INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

CST Análise e Desenvolvimento de Sistemas
AOC786201 - Fundamentos de Arquitetura e Organização de Computadores

Sistemas de Numeração

Os sistemas de numeração

- São conjuntos de numerais que permitem representar grandezas de forma coerente
- Os numerais são representados na forma de símbolos (algarismos ou dígitos)
- Normalmente, a base do sistema determina a quantidade de símbolos que são necessários para representar as grandezas

O sistema decimal

- É o sistema mais comum em nosso cotidiano
- Desenvolveu-se naturalmente pelo fato de termos 10 dedos, representando 10 dígitos (‘dedos’ em latim)
- É um sistema de valor posicional, ou seja, o valor de cada dígito depende da sua posição no número
- Seus dígitos (algarismos ou símbolos) são {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A notação posicional

- Na notação posicional o valor do dígito depende de sua posição relativa no número
- Considere os números decimais a seguir:
    - 8 é equivalente a 008, porém bem diferente de 800
    - 800 e 800,000001 estão bem próximos em termos de grandezas apesar das diferentes quantidades de dígitos
    - 999,999999 e 1000, não possuem numerais em comum, mas estão bem próximos em termos de grandezas

Outros sistemas de numeração comuns

- Duodecimal: sistema de base 12 utilizado para representar as horas do dia
  - Normalmente utilizamos numerais decimais para representação das grandezas “dez” e “onze”, mas também se usa “A” e “B” (conjunto fica = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B}) entre outros símbolos
- Sexagesimal: sistema de base 60 utilizado para representar os minutos e segundos
- Binário, Octal e Hexadecimal: sistemas de bases 2, 8 e 16, são utilizados em sistemas digitais

Contraponto à notação posicional

Os sistemas aditivos simples como os números romanos não utilizam a notação posicional, observe:

I, II, III, IV, V, …, IX, X,
XI, …, XCIX, C,
CI,..., CMXCIX, M, MI,...

O sistema binário

- É o mais importante em sistemas digitais
- É um sistema de valor posicional, ou seja, o valor de cada dígito depende da sua posição no número
- Quando se digita um número decimal na calculadora (ou computador), o circuito interno converte em binário
- Quando a calculadora (ou computador) apresenta um resultado matemático, a conversão é inversa
- Seus dígitos (algarismos ou símbolos) são {0, 1}

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Entendendo os numerais em notação posicional

De volta ao decimal, veja como um número é formado (ex.: 135):

$$\mathbf{135 = 1*}100 \mathbf{+ 3*}10 \mathbf{+ 5*}1$$

$$\mathbf{135 = 1*}10^2 \mathbf{+ 3*}10^1 \mathbf{+ 5*}10^0$$

O sistema binário segue a mesma lógica, veja o exemplo:

$$\mathbf{100_2 = 1*}4 \mathbf{+ 0*}2 \mathbf{+ 0*}1 = 4 \text{ (ou } 4_{10}\text{)}$$

$$\mathbf{100_2 = 1*}2^2 \mathbf{+ 0*}2^1 \mathbf{+ 0*}2^0 = 4 \text{ (ou } 4_{10}\text{)}$$

Quando estamos lidando com diferentes bases numéricas é necessário especificar a base em que o número pertence ex.: 100_2 e 4_{10} (para a base é decimal não é necessário especificar)

O sistema octal

- Também é um sistema de valor posicional
- Sistema de base 8
- Foi utilizado como uma forma mais compacta de representar dados digitais
- Hoje é pouco utilizado já que o sistema hexadecimal é mais comum
- Seus dígitos (algarismos ou símbolos) são {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Exemplos de números no sistema octal

16_8 = 1*8 + 6*1 = 14 (ou 14_{10})

Observe que 16_8 é diferente de 16_{10}

135_8 = 1*64 + 3*8 + 5*1 = 93 (ou 93_{10})

7_8 = 7*1 = 7 (ou 7_{10})

No caso de um número entre 0 e 7, observamos que as representações são similares ao decimal

