Aplicação: Grafos

Álgebra Linear Computacional

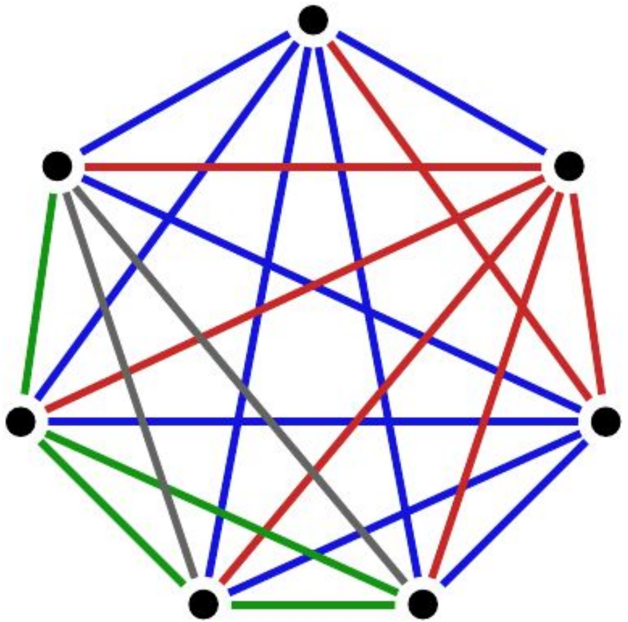
Grupo: Jaine Conceição, Matheus Santos Almeida, Raul Andrade e Gabriel Augusto

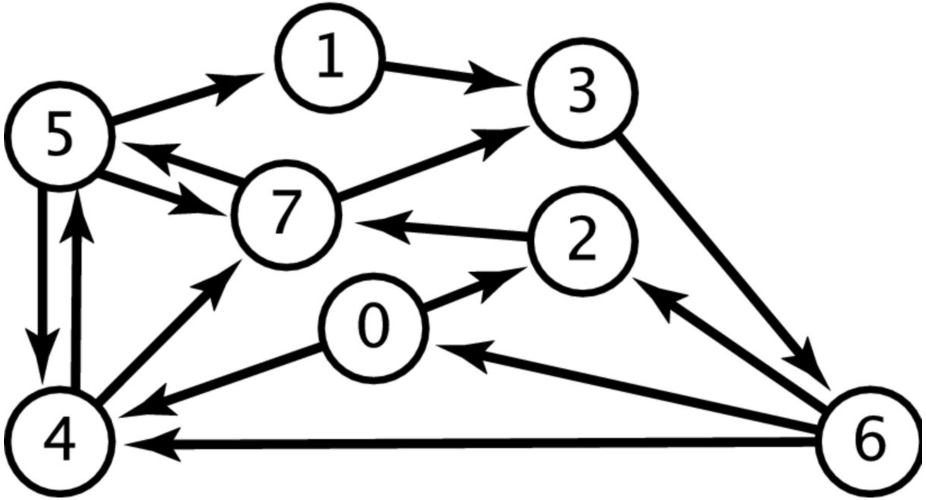
Roteiro

- Grafos
- Os quatro subespaços fundamentais
- Definição do problema
- Modelagem do problema
- Conteúdo utilizado
- Experimentos

Grafos

- Um grafo é uma estrutura matemática que envolve dois conjuntos finitos de objetos: os vértices ou nós e as arestas, que podem ser orientadas ou não.





Os quatros Subespaços Fundamentais

- Seja A uma matriz $m \times n$ de elementos reais. Os quatro subespaços (vetoriais) fundamentais associados a esta matriz são:
- **Espaço nulo de A;**
- **Espaço das colunas de A;**
- **Espaço das linhas de A;**
- **Espaço nulo à esquerda de A.**

Espaço nulo de A

- O conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogêneo **Ax** = **0**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$x2 = 0$

$x1 = 0$

Espaço Nulo(A) = {0}

Espaço das colunas de A

- O conjunto de todas as combinações lineares de colunas da matriz **A**.

