UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CCET - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DMA - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROJETO GRAFOS - ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL

Jaine da Conceição Santos - 201600017409
Matheus Santos Almeida - 201600092332
Raul Oliveira de Andrade - 201500307353
Gabriel Augusto Fontes da Silva - 201500307148

São Cristóvão - SE
Setembro de 2018

1 INTRODUÇÃO

A união da Álgebra Linear com a Teoria dos Grafos pode ser aplicada às mais diversas áreas científicas e tecnológicas para solucionar problemas. Assim, este relatório retrata a aplicação de um assunto da álgebra linear, chamado os quatro subespaços fundamentais, juntamente com Grafos para resolver um problema da área da Economia, o qual é definido na seção 2.

1.1 Grafos

Segundo Thelmo[1] (2014, p.108), "um grafo é uma estrutura matemática que envolve dois conjuntos finitos de objetos: os vértices ou nós e as arestas, que podem ser orientadas ou não". Podemos observar na Figura 1 representações possíveis para um grafo, sendo que no grafo à esquerda os vértices estão representados por bolas pretas e as arestas por linhas sem orientação, e no grafo à direita, os vértices são círculos com números e as arestas são setas, ou seja, possuem orientação.

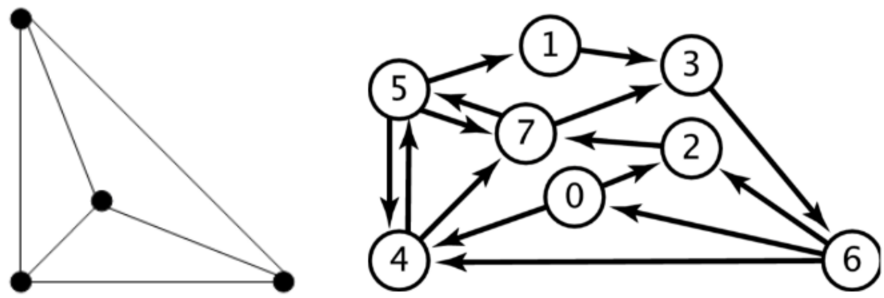

Figura 1: Representações de um grafo não orientado e orientado respectivamente.

Com um grafo é possível construir matrizes, como a matriz de adjacência que guarda informações sobre as adjacências dos vértices, ou a matriz de incidência que guarda informações sobre como os vértices se relacionam com cada aresta, isto é, informações sobre a incidência de uma aresta em um vértice.

Essa estrutura é muito usada em diversos problemas do mundo real. Por exemplo, alocação de tarefas em uma empresa, identificação de domínios de uma dada estrutura de proteína, conexão de linhas de transmissão, roteamento de pacotes em uma rede, análise de sequências de DNA, estudo de risco sistêmico em finanças e *banking* (quando a quebra de um banco pode levar a queda de outro banco), etc.

1.2 Os quatro Subespaços Fundamentais

Seja A uma matriz m x n de elementos reais. Os quatro subespaços (vetoriais) fundamentais associados a esta matriz são[2]:

- **Espaço nulo de A:** o conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogêneo Ax = 0.
- **Espaço das colunas de A:** o conjunto de todas as combinações lineares de colunas da matriz A.
- **Espaço das linhas de A:** o conjunto de todas as combinações lineares de linhas da matriz A.

- **Espaço nulo à esquerda de A:** o conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogêneo yA = 0 ou $A^T y = 0$.

Dessa forma, com esse tópico e Teoria dos Grafos é possível entender a definição e modelagem do problema estudado e resolvido por este trabalho.

2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema estudado aqui é um problema da área da Economia. Ele é descrito da seguinte forma: Há N cidades que comercializam bens entre si, não obrigatoriamente de forma direta. Cada uma delas deseja manter um determinado nível de bens, representado no vetor b = $[b1 \ldots bn]^T$, o que em Economia se chama demanda.

Os bens fluem de uma cidade à outra pelas arestas a1, a2,..., am e nas quantidades x1, x2,..., xm, respectivamente. Os preços, no entanto, variam de cidade para cidade e são representados por p = $[pl \ldots pn]^T$. O problema é determinar, a partir das demandas desejadas, o preço dos bens para que haja equilíbrio, isto é, não faltem e nem sobrem bens.

3 MODELAGEM DO PROBLEMA

Para fins didáticos a modelagem do problema será explicada aqui para uma instância de N = 5, ou seja, para o problema com 5 cidades envolvidas. Assim, a princípio foi utilizado um grafo direcionado para modelar as cinco cidades e as vias que existem entre elas para comercializar os bens. Como podemos ver na Figura 2, os vértices representam as cidades e as arestas as vias.

