vidă

$$x^2+y^2+1=0$$

Tipul conicei pe baza invarianților

- J_1 (discriminantul de ordin II)

$$J_1 = A + C$$

$\Rightarrow$ suma coeficienților termenilor pătrați (la rotații)

- J_2 (determinantul matricii coeficienților pătrați)

$$J_2 = AC - \frac{B^2}{4}$$

Dacă
- $J_2 > 0 \rightarrow$ elipsă
- $J_2 = 0 \rightarrow$ parabolă
- $J_3 < 0 \rightarrow$ hiperbolă

Este scris și ca: $\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} = AC - \frac{B^2}{4}$

- J_3 discriminantul complet sau determinantul total

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

Acest determinant arată dacă conica este degenerată (reductibilă), dacă $J_3 = 0$.

Bibliografie: „Conice" – Lect. dr. Constantin Cosmin Todea (U.T. Cluj-Napoca)

Cuadrice

O cuadrică este o mulțime de puncte din spațiul tridimensional (sau din planul bidimensional) care satisfac o ecuație algebrică de formă generală:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

unde A, B, C, D, E, F, G, H, I, J

Teoremă: Calitatea unei submulțimi de a fi cuadrică nu depinde de reperul ortonormat în raport cu care s-a dat ecuația ei.

Clasificare:

→ cuadrice nedegenerate:

- Elipsoid
- Sferoid
- Sferă

- Paraboloid eliptic
- Paraboloid hiperbolic
- Hiperboloid cu o pânză
- Hiperboloid cu două pânze

→ cuadrice degenerate:

- Con
- Con de rotație
- Cilindru eliptic
- Cilindru hiperbolic
- Cilindru parabolic

Invarianți ortogonali și centro-ortogonali ai unei cuadrice

Fie o cuadrică (Γ) definită, în raport cu un reper ortonormat fixat, prin ecuația

$$ {}^{t}X A X + 2BX + a_{00} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq O_3 $$

$$ A = {}^{t}A, \quad B = (a_{10} \quad a_{20} \quad a_{30}) $$

$$D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & a_{00} \end{pmatrix} = {}^tD$$

Definim:

- $I = Tr(A)$, $\delta = det(A)$, J = suma minorilor diagonali de ordinul 2 ai lui A

- $\Delta = det(D)$, L = suma minorilor diagonali de ordinul 2 D

- K = suma minorilor diagonali de ordinul 3 ai lui D

Teorema:

a) δ, Δ, I, J sunt invarianți ortogonali ai cuadricei

b) L, K sunt invarianți centro-ortogonali ai cuadricei;

c) dacă $\delta = \Delta = 0$, atunci K este invariant ortogonal

d) dacă $\delta = \Delta = K = J = 0$, atunci L este invariant ortogonal

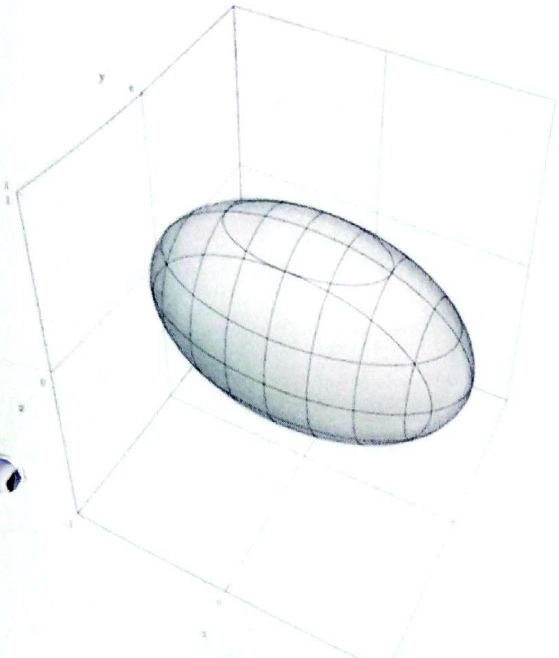
Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valorile proprii matricii A: $\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \delta = 0$

Putem obține o clasificare a cuadricelor în funcție de semnele invarianților asociați acesteia cât și a valorilor proprii.