Importância prática do sistema octal

- 8 é divisível por {8, 4, 2, 1}, seus fatores, e 2 (do binário) é divisível por {2, 1}.
  - Todos os fatores de 8 são múltiplos dos fatores de 2
  - Isso faz com que estas bases tenham relação direta, neste caso de 3 para 1

Exemplos:

$$5_8 = 101_2$$

$$55_8 = 101\ 101_2$$

$$7_8 = 111_2$$

$$755_8 = 111\ 101\ 101_2$$

O problema do decimal nos sistemas digitais

- 10 é divisível por {10, 5, 2, 1} e 2 é divisível por {2, 1}.
  - Nem todos os fatores de 2 são múltiplos dos fatores de 10 (2 não é fator de 5)
  - Estes sistemas não possuem relação direta (as quantidades de algarismos não seguem uma relação inteira)

Exemplos:

$5_{10} = 101_2$

$55_{10} = 110\ 111_2$

$7_{10} = 111_2$

$755_{10} = 1\ 011\ 110\ 011_2$

Contra-ponto:

$5_8 = 101_2$

$55_8 = 101\ 101_2$

$7_8 = 111_2$

$755_8 = 111\ 101\ 101_2$

O sistema hexadecimal

- Também é um sistema de valor posicional
- Sistema de base 16
- Utilizado como uma forma mais compacta de representar dados digitais
- Seus dígitos (algarismos ou símbolos) são {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Exemplos de números no sistema hexadecimal

$\mathbf{16}_{16} = \mathbf{1} * 16 + \mathbf{6} * 1 = 22$ (ou 22_{10})

Novamente, observe que 16_{16} é diferente de 16_{10}.

$\mathbf{1A5}_{16} = \mathbf{1} * 256 + \mathbf{A}(10_{10}) * 16 + \mathbf{5} * 1 = 421$ (ou 421_{10})

$\mathbf{F}_{16} = \mathbf{F}(15_{10}) * 1 = 15$ (ou 15_{10})

Importância prática do sistema hexadecimal

- 16 é divisível por {16, 8, 4, 2, 1} e 2 é divisível por {2, 1}.
  - Todos os fatores de 16 são múltiplos dos fatores de 2
  - Neste casos as bases tem relação de 4 para 1
- Comparando com o octal, o hexa é ainda mais compacto
- Os dados costumam ser armazenados em bytes (grupos de 8 dígitos binários), ou seja, 2 dígitos hexadecimais

Exemplos:

$$5_{16} = 0101_2$$
$$55_{16} = 0101\ 0101_2$$
$$7_{16} = 0111_2$$
$$755_{16} = 0111\ 0101\ 0101_2$$

Notação

Como visto, podemos escrever a base em subscrito após o numeral, exemplos:

100_2, 4, 4_{10}, 55_8, $1A5_{16}$

Também podemos utilizar os prefixos 0d (decimal), 0b (binário), 0o (octal) e 0x (hexadecimal), exemplos:

0b100, 4, 0d4, 0o55, 0x1A5

Conversão de bases numéricas: decimal para qualquer base

Neste caso, dividimos o número decimal pela base desejada iterativamente, até que o resto não seja mais divisível. A leitura do resultado é realizada do último quociente (+ significativo) para o primeiro resto (- significativo). Exemplos:

4 decimal para binário

4 | 2
0   2 | 2
0   1

$= 100_2$

93 decimal para octal

93 | 8
5   11 | 8
3   1

$= 135_8$

421 decimal para hexadecimal

421 | 16
5   26 | 16
10   1

$= 1A5_{16}$

Conversão de bases numéricas: qualquer base para decimal

Nos exemplos, os números foram apresentados em analogia ao sistema decimal, mostrando que basta multiplicar cada posição pela base elevada ao índice da posição, contando da direita para a esquerda, exemplo:

