

CST Análise e Desenvolvimento de Sistemas

AOC786201 - Fundamentos de Arquitetura e Organização de Computadores

Aritmética Binária

Soma aritmética de decimais

- Para realizar a operação soma, fazemos cada "casa" por vez, primeiro das unidades, depois dezenas, depois centenas, ...
- Como no sistema decimal temos 10 símbolos (de 0 a 9), se ao somar uma casa o valor for maior do que 9, então dizemos que "vai 1" para a casa da esquerda, deixando na casa em que está ocorrendo a operação apenas o algarismo menos significativo

Soma aritmética de decimais

- Exemplo 1:

$$\begin{array}{r} & \overset{1}{\boxed{4}} \boxed{8} \\ + & \boxed{9} \boxed{5} \\ \hline & 3 \end{array}$$

A hand-drawn diagram showing the addition of 48 and 95. A red bracket groups the tens column (4 and 9), with a red '1' written above it, indicating a carry-over. A red arrow points from the '1' to the top '4'. A blue arrow points from the tens column to the result '143'.

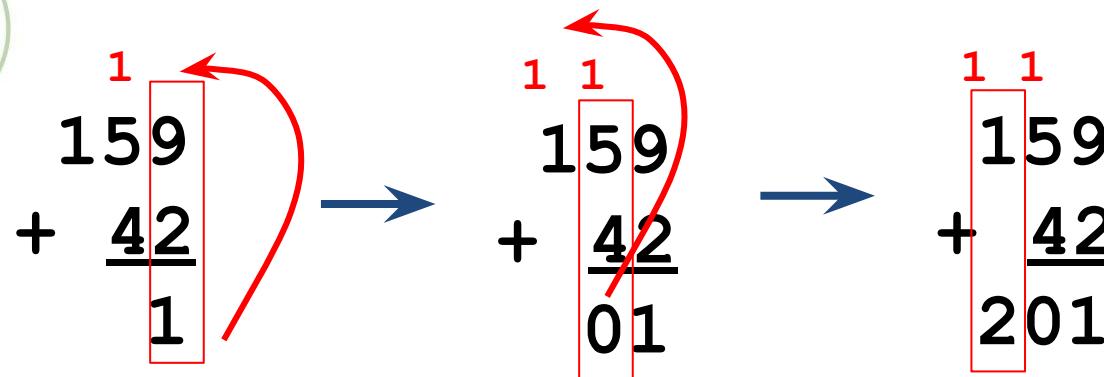
Resultado final:
 $48 + 95 = 143$

$$\begin{array}{r} & \overset{1}{\boxed{4}} \boxed{8} \\ + & \boxed{9} \boxed{5} \\ \hline & 143 \end{array}$$

A clean version of the addition problem, showing the numbers 48 and 95 aligned under a plus sign, with the sum 143 written below them. The tens column is highlighted with a red rectangle, and the ones column is also highlighted with a red rectangle.

Soma aritmética de decimais

- Exemplo 2:



The diagram illustrates the addition of 159 and 42 using vertical columns. Red arrows and boxes highlight the carry-over process.

$$\begin{array}{r} 159 \\ + 42 \\ \hline 1 \end{array}$$

Step 1: The first column (ones place) shows 9 + 2 = 11. A red arrow points from the tens digit of 159 to the top of the 11, and another red arrow points from the 11 down to the ones column. The result is 1 below the line.

$$\begin{array}{r} 1\ 159 \\ + 42 \\ \hline 01 \end{array}$$

Step 2: The second column (tens place) shows 5 + 4 + 1 (carry-over) = 10. A red arrow points from the hundreds digit of 159 to the top of the 10, and another red arrow points from the 10 down to the tens column. The result is 0 below the line.

$$\begin{array}{r} 1\ 159 \\ + 42 \\ \hline 201 \end{array}$$

Step 3: The third column (hundreds place) shows 1 + 0 = 1. A red arrow points from the hundreds digit of 159 to the top of the 1, and another red arrow points from the 1 down to the hundreds column. The result is 1 above the line.