δ	Δ	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$-\frac{\Delta}{\lambda_i \delta}$	K	L	Cuadrica
>0	$\neq 0$		$+ + +$			elipsoid
<0	$\neq 0$		$+ + -$			hiperboloid cu o pânză
>0	$\neq 0$		$- - +$			hiperboloid cu 2 pânze
<0	$\neq 0$		$- - -$			cuadrică vidă
$\neq 0$	0	același semn				punct dublu
$\neq 0$	0	$+ + -$				con pătratic
0	$\neq 0$	$\lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid eliptic
0	$\neq 0$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid hiperbolic
0	0	$+ + 0$		>0		cuadrică vidă
0	0	$\lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$		0		dreapta dublă
0	0	$+ + 0$		<0		cilindru eliptic
0	0	$- - 0$		>0		cilindru eliptic
0	0	$- - 0$		<0		cuadrică vidă
0	0	$\lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_3 0$		$\neq 0$		cilindru hiperbolic
0	0	$\lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$		0		plane secante
0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		0	>0	cuadrică vidă
0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		0	0	plan dublu
0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		0	<0	plane paralele
0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		$\neq 0$		cilindru parabolic

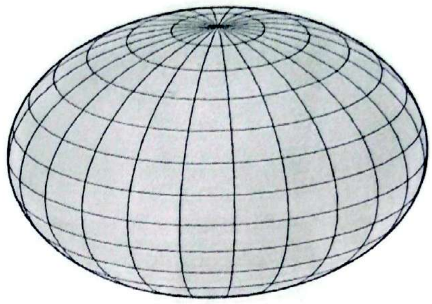
CUADRICE NEDEGENERATE

Elipsoidul



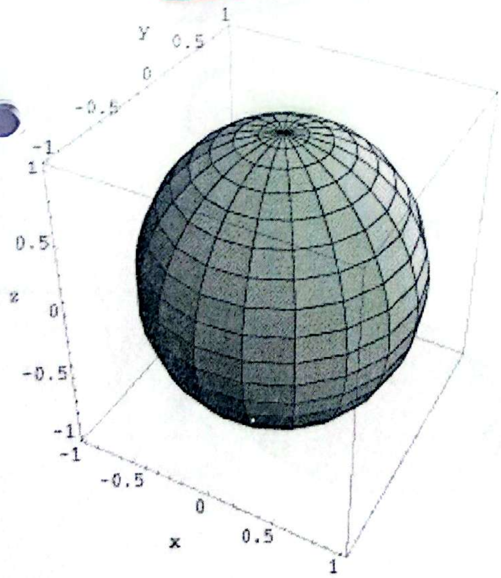
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Sferoid



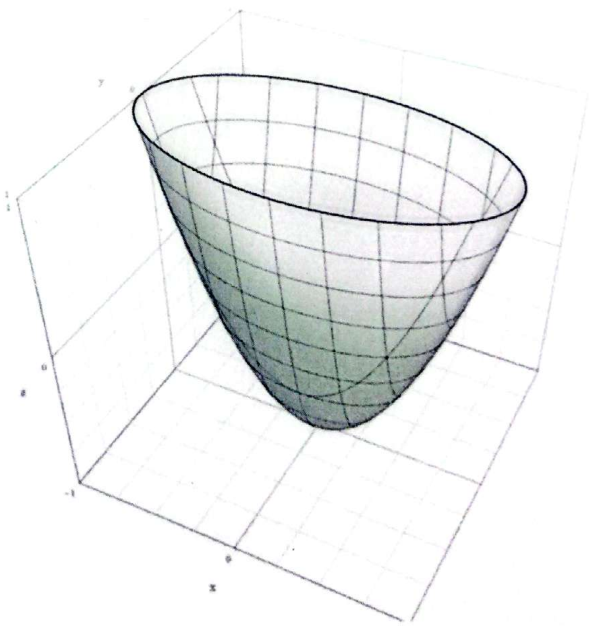
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Sferă