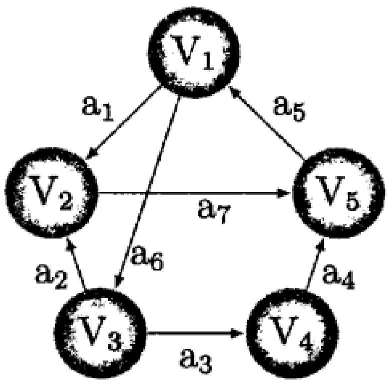

Figura 2: Grafo do comércio de mercadorias entre cinco cidades.

Com este grafo é possível obter a matriz de incidência do mesmo (chamada de A) e construir o sistema linear Ax = b, que relaciona as quantidades desejadas de bens em cada vértice (vetor b) com os fluxos desses bens entre as cidades (vetor x). Mas apenas esse sistema não é suficiente para resolver o problema em questão e, assim, é utilizado três subespaços fundamentais para ajudar: o espaço nulo à esquerda de A, o espaço coluna e o espaço linha de A.

Com o **espaço nulo à esquerda** podemos relacionar $A^T p$ e verificar que essa multiplicação gera a diferença de preços entre as cidades do grafo, como mostrado na Figura 3. Além disso, quando encontramos uma base **v** para esse espaço nulo, pode-se notar que adicionar qualquer múltiplo de **v** à uma solução **p** de $A^T p$ resultará numa solução desta equação, como pode ser visto na Figura 4. Ou seja, somente poderemos encontrar preços relativos para as mercadorias.

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} = \mathbf{d} = A^T\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_2 - p_3 \\ p_4 - p_3 \\ p_5 - p_4 \\ p_1 - p_5 \\ p_3 - p_1 \\ p_5 - p_2 \end{bmatrix}.$$

Figura 3: Relação de diferença de preços dos bens entre as cidades.

$$A^T(\tilde{\mathbf{p}} + \alpha\mathbf{v}) = A^T\tilde{\mathbf{p}} + \alpha A^T\mathbf{v} = A^T\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{0} = \mathbf{d}$$

Figura 4: Demonstração de soma de um múltiplo do vetor v à uma solução p para A^Tp.

É possível observar também que o fluxo de bens entre uma cidade e outra é proporcional à diferença de preços entre elas, afinal, se a mercadoria na cidade V2 for mais cara que na cidade V1, então V1 venderá uma quantidade maior dela para a cidade V2. Em notação matricial, essa hipótese de proporcionalidade se torna x = KA^Tp, onde K é a matriz de proporções. Substituindo em Ax = b, temos AKA^Tp = b, e ao resolver esse sistema encontramos o vetor p dos preços, isto é, encontramos a solução do problema.

Uma barreira que surge é as colunas da matriz A não serem linearmente independentes (L.I). Nesse caso, usamos o espaço linha ou coluna de A para encontrar uma base e construir A com essa base tornando suas linhas ou colunas L.I. Note que ao fazer isso encontramos uma base formada pelas 4 primeiras linhas de A e, assim, é necessário reduzir a dimensão do vetor b (demanda) de 5 para 4, o que nos retornaria apenas os preços dos bens de 4 cidades, no entanto, o vetor p (preços), por retratar apenas preços relativos, permite a possibilidade de escolha de p5. Com isso, o sistema AKA^Tp = b pode ser resolvido e uma solução pode ser encontrada.

4 CONTEÚDO UTILIZADO

No final, o problema estudado foi transformado em um sistema linear. Dessa forma, é possível resolvê-lo utilizando métodos de resolução de sistemas lineares estudados na disciplina Álgebra Linear Computacional. Três deles foram escolhidos, de forma arbitrária, para serem aplicados aqui: a decomposição LU, o método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel.

Na **decomposição LU** o resultado geral é uma matriz A inversível que pode ser escrita como A = P^{-1} L U, sendo P uma matriz de permutações, L uma matriz triangular inferior, e U uma matriz triangular superior[3]. O **método de Jacobi** é um método iterativo que resolve o membro esquerdo da expressão em ordem a x ao usar o método resultante da iteração anterior no membro direito. Analiticamente, isto pode ser escrito como: $\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(k)})$[4]. O **método de Gauss-Seidel** é um método iterativo que possui iteração da forma $x^{(k+1)} = (D+L)^{-1}\left(-Ux^{(k)} + b\right)$, onde $A = D + L + U$; as matrizes D, L, e U representam respectivamente os coeficientes da matriz A: a diagonal, triangular estritamente inferior, e triangular estritamente superior; e k é o contador da iteração[5].

