V1
FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Partea II. Probleme de tip grilă

(P1) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de formule

$$\Gamma = \{(v_i \to v_{i+1}) \wedge (v_{i+1} \to v_i) \mid i \geq 1\}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: Γ are exact 2 modele.
☒ B: Γ are exact 4 modele.
☐ C: $Mod(\Gamma \cup \{v_1\}) \subseteq Mod(\Gamma \cup \{v_0\})$.
☐ D: Γ are o infinitate de modele.
☐ E : $\Gamma \cup \{\neg v_1 \to v_2\}$ este nesatisfiabilă.

(P2) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Pentru orice mulţime de formule propoziţionale $\Gamma \subseteq Form$, definim $\overline{\Gamma} = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice $\Gamma \subseteq Form$ nevidă?
☐ A: Pentru orice evaluare e, avem că $e \in Mod(\overline{\Gamma})$ dacă şi numai dacă $e \notin Mod(\Gamma)$.
☐ B: Dacă Γ este nesatisfiabilă, atunci $\overline{\Gamma}$ este satisfiabilă.
☐ C: $Mod(\Gamma) \neq Mod(\overline{\Gamma})$.
☐ D: $\Gamma \cap \overline{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.
☒ E: $\Gamma \cup \overline{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.

(P3) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă propoziţională:

$$\varphi = (v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \to v_4.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

☒ A: $\varphi \sim v_0 \to (v_1 \to (v_2 \to (v_3 \to v_4)))$.
☐ B: $\varphi \sim (((v_0 \to v_1) \to v_2) \to v_3) \to v_4$.
☐ C: $\varphi \vDash v_1 \to v_4$.
☐ D: $\varphi \vDash (v_0 \vee v_1 \vee v_2 \vee v_3) \to v_4$.
☒ E: $\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 \vee v_4$ este FND şi FNC pentru φ.

(P4) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine exact un simbol de funcţie de aritate 2, notat $\dot{\times}$. Considerăm următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \forall y (x = y \dot{\times} y \to \forall z (x = z \dot{\times} z \to y = z)),$$

unde x, y şi z sunt variabile distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: $(\mathbb{N}, \cdot) \vDash \varphi$.
☐ B: $(\mathbb{Q}, \cdot) \vDash \varphi$.
☒ C: $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \forall x \forall y \forall z (x = y \dot{\times} y \to (x = z \dot{\times} z \to y = z))$.
☐ D: $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \forall x \forall y \exists z (x = y \dot{\times} y \to (x = z \dot{\times} z \to y = z))$.
☐ E: $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \forall x (\exists y (x = y \dot{\times} y) \to \forall z (x = z \dot{\times} z \to y = z))$.

(P5) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi conţinând un simbol de relaţie binară P şi un simbol de relaţie unară Q. Fie următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \exists y \forall u \exists z (P(x, y) \to (P(u, u) \to \neg Q(z))),$$

unde x, y, u şi z sunt variable distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \to (\neg \forall x \neg P(x, x) \to \neg \forall z Q(z)).$$

☒ B: $\forall x \forall u (P(x, g(x)) \to (P(u, u) \to \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ, unde g şi h sunt simboluri noi de funcţie de aritate 1, respectiv 2.
☐ C: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \to (\exists x P(x, x) \to \forall z Q(z)).$$

☐ D: $\forall x \forall u (P(x, g(x, u)) \to (P(u, u) \to \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ, unde g şi h sunt simboluri noi de funcţie de aritate 2.
☐ E: φ este atât în formă normală prenex, cât şi în formă normală Skolem.

(P6) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Considerăm următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0, v_1, \neg v_2\}, \{v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_2\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☒ A: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ C: $\{v_1\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ D: $\{v_0\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ E: Rulând algoritmul Davis-Putnam pe mulţimea $\mathcal{S}$, vom obţine $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$, unde N este numărul de paşi după care algoritmul se termină.