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

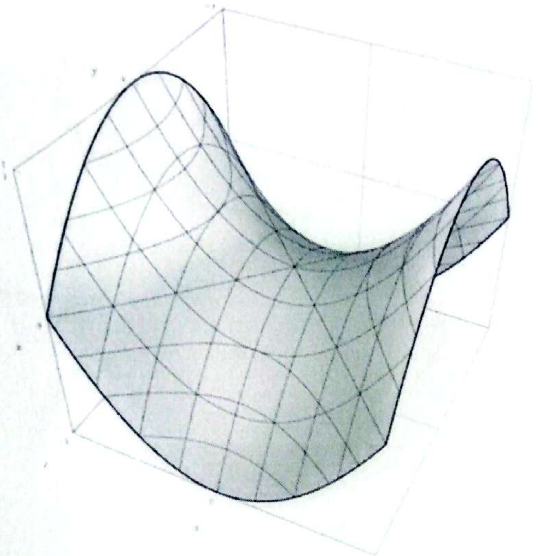
Paraboloidul eliptic



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$$

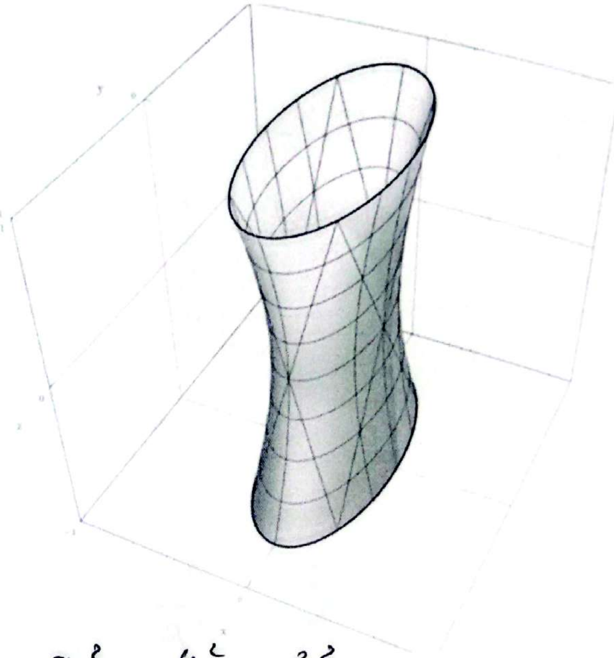
* de rotație: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$

Paraboloid hiperbolic



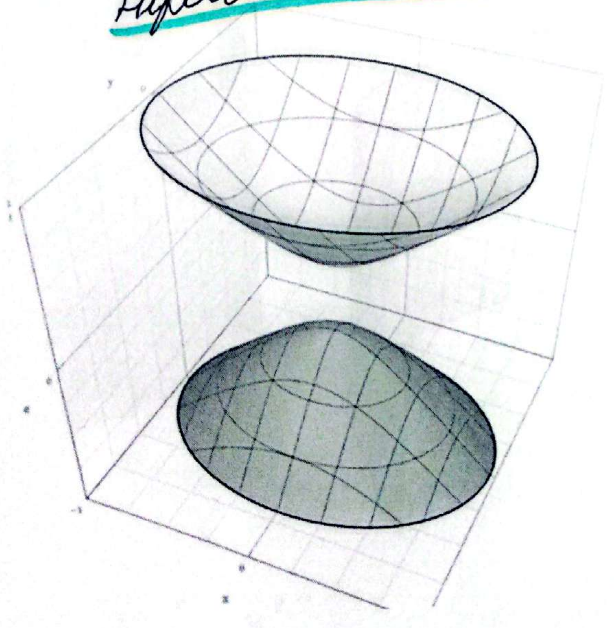
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Hiperboloidul cu o pânză