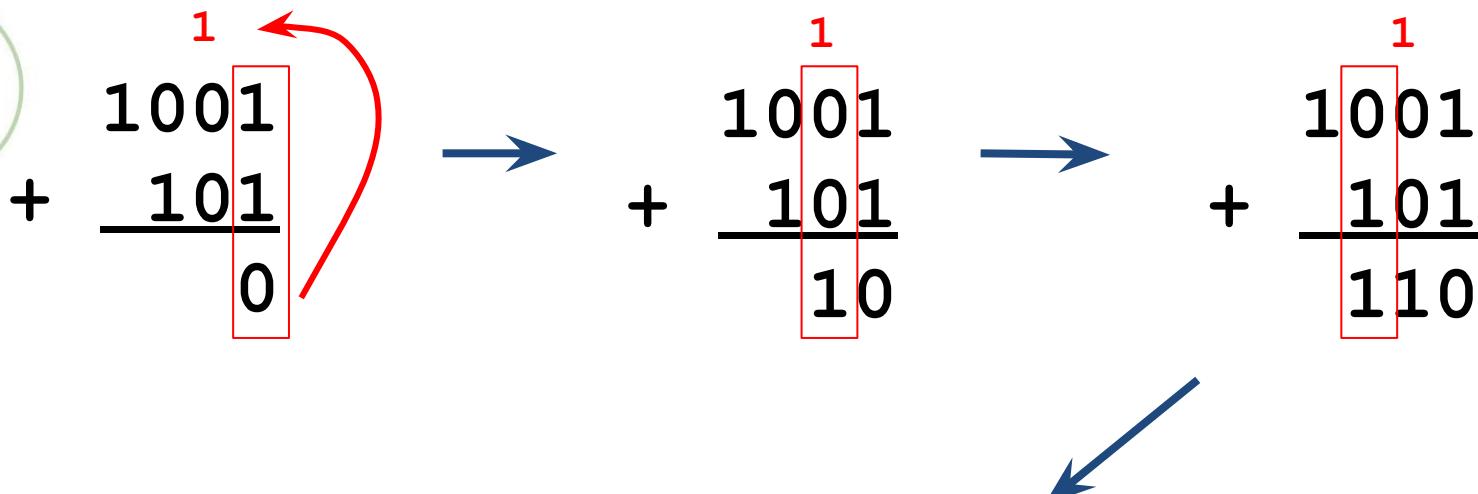
Resultado final:
 $159 + 42 = 201$

Soma aritmética de binários

- Segue a mesma lógica dos decimais, porém temos apenas 2 símbolos (0 e 1)
- Ou seja, se ao somar uma casa o valor for maior do que 1, então dizemos que "vai 1" para a casa da esquerda

Soma aritmética de binários

- Exemplo 1:

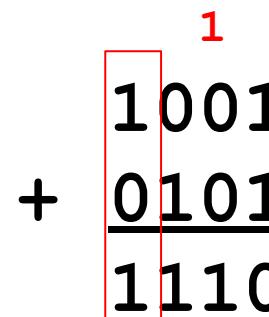


The diagram shows the addition of two binary numbers, 1001 and 101, using successive additions. It consists of four horizontal rows of digits, each preceded by a plus sign (+) and followed by a red bracket underlining the digits.

- Row 1:** $+ \underline{1001}$ (The first row of digits, with the thousands place digit 1 highlighted in red.)
- Row 2:** $+ \underline{101}$ (The second row of digits, with the hundreds place digit 1 highlighted in red.)
- Row 3:** $+ \underline{10}$ (The result of the first addition: 1001 + 101 = 1010. The tens place digit 1 is highlighted in red.)
- Row 4:** $+ \underline{110}$ (The result of the second addition: 1010 + 101 = 1110. The ones place digit 1 is highlighted in red.)

A red curved arrow points from the thousands place of the first row to the hundreds place of the second row, indicating the propagation of the carry. A blue arrow points from the result of the first addition to the result of the second addition, indicating the final sum.