$$\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}}_{\mathbf{A}} \longrightarrow c1\underbrace{\begin{vmatrix}1\\ 0\\ 2\end{vmatrix}}_{\mathbf{v1}} + c2\underbrace{\begin{vmatrix}0\\ 1\\ 0\end{vmatrix}}_{\mathbf{v2}} = \begin{vmatrix}c1\\ c2\\ 2c1\end{vmatrix}$$

Espaço das linhas de A

- O conjunto de todas as combinações lineares de linhas da matriz **A**.

$$\underset{\textbf{A}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}} \longrightarrow c1\underset{\textbf{v1}}{\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}} + c2\underset{\textbf{v2}}{\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}} + c3\underset{\textbf{v3}}{\begin{vmatrix}2\\ 0\end{vmatrix}} = \begin{vmatrix}c1+c3\\ c2\end{vmatrix}$$

Espaço nulo à esquerda de A

- O conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogêneo $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

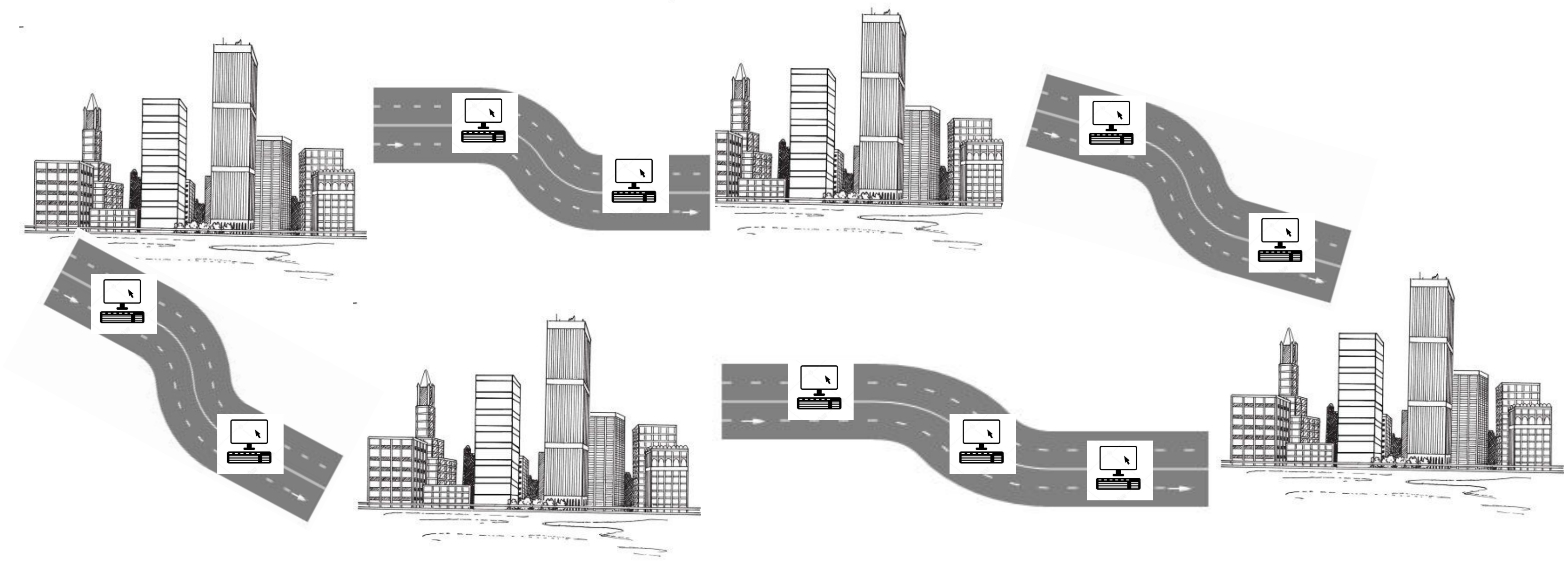
$$\underbrace{\begin{vmatrix} y1 \\ y2 \end{vmatrix}}_{\mathbf{y}} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nosso problema

- Os quatros subespaços fundamentais;
- Teoria do Grafos;
- Economia;
- Sistemas Lineares.