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

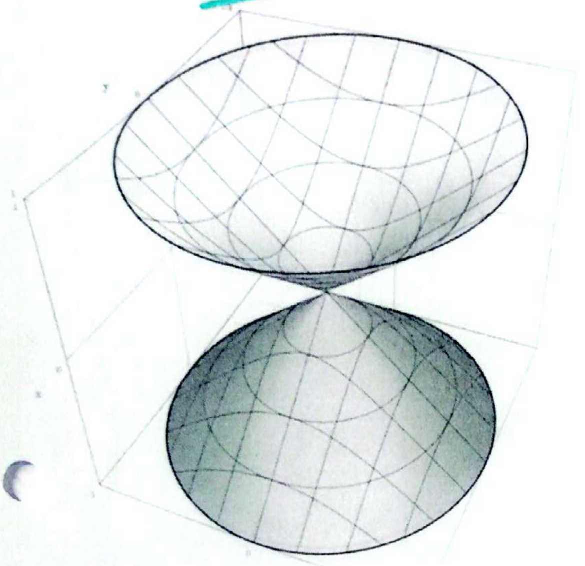
Hiperboloidul cu două pânze



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

CUADRICE DEGENERATE

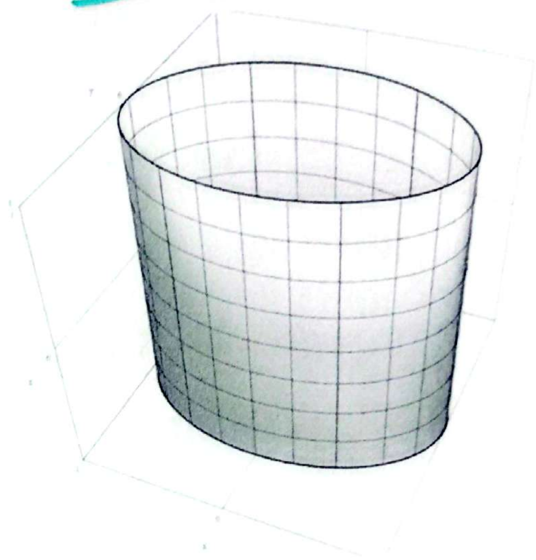
CON



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

+ de rotație: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

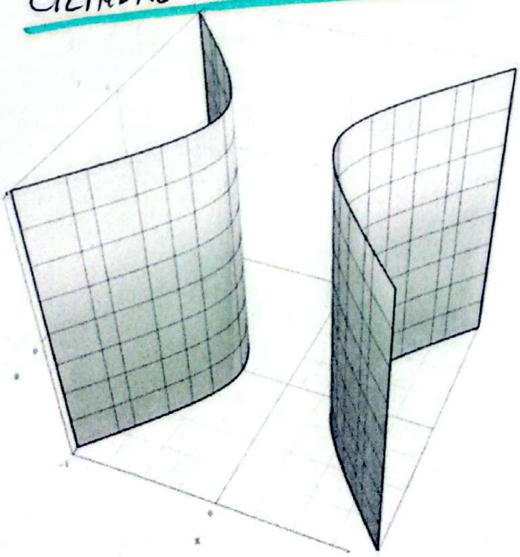
CILINDRU ELIPTIC



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

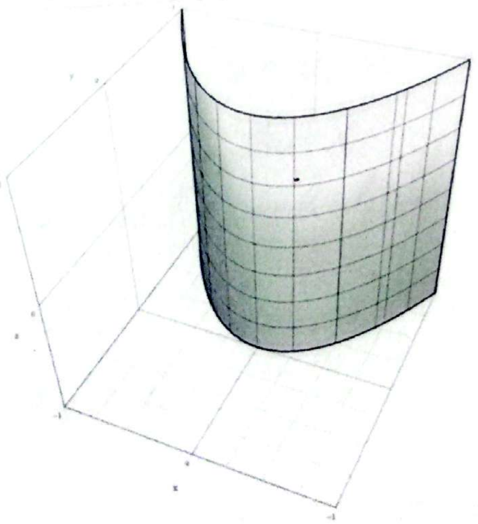
+ de rotație: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

CILINDRU HIPERBOLIC



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

CILINDRUL PARABOLIC



$$y^2 = 2px$$

Aplicație

- paraboloizii și elipsoizii sunt folosiți la construcția oglinzilor și a antenelor
- traiectoriile corpurilor cerești pot fi descrise de intersecții între planurile și cuadrice

Bibliografie: „Cuadrice" - Oana Constantinescu

Rezumat - cursuri

Cursul 1 - Spații vectoriale euclidiene reale

Def. 1: $(V, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$ spațiu vectorial și $g: V \times V \to \mathbb{R}$, g se numește produs scalar dacă și numai dacă:

i) g formă biliniară simetrică

ii) $G: V \to \mathbb{R}$, g pătratică asociată, $Q(t) = g(1,1)$, $\forall t \in V$.