5 EXPERIMENTOS

Para avaliar os métodos escolhidos e resolver o problema, foram executados experimentos para duas instâncias do problema. A primeira, corresponde ao exemplo explicado na seção 3 do relatório, que é representado pelo grafo da Figura 2, com as demandas $[b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^T = [8\ 4\ 9\ 3]^T$. A segunda instância do problema, corresponde a um conjunto de cidades cuja relação é apresentada na Figura 5, com as demandas $[b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7]^T = [10\ 5\ 3\ 6\ 2\ 8\ 9]^T$. Além disso, a matriz de proporções K escolhida foi a identidade.

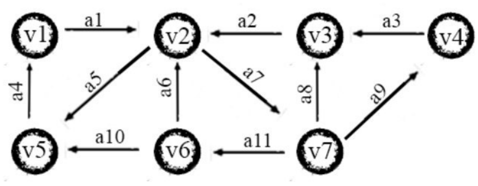

Figura 5: Grafo que representa as relações entre as cidades da segunda instância do problema

As resoluções da primeira e da segunda instância do problema, utilizando método de decomposição LU, obtiveram os resultados $[\ 9\ 8\ 11\ 7\ ]^T$ e $[80.49579832\ 74.15966387\ 60.78991597\ 43.\ 76.83193277\ 73.84033613\ 62.21008403]^T$, respectivamente. Para executar os métodos iterativos, foi definida a solução inicial como o vetor nulo, o erro como a norma no infinito do vetor correspondente à diferença entre a solução atual e a solução anterior, o epsilon utilizado foi 10^{-6} e quantidade máxima de iterações foi definida como 10000.

A solução obtida pelo Método iterativo de Jacobi, para a primeira instância do problema, foi $[8.99997668\ 7.99997668\ 10.99997069\ 6.99998052]^T$, após 45 iterações; já a solução obtida pelo Método de Gauss-Seidel, para a mesma instância, foi $[\ 8.99999018\ 7.99999174\ 10.99999148\ 6.99999574]^T$, após 25 iterações. Para a segunda instância, o método de Jacobi obteve a solução $[80.49543406\ 74.15931615\ 60.78963568\ 42.99980841\ 76.83157142\ 73.839993\ 62.20980491]^T$, com 454 iterações, enquanto que o método de Gauss-Seidel obteve a solução $[80.49562565\ 74.1595024\ 60.78978918\ 42.99991477\ 76.83176707\ 73.84018175\ 62.2099619]^T$, com 242 iterações. Os erros das soluções obtidas pelos métodos, em cada instância do problema, podem ser observados na Figura 5.

Como pode ser visto, os metodos iterativos obtiveram soluções muito próximas à solução obtida pela decomposição LU. Também é importante destacar, a maior velocidade de convergência do método de Gauss-Seidel com relação ao método de Jacobi.

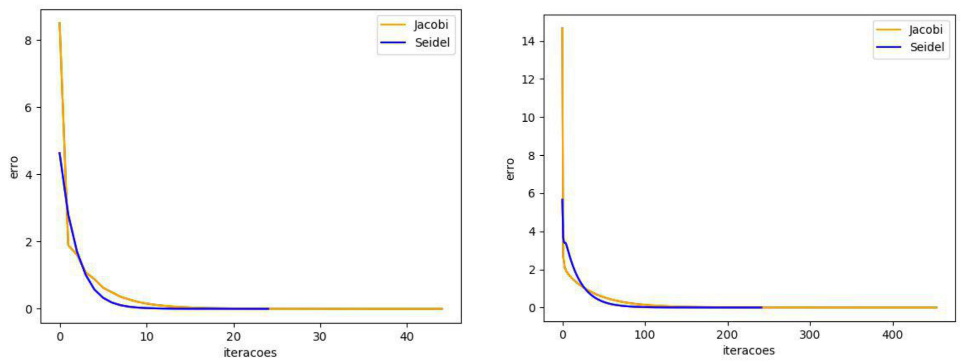

Figura 6: Erros dos métodos em cada iteração na primeira instância (à esquerda) e na segunda instância (à direita).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]ARAUJO, T. Álgebra Linear - Teoria e Aplicações. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[2] SOARES, J. Os Quatro Subespaços Fundamentais. Disponível em: <http://www.mat.-uc.pt/ jsoares/teaching/al/al0910/quatro>. Acesso em: 21 Set. 2018.

[3] IMPA. Decomposição LU. Disponível em: <http://w3.impa.br/ zubelli/tutorial/node11-.html>. Acesso em: 21 Set. 2018.

[4] WIKIPEDIA. Método de Jacobi. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/M%-C3%A9todo_de_Jacobi>. Acesso em: 21 Set. 2018.

[5] WIKIPEDIA. Método de Gauss-Seidel. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/-M%C3%A9todo_de_Gauss-Seidel>. Acesso em: 21 Set. 2018.