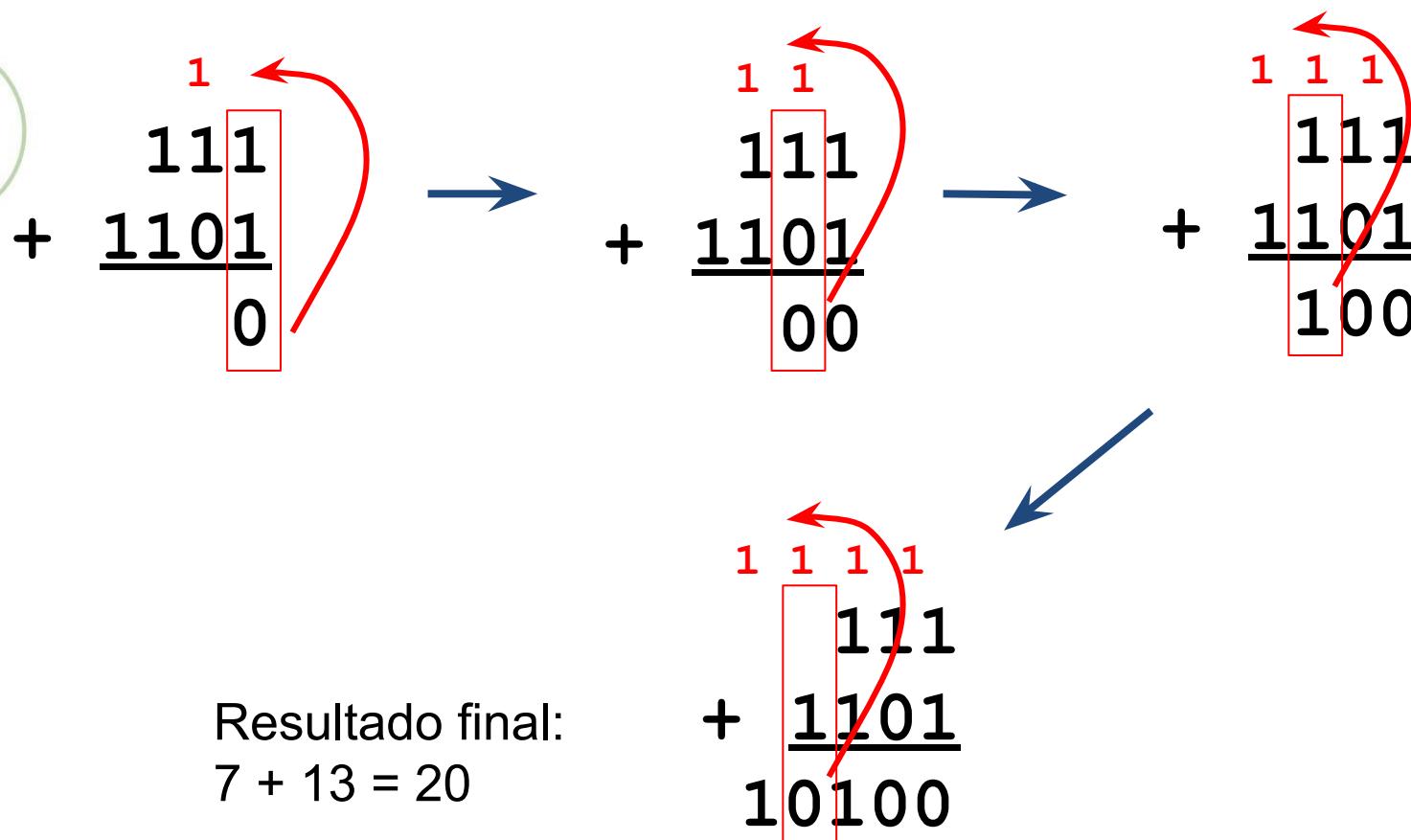
Resultado final:
 $9 + 5 = 14$



The final result of the binary addition is shown in a separate row:
 $+ \underline{0101}$
 $\underline{\underline{1110}}$

Soma aritmética de binários

- Exemplo 2:



The diagram shows the step-by-step addition of two binary numbers, 111 and 1101, to produce the sum 10100.

The process is visualized as follows:

- Step 1:** $111 + 1101$. The first column from the right has a carry of 1 (indicated by a red '1' above the top box) and a result of 0 (indicated by a red '0' below the bottom box). A red arrow points from the top '1' to the top box.
- Step 2:** $+ 1101$. The second column from the right has a carry of 1 (red '1' above the top box) and a result of 0 (red '0' below the bottom box). A red arrow points from the top '1' to the top box.
- Step 3:** $+ 1101$. The third column from the right has a carry of 1 (red '1' above the top box) and a result of 0 (red '0' below the bottom box). A red arrow points from the top '1' to the top box.
- Step 4:** $+ 1101$. The fourth column from the right has a carry of 1 (red '1' above the top box) and a result of 0 (red '0' below the bottom box). A red arrow points from the top '1' to the top box.
- Final Result:** The sum is 10100. A blue arrow points from the final sum to the result 10100 .

Resultado final:
 $7 + 13 = 20$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1101 \\ \hline 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1101 \\ \hline 00 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1101 \\ \hline 100 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1101 \\ \hline 10100 \end{array}$$

Soma aritmética de binários

- Mais detalhadamente, vamos ver apenas a operação que fazemos com o bit da unidade, utilizando o exemplo dado ($7 + 13 = 20$):

$$\begin{array}{r} & \boxed{1} \\ & 111 \\ + & \underline{1101} \\ & 0 \end{array}$$

A soma $111 + 1101$ resulta em 0. Um redemarcação é feita no topo da coluna de unidades, com uma seta apontando para o resultado 0.