$Q(x) > 0$, $\forall x \in V \{0_V\}$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Notăm următoarele: (V, g) $(E, <, >)$, $(E, (,))$ spațiu vectorial euclidian real.

Def: $\|a\| = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{Q(x)}$, $\forall x \in V$, norma lui X

Def.: $(E, <,>)$ spațiu vectorial euclidian real

$R = \{e_{1}, \dots, e_{n}\}$ reper R

- R se numește reper ortogonal $\Leftrightarrow <e_i, \dots, e_j>$ reper în $V = 0$, $i \neq j$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

- R se numește reper ortonormat $\Leftrightarrow <e_i, \dots, e_j> \Rightarrow \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

Observație: $R = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper ortonormat $\Rightarrow A \in O(n)$ (i.e. $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$). Dacă R și R' sunt la fel orientați ($\det A > 0$) atunci $\det A = 1$ și $A \in SO(n)$.

Curs 2

Teoremă: Fie $(E, \langle , \rangle)$ spațiul vectorial liniar $R = \{f_1, \dots, f_n\}$ reper în E, atunci $\exists R' = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortogonal în E a.î. $Sp\{e_1, \dots, e_j\} = Sp\{f_1, \dots, f_j\}$ $\forall j = \overline{1,n}$, $n = \dim E$

Curs 3 – Transformări ortogonale

Def.: $(E, \langle , \rangle)_{i=\overline{1,2}}$ spațiul euclidian real. Aplicația liniară $f: E_1 \to E_2$ se numește aplicație ortogonală dacă și numai dacă $\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$, $x, y \in E_1$

Propoziție: Dacă $f: E_1 \to E_2$ este operație ortogonală, atunci

i) $\|f(x)\|_2 = \|x\|$, $\forall x \in E_1$

ii) f injectivă

Def: $(E, \langle, \rangle)$ spațiul vectorial euclidian real, $f \in E = d(E)$, f se numește transformare ortogonală dacă și numai dacă $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Propoziție: $f \in O(E) = \{ f \in End(E) \mid f$ transformare ortogonală $\} \Leftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$

Matricea asociată unei transformări ortogonale $(E, \langle, \rangle)$ spațiu vectorial euclidian real, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortonormat.

Curs 9

Spații vectoriale euclidiene. Endomorfisme simetrice.

Teorema Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$(E, \langle, \rangle)$ subspațiu vectorial euclidian real,

$x, y \in E \Rightarrow |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

Dacă $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \{x, y\}$ este sistem liniar degenerat.

Curs 5 - Spații afine

Def: Fie $A \neq \emptyset$ (mulțime de puncte), $V_{\mathbb{R}}$ spațiu vectorial, $\varphi : A \times A \to V$ (structură afină) aplicația care verifică:

1. $\varphi(A, B) \times \varphi(B, C) = \varphi(A, C), \forall A, B, C \in A$
2. $\exists\ O \in A$ a.î. $\varphi_O : A \to V$ bijecție

$\varphi_O(A) = \varphi(O, A)\ \forall A \in A$

Se notează $\varphi(A, B) = AB$

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$, nr. de puncte

$$\mathrm{af}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha} a_i P_i ,\ a_i \in \mathbb{R},\ P_i \in M_i,\ i = \overline{1, \alpha}, \sum_{i=1}^{\alpha} a_i = 1 \right\}$$

$\Rightarrow$ combinații afine din M

Curs 6

Poziția relativă a 2 drepte:

$\Delta_1 : x_i - a_i = t v_i, \forall i = \overline{1, n}$

$\Delta_2 : x_i - a_i = t' v'_i, \forall i = \overline{1, n}$

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = t v_i - t' v'_i = a'_i - a_j, i = \overline{1, n}$

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \\ \vdots & \vdots \\ v_n & -v_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ \vdots \\ a_n' - a_n \end{pmatrix}$$

