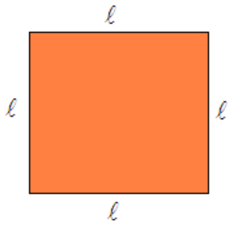
AULA 01

Funções I

Conceitos Iniciais

O conceito de função está presente sempre que fizemos a relação de duas grandezas variáveis. Observe o exemplo abaixo:

A tabela abaixo relaciona a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e seu perímetro.



Lado(cm)	1	2	3	4	ℓ
Perímetro(cm)	4	8	12	16	4ℓ

Observe que o perímetro da região quadrada é dada em *função* da medida do seu lado, ou seja, o perímetro *depende* da medida do lado. Observe, ainda, que a cada valor dado para o lado existe um único valor correspondente para o perímetro.

Na situação apresentada, o perímetro é a variável dependente, e a medida do lado é a variável independente.

A seguir, apresentamos dois conceitos fundamentais:

- Dados dois conjuntos não vazio, A e B, denomina-se **<u>relação de A em B</u>** a qualquer conjunto de pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$.

- Dois conjuntos não vazios, A e B, denomina-se **<u>função ou aplicação de A em B</u>** a qualquer relação em que para todo elemento de A existir um único correspondente em B.

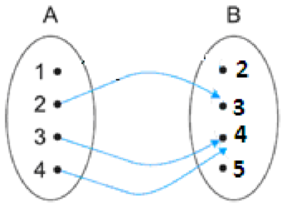
Com isso, fique atento às palavras empregadas na definição de função.

"....para todo elemento de A existir um único correspondente em B".

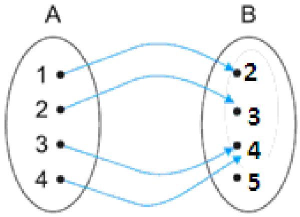
Então:
1°) Todos elementos de A tem de estar associados a algum elemento de B.
2°) Um mesmo elemento de A não pode estar associado a dois elementos de B;
3°) Elementos distintos de A podem estar associados a um mesmo elemento de B e podem "sobrar" elementos de B.

Observe os seguintes exemplos:

a) A relação de A em B não é função de A em B, pois o elemento 1 não está associado a qualquer elemento de B



B) A relação de A em B é função de A em B, pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B.



Observação: Podemos reconhecer através do gráfico de uma relação, se essa relação é ou não função. Para isso, deve-se traçar paralelas ao eixo y. Se cada paralela interceptar o gráfico em apenas um ponto, teremos uma função.

Definição de Função

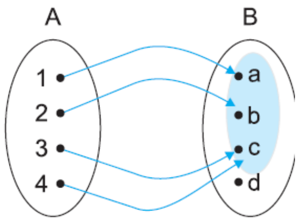
Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios e uma relação R de A em B, essa relação será chamada de função quando para todo e qualquer elemento de **A** estiver associado a um único elemento em B.

$$\boxed{f \text{ é função de A em B} \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists |\ y \in B \,|\, (x, y) \in f)}$$

Domínio, contradomínio e imagem

Dada uma função de **A** em **B**, o conjunto **A** é chamado de **domínio** da função e será representado por D(f) e o conjunto **B**, **contradomínio** da função, representado por CD(f). O conjunto de todos os elementos de $y \in B$ que são imagens de pelo menos um elemento $x \in A$ é chamado conjunto imagem da função e será representado por Im(f).

Observe o exemplo abaixo:



$D(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$
$CD(f) = B = \{a, b, c, d\}$
$Im(f) = \{a, b, c\}$

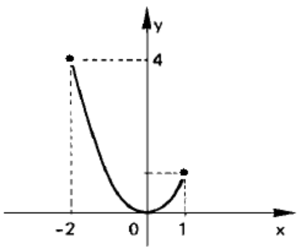
A notação $f: A \rightarrow B$ será utilizada para informar que **f** é uma função de A em B

Observação:

- Graficamente o domínio de uma função é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo das abscissas. E a imagem é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo y.

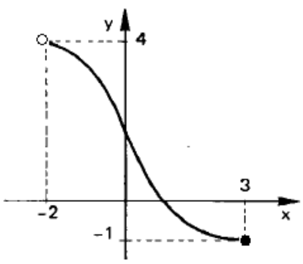
Exemplos:

a)



$D(f) = [-2, 1] = \{x \in \Re \mid -2 \leq x \leq 1\}$
$Im(f) = [0, 4] = \{y \in \Re \mid 0 \leq x \leq 4\}$

b)



$D(f) =]-2, 1] = \{x \in \Re \mid -2 < x \leq 3\}$
$Im(f) = [-1, 4[= \{y \in \Re \mid -1 \leq x < 4\}$

Valor de uma Função

Dados os conjuntos A e B e uma função f: A em B. Denomina-se valor numérico de uma função f(x) o valor que a variável **y** assume quando a variável **x** é substituída por um valor que lhe é atribuído.

Exemplo:
Considere a relação $y = x^2 + 1$, onde cada valor de x corresponde um único valor de y. Assim se x = 3, então y = 10. Podemos descrever essa situação como: $f(3) = 10$

Resumindo:
Sendo (x, y) um elemento da função **f**, usaremos a notação f(x) = y (lê-se **f** de **x** igual a **y**)

Em Sala

01) (PUC) Dados os conjuntos A = {3, 4, 6}, B = {1, 2} e C = {3, 6, 9, 12} determine o conjunto (C – A) x B.

02) Dados os conjuntos A ={ -1, 0, 1, 2, 3} e B = { 0, 1, 2, 3, 4}, vamos analisar algumas *relações* estabelecidas a partir de A x B e determinar quais são *funções* e quais não são:

a) $R_1 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = x^2 \}$
Determinação de seus elementos:

Representação por diagrama de flechas:

Conclusão: ______________________________________

b) $R_2 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = x + 1 \}$
Determinação de seus elementos:

Representação por diagrama de flechas:

Conclusão:______________________________________

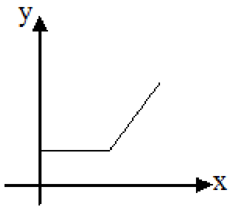
c) $R_3 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 5 \}$
Determinação de seus elementos:

Representação por diagrama de flechas:

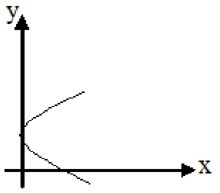
Conclusão:______________________________________

02) Determinar, quais os gráficos abaixo definem *y* como função de *x*:

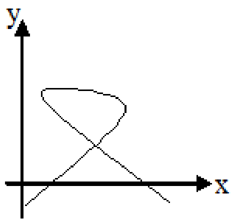
a)



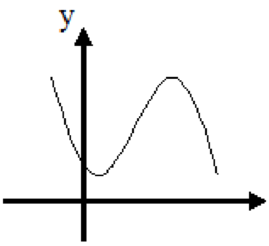
b)



c)



d)



03) (UEPG) Dados os conjuntos $A = \{x \in Z / x^2 - 4 \leq 0\}$ e $B = \{y \in N / 10 - 2y \geq 0\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B / y = x^2 + 2x\}$, assinale o que for correto.

01. $(1, 3) \in R$
02. A relação R tem 5 elementos.
04. $(-1, 3) \in R$
08. O domínio de R é {–2, –1, 0, 1, 2}
16. A imagem de R é {0, 3}

Testes

05) A relação R = {(-2, -1), (-1, 0), (0, 1)} é uma função. Expresse o domínio e o conjunto imagem respectivamente.

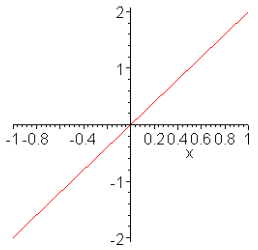
06) (UEL PR) Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {2, 8, 9} e a relação R, de A em B, definida por R = {(x, y) ∈ A x B | x é divisor de y}. Nestas condições, R é o conjunto

a) {(0, 2), (0, 8), (0, 9), (1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4, 8)}
b) {(1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4, 8)}
c) {(2, 1), (2, 2), (8, 1), (8 , 2), (8, 4), (9, 1), (9, 3)}
d) {(0, 2), (0, 8), (0, 9), (2, 2)}
e) {(2, 0), (2, 2), (2, 4)}

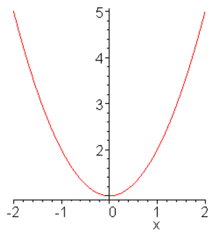
07) Dados os conjuntos A ={a, b, c, d} e B ={1, 2, 3, 4, 5}. Uma função de A em B pode ser definida pelo conjunto {(a, 1) , (b, 1) , (c, 1) , (d, 1)}? Justifique.

08) Verifique quais dos gráficos abaixo, são gráficos de funções de R em R:

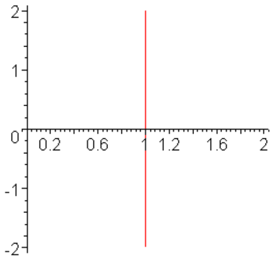
a)



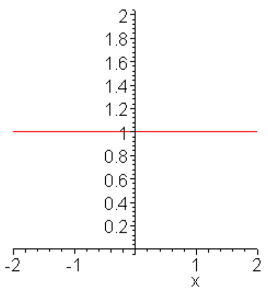
b)



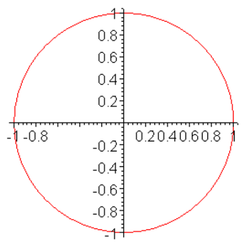
c)



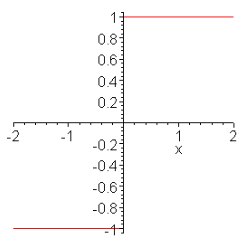
d)



e)



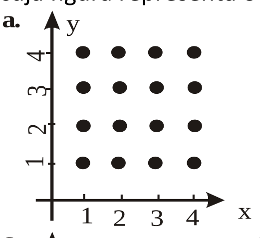
f)



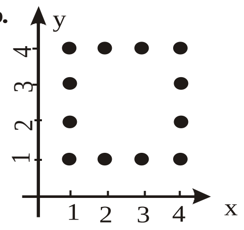
09) (UNIMONTES MG) O produto cartesiano A×A possui nove pares ordenados, sendo que dois deles são (3, 3) e (5, 7). Determine o conjunto A.

10) (UFRN) Considerando K = {1,2,3,4}, marque a opção cuja figura representa o produto cartesiano K x K..

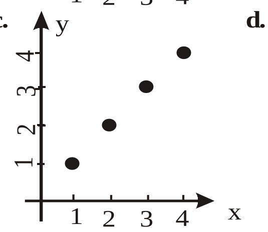
a.



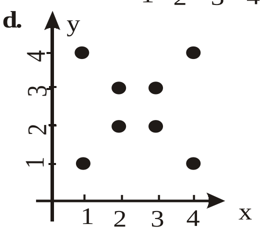
b.



c.



d.