$$\mathbf{100_2} = \mathbf{1}*2^2 + \mathbf{0}*2^1 + \mathbf{0}*2^0 = 4$$

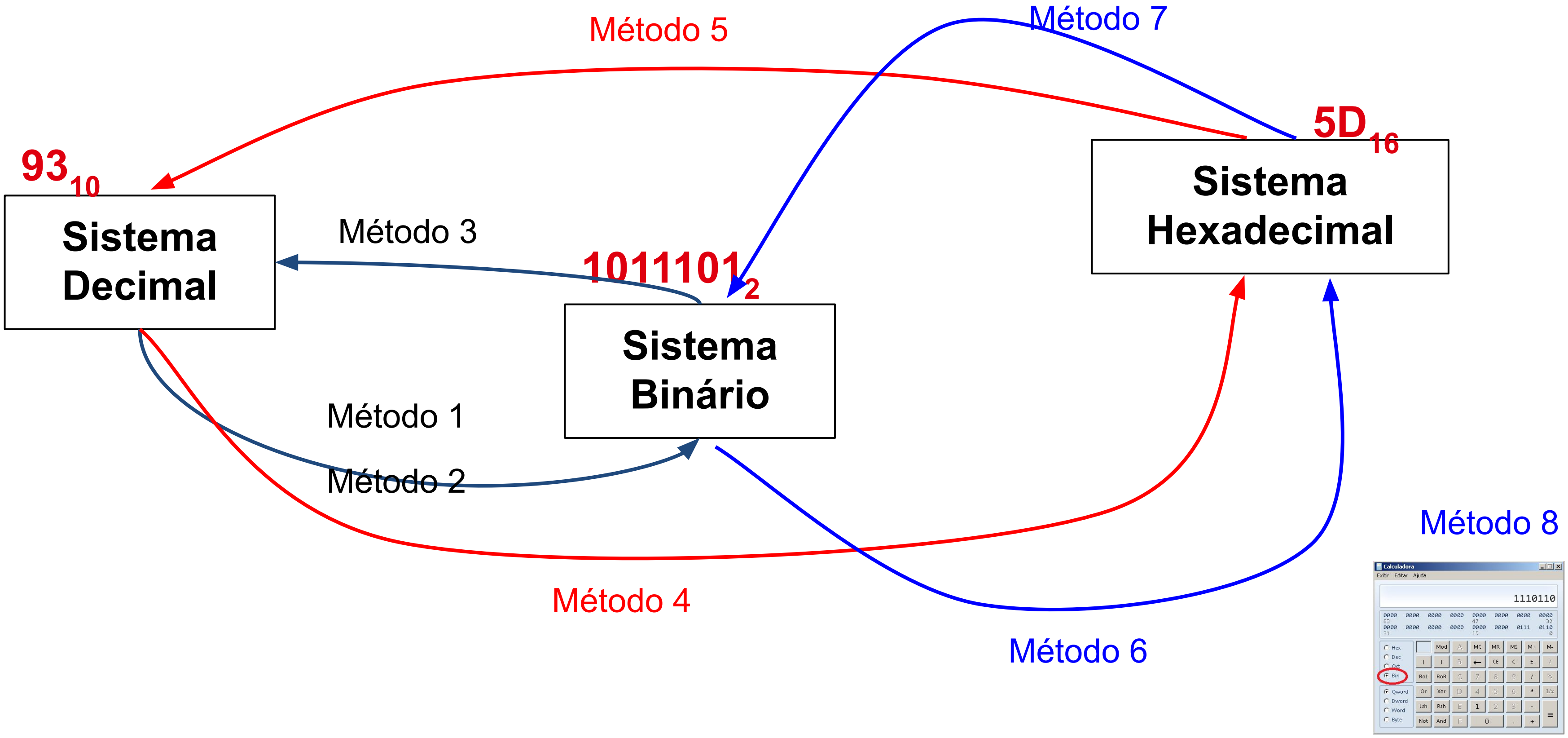
Com essa lógica, podemos converter qualquer base para o decimal, ex:

$$\mathbf{135_8} = \mathbf{1}*8^2 + \mathbf{3}*8^1 + \mathbf{5}*8^0 = 93$$

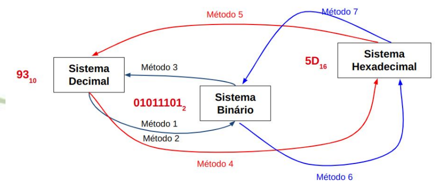
$$\mathbf{1A5_{16}} = \mathbf{1}*16^2 + \mathbf{A}(10_{10})*16^1 + \mathbf{5}*16^0 = 421$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Conversão de bases numéricas: métodos detalhados



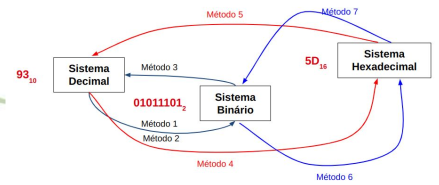
Conversão de bases numéricas: Método 1: DEC>BIN (Divisões sucessivas por 2)



- Divida o número decimal por 2 até resultar 0 (zero).
- Os restos das divisões são os bits do número binário correspondente.

93_{10}	2						
1	46	2					
	0	23	2				
		1	11	2			
			1	5	2		
				1	2	2	
					0	1	2
						1	0

- O primeiro bit obtido é o bit menos significativo (LSB de *least significant bit*)
- O último bit obtido é o bit mais significativo (MSB de *most significant bit*).

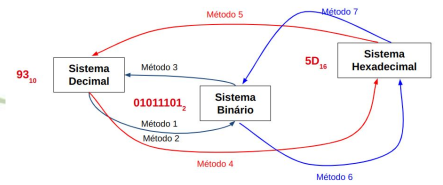


Conversão de bases numéricas: Método 1: DEC>BIN (Divisões sucessivas por 2)

93_{10}	2						
1	46	2					
LSB	0	23	2				
		1	11	2			
			1	5	2		
				1	2	2	
					0	1	2
						1	0
						MSB	

1011101_2

Conversão de bases numéricas:
Método 2: DEC>BIN (Subtraindo pesos)

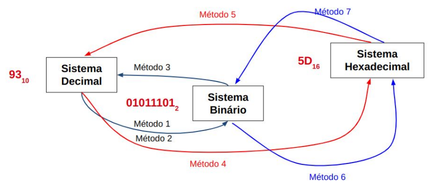


93_{10}

bit	7	6	5	4	3	2	1	0
peso	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
peso	128	64	32	16	8	4	2	1
binário								

- Comece pelo maior peso que é menor que o resto que você tem, começando com o valor original
- Repita até chegar ao peso 1.

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina



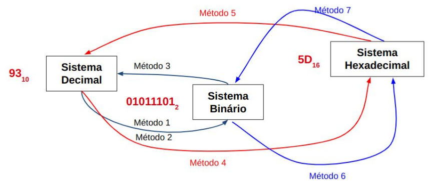
Conversão de bases numéricas: Método 2: DEC>BIN (Subtraindo pesos)

93_{10}

bit	7	6	5	4	3	2	1	0
peso	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
peso	**128**	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
binário	**0**	**1**	0	**1**	**1**	**1**	0	**1**

93 < 128 então não tem 128 (bit 7 = 0)
93 ≥ 64, então **tem 64**, e resta 93-64 = 29; (bit 6 = 1)
29 < 32, então não tem 32. (bit 5 = 0)
29 ≥ 16, então **tem 16**, e resta 19-16 = 13; (bit 4 = 1)
13 ≥ 8, então **tem 8**, e resta 13-8 = 5; (bit 3 = 1)
5 ≥ 4, então **tem 4,** e resta 5-4 = 1; (bit 2 = 1)
1 < 2, então não tem 2. (bit 1 = 0)
1 ≥ 1, então **tem 1**, e resta NADA; (bit 0 = 1)