1. $rg(C) = rg(\bar{C}) = 2$ atunci $D_1 \cap D_2$ concurente
2. $rg(C) = 2$, $rg(\bar{C}) = 3$ atunci D_1, D_2
3. $rg(C) = rg(\bar{C}) = 1 \Rightarrow D_1 = D_2$
4. $Rg\, C = 1$, $rg\bar{C} = 2$, atunci $D_1 \parallel D_2$

Obs: D, D' drepte perpendiculare afine, dacă și numai dacă $\langle v, v' \rangle = 0$

Curs 7

Conicele ca locuri geometrice

$(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2/\mathbb{R}, g_0), g)$

1. $\mathcal{C}(A(a, b), r) = M - r$

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2} = r$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

2. Elipsa este locul geometric al punctelor

$P = E_2$ care verifică $PF + PF = 2a$, $a > 0$, F, F' puncte fixe $PF + PF' = 2a$

$$E: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a>0, b>0$$

Aplicații - curs

1. Determinați Spec(f) pentru $f \in SO(2)$

$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$

Fie $A \in SO(2)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4\cdot(\cos^2\theta - 1) = 4(-\sin^2\theta)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$\text{Spec}(f) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

Interpretarea geometrică $\to$ matricea $A \in SO(2)$ rotește orice vector din $\mathbb{R}^2$ în jurul originii cu unghiul θ în sens trigonometric.

2. Determinați Spec (f) pentru $f \in O(2)$

Fie $A \in O(2)$

Rotația $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A) = 1 \to A \in SO(2)$

Simetria față de origine : $A = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = -1$

$\Rightarrow \exists$ un vector propriu nul v cu $Av = V \to \lambda = 1$

$\Rightarrow \exists$ un vector perpendicular u cu $Au = -V \Rightarrow \lambda = -1$

$$\text{Spec}(f) = \begin{cases} \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}, & f \in SO(2) \\ \{1, -1\}, & \det A = -1 \end{cases}$$

3. Determinați Spec (f) pentru $f \in SO(3)$

Fie $A \in SO(3)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \theta - \lambda & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \text{Spec}(f) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

4. Determinați Spec (f) pentru $f \in O(3)$

Rotație: $\det A = 1 \Rightarrow A \in SO(3)$ (rotirea planului $OxOy$ cu $\measuredangle \theta$)

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1) = 0$$

$$\lambda = \{-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

$$Spec(f) = \begin{cases} \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}, & \det A = 1 \\ \{-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}, & \det A = -1 \end{cases}$$

5. Demonstrați că produsul scalar $\langle , \rangle$ este simetric, biliniar și pozitiv definit (pozitiv definit înseamnă $=0$ dacă și numai dacă inputul e $\langle 0, 0 \rangle$)

a) Simetric

Pentru orice vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x \rangle \Rightarrow \text{este simetric}$$

b) Biliniar

$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ (liniaritate în primul argument)

Analog al doilea argument. $\Rightarrow$ biliniar

c) Pozitiv definit

$$\left.\begin{array}{l}\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \\ \\ \langle x, x\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ pozitiv definit

6. Arătați că $\| \ \|$ este normă.

Fie $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

- Pozitivitate: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- inegalitatea triunghiului: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Deci $\|\cdot\|$ este normă

7. Demonstrează inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Dem.: Fie $f(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$f(t) = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \geq 0$

Este un polinom de gradul 2 care are discriminantul ≤ 0

$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

Deci: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Rezolvare test

Demonstrați că pot exista 3 puncte necoliniare în R^3.

Alegem 3 puncte în R^3:

$$A = (0,0,0)$$
$$B = (1,0,0)$$
$$C = (0,1,0)$$

Punctele A, B, C sunt coliniare dacă vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$ sunt liniar dependenți, adică unul este un multiplu scalar al celuilalt.

$\vec{AB} = B - A = (1,0,0)$
$\vec{AC} = C - A = (0,1,0)$

Nu există un scalar λ a.î. $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$

$\Rightarrow$ vectorii sunt liniar independenți

$\Rightarrow$ punctele nu sunt coliniare