FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie LP logica propoziţională, $\mathcal{E}$ o mulţime de evaluări şi

$$\Gamma = \{\psi \in Form \mid e \vDash \psi \text{ pentru orice } e \in \mathcal{E}\}.$$

Presupunem că $\mathcal{E}$ are cel puţin două elemente. Demonstraţi că există o formulă φ cu proprietatea că $\varphi \notin \Gamma$ şi $\neg\varphi \notin \Gamma$.

Demonstraţie: Fie e_1, e_2 două evaluări distincte din $\mathcal{E}$. Atunci există $v \in V$ astfel încât $e_1(v) \neq e_2(v)$. Avem două cazuri:

(i) $e_1(v) = 0$ şi $e_2(v) = 1$, deci $e_2^+(\neg v) = 0$. Deoarece $e \not\vDash v$, avem că $v \notin \Gamma$. Deoarece $e_2 \not\vDash \neg v$, avem că $\neg v \notin \Gamma$.

(ii) $e_1(v) = 1$ şi $e_2(v) = 0$. Similar.

□

(P2) [1 punct] Fie LP logica propoziţională şi φ, $\psi \in Form$. Demonstraţi sintactic că:

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi.$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\psi, \varphi\} \vdash \psi \wedge \varphi$	Propoziţia 1.68, (48)
(2)	$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$	deoarece $\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, \psi\}$
(3)	$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$	Propoziţia 1.68, (49) şi (2)
(4)	$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$	Teorema deducţiei: (3)
(5)	$\vdash \psi \wedge \varphi \to \varphi \wedge \psi$	se demonstrează similar
(6)	$\{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi, \psi \wedge \varphi \to \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	Propoziţia 1.68, (48)
(7)	$\vdash (\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi) \to \big((\psi \wedge \varphi \to \varphi \wedge \psi) \to (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi)\big)$	Teorema deducţiei: (6)
(8)	$\vdash (\psi \wedge \varphi \to \varphi \wedge \psi) \to (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi)$	(MP): (4), (7)
(9)	$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	(MP): (5), (8).

□

(P3) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi Γ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstraţi următoarele:

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$-teorie.

(iii) Fie T o $\mathcal{L}$-teorie astfel încât $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Demonstraţie:

(i) "$\supseteq$" Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \vDash \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$. Aşadar, $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$. Aplicăm Lema 2.34.(ii).
"$\subseteq$" Fie $\mathcal{A} \in Mod(\Gamma)$ şi $\varphi \in Th(\Gamma)$ arbitrar. Avem că $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ şi $\Gamma \vDash \varphi$, deci $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Aşadar, $\mathcal{A} \in Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) Demonstrăm că $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$-teorie. Pentru orice enunţ φ, avem că

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \vDash \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (i))} \\ &\iff \Gamma \vDash \varphi \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$

(iii) Fie T o $\mathcal{L}$-teorie care conţine Γ şi $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ şi $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \vDash \varphi$. Deoarece T este $\mathcal{L}$-teorie, obţinem că $\varphi \in T$. Aşadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

$\square$

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi şi Γ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Notăm cu $\mathcal{M}$ clasa modelelor finite ale lui Γ. Demonstraţi că $\mathcal{M}$ nu este axiomatizabilă.

Demonstraţie: Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{M}$ este axiomatizabilă. Aşadar, există $\Delta \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ astfel încât

(**) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Delta \iff \mathcal{A} \in \mathcal{M}$.

Fie

$$\Sigma := \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Σ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate.
Fie Σ_0 o submulţime finită a lui Σ. Atunci

$$\Sigma_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ astfel încât $|A| \geq m$. Deoarece $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, avem conform (**), că $\mathcal{A} \vDash \Delta$. De asemenea, $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$. Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \vDash \Sigma_0$. Aşadar, Σ_0 este satisfiabilă.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Σ are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Delta$, avem, conform (**), că $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$. În particular, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obţinut o contradicţie. $\square$