1.

a) Do enunciado, $\hat{S_p}(24) = 0,7$, $\hat{S_N}(24) = 0,8$

Supondo riscos proporcionais,

$$\hat{S_N}(24) = [\hat{S_p}(24)]^{\psi} \Rightarrow \psi \log(\hat{S_p}(24)) = \log(\hat{S_N}(24))$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\log(\hat{S_N}(24))}{\log(\hat{S_p}(24))} = \frac{\log 0,8}{\log 0,7}$$

$\psi \approx 0,6256$ ou $\theta_R = \log \psi_R \approx -0,4690$

• Para o cálculo do número de falhas,

$$d = \frac{4}{\theta_R^2}(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2$$

Para $\alpha = 5\%$, $Z_{\alpha/2} \approx 1,96$ e $\alpha = 8\%$, $Z_{\alpha/2} \approx 1,75$.

Para $\beta = 80\%, 85\%, 90\%$ temos $Z_\beta \approx 0,8416; 1,0364; 1,2816$ respectivamente. Para cada combinação, obtemos o valor para d:

α	β	d
5%	80%	$\approx 142,72 \approx 143$
	85%	$\approx 163,27 \approx 164$
	90%	... 192
8%	80%	... 123
	85%	... 142
	90%	168

Número de pacientes

$a=6$, $f=18$

$\hat{S}(18)=0{,}8$, $\hat{S}(21)=0{,}76$, $\hat{S}(24)=0{,}70$

$\rightarrow \underset{P_P}{P(\text{falha}|\text{Padrão})} = 1-\frac{1}{6}\left(\hat{S_p}(18+4\hat{S_p}(21)+\hat{S_p}(24)\right)$

$= 1-\frac{1}{6}(0{,}8+4\times0{,}76+0{,}70$

$\approx 0{,}2433$

$\rightarrow \underset{P_N}{P(\text{falha}|\text{Novo})} = 1-\frac{1}{6}\left(\hat{S_N}(18)+4\hat{S_N}(21)+\hat{S_N}(24)\right)$

$= 1-\frac{1}{6}\left((\hat{S_p}(18))^{\varphi}+4(\hat{S_p}(24))^{\varphi}+(\hat{S_p}(24))^{\varphi}\right)$

$= 1-\frac{1}{6}\left((\hat{S_p}(18))^{0.6256}+4\ldots\right.$

$= 1-\frac{1}{6}\left(0{,}8^{0{,}6256}+4\cdot0{,}76^{0{,}6256}+0{,}7^{0{,}6256}\right)$

$\approx 0{,}1602$

Logo, $P_F = \dfrac{0{,}2433+0{,}1602}{2} \approx 0{,}2018$

Com isso, como $n_T = \dfrac{d}{P_F}$, calculamos

α	β	d	n_T
5%	80%	143	709
	85%	164	813
	90%	192	952
8%	80%	123	610
	85%	142	704
	90%	168	833

1. b) Agora, $f = 21$, então calculamos novamente

$$P(\text{falha}|\text{Padrão}) = 1 - \frac{1}{6}\left(\hat{S}_p(21) + 4\hat{S}_p(24) + \hat{S}_p(27)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{6}(0{,}76 + 4 \cdot 0{,}7 + 0{,}66)$$
$$\approx 0{,}2967$$

$$P(\text{falha}|\text{novo}) = 1 - \frac{1}{6}\left((\hat{S}_p(21))^{\varphi} + 4(\hat{S}_p(24))^{\varphi} + (\hat{S}_p(27))^{\varphi}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{6}\left(0{,}76^{0{,}6256} + 4 \cdot 0{,}7^{0{,}6256} + 0{,}66^{0{,}6256}\right)$$
$$\approx 0{,}1978$$

$$\Rightarrow p_f = \frac{0{,}9267 + 0{,}1978}{2} \approx 0{,}2472$$

Como no item a), obtemos

α	β	d	n_T
5%	80%	143	579
	85%	164	664
	90%	192	777
8%	80%	123	498
	85%	142	575
	90%	168	680

■

1c) Agora, $P_F = 0,6\, P_P + 0,4\, P_N = 0,6 \cdot 0,2433 + 0,4 \cdot 0,1602$

$\Rightarrow P_F \approx 0,2100$

e $d = \dfrac{(Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2}{0,6 \cdot 0,4\, \theta_R^2}$.

Então

α	β	d	n_T
5%	80%	149	710
	85%	171	814
	90%	200	952
8%	80%	128	610
	85%	148	705
	90%	175	833

3.

A função de Sobrevivência da distr. de Gompertz é

$$S(t) = \exp\left\{\frac{\psi}{\alpha}(1-e^{\alpha t})\right\},\ t \geq 0,\ \alpha > 0,\ \psi > 0$$

Calculemos a f.d.p.

$$f(t) = \frac{-dS(t)}{dt} = \cancel{-}\exp\left\{\frac{\psi}{\alpha}(1-e^{\alpha t})\right\}\left(\cancel{-}\frac{\psi}{\cancel{\alpha}}e^{\alpha t}\alpha\right)$$

$$= \psi \exp\left\{\frac{\psi}{\alpha}(1-e^{\alpha t}) + \alpha t\right\}$$

Logo,

$$\alpha(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\psi \exp\left\{\frac{\psi}{\alpha}(1-e^{\alpha t})\right\} e^{\alpha t}}{\exp\left\{\frac{\psi}{\alpha}(1-e^{\alpha t})\right\}} = \psi e^{\alpha t}$$

Em um modelo de regressão com $\psi_x = e^{x^\top \beta}$,

$$\alpha(t|x) = \psi_x e^{\alpha t} = e^{x^\top \beta} e^{\alpha t}$$

~~Seja $x=(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_p)$ e $x_* = (x_1, x_2, \dots, x_k+1, \dots)$~~

A razão das taxas de falhas de dois indivíduos diferentes i e j é

$$\frac{\alpha(t|x_i)}{\alpha(t|x_j)} = \frac{e^{x_i^\top \beta}\cancel{e^{\alpha t}}}{e^{x_j^\top \beta}\cancel{e^{\alpha t}}} = \exp\left\{(x_i - x_j)^\top \beta\right\}$$

que não depende de t. ■