11) (UEL PR) Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {2, 8, 9} e a relação R, de A em B, definida por R = {(x, y) ∈ A x B | x é divisor de y}. Nestas condições, R é o conjunto

a) {(0, 2), (0, 8), (0, 9), (1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4, 8)}
b) {(1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4, 8)}
c) {(2, 1), (2, 2), (8, 1), (8 , 2), (8, 4), (9, 1), (9, 3)}
d) {(0, 2), (0, 8), (0, 9), (2, 2)}
e) {(2, 0), (2, 2), (2, 4)}

12) (UEPB) Dados os conjuntos A = {–1, 0, 1, 2} e B = {–1, 0, 1, 2, 3, 5, 8} e as relações

$R = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = \frac{1}{x}\}$

$S = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = x^2\}$

$T = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = x^2 + 1\}$

$U = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = x^3\}$

a alternativa correta é:

a) apenas uma das quatro relações é função de A em B
b) apenas duas das quatro relações são funções de A em B
c) apenas três das quatro relações são funções de A em B
d) todas as quatro relações são funções de A em B
e) nenhuma das quatro relações é função de A em B

13) (UEFS BA) Seja R a relação em A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, tal que (x, y) $\in \mathbb{R}$ se e somente se o quociente y/x é uma potência de 2 com expoente inteiro não negativo. O número de pontos do gráfico cartesiano de $\mathbb{R}$ é:

a) 7 b) 10 c) 15 d) 15 e) 30

14) (UEPG PR) Com os elementos (0,2), (1,4) (1,5) e (2,6), que são alguns dos elementos do produto cartesiano MxN, é possível determinar os conjuntos M e N. Com base nestes dados, assinale o que for correto.

01. M tem 4 elementos.
02. $M \cup N$ tem 6 elementos.
04. $M \cap N$ é um conjunto unitário.
08. $M \subset N$

15) Sejam $A = \{x \in IR \mid 0 \le x \le 2\}$ e $B = \{x \in IR \mid 0 \le x \le 3\}$. Quantos pares ordenados, cujas coordenadas são todas inteiras, existem no produto cartesiano $A \times B$?

a) 12 b) 10 c) 9 d) 8 e) 6

16) (UFF RJ)

Esboce, no **sistema de eixos coordenados abaixo**, o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [1, 2] e cuja imagem é o conjunto [–2, –1] $\cup$ [2, 3].

17) (PUC) Dados os conjuntos A = {x $\in$ R / 1 $\le$ x $\le$ 3} e B = {x $\in$ R / –1 $\le$ x $\le$ 1} represente, graficamente, o produto cartesiano B x A.

Exercícios Estilo ENEM

18) (UNIFOR CE)

Indica-se por n(X) o número de elementos do conjunto X. Dados dos conjuntos A e B, não vazios, sabe-se que n(AxB) = 20, n(A $\cup$ B) = 8 e n(A $\cap$ B) = 1. Nestas condições, é correto afirmar que n(A) e n(B) são iguais às raízes da equação

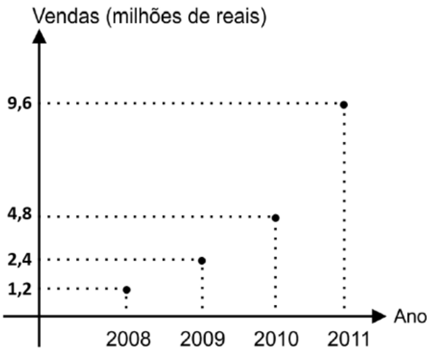
a) $x^2 + 9x + 20 = 0$
b) $x^2 + 12x + 20 = 0$
c) $x^2 - 12x + 20 = 0$
d) $x^2 - 9x + 20 = 0$
e) $x^2 - 20x + 9 = 0$

As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às suas necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, se confunde com a própria história humana no decorrer dos tempos. Assim como para os índios mundurucus, do sul do Pará, os waimiri-atroari, contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: **awynimi é o número 1, typytyna é o 2, takynima é o 3, takyninapa é o 4, e , finalmente, warenipa é o 5**.
(Texto Adaptado: Scientific American – Brasil,
Etnomatática. Edição Especial, Nº 11,ISSN 1679-5229)

19) (UEPA) Considere A o conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos waimiriatroari, ou seja, A = {1, 2, 3, 4, 5}. Nestas condições, o número de elementos da relação $R_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid y \geq x\}$ é igual a:

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

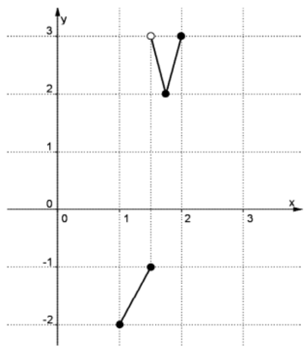
20) (UEPA) No Brasil, uma empresa de comércio para internet multiplicou suas vendas nos últimos anos, conforme ilustrado no gráfico abaixo. Em relação às vendas afirma-se que:



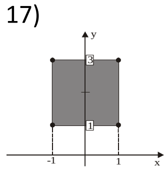
a) tiveram um crescimento de 2 milhões de reais de 2008 para 2009.
b) em 2009 cresceram quatro vezes em relação a 2008.
c) triplicaram de 2009 para 2010.
d) em 2010 cresceram 2,4 milhões de reais em relação a 2009.
e) tiveram um crescimento de 4,8 milhões de reais de 2009 para 2011.

GABARITOS - AULA 01

1) {(9; 1); (9; 2); (12; 1); (12;2)}
2) a) Não b) Sim c) Não 3) Itens a) e d) 4) 17
5) O domínio será formado pelos elementos que correspondem à 1ª coordenada dos pares ordenados da relação. Logo $D_f = \{-2, -1, 0\}$. O conjunto imagem será formado pelas 2ª coordenada dos pares ordenados. Logo $Im_f = \{-1, 0, 1\}$.
6) B
7) Sim. Pela definição de função todos os elementos de A devem possuir um e somente um correspondente em B. Embora o elemento $1 \in B$ seja imagem de mais de um elemento de A, cada elemento de A só está relacionado com o elemento 1 de B.
8) a) sim b) sim c) não d) sim e) não f) não
9) A = {3, 5, 7} 10) A 11) B 12) B 13) D 14) 06
15)A
16) Uma possível solução é a dada pelo gráfico:



17)



18) D 19) C 20) D

AULA 02

Funções II
- Determinação do Domínio -

Técnicas para se determinar o domínio de Funções

Quando estudamos uma função de variável real e com lei de formação algébrica sem domínio indicado, devemos sempre considerar como domínio todos os valores de x que fazem com que f(x) exista.

Sendo assim, considere as seguintes funções:

1) $f(x) = 3x + 2$

Nesse caso, qualquer x $\in \Re$ pode ser atribuído a $f(x) = 3x + 2$, fazendo com que exista uma imagem correspondente.
Logo: D(f) = $\Re$

2) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

Em g(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma fração exista:

Então, devemos fazer:
$x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$
Logo: $D(g) = \{x \in \Re / x \neq 3\}$

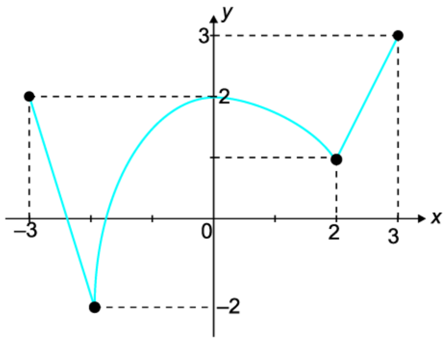
3) $h(x) = \sqrt{x-8}$

Em h(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma raiz de índice par exista. Então o radicando (x – 8) deve ser um número real não negativo.

Então: $x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 8$
Logo: $D(h) = \{x \in \Re / x \geq 8\}$

Em Sala

01) Seja o gráfico abaixo da função f, determinar a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:



01. O domínio da função f é $\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\}$
02. A imagem da função f é $\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 3\}$
04. para x = 3, tem-se y = 3
08. para x = 0, tem-se y = 2
16. para x = – 3, tem-se y = 0
32. A função é decrescente em todo seu domínio.
64. O valor máximo da função ocorre quando x for 2.

02) Determine o domínio das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = \dfrac{2}{5x-15}$

b) $f(x) = \sqrt{-2x+10}$

c) f(x) = $\sqrt{5-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

03) (UFSC) Considere a função f: R → R dada por $f(x) = \begin{cases} -4x+3, \text{se}: x \le 0 \\ x+5, \text{se}: x > 0 \end{cases}$.

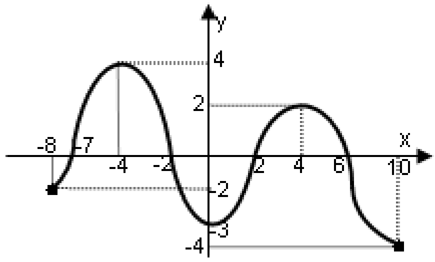
O valor de $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f(3)$, é:

04) Dado que f(1) = 2 e, para todo x, f(x) = 5 f(x – 1), obtenha:

a) f(2)
b) f(3)
c) f(0)
d) f(– 1)

Testes

05) Considere a função y = f(x), cujo gráfico está, representado na figura abaixo.



Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. O domínio da função é o intervalo [-8, 10]
02. O conjunto imagem da função é o intervalo [-4, 4]
04. A equação y = 2 só tem uma solução no intervalo dado.
08. Para x = - 4, tem-se y = 4 ou seja: f(-4) = 4.

06) Determine o domínio das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2-32}$

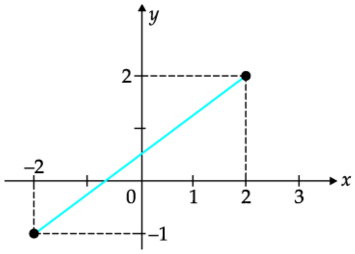
b) $f(x) = \sqrt{12-3x}$

07) Considere a função f: R → R dada por $f(x) = \begin{cases} x^2+3, \text{se } x \le 1 \\ 2x+5, \text{se } x > 1 \end{cases}$.

O valor de $f(-2) + f\left(\frac{3}{2}\right)$ é:

Atividades

08) Assinale a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:



01. O domínio da função f é $\{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$
02. A imagem da função f é $\{y \in R \mid -1 \leq y \leq 2\}$
04. para x = -2 , tem-se y = -1
08. para x = 2, tem-se y = 2
16. A função é crescente em todo seu domínio

09) Determine o domínio das seguintes funções

a) $y = \dfrac{2}{3x - 9}$

b) $y = \dfrac{4}{x - 3}$

c) $y = \sqrt{x - 3}$

d) $y = \sqrt{5 - x}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{-x + 6}}{x - 2}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{5 - x}}{x - 3}$

g) $y = \sqrt[3]{x - 5}$

h) $f(x) = \dfrac{10x}{-3x + 15}$

i) $f(x) = \dfrac{8x}{\sqrt[10]{x + 4}}$

j) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} + \sqrt{x - 1}$

k) $y = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 7}}$

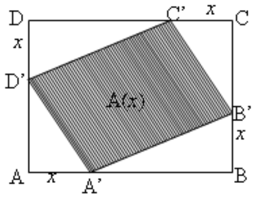
10) (UFSC - SC) Considere as funções f: R $\rightarrow$ R e g: R $\rightarrow$ R dadas por $f(x) = x^2 - x + 2$ e $g(x) = -6x + \dfrac{3}{5}$. Calcule $f(\dfrac{1}{2}) + \dfrac{5}{4} g(-1)$.

11) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas:

a) ( ) Considere a função f: R → R tal que para todo x real se tem f(5x) = 5f(x). Se f(15) = 20, então o valor de f(75) é igual a 100.

b) ( ) A função f(x) que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é f(x) 0,03x.