Definição do problema

- Há N cidades que comercializam bens entre si (mas não obrigatoriamente de forma direta).
- Os bens fluem de uma cidade à outra através de M estradas.

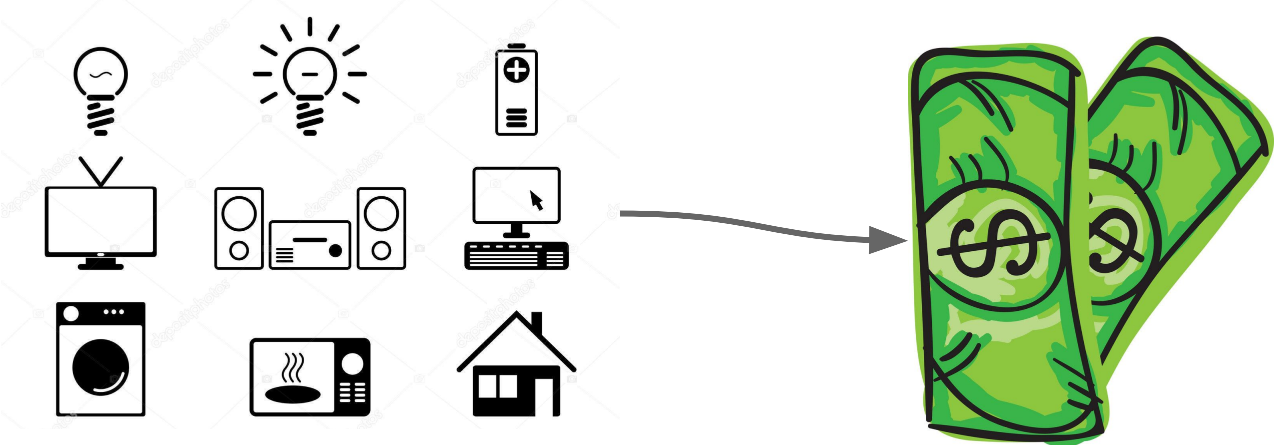


Definição do problema

- Cada cidade deseja manter um determinado nível de bens, representado pelo vetor **b = [b1,b2,...,bn]**^{T}.
- Os bens são mandados nas quantidades **x1, x2,...,xm** respectivamente.
- Os preços variam de cidade para cidade e são representados por **p = [p1,p2,...,pn]**^{T}.

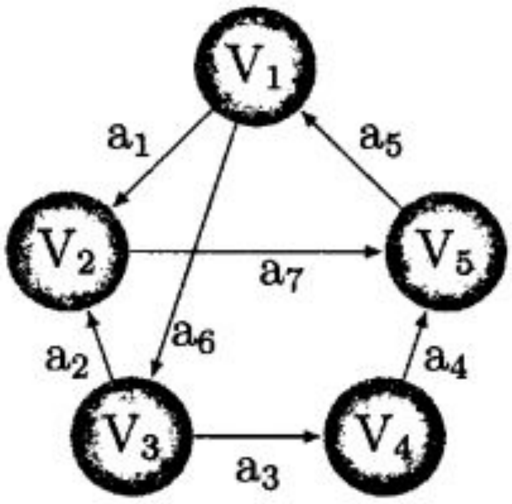
Definição do problema

O problema é determinar, a partir das demandas desejadas, o **preço** dos bens.



Modelagem do problema

*Para uma instância com 5 cidades:



Grafo do comércio de mercadorias entre cinco cidades.

Modelagem do problema

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

A partir do grafo, podemos construir o sistema que relaciona as quantidades desejadas de bens em cada vértice com os fluxos desses bens entre as cidades.

Modelagem do problema

- Vejamos agora como os **subespaços fundamentais** de A podem nos ajudar a resolver o problema.

- Três subespaços fundamentais são utilizados para resolver o problema.

- Espaço nulo à esquerda de A, Espaço coluna de A e Espaço linha de A.