01011101_2



INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

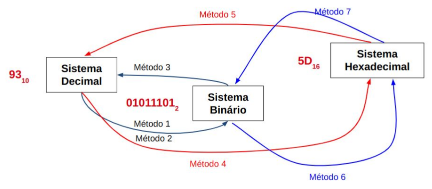
Conversão de bases numéricas: Método 3: BIN>DEC (Somando pesos)

1011101_2

bit	7	6	5	4	3	2	1	0
peso	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
peso	128	64	32	16	8	4	2	1
binário	0	1	0	1	1	1	0	1

- Coloque os bits em ordem na tabela e coloque os pesos sobre eles.
- Se o bit for 1, some o peso da posição
  se for 0, 0 x qualquer_coisa = 0

$1011101_2 = 64 + 16 + 8 + 4 + 1 = 93_{10}$



Conversão de bases numéricas: Método 4: DEC>HEX (divisões sucessivas por 16)

- Divida o número decimal por 16 até resultar 0 (zero).
- Os restos das divisões são os dígitos do número hexadecimal correspondente.
- Substituindo (10 por A, 11 por B, 12 por C, 13 por D, 14 por E e 15 por F

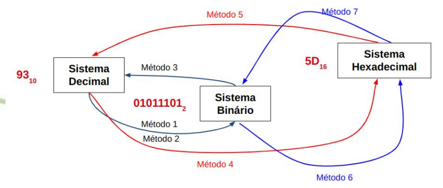
93_{10}	16	
-80	5	16
13	-0	0
D	5	

$$93_{10} = 5 \times 16 + 13 \times 1$$

$$93_{10} = 5 \times 16 + D \times 1 = 5D_{16}$$

$$93_{10} = 5 \times 16^1 + D \times 16^0 = 5D_{16}$$

Conversão de bases numéricas: Método 5: HEX>DEC (somando pesos)



INSTITUTO FEDERAL Santa Catarina

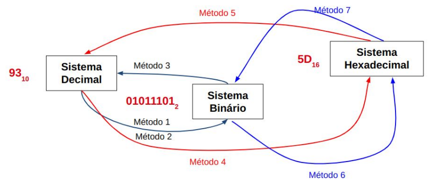
$5D_{16}$

peso	16^3	16^2	16^1	16^0
peso	**4096**	**256**	**16**	**1**
hexadecimal	0	0	**5**	**D ⇒ 13**

- Coloque os dígitos em ordem na tabela e coloque os pesos sobre eles.
- Multiplique o valor dos dígitos pelos pesos, some

$$5D_{16} = 5 \times 16 + 13 \times 1 = 93_{10}$$

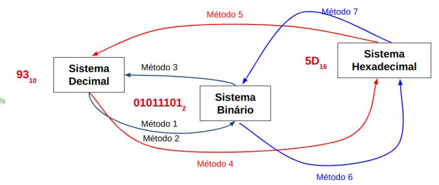
Conversão de bases numéricas:
Método 6: BIN>HEX (agrupamentos de 4 bits)



- Agrupe os bits em grupos de 4 começando pelo LSB
- Para cada grupo de 4 bits, consulte a tabela e substitua pelo valor hexadecimal (0 a F) correspondente.
- Se faltar bits para completar o grupo mais à esquerda, complete com 0 (zeros).

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Hexa	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Binário	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Decimal	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexa	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Binário	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Conversão de bases numéricas: Método 6: BIN>HEX (agrupamentos de 4 bits)

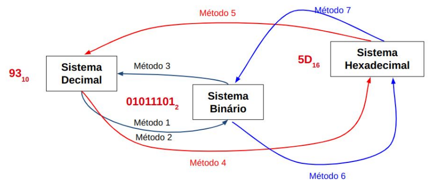


1011101_2

binário	**0**	**1**	0	**1**	**1**	**1**	0	**1**
	—------ Grupo 2 —----->				—------ Grupo 1 —------>			
hexadecimal	**5**				**13 ⇒ D**			

$1011101_2 = 5D_{16}$

Conversão de bases numéricas: Método 7: HEX>BIN (agrupamentos de 4 bits)



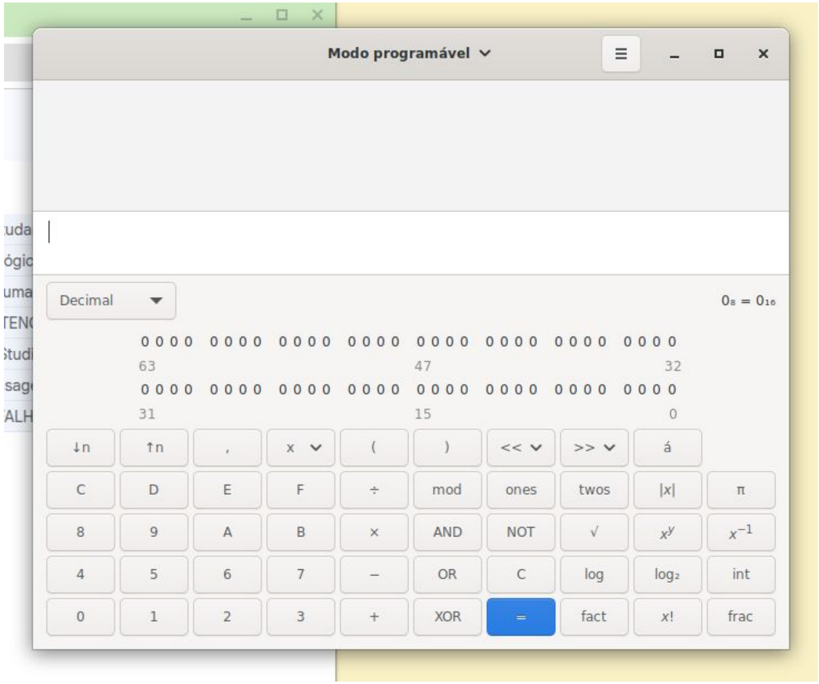
$5D_{16}$

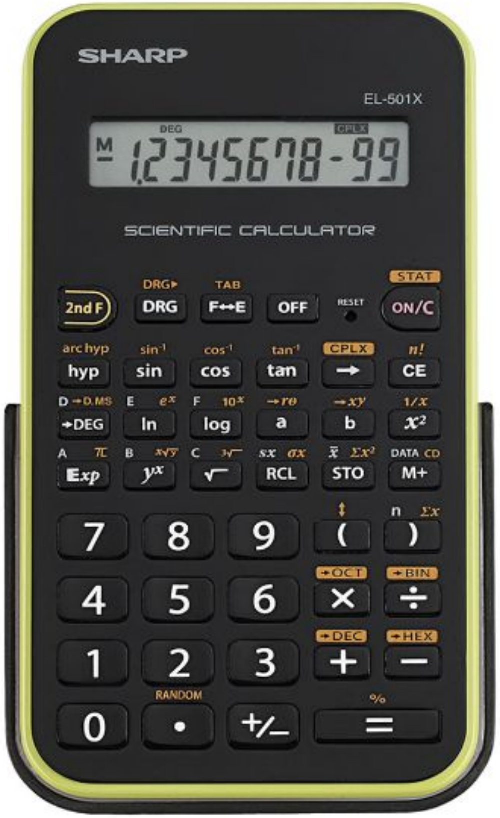
hexadecimal	5				13 ⇒ D			
	—----- Grupo 2 —------>				—------- Grupo 1 —------>			
binário	0	1	0	1	1	1	0	1

$5D_{16} = 01011101_2 = 1011101_2$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Conversão de bases numéricas: Método 8: utilizando a calculadora





Bibliografia

- Sistemas Digitais – Princípios e Aplicações, Ronald J. Tocci e Neal S. Widmer
- ELEMENTOS DE ELETRÔNICA DIGITAL, Idoeta, Ivan, V. e Francisco Gabriel Capuano. 42ª edição. Editora Saraiva, 2019.