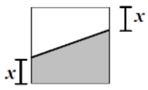
c) ( ) (UFSC –SC) Considere o retângulo *ABCD* cujos lados *AB* e *BC* medem, respectivamente, *4 cm* e *3 cm*. Seja *A'* um ponto do lado *AB*; *B'* um ponto do lado *BC*; *C'* um ponto do lado *CD* e *D'* um ponto do lado *DA*, tal que *AA' = BB' = CC' = DD' = x* (ver figura). A área do quadrilátero *A'B'C'D'* em função de x é dada por: $A(x) = 2x^2 - 7x + 12$.



d) ( ) (UFSC – SC) Considere *f*(*x*) uma função real que satisfaz as seguintes condições: *f*(–3) = 15 e *f*(*x* –3) = 3*f*(*x*) – 6, então o valor de *f*(0) é 7.

e) ( ) (UFSC – SC) Considere a função f(x) real, definida por f(1) = 43 e f(x + 1) = 2 f(x) – 15. O valor de f(0) é 29.

f) ( ) (UFSC – SC) Observe o quadrado de lado *10 cm* da figura abaixo. A área da parte colorida será sempre a metade da área do quadrado, independentemente do valor escolhido para *x*.



12) (UEPB - PB) Uma função f definida de R em R satisfaz à condição $f(5x) = 5f(x)$ para todo x real. Se $f(25) = 125$, $f(1)$ é:

a) 6
b) 1
c) 25
d) 5
e) 4

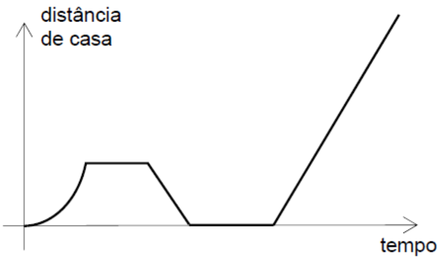
13) (IFAL – AL) O domínio da função dada por $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$ é

a) $\{x \in R \mid -2 \le x \le 3\}$.
b) $\{x \in R \mid -2 \le x < 3\}$.
c) $\{x \in R \mid 2 \le x < 3\}$.
d) $\{x \in R \mid -2 \le x \le 3\}$.
e) $\{x \in R \mid x \ne 3\}$.

14) (UEPG – PR) Sendo $f: N \to Z$ uma função definida por $f(0)=1$, $f(1)=0$ e $f(n+1)=3f(n)-f(n-1)$, assinale o que for correto.

01. $f(5) < -20$
02. $f(2) = -1$
04. $f(6) > -60$
08. $f(3) = 3$
16. $f(4) = -10$

15) (UFPR – PR) Assinale a alternativa que apresenta a história que melhor se adapta ao gráfico.

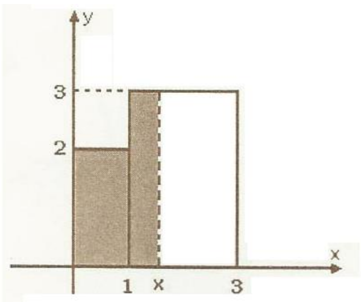


a) Assim que saí de casa lembrei que deveria ter enviado um documento para um cliente por *e-mail*. Resolvi voltar e cumprir essa tarefa. Aproveitei para responder mais algumas mensagens e, quando me dei conta, já havia passado mais de uma hora. Saí apressada e tomei um táxi para o escritório.
b) Saí de casa e quando vi o ônibus parado no ponto corri para pegá-lo. Infelizmente o motorista não me viu e partiu. Após esperar algum tempo no ponto, resolvi voltar para casa e chamar um táxi. Passado algum tempo, o táxi me pegou na porta de casa e me deixou no escritório.
c) Eu tinha acabado de sair de casa quando tocou o celular e parei para atendê-lo. Era meu chefe, dizendo que eu estava atrasado para uma reunião. Minha sorte é que nesse momento estava passando um táxi. Acenei para ele e poucos minutos depois eu já estava no escritório.
d) Tinha acabado de sair de casa quando o pneu furou. Desci do carro, troquei o pneu e finalmente pude ir para o trabalho.
e) Saí de casa sem destino – estava apenas com vontade de andar. Após ter dado umas dez voltas na quadra, cansei e resolvi entrar novamente em casa.

16) (UFRGS – RS) Considere as funções f e g tais que $f(x) = 4x - 2x^2 - 1$ e $g(x) = 3 - 2x$. A soma dos valores de f(x) que satisfazem a igualdade f(x) = g(x) é

a) – 4
b) – 2
c) 0
d) 3
e) 4

17) (UFRGS –RS) Para cada número real x, tal que $0 \leq x \leq 3$, definimos a função f tal que f(x) = A(x), sendo A(x) a área da superfície sombreada dos retângulos da figura abaixo, limitada pelos eixos coordenados e pela reta vertical de abscissa x.

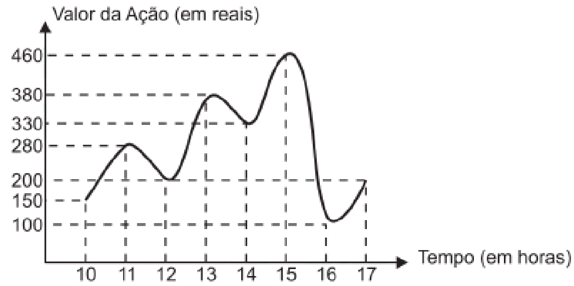


Então, $f(x) \geq 5$ se e somente se

a) $0 \leq x \leq 1$
b) $1 \leq x \leq 2$
c) $1 \leq x \leq 3$
d) $\frac{4}{3} \leq x \leq 3$
e) $2 \leq x \leq 3$

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) O gráfico fornece os valores das ações da empresa *XPN*, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo. Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

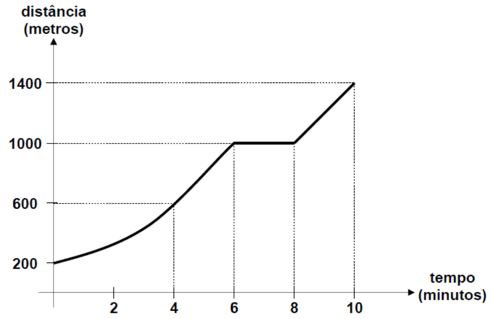


Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

19) (UFPR – PR) Num teste de esforço físico, o movimento de um indivíduo caminhando em uma esteira foi registrado por um computador. A partir dos dados coletados, foi gerado o gráfico da distância percorrida, em metros, em função do tempo, em minutos, mostrado ao lado:



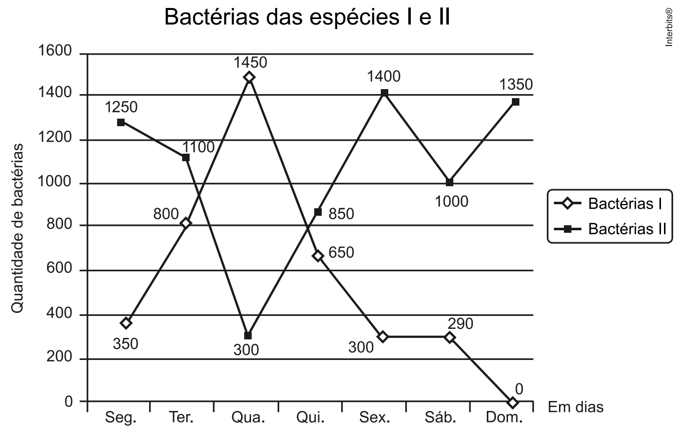
De acordo com esse gráfico, considere as seguintes afirmativas:

1. A velocidade média nos primeiros 4 minutos foi de 6 km/h.
2. Durante o teste, a esteira permaneceu parada durante 2 minutos.
3. Durante o teste, a distância total percorrida foi de 1200 m.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

20) (ENEM) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1.250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira.
b) Quarta-feira.
c) Quinta-feira.
d) Sexta-feira.
e) Domingo.

GABARITO – AULA 02

1) 15
2) a) $\{x \in R / x \neq 3\}$ b) $\{x \in R / x \leq 5\}$ c) $\{x \in R / -1 < x \leq 5\}$
3) 16
4) a) 10 b) 50 c) 2/5 d) 2/25
5) 11
6) $\{x \in R / x \neq \pm 4\}$ b) $\{x \in R / x \leq 4\}$
7) 15 **8)** 31
9) a) $\{x \in R \mid x \neq 3\}$ b) $\{x \in R \mid x \neq 3\}$ c) $\{x \in R \mid x \geq 3\}$
d) $\{x \in R \mid x \leq 5\}$ e) $\{x \in R \mid x \leq 6,\ x \neq 2\}$
f) $\{x \in R \mid x \leq 5,\ x \neq 3\}$ g) $\Re$ h) $x \neq 5$ i) $x > -4$ j) $x > 1$
k) $x > 7$
10) 10
11) a) V b) F c) V d) V e) V f) V
12) d **13)** c **14)** 07 **15)** b **16)** c **17)** e
18) a **19)** e **20)** a

AULA 03

Funções III
- Função Afim -

1. Introdução

Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1200,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 5% $\left(\frac{5}{100} = 0{,}05\right)$ sobre o total de vendas que ele faz durante o mês. Podemos dizer, então, que:

salário mensal = 1200 + 0,05.total das vendas.

Observe que o salário mensal do vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, ou seja:

$y = 0{,}05x + 1200$ ou $f(x) = 0{,}05x + 1200$
em que x é o total de vendas do mês y é o salário mensal do vendedor.
A função descrita acima é um exemplo de função da forma y = f(x) = ax + b.

2. Função Afim

Uma função f: $\Re \to \Re$ é denominada função afim quando a cada x $\in$ R associa o elemento (**ax + b)** $\in \Re$ em que **a** e **b** são números reais com **a** $\neq$ 0.

$\boxed{\textbf{f(x) = ax + b}}$ **com a $\neq$ 0**.

Exemplos:

- f(x) = 2x + 3 (a = 2, b = 3)
- f(x) = – x + 2 (a = –1, b = 2)
- f(x) = 2x (a = 2, b = 0)

Gráfico da Função Afim

O gráfico cartesiano da função f(x) = ax + b é uma reta.
O gráfico pode ser construído atribuindo-se valores à variável x e calculando as imagens correspondentes.