- Observe que em binário “1” + “1” = “10”, ou seja, “0” e “vai 1”
- Se fosse $6 + 13 = 19$, teríamos “0” + “1” = “1” (não tem o “vai 1”)

$$\begin{array}{r} 110 \\ + \underline{1101} \\ 1 \end{array}$$

A soma $110 + 1101$ resulta em 1. A coluna de unidades é encerrada em 1, sem uma redemarcação.

Soma aritmética de binários

- Ou seja, analisando apenas a soma da casa das unidades temos as seguintes possibilidades e resultados esperados (estamos chamando o “vai 1” de Ts):

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

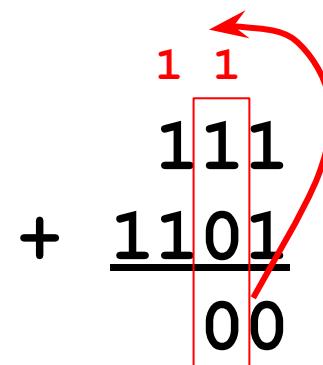
$$1 + 1 = 0 \text{ e } Ts = 1$$

Soma aritmética de binários

- O método para os demais algarismos precisa levar em consideração que a soma anterior pode ter gerado um “vai 1”
- Como o meio somador não considera esta possibilidade, precisaremos de um novo circuito

Soma aritmética de binários

- Mais detalhadamente, vamos analisar como fazemos a operação dos demais bits (além da casa da unidade), utilizando o exemplo dado ($7 + 13 = 20$):


$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1101 \\ \hline 1000 \end{array}$$

- Observe que teve um “vai 1” da casa anterior, temos “1” + “1” + “0” = “10”, ou seja, “0” e “vai 1” (novamente)

Soma aritmética de binários

- Ou seja, para as casas exceto a unidade podemos ter mais possibilidades, pois além do algarismo da primeira parcela, o algarismo da segunda parcela e as saídas S e Ts, temos ainda uma terceira entrada que foi o “vai 1” da operação anterior que vamos chamar de Te:

$$A + B + T_e = S$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 1 = 1$$

$$0 + 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 + 1 = 0 \quad \text{e } T_s = 1$$

$$1 + 0 + 0 = 1$$

$$1 + 0 + 1 = 0 \quad \text{e } T_s = 1$$

$$1 + 1 + 0 = 0 \quad \text{e } T_s = 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \quad \text{e } T_s = 1$$

Circuitos Aritméticos: Meio somador

- Vamos chamar o resultado da casa da unidade de “S” (saída) e o “vai 1” de “Ts” (transporte de saída)
- Então, temos:

$$A + B = S$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ e } Ts = 1$$

A	B	Ts	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Circuitos Aritméticos: Meio somador

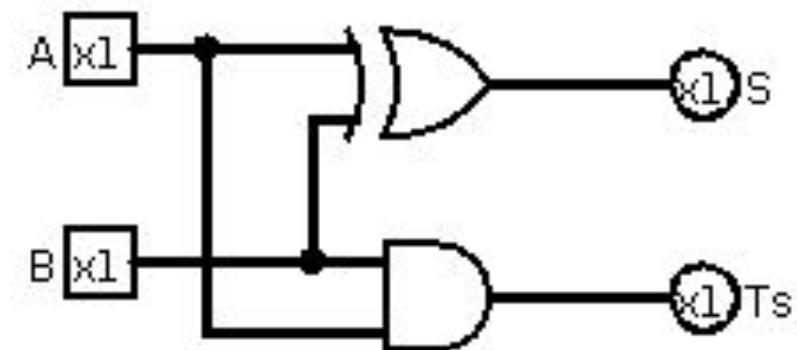
- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

$$S = A \oplus B$$

$$Ts = AB$$

- A saída Ts também é conhecida como Carry out

A	B	Ts	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



Circuitos Aritméticos: Somador completo

- Com a entrada T_e (transporte de entrada - Carry in) temos esta tabela verdade:

$$\circ \quad A + B + T_e = S$$

$$\circ \quad 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\circ \quad 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\circ \quad 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\circ \quad 0 + 1 + 1 = 0 \text{ e } T_s = 1$$

$$\circ \quad 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\circ \quad 1 + 0 + 1 = 0 \text{ e } T_s = 1$$

$$\circ \quad 1 + 1 + 0 = 0 \text{ e } T_s = 1$$

$$\circ \quad 1 + 1 + 1 = 1 \text{ e } T_s = 1$$

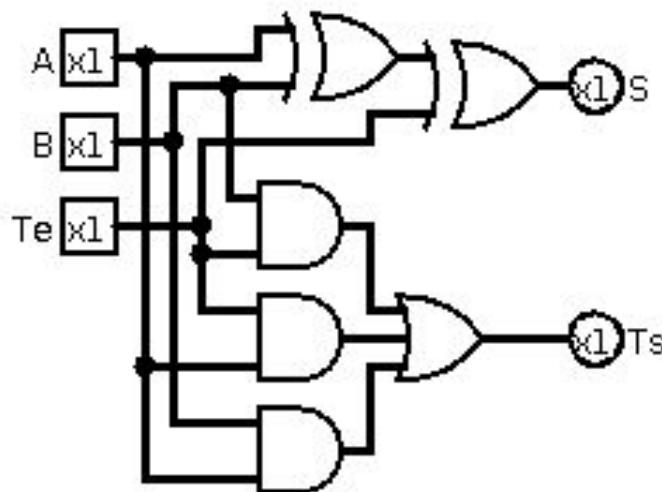
A	B	T_e	T_s	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Circuitos Aritméticos: Somador completo

- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

$$S = A \oplus B \oplus T_E$$

$$T_S = BT_E + AT_E + AB$$



A	B	T _E	T _s	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Subtração aritmética de decimais

- Para realizar a operação subtração, fazemos cada "casa" por vez, primeiro das unidades, depois dezenas, depois centenas, ...
- Ao subtrair uma casa, se o valor da casa do minuendo é maior do que da casa do subtraendo, então dizemos que "pega 1" (emprestado) da casa da esquerda

$$\begin{array}{r} & \overset{8}{\cancel{}} & \overset{1}{\cancel{}} \\ - & \cancel{9} & 5 \\ & 4 & 8 \\ \hline & & 7 \end{array}$$

Resultado final:
 $95 - 48 = 47$

$$\begin{array}{r} & \overset{8}{\cancel{}} & \overset{1}{\cancel{}} \\ - & \cancel{9} & 5 \\ & 4 & 8 \\ \hline & & 47 \end{array}$$

Subtração aritmética de binários

- Segue a mesma lógica dos decimais, porém temos apenas 2 símbolos (0 e 1), ou seja, "pega 1" para a casa da esquerda se o valor da casa do minuendo for menor do que do subtraendo

$$\begin{array}{r} 1001 \\ - 101 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1001 \\ - 101 \\ \hline 00 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1001 \\ - 101 \\ \hline 100 \end{array}$$



Resultado final:
 $9 - 5 = 4$

$$\begin{array}{r} 01 \\ 1001 \\ - 0101 \\ \hline 0100 \end{array}$$

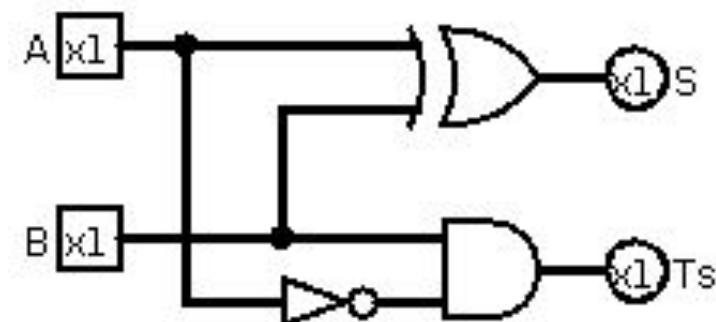
Circuitos Aritméticos: Meio subtrator

- Considerando um subtrator de um bit, sabemos que:
 - $0 - 0 = 0$
 - $0 - 1 = 1$ e transporta 1
 - $1 - 0 = 1$
 - $1 - 1 = 0$
- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

$$S = A \oplus B$$

$$Ts = \overline{A}B$$

A	B	S	Ts
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0



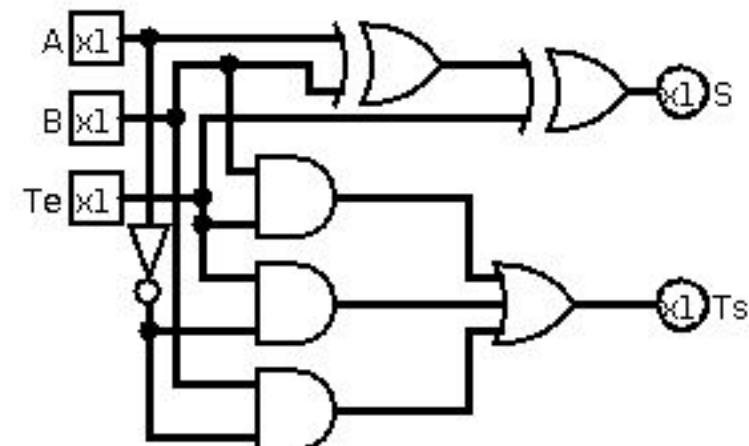
Circuitos Aritméticos: Subtrator completo

- Novamente, o meio subtrator não considera o bit de transporte de outra operação
- É necessário considerar se emprestou um para que esse bit seja subtraído
- Para entender a lógica, vamos calcular $12 - 3 = 9$, em binário

$$\begin{array}{r}
 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 - & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Ts=0 Ts=0 Ts=1 Ts=1
 Col. 4 Col. 3 Col. 2 Col. 1

A	B	T_E	S	T_S
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



Regras adicionais para Soma e Subtração de decimais

- Na subtração de numerais positivos, quando o minuendo é menor que o subtraendo é necessário trocar estes numerais de posição e determinar que o resultado será negativo.
- Exemplo: $45 - 98$. O 45 é menor que 98, então faremos $98 - 45$.

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 98 \\ \hline ? \end{array} \quad \begin{array}{r} 98 \\ - 45 \\ \hline - ? \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 98 \\ - 45 \\ \hline 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 98 \\ - 45 \\ \hline - 53 \end{array}$$

Resultado final:
 $98 - 45 = - 53$

Regras adicionais para Soma e Subtração de decimais

- Regra dos sinais (considerando primeira parcela de maior magnitude que a segunda parcela):

Sinais iguais soma-se e colocamos o mesmo sinal

○ $+ + = +$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \\ 59 \end{array}$$

○ $- - = -$

$$\begin{array}{r} -59 \\ + \underline{-42} \\ -101 \end{array}$$

Sinais diferentes subtrai-se e coloca o sinal da maior magnitude

○ $+ - = +$

$$\begin{array}{r} 43 \\ - \\ 1 \end{array}$$

○ $- + = -$

$$\begin{array}{r} -42 \\ + \underline{16} \\ -26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ - \\ 16 \\ + \underline{42} \\ 26 \end{array}$$

Representação de sinais em sistemas computacionais

- Em sistemas computacionais, como temos apenas “0”s e “1”s precisamos representar os sinais também desta forma.
- Para isso utilizamos notações como sinal-magnitude, complemento de 1 e complemento de 2. Em geral, este último.
- Em operações com numerais em complemento de 2 não precisamos nos preocupar com a ordem das parcelas

Representação de sinais em sistemas computacionais

- Exemplo: $3 + (-5) = -2$
 - $3 = 11$ binário
 - $-5 = 1011$ binário (complemento de 2 de 4 bits)

$$\begin{array}{r} 11 \\ + \underline{1011} \\ 1110 \end{array}$$

- Resultado: 1110 binário (complemento de 2 de 4 bits) = -2

Representação de sinais em sistemas computacionais

- Exemplo: $-3 + 5 = 2$
 - $-3 = 1101$ binário (complemento de 2 de 4 bits)
 - $5 = 101$ binário

$$\begin{array}{r} 1101 \\ + \underline{0101} \\ 10010 \end{array}$$

- Resultado: 0010 binário = 2
- O bit de transbordo (overflow) é descartado

Representação de sinais em sistemas computacionais

- Cuidado para não extrapolar o limite da representação!
- Exemplo: $5 + 7 = 12$
 - $5 = 101$ binário
 - $7 = 111$ binário

$$\begin{array}{r} 0101 \\ + \underline{0111} \\ 1100 \end{array}$$

- Resultado: 1100 binário que em complemento de 2 de 4 bits não é 12, mas sim -4

Representação de sinais em sistemas computacionais

- Cuidado para não extrapolar o limite da representação!
- Exemplo 2: $-5 + (-7) = -12$
 - 5 = 1011 binário (complemento de 2 de 4 bits)
 - 7 = 1001 binário (complemento de 2 de 4 bits)

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + \underline{1001} \\ 10100 \end{array}$$

- Resultado: 0100 binário que representa 4 e não -12