Modelagem do problema

- **Espaço nulo à esquerda de A (1ª observação):**
- Note que as colunas de A somam 0.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelagem do problema

- **Espaço nulo à esquerda de A (2ª observação):**
- Composto pelo vetores y tais que $A^Ty = 0$.
- Mas o que A^Ty nos diz sobre o problema?

$$At = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ y5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y2 - y1 \\ y2 - y3 \\ y4 - y3 \\ y5 - y4 \\ y1 - y5 \\ y3 - y1 \\ y5 - y2 \end{bmatrix}$$

Modelagem do problema

- **Espaço nulo à esquerda de A**
- Porém podemos substituir Y por P (vetor dos preços):

$$At = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_2 - p_3 \\ p_4 - p_3 \\ p_5 - p_4 \\ p_1 - p_5 \\ p_3 - p_1 \\ p_5 - p_2 \end{bmatrix}.$$

Modelagem do problema

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} = \mathbf{d} = A^T\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_2 - p_3 \\ p_4 - p_3 \\ p_5 - p_4 \\ p_1 - p_5 \\ p_3 - p_1 \\ p_5 - p_2 \end{bmatrix}.$$

Modelagem do problema

- **Espaço nulo à esquerda de A (3º observação):**
- Seja **v** uma base para o espaço nulo à esquerda de A, se adicionarmos qualquer múltiplo de **v** a uma solução de A^Tp, teremos uma solução para essa equação:

$$A^T(\tilde{\mathbf{p}} + \alpha\mathbf{v}) = A^T\tilde{\mathbf{p}} + \alpha A^T\mathbf{v} = A^T\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{0} = \mathbf{d}\,;$$

- Interpretando-se economicamente, somente poderemos encontrar preços relativos para as mercadorias.

Modelagem do problema

- **Espaço nulo à esquerda de A (4ª observação):**
- O fluxo de bens entre uma cidade e outra é proporcional à diferença de preços entre elas.

$$\mathbf{x} = K\mathbf{d},$$

sendo K uma matriz diagonal 7×7 com as constantes de proporcionalidade.

Assim,

$$\mathbf{x} = K\mathbf{d} = KA^T\mathbf{p}.$$

Modelagem do problema

- Por substituição:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b}\,,$$

Ax = b

$$AKA^T\mathbf{p} = \mathbf{b}$$

Modelagem do problema

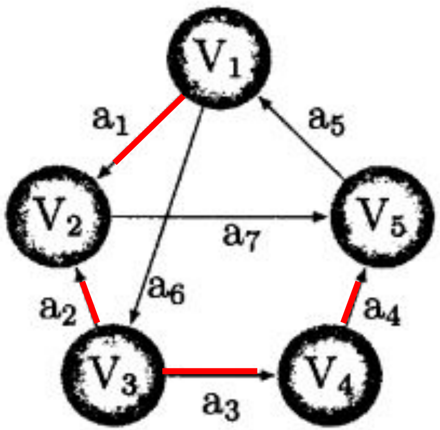
Problema: se as colunas da matriz A não forem L.I., então podemos obter infinitas soluções para os preços.

Solução: Encontrar uma base para o espaço coluna de A ou para o espaço linha de A^T.

Modelagem do problema

- **Espaço coluna de A:**
- Uma base para o espaço-coluna de A pode ser formada, neste exemplo, pelas quatro primeiras colunas de A.

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Modelagem do problema

- **Espaço linha de A:**
- Uma base para o espaço coluna de A^T pode ser formada pelas quatro primeiras linhas de A.
- o espaço—linha de A é o espaço—coluna de AT;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelagem do problema

- **Problema:**

$$[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]^T = [8 \quad 4 \quad 9 \quad 3]^T$$

- Observando que, uma vez escolhidos b1, b2, b3 e b4, não estamos livres para escolher b5 e que os preços são relativos, então podemos escolher **p5 = 0**.

Modelagem do problema

- Se construirmos uma matriz A com as primeiras quatro linhas de A, teremos uma matriz com posto completo 4. Devemos, portanto, resolver o sistema

$$\hat{A} I \hat{A}^T \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{b}},$$

sendo $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ vetores de dimensão 4. A solução é

$$\hat{\mathbf{p}}^T = [9 \quad 8 \quad 11 \quad 7]^T,$$

ou seja,

$$\mathbf{p}^T = [9 \quad 8 \quad 11 \quad 7 \quad 0]^T.$$

Modelagem do problema

- No final, o problema é modelado como o seguinte sistema linear:

$$AKA^T\mathbf{p} = \mathbf{b}$$

Conteúdo utilizado para resolver o problema

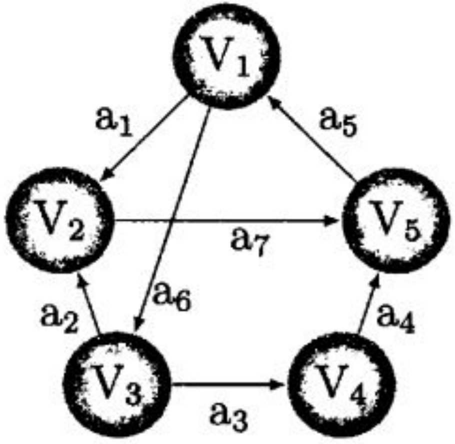
- Decomposição LU: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

- Método de Jacobi: $\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(k)})$

- Método de Gauss-Seidel: $x^{(k+1)} = (D + L)^{-1} \left(-Ux^{(k)} + b\right),$

Experimentos - Instância 1

Grafo:



Vetor demanda: $[8\ 4\ 9\ 3]^T$

Experimentos - Instância 1

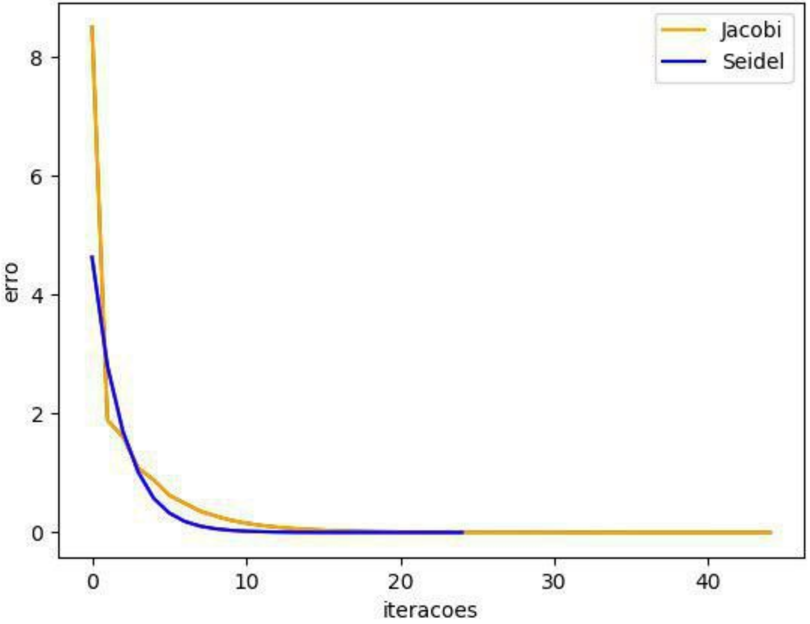
Solução LU: $[\ 9\ \ 8\ \ 11\ \ 7\ ]^T$

Solução Jacobi: $[8.99997668\ \ 7.99997668\ \ 10.99997069\ \ 6.99998052]^T$, em 45 iterações

Solução Gauss-Seidel: $[\ 8.99999018\ \ 7.99999174\ \ 10.99999148\ \ 6.99999574]^T$, em 25 iterações

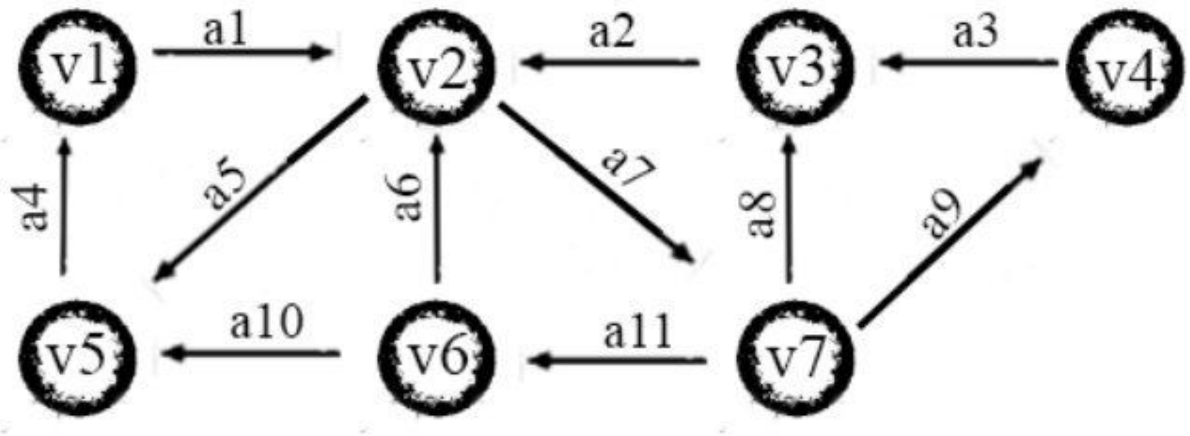
Experimentos - Instância 1

Erro em cada iteração:



Experimentos - Instância 2

Grafo:



Vetor demanda: $[10\ 5\ 3\ 6\ 2\ 8\ 9]^T$

Experimentos - Instância 2

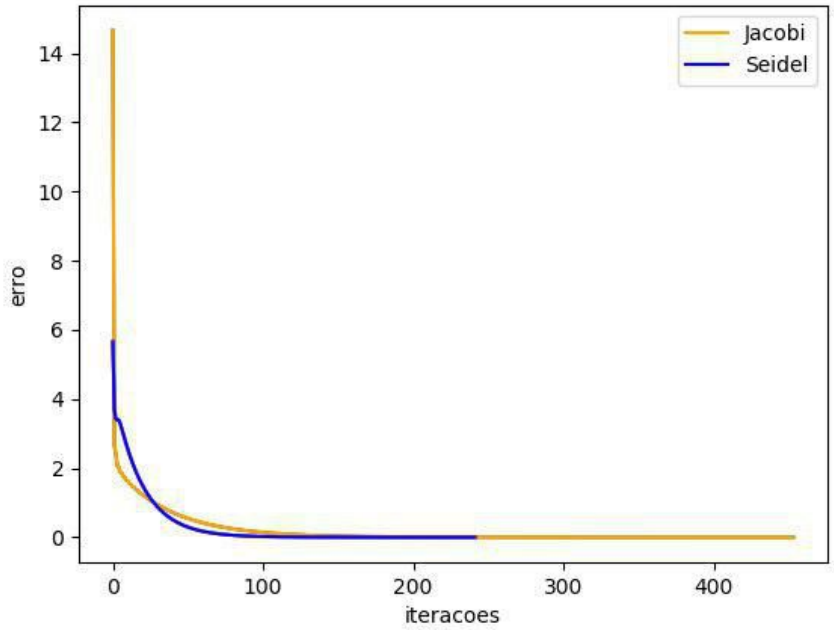
Solução LU: [80.49579832 74.15966387 60.78991597 43. 76.83193277 73.84033613 62.21008403]^T

Solução Jacobi: [80.49543406 74.15931615 60.78963568 42.99980841 76.83157142 73.839993 62.20980491]^T, em 454 iterações

Solução Gauss-Seidel: [80.49562565 74.1595024 60.78978918 42.99991477 76.83176707 73.84018175 62.2099619]^T , em 242 iterações

Experimentos - Instância 2

Erro em cada iteração:



Obrigado!