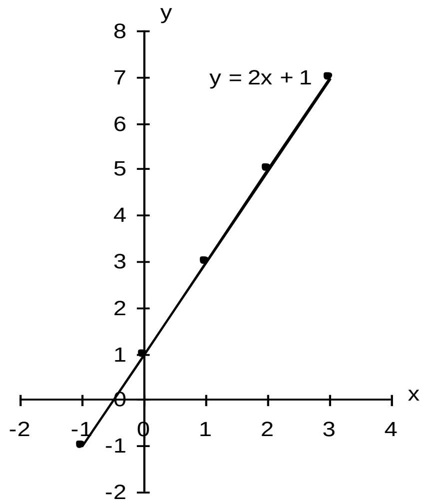
Observe os exemplos:

Exemplo 1: Construir o gráfico da função f: $\Re \to \Re$ definida por y = 2x + 1

Resolução:

x	y = 2x + 1	(x, ; y)
–1	y = 2(–1) + 1 = –1	(–1; –1)
0	y = 2.0 + 1 = 1	(0;1)
1	y = 2.1 + 1 = 3	(1; 3)
2	y = 2.2 + 1 = 5	(2;5)
3	y = 2.3 + 1 = 7	(3;7)

Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:

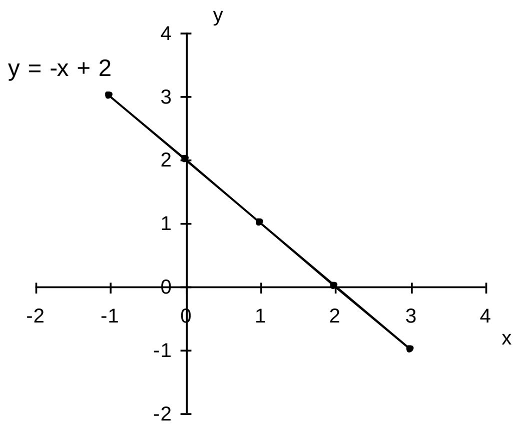


Exemplo 2: Construir o gráfico da função f: $\Re \to \Re$ definida por y = – x + 2

Resolução:

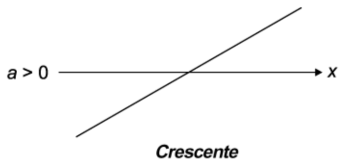
x	y = – x + 2	(x, ; y)
–1	y = –(–1) + 2 = 3	(–1;3)
0	y = –0 + 2 = 2	(0;2)
1	y = –1 + 2 = 1	(1, 1)
2	y = –2 + 2 = 0	(2;0)
3	y = –3 + 2 = –1	(3, –1)

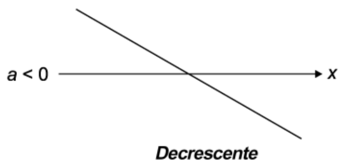
Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:



Conclusão:

O gráfico será uma reta crescente se **a** for positivo e decrescente se **a** for negativo.





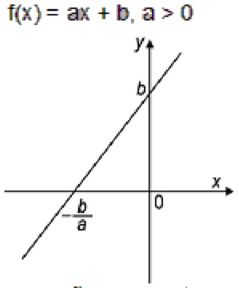
Observação:

<u>Interceptos:</u> Como o gráfico de uma função afim é uma reta basta definir apenas dois pontos.

- Ponto que o Gráfico corta o eixo y: deve-se fazer x = 0. Logo o ponto que o gráfico intercepta o eixo y tem coordenadas (0,b).
- Ponto que o Gráfico corta o eixo x: deve-se fazer y = 0. Logo o ponto que o gráfico intercepta o eixo x tem coordenadas ($-\frac{b}{a}$,0). O número $-\frac{b}{a}$ é chamado raiz ou zero da função.

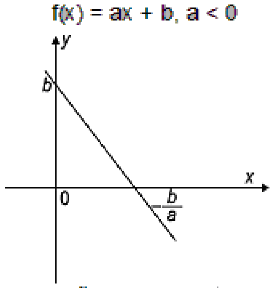
Assim:

f(x) = ax + b, a > 0



função crescente

f(x) = ax + b, a < 0



função decrescente

Coeficientes da Função Afim

O coeficiente **a** na função f(x) = **a**x + **b** é chamado *coeficiente angular* da reta. O coeficiente **b** é chamado *coeficiente linear*.

O *coeficiente angular* da reta indica a inclinação da reta.

- Se **a** > 0, o gráfico será uma reta crescente no seu domínio, ou seja:
  $x_1 > x_2 \to y_1 > y_2$
- Se **a** < 0, o gráfico será uma reta decrescente no seu domínio, ou seja:
  $x_1 > x_2 \to y_1 < y_2$

O *coeficiente linear* indicará a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y.

Exemplo:

Esboçar o gráfico da função da função f: $\Re \to \Re$ definida por f(x) = – 3x + 1.

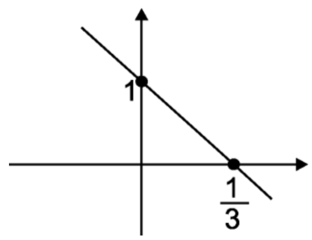
Resolução:

1°) A reta intercepta o eixo y no ponto de ordenada 1.
2°) Cálculo da raiz de f(x)

f(x) = 0.

$-3x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1}{3}$

A reta intercepta o eixo x no ponto de abscissa $\frac{1}{3}$.



Determinação de uma função afim conhecendo seus valores em dois pontos distintos

Uma função f(x) = ax + b fica totalmente determinada quando conhecemos dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Observe os exemplos:

1) Dada a função f(x) = ax + b, sabe-se que f(1) = 5 e f(3) = 7. Escrever a função **f(x)** .

Resolução:

- Se f(1) = 5 então:
  f(1) = a(1) + b
  5 = a(1) + b
  a + b = 5 (1)

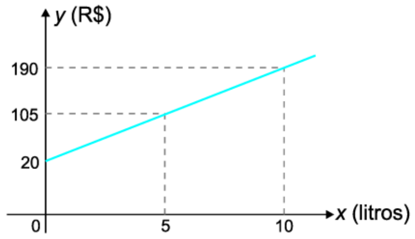
- Se f(3) = 7 então:
  f(3) = a(3) + b
  7 = a(3) + b
  3a + b = 7 (2)

Encontraremos **a** e **b** resolvendo um sistema.

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ -3a-b=-7 \end{cases}$$

Daí vem: **a** = 1 e **b** = 4.
Logo: **f(x) = x + 4**

2) O gráfico mostra como o dinheiro gasto (y) por uma empresa de cosméticos, na produção de perfume, varia com a quantidade de perfume produzida (x). Assim, podemos afirmar:



a) Quando a empresa não produz, não gasta.
b) Para produzir 3 litros de perfume, a empresa gasta R$ 76,00.
c) Para produzir 2 litros de perfume, a empresa gasta R$ 54,00.
d) Se a empresa gastar R$ 170,00, então ela produzirá 5 litros de perfume.
e) Para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa gasta menos do que para fabricar o quinto litro.

Resolução:
Temos f(*x*) = ax +b, com f(0) = 20 e f(10) = 190.

$$\begin{cases} f(0)=20 \Rightarrow a.0+b=20 \Rightarrow \ b=20 \\ f(10)=190 \Rightarrow a.10+20=190 \Rightarrow \ a=17 \end{cases} \Rightarrow y=17x+20$$

Para *x* = 2, temos *y* = 54.
Note que, para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa já terá fabricado o segundo; da mesma forma, para fabricar o quinto litro, o quarto já terá sido fabricado. Assim o custo de fabricação do terceiro litro é o mesmo custo de fabricação do quinto litro.

Em Sala

01) (ENEM) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações: QO = –20 + 4P e QD = 46 – 2P em que QO é quantidade de oferta, QD é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando QO e QD se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

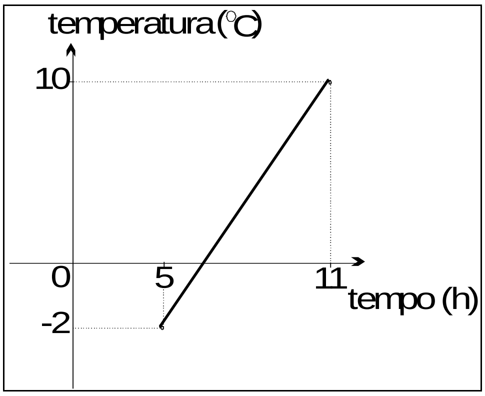
a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

02) Seja f(x) = ax + b uma função do 1º grau. Sabe-se que f(2) = 5 e f(7) = 15. Dê o valor de f(8).

03) O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que hoje ela vale R$800,00, e que daqui a 5 anos valerá R$ 160,00, o seu valor, em reais, daqui a três anos será:

a) 480
b) 360
c) 380
d) 400
e) 416

04) (ACAFE – SC) O gráfico abaixo mostra a temperatura de uma região de Santa Catarina, das 5 horas até as 11 horas.



Pela análise do gráfico, é incorreto afirmar que:

a) a temperatura atingiu 0^0C às 6h
b) a temperatura esteve negativa durante 5 horas
c) o período em que a temperatura esteve negativa foi no intervalo [5, 6 [horas
d) o período em que a temperatura esteve positiva foi no intervalo] 6, 11] horas
e) a temperatura esteve positiva durante 5 horas

Testes

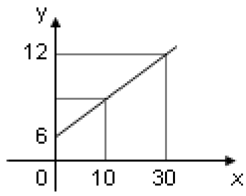
05) (UCS – RS) O salário mensal de um vendedor é de R$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total, em reais, das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem x reais, o salário do vendedor será dado pela expressão

a) $750 + 2,5x$.
b) $750 + 0,25x$.
c) $750,25x$.
d) $750 \cdot (0,25x)$.
e) $750 + 0,025x$.

06) (PUC – PR) Seja a uma função afim $f(x)$, cuja forma é $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. Se $f(-3) = 3$ e $f(3) = -1$, os valores de a e b, são respectivamente:

a) 2 e 9
b) 1 e -4
c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{5}$
d) 2 e -7
e) $-\frac{2}{3}$ e 1

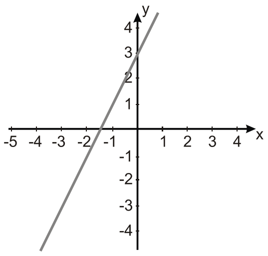
07) (ACAFE – SC) O gráfico a seguir representa o gasto mensal que uma empreiteira tem com os encargos sociais de seus funcionários, em milhares de reais.Sabendo que o número *x* de funcionários oscila de 10 a 30, o gasto *y* que a empreiteira terá num mês, em reais, com 23 funcionários, será:



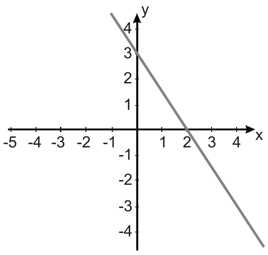
a) 10600.
b) 9400.
c) 9600.
d) 1200.
e) 11400.

08) (UNISINOS – RS) Qual dos gráficos abaixo representa a reta de equação y = 2x + 3?

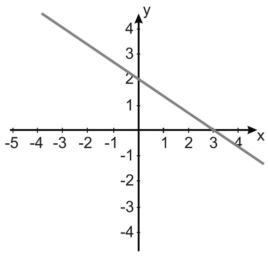
a)



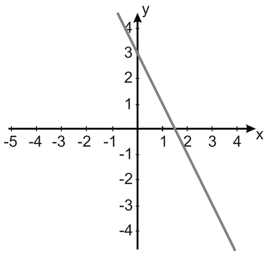
b)



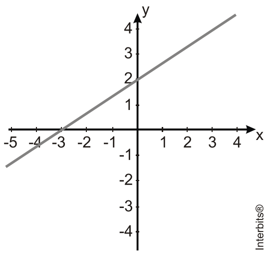
c)



d)

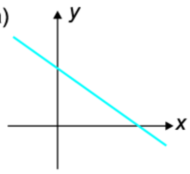


e)

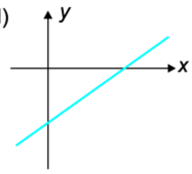


09) (UFMG – MG) Sendo a < 0 e b > 0, a única representação gráfica correta para a função f(x) = ax + b é:

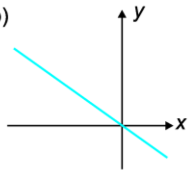
a)



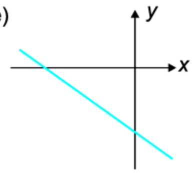
d)



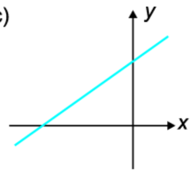
b)



e)



c)



10) O gráfico da função f(x) = ax + b passa pelos pontos A(1, −2) e B(4, 2). Podemos afirmar que a + b vale em **módulo:**

11) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas:

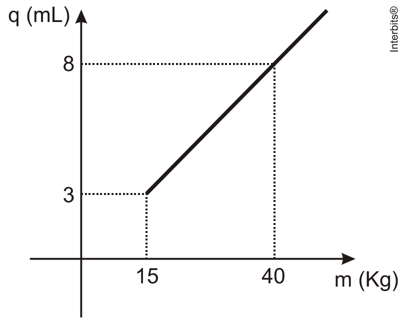
a) (   ) O gráfico da função *f(x) = 2x – 1* **NÃO** intercepta o terceiro quadrante.

b) (   ) Sabendo que a função: $f(x) = mx + n$ admite 5 como raiz e $f(-2) = -63$, o valor de $f(16)$ é 99.

c) (   ) Para que -3 seja raiz da função $f(x) = 2x + k$, deve-se ter $k = 6$.

d) (   ) (UFSC – SC) A proprietária de um bufê divide os gastos com um café da manhã em duas partes: a primeira compreende os gastos fixos para qualquer número de convidados e a segunda os gastos por convidado. Ela calcula que o gasto total para *40* convidados é de *R$ 440,00* e para *100* convidados é de *R$ 800,00*. Assim, um café da manhã para *55* convidados terá um gasto total de *R$ 605,00*.

12) (ACAFE – SC) O soro antirrábico é indicado para a profilaxia da raiva humana após exposição ao vírus rábico. Ele é apresentado sob a forma líquida, em frasco ampola de 5mL equivalente a 1000UI (unidades internacionais). O gráfico abaixo indica a quantidade de soro (em mL) que um indivíduo deve tomar em função de sua massa (em kg) em um tratamento de imunização antirrábica.



Analise as afirmações a seguir:

I. A lei da função representada no gráfico é dada por $q = 0,2 \cdot m$, onde q é a quantidade de soro e m é a massa.
II. O gráfico indica que as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, cuja constante de proporcionalidade é igual a $\frac{1}{5}$.
III. A dose do soro antirrábico é 40UI/Kg.
IV. Sendo 3000UI de soro a dose máxima recomendada, então, um indivíduo de 80 kg só poderá receber a dose máxima.
V. Se um indivíduo necessita de 2880UI de soro, então, a massa desse indivíduo é de 72,2 kg.

Todas as afirmações corretas estão em:

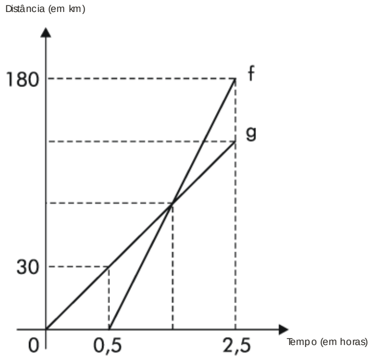
a) I - III - IV
b) I - III - IV - V
c) II - III - IV - V
d) I - II - V

13) (UFPR – PR) Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma função do primeiro grau.

a) Determine essa função do primeiro grau, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40 cm e sua altura era 1,90 m, e o úmero de seu assistente media 30 cm e sua altura era 1,60 m.

b) Se o úmero encontrado no sítio arqueológico media 32 cm, qual era a altura aproximada do indivíduo que possuía esse osso?

14) (UFRGS – RS) Dois carros partem de uma mesma cidade, deslocando-se pela mesma estrada. O gráfico abaixo apresenta as distâncias percorridas pelos carros em função do tempo.



Analisando o gráfico, verifica-se que o carro que partiu primeiro foi alcançado pelo outro ao ter percorrido exatamente:

a) 60km
b) 85km
c) 88km
d) 90km
e) 91km

15) (UFSM – RS) De acordo com dados da UNEP - Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, a emissão de gases do efeito estufa foi de 45 bilhões de toneladas de CO_2 em 2005 e de 49 bilhões de toneladas em 2010. Se as emissões continuarem crescendo no mesmo ritmo atual, a emissão projetada para 2020 é de 58 bilhões de toneladas. Porém, para garantir que a temperatura do planeta não suba mais que $2\,°C$ até 2020, a meta é reduzir as emissões para 44 bilhões de toneladas.

Suponha que a meta estabelecida para 2020 seja atingida e considere que Q e t representam, respectivamente, a quantidade de gases do efeito estufa (em bilhões de toneladas) e o tempo (em anos), com $t = 0$ correspondendo a 2010, com $t = 1$ correspondendo a 2011 e assim por diante, sendo Q uma função afim de t.

A expressão algébrica que relaciona essas quantidades é

a) $Q = -\frac{9}{10}t + 45.$

b) $Q = -\frac{1}{2}t + 49.$

c) $Q = -5t + 49.$

d) $Q = \frac{1}{2}t + 45.$

e) $Q = \frac{9}{10}t + 49.$

16) (UEL – PR) *ViajeBem* é uma empresa de aluguel de veículos de passeio que cobra uma tarifa diária de R\$ 160,00 mais R\$ 1,50 por quilômetro percorrido, em carros de categoria A. *AluCar* é uma outra empresa que cobra uma tarifa diária de R\$ 146,00 mais R\$ 2,00 por quilômetro percorrido, para a mesma categoria de carros.

a) Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções que determinam as tarifas diárias cobradas pelas duas empresas de carros da categoria A que percorrem, no máximo, 70 quilômetros.

b) Determine a quantidade de quilômetros percorridos para a qual o valor cobrado é o mesmo. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

17) (UFSM – RS) Uma pesquisa do Ministério da Saúde revelou um aumento significativo no número de obesos no Brasil. Esse aumento está relacionado principalmente com o sedentarismo e a mudança de hábitos alimentares dos brasileiros. A pesquisa divulgada em 2013 aponta que 17% da população está obesa. Esse número era de 11% em 2006, quando os dados começaram a ser coletados pelo Ministério da Saúde.

Suponha que o percentual de obesos no Brasil pode ser expresso por uma função afim do tempo t em anos, com $t = 0$ correspondente a 2006, $t = 1$ correspondente a 2007 e assim por diante.
A expressão que relaciona o percentual de obesos Y e o tempo t, no período de 2006 a 2013, é

a) $Y = \frac{4}{3}t - \frac{44}{3}t.$

b) $Y = \frac{7}{6}t - \frac{77}{6}.$

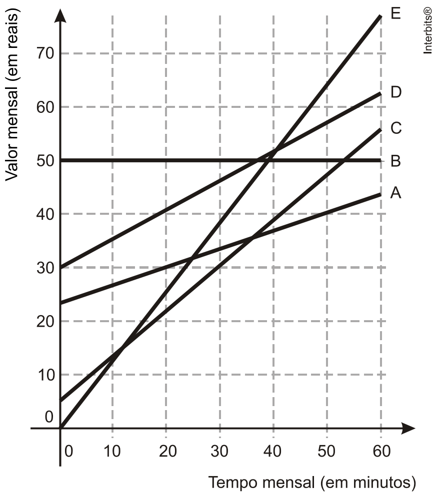
c) $Y = t + 11.$

d) $Y = \frac{6}{7}t + 11.$

e) $Y = \frac{3}{4}t + 11.$

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



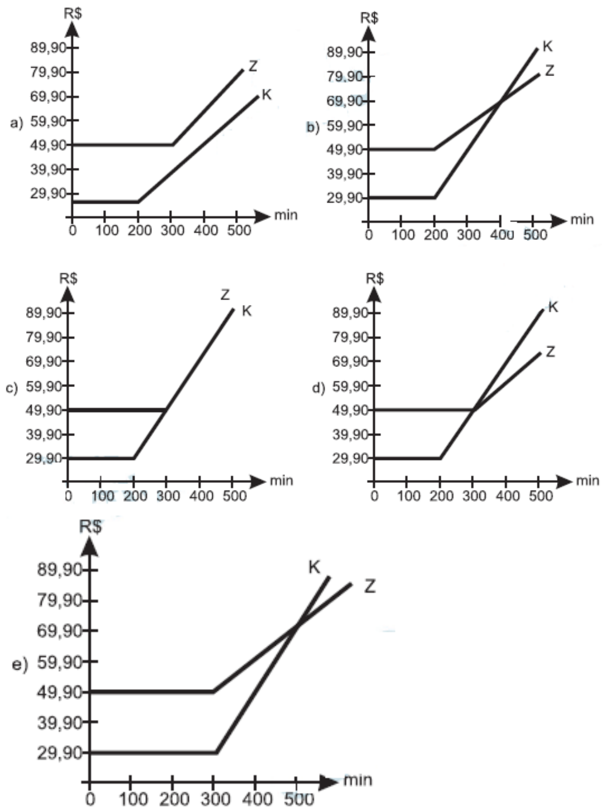
Essa pessoa pretende gastar exatamente R$30,00 por mês com telefone.
Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

19) (ENEM) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade *q* de produtos é dado por uma função, simbolizada por *CT,* enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade *q* também é uma função, simbolizada por *FT.* O lucro total *(LT)* obtido pela venda da quantidade *q* de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

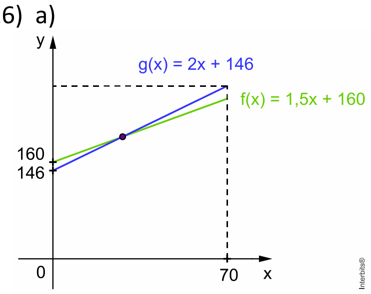
20) (ENEM) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é



GABARITO – AULA 03

1) b	**2)** 17	**3)** e	**4)** b	**5)** e	**6)** e	
7) a	**8)** a	**9)** a	**10)** 02			
11) a) F	b) V	c) V	d) F			
12) a						
13) a) y = 0,03x + 0,7 b) 1,66m						
14) d	**15)** b	**16)** *	**17)** d	**18)** c	**19)** d	**20)**d

16) a)



b) $1{,}5x + 160 = 2x + 146 \Leftrightarrow x = 28\text{km}.$

AULA 01

Funções IV
- Função Linear e Constante -

1. Funções da forma f(x) = ax

Considere uma função que relaciona a quantidade de litros colocada no tanque de combustível de um automóvel com o valor pago.
Indicando por *x* os valores relativos à quantidade de litros e por *y* os valores relativos ao preço total a pagar, podemos estabelecer a seguinte relação entre y e x:

$$\boxed{y = P.x}$$

onde P é o preço do litro de combustível. Perceba que *y* está em **função** de *x*.
Vamos construir uma tabela, supondo o preço do litro do combustível R$2,85, ou seja P = 2,85;

x (quantidade de litros)	Y (preço total) em R$
1	2,85
2	5,70
3	8,55
4	11,40

Podemos descrever a função acima por meio da equação: y = 2,85.x.

A função descrita acima é um exemplo de função linear da forma y = f(x) = ax .

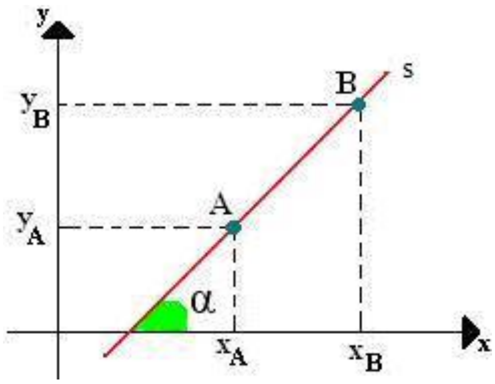
Definição
Uma função f: $\Re \to \Re$ recebe a denominação *função linear* quando a cada x $\in \Re$ associa o elemento **ax** $\in \Re$ em que **a** é um número real diferente de zero.

$$\boxed{f(x) = ax} \qquad (a \neq 0)$$

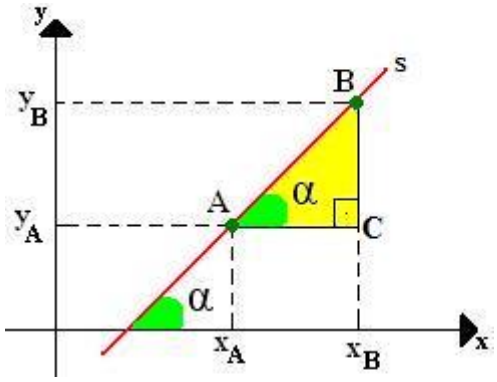
Sabemos que o valor do coeficiente angular de uma reta é a tangente do seu ângulo de inclinação.

Observação:
Vale ressaltar que se a reta for perpendicular ao eixo das abscissas, o coeficiente angular não existirá, pois não é possível determinar a tangente do ângulo de 90º.

Para representarmos uma reta não vertical em um plano cartesiano é preciso ter no mínimo dois pontos pertencentes a ela. Desse modo, considere uma reta s que passa pelos pontos A(xA, yA) e B(xB, yB) e possui um ângulo de inclinação com o eixo Ox igual a α.

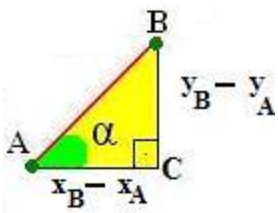


Prolongando a semirreta que passa pelo ponto A e é paralela ao eixo Ox formaremos um triângulo retângulo no ponto C.



O ângulo A do triângulo BCA será igual ao da incli-nação da reta, pois, pelo Teorema de Tales, duas re-tas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais.

Levando em consideração o triângulo BCA e que o coeficiente angular é igual à tangente do ângulo de inclinação, teremos:



tgα = cateto oposto / cateto adjacente

$$tg\alpha = (y_B - y_A)/(x_B - x_A)$$

Portanto, o cálculo do coeficiente angular de uma reta pode ser feito pela razão da diferença entre dois pontos pertencentes a ela: m = tgα = Δy / Δx.

Exercício resolvido:

1) Qual é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A (–1,3) e B (–2,4)?

Resolução:

m = Δy/Δx
m = (4 – 3) / ((-2) - (-1))
m = 1 / (-1)
m = -1

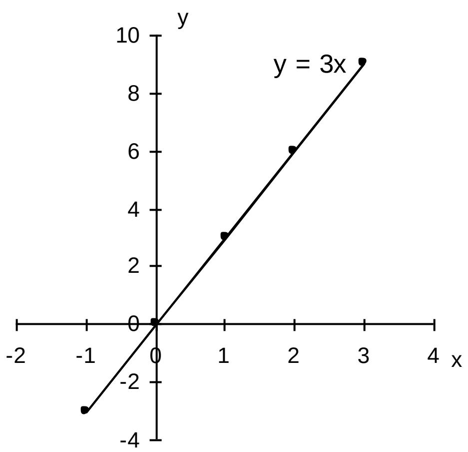
Gráfico da Função Linear

Observe que a função linear é um caso particular da função afim f(x) = ax + b, em que b = 0. Com isso, o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.
Observe o exemplo:

Construir o gráfico da função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por y = 3x

x	y = 3x	(x, ; y)
–1	y = 3(–1) = –3	(–1; –3)
0	y = 3.0 = 0	(0;0)
1	y = 3.1 = 3	(1; 3)
2	y = 3.2 = 6	(2;6)
3	y = 3.3 = 9	(3;9)

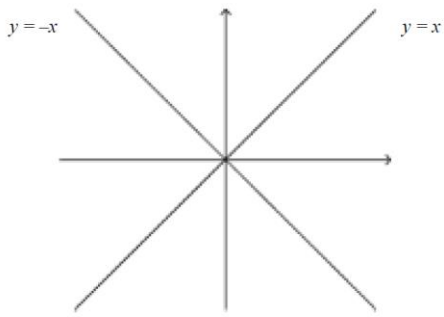
Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:



Dentre as funções lineares, destacamos estas duas:

1) y = x e 2) y = – x

O gráfico da primeira é a reta bissetriz dos quadrantes I e III e o gráfico da segunda é a bissetriz dos quadrantes II e IV;



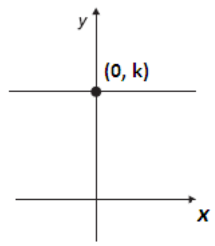
A função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por y = x é chamada de *função identidade.*

2. Função Constante

Uma função f: $\Re \rightarrow \Re$ recebe a denominação *função constante* quando a cada x $\in \Re$ associa sempre o mesmo elemento k $\in \Re$.

$\boxed{f(x) = k}$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0, k). Com isso, a imagem da função f(x) = k é conjunto Im(f) = {k}.



Em Sala

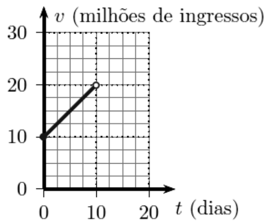
01) (ACAFE SC) Uma fábrica produz e vende peças para as grandes montadoras de veículos. O custo da produção mensal dessas peças é dado através da função C=6000+14x, onde x é o número de peças produzidas por mês. Cada peça é vendida por R$ 54,00. Hoje, o lucro mensal dessa fábrica é de R$ 6.000,00. Para triplicar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:
a) o triplo do que produz e vende.
b) 200 unidades a mais do que produz e vende.
c) 50% a mais do que produz e vende.
d) o dobro do que produz e vende.

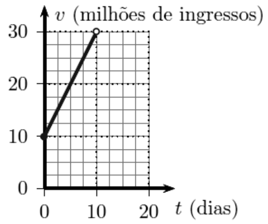
02) (IBMEC SP) Os ingressos para a pré-estreia mundial de um filme começaram a ser vendidos 20 dias antes da exibição do filme, sendo que:

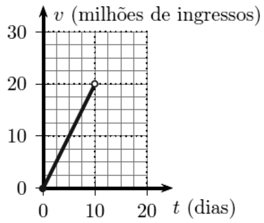
- nos 10 primeiros dias desse período, as vendas foram feitas exclusivamente nas bilheterias;
- nos dez últimos dias, as vendas ocorreram simultaneamente nas bilheterias e pela internet.

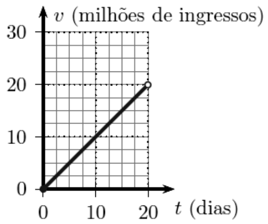
Considere que t representa o tempo, em dias, desde o início das vendas e v(t) o total de ingressos vendidos, em milhões, até o tempo t.

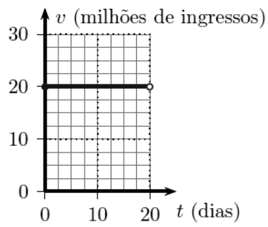
Durante as vendas exclusivas nas bilheterias, a capacidade de atendimento dos guichês dos cinemas do mundo todo, ao longo do tempo, era sempre a mesma, totalizando a venda de 2 milhões de ingressos por dia. Assim, o gráfico que melhor descreve v(t) para esse período, em função de t, é

a)


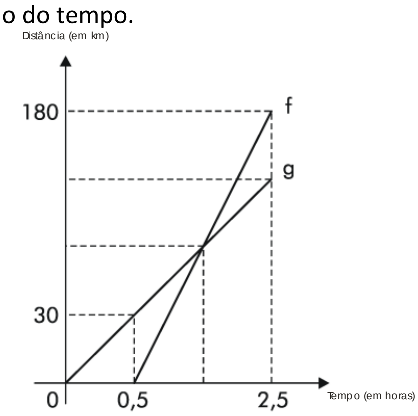
b)


c)


d)


e)


03) (UFRGS) Dois carros partem de uma mesma cidade, deslocando-se pela mesma estrada. O gráfico abaixo apresenta as distâncias percorridas pelos carros em função do tempo.



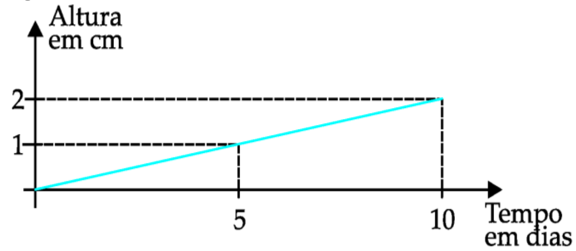
Analisando o gráfico, verifica-se que o carro que partiu primeiro foi alcançado pelo outro ao ter percorrido exatamente:

a) 60km b) 85km c) 88km d) 90km e) 91km

04) (Fuvest-SP) Um veículo parte do repouso em movimento retilíneo e acelera a $2 m/s^2$. Determine sua velocidade e a distância percorrida após 3s.

Testes

05) (Vunesp-SP) Um botânico mede o crescimento de uma planta,em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, resulta a figura abaixo. Se for mantida sempre esta relação entre tempo e altura, a planta terá, no 30º dia, uma altura igual a:



a) 5 cm b) 6 cm c) 3 cm d) 15 cm e) 30 cm

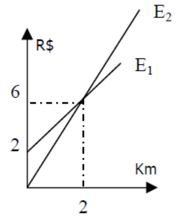
06) (UNB) Um motorista de taxi, em uma determinada localidade, cobra uma quantia mínima fixa de cada passageiro, independente-mente da distância a ser percorrida , mais uma certa quantia, também fixa, por quilômetro rodado. Uma passageiro foi transportado por 30km e pagou R$ 32,00. Um outro passageiro foi transportado por 25km e pagou R$ 27,00. Calcule o valor em reais cobrado por quilômetro rodado.

07) O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que hoje ela vale R$800,00, e que daqui a 5 anos valerá R$ 160,00, o seu valor, em reais, daqui a três anos será:

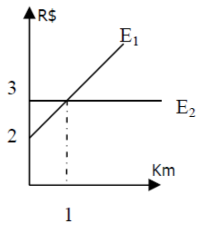
a) 480 b) 360 c) 380 d) 400 e) 416

08) (FURG – 08) Em uma determinada localidade, a empresa E1 de táxi cobra R$2,00 a bandeirada e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. A empresa E2 cobra R$ 3,00 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada. O gráfico que representa as duas tarifas é:

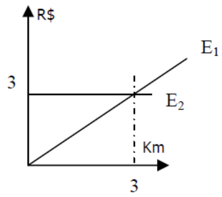
A)



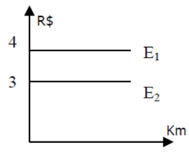
B)



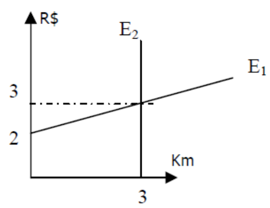
C)



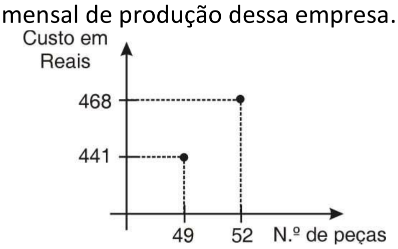
D)



E)



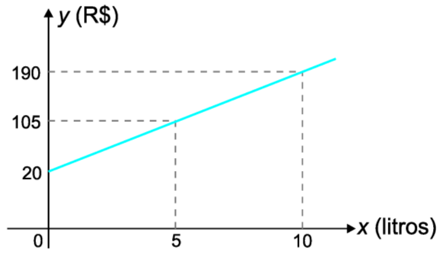
09) (UFPEL – 07) Muitos brasileiros sonham com empregos formais. Na falta destes, cada vez mais as pessoas precisam buscar formas alternativas de conseguir uma renda. Para isso, uma família decidiu montar uma malharia. O gráfico abaixo mostra o custo mensal de produção dessa empresa.



Sabendo que as peças são vendidas por R$ 19,50 e que a família almeja um lucro mensal de R$ 4200,00, o número de peças produzidas e vendidas, para atingir esse fim, deverá ser:

a) 215 b) 400 c) 467 d) 525 e) 494

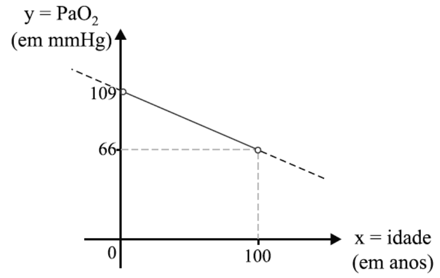
10) (Santo André-SP) O gráfico mostra como o dinheiro gasto (y) por uma empresa de cosméticos, na produção de perfume, varia com a quantidade de perfume produzida (x). Assim, podemos afirmar:



a) Quando a empresa não produz, não gasta.
b) Para produzir 3 litros de perfume, a empresa gasta R$ 76,00.
c) Para produzir 2 litros de perfume, a empresa gasta R$ 54,00.
d) Se a empresa gastar R$ 170,00, então ela produzirá 5 litros de perfume.
e) Para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa gasta menos do que para fabricar o quinto litro.

11) (Fac. Santa Marcelina SP/2014)

A pressão parcial de oxigênio no sangue, denotada por PaO_2, é uma medida que exprime a eficácia das trocas de oxigênio entre os alvéolos e os capilares pulmonares. A reta indicada na figura representa a PaO_2 ideal em função da idade do indivíduo, para idade entre zero e cem anos.



De acordo com os dados desse modelo, um indivíduo de 50 anos, com PaO_2 em nível 10% acima do ideal, tem PaO_2, em mmHg, igual a

a) 85,35 b) 96,25 c) 59,95 d) 79,85 e) 98,15

12) (Anhembi Morumbi SP/2013)

Pesquisadores estabeleceram a seguinte relação linear entre o número de respirações por minuto (y) e a pressão parcial de dióxido de carbono (CO_2) nos pulmões (indicado por x e medido em mmHg):

$$y = \frac{53x - 930}{90}, \text{ para } x \in [40,70].$$

Se uma pessoa estiver em uma cidade e sua respiração por minuto for 14,4, então a pressão de CO_2 em seus pulmões, em mmHg, será de

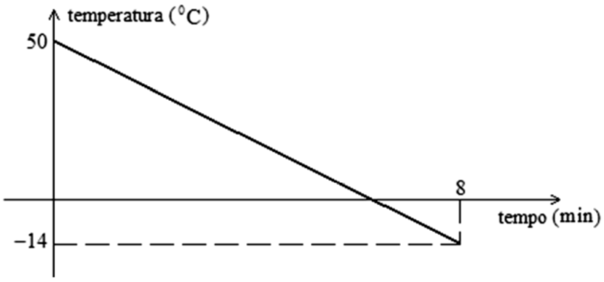
a) 42. b) 40. c) 39. d) 43. e) 41.

13) (UEL- 07) O gerente de uma agência de turismo promove passeios de bote para descer cachoeiras. Ele percebeu que quando o preço pedido para esse passeio era R$ 25,00, o número médio de passageiros por semana era de 500. Quando o preço era reduzido para R$ 20,00, o número médio de fregueses por semana sofria um acréscimo de 100 passageiros. Considerando que essa demanda seja linear, se o preço for reduzido para R$ 18,00, o número médio de passageiros esperado por semana será:

a) 360 b) 540 c) 640 d) 700 e) 1360

14) (PUC MG/2013)

Uma barra de ferro, com temperatura inicial de 50 ^{0}C, é esfriada até –14 ^{0}C . O gráfico representa a variação da temperatura dessa barra em função do tempo, medido em minutos.



Com base nessas informações, pode-se estimar que essa barra deve atingir a temperatura de zero graus centígrados depois de:

a) 6 min 05 s
b) 6 min 10 s
c) 6 min 15 s
d) 6 min 25 s

15) (UNIFOR CE/2013)

Suponha que a massa de uma naftalina esférica decresce com o tempo, devido à sublimação, e sempre mantém a forma esférica. Suponha, ainda, que seu raio **r** decresce linearmente com o tempo **t**. Considerando que, em certo instante, o raio é 0,80 mm e, 6 dias mais tarde, é 0,50mm, assinale a opção que indica o tempo (em dias) para a completa sublimação da naftalina.

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

16) (UFRN/2013)

Uma empresa de tecnologia desenvolveu um produto do qual, hoje, 60% das peças são fabricadas no Brasil, e o restante é importado de outros países. Para aumentar a participação brasileira, essa empresa investiu em pesquisa, e sua meta é, daqui a 10 anos, produzir, no Brasil, 85% das peças empregadas na confecção do produto. Com base nesses dados e admitindo-se que essa porcentagem varie linearmente com o tempo contado em anos, o percentual de peças brasileiras na fabricação desse produto será superior a 95% a partir de

a) 2027 b) 2026 c) 2028 d) 2025

17) (UECE/2013)

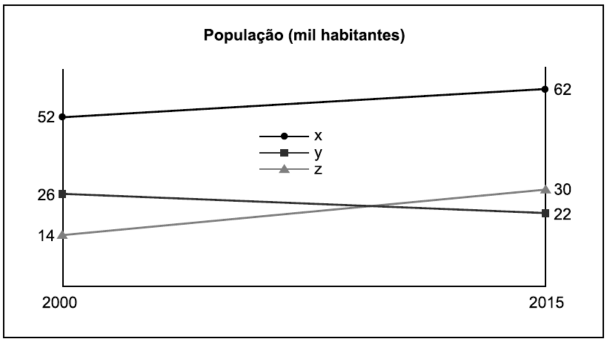
No mundo empresarial é costumeira a realização de análise da evolução patrimonial, do faturamento anual, do volume comercializado e do lucro das empresas, dentre outros segmentos de acompanhamento e controle. A Associação Brasileira do Meio Hoteleiro – ABMH constatou que o faturamento anual das empresas associadas quase dobrou no período 2006 a 2011, passando de 8 bilhões de reais em 2006 para 15,8 bilhões em 2011.

Admitindo-se que a evolução observada ocorreu de forma linear crescente no período analisado, é possível afirmar corretamente que o faturamento anual no ano de 2009, em bilhões de reais, foi de

a) 11,12. b) 11,80. c) 12,68. d) 13,40.

Exercícios Estilo ENEM

18) (UEFS BA)



O gráfico mostra a evolução da população das cidades X, Y e Z, entre os anos 2000 e 2015.

Supondo que essas tendências se mantenham, a população total de Y e Z irá alcançar a de X em

a) 2030
b) 2045
c) 2060
d) 2075
e) 2090

19) (UFT TO/2013)

Há uma escada reta desde o pé de um morro até seu topo de coeficiente angular de subida de 2%, sendo que a altura do morro é de 30 metros. Desejamos construir uma segunda escada de coeficiente angular de subida de 4%. A quantos metros de distancia da escada existente teria que ser construída esta segunda escada?

a) 270 b) 375 c) 500 d) 750 e) 1500

20) (Unicastelo SP/2013)

Uma loja vende certo tipo de suplemento alimentar por R$ 12,00 o frasco, mas, dependendo da quantidade comprada, o valor unitário do frasco diminui proporcionalmente, conforme mostra a tabela.

N.º DE FRASCOS COMPRADOS	VALOR UNITÁRIO DO FRASCO
4	R$ 12,00
10	R$ 10,00
16	R$ 8,00

Supondo que no intervalo de 4 até 16 frascos o preço por frasco obedeça a uma função do 1.º grau, estabilizando o preço a partir daí, pode-se concluir que o valor total, em reais, a ser pago por uma pessoa que comprar 13 frascos será de

a) 49 b) 73 c) 85 d) 98 e) 117

GABARITOS – AULA04

1) D 2) C 3) d 4) 9 m e 6 m/s 5) b 6) R$ 1,00
7) e 8) a 9) b 10) c 11) B 12) A 13) c 14) C
15) E 16) A 17) C 18) E 19) D 20) E

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 05

Função Quadrática I

1. Definição

Uma função f de $\Re$ em $\Re$ é polinomiail do 2º grau se a cada $x \in R$ associa o elemento $ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \Re$ e $a \neq 0$.

$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ a, b, $c \in \Re$ e $a \neq 0$

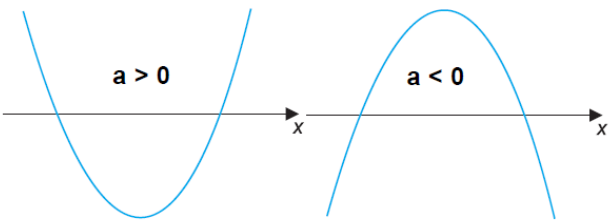
Observe alguns exemplos:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 9$, onde a = 3, b = – 7 e c = 9
b) $f(x) = -2x^2 + 7x$, onde a = – 2, b = 7 e c = 0
c) $f(x) = x^2 - 8$, onde a = 1, b = 0 e c = – 8.

2. Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º Grau de R em R é uma parábola. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal do coeficiente **a** (coeficiente de x^2). Assim quando:

- **a > 0** tem-se a parábola com concavidade para cima
- **a < 0** tem-se parábola com concavidade para baixo



3. Pontos Notáveis da Parábola

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \Re$ e $a \neq 0$. A parábola que representa a função descrita possui alguns interceptos notáveis.

- <u>INTERCEPTO COM EIXO y</u>

O ponto que o gráfico intercepta o eixo y possui coordenadas (0,c)

- <u>INTERCEPTO COM EIXO x (RAÍZES OU ZEROS DA FUNÇÃO)</u>

Para determinar o(s) ponto(s) em que o gráfico intercepta o eixo x, deve-se fazer f(x) = 0.
Determinam-se, então, as raízes ou zeros da função resolvendo-se a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde:

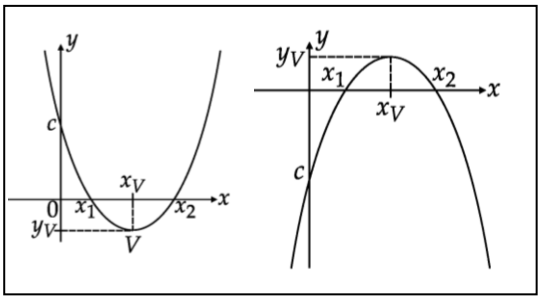
$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Lembre-se que $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado discriminante.

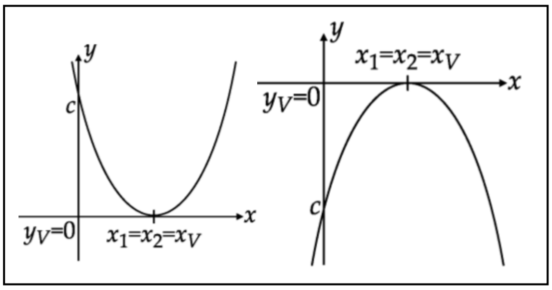
Se $\Delta > 0$, tem-se duas raízes reais e diferentes
Se $\Delta = 0$, tem-se duas raízes reais e iguais
Se $\Delta < 0$, não há raízes reais

A parábola que representa a função polinomial do 2º grau pode se "comportar" de seis modos possíveis, conforme os valores do coeficiente **a** e de Δ . Observe o quadro abaixo:

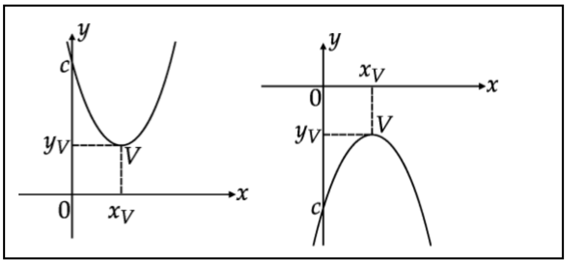
- **Δ > 0**



- **Δ = 0**



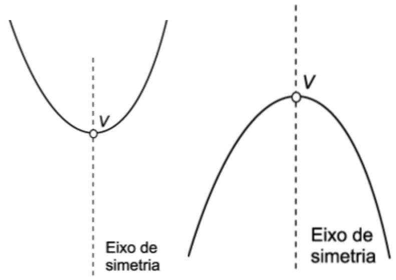
- **Δ < 0**



4. Estudo do vértice da parábola

O vértice da parábola é o ponto que corresponde à ordenada máxima ou mínima, e indicaremos por $V(x_V, y_V)$.

- O vértice é o ponto de máximo da função se a < 0.
- O vértice é o ponto de mínimo da função se a > 0.



Coordenadas do vértice

O vértice é um ponto de coordenadas $V(x_V, y_V)$, onde

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Justificativa:

- Cálculo da abscissa do vértive (x_V)

Dada a função f(x) = ax² + bx + c, sendo x_V a abscissa do vértice da parábola correspondente, os pontos de abscissas $x_V - k$ e $x_V + k$ possuem ordenadas iguais, para qualquer valor de k. Então:

$$a.(x_V - k)^2 + b.(x_V - k) + c = a.(x_V + k)^2 + b.(x_V + k) + c$$
$$a.x_V^2 - 2.a.x_V.k + k^2 + b.x_V - b.k + c = a.x_V^2 + 2.a.x_V.k + k^2 + b.x_V + b.k + c$$
$$-4.a.x_V.k = 2.b.k$$
$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

- Cálculo da ordenada do vértive (y_V)

Substituindo x por $x_V = -\frac{b}{2a}$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$f(x_V) = y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$
$$f(x_V) = y_V = a.\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$f(x_V) = y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$f(x_V) = y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$
$$f(x_V) = y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

5. Imagem da função quadrática

O conjunto – imagem da função polinomial do 2º grau é obtido pela projeção da parábola sobre o eixo y.
Observe que o conjunto – imagem da função polinomial do 2º grau depende diretamente da ordenada do vértice (y_V).

Assim:

- Se a > 0, então Im = $\{y \in R \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$
- Se a < 0, então Im = $\{y \in R \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$

Exercícios Resolvidos:

1) Determine as raízes, o gráfico, as coordenadas do vértice e a imagem da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Resolução:

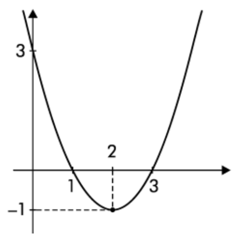
Para determinar as raízes de f(x) fizemos:
f(x) = 0
$x^2 - 4x + 3 = 0$
logo vem que $\mathbf{x_1 = 1}$ $\mathbf{x_2 = 3}$

- O vértice da parábola possui coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.1.3$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$
$$x_v = -\frac{(-4)}{2.1} \qquad y_v = -\frac{4}{4.1}$$
$$\mathbf{x_v = 2} \qquad \mathbf{y_v = -1}$$

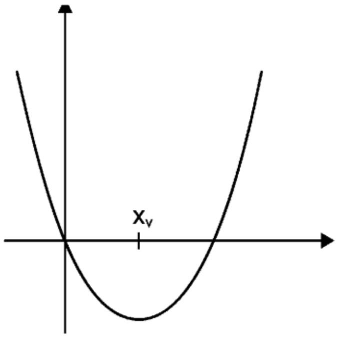
- A parabola intercepta o eixo y no ponto de coordenadas (0, c), logo em (0, 3)



A imagem da função é dada peloconjunto:
Im (f) = $\{y \in R \mid y \geq -1\}$

Em Sala

01) A parabola abaixo é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assinale a alternativa correta:



a) $a < 0, b = 0, c = 0$
b) $a > 0, b = 0, c < 0$
c) $a > 0, b < 0, c = 0$
d) $a < 0, b < 0, c > 0$
e) $a > 0, b > 0, c > 0$

02) Em relação a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ definida de $\Re \to \Re$, determine:

a) sua intersecção com o eixo y

b) sua intersecção com o eixo x

c) seu vértice

d) Imagem da função

e) A área do triângulo cujos vértices são o vértice da parábola e seus zeros

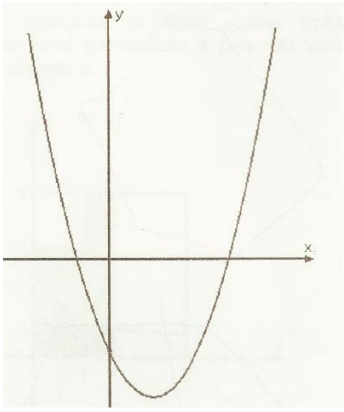
03) Seja a função f de R em R, definida por $f(x) = - x^2 + 3x - 4$. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o vértice da parábola querepresenta f localiza-se:

a) no primeiro quadrante.
b) no segundo quadrante.
c) no terceiro quadrante.
d) no quarto quadrante.
e) sobre o eixo das abscissas.

04) (UFPB – PB) Considere a função $f:[1; 7] \to \Re$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Sejam m e M, respectivamente, o menor e o maior valor que f(x) pode assumir. Determine a média aritmética entre m e M.

Testes

05) (UFRGS – RS) O gráfico do polinômio de coeficientes reais $p(x) = ax^2 + bx + c$ está representado abaixo.



Com base nos dados desse gráfico, é correto afirmar que os coeficientes a, b e c satisfazem as desigualdades

a) $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$
b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$
c) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$
d) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$
e) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$

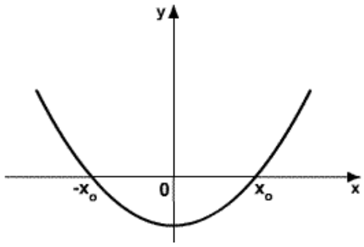
06) Considere a função real definida por $f(x) = 2x^2 - 16x$. Obtenha:

a) As coordenadas dos pontos em que a parábola correspondente intercepta o eixo das abscissas.
b) As coordenadas do vértice da correspondente parábola.
c) conjunto-imagem da função

07) (UFRGS – RS) Dadas as funções f e g, definidas respectivamente por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 - 4x - 3$ e representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, a distância entre seus vértices é

a) 4.
b) 5.
c) $\sqrt{5}$.
d) $\sqrt{10}$.
e) $2\sqrt{5}$.

08) (UFMG – MG) O gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é:



Pode–se afirmar que:

a) $a > 0$, $b = 0$, $c < 0$
b) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$
c) $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$
d) $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$
e) $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$

09) Determine as raízes, o gráfico, as coordenadas do vértice e a imagem de cada função.

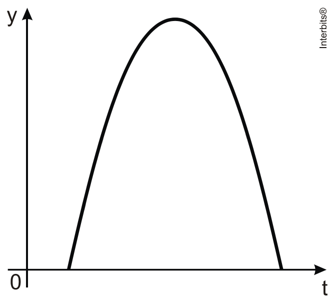
a) $f: \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f: \Re \to \Re, \quad f(x) = (x + 2)(x - 4)$

c) $f: \Re \to \Re, \quad f(x) = -x^2 + 2x - 1$

d) $f: \Re \to \Re, \quad f(x) = x^2 - 3x$

10) (UFSM – RS) Uma pessoa ingere uma certa substância que se concentra em seu cérebro. O gráfico a seguir mostra essa concentração em função do tempo t.



Admitindo que a concentração y seja dada por uma função quadrática $y=at^2+bt+c$, é correto afirmar que

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.
b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.
c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.
d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.
e) $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac = 0$.

11) (UFSM – RS) A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva.
Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão

$$V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$$

representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t (em minutos).

Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?

a) 360.
b) 180.
c) 120.
d) 6.
e) 3.

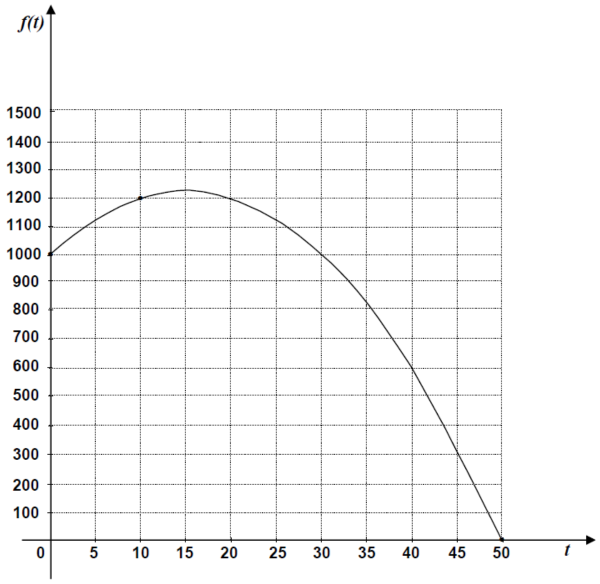
12) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas:

a) ( ) O vértice da parábola representada pela função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ é o ponto de coordenadas (4, - 4)

b) ( ) Seja a função f de R em R, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o vértice da parábola que representa f localiza-se no terceiro quadrante.

c) ( ) Considere a parábola $y = -x^2 + 6x$ definida em R x R. A área do triângulo cujos vértices são o vértice da parábola e seus zeros, é 27.

13) (UFSC – SC) Os praguicidas, também denominados pesticidas, defensivos agrícolas ou agrotóxicos, são substâncias que, aplicadas à lavoura, permitem matar seres que podem prejudicá-la. No entanto, esses produtos apresentam desvantagens pois, devido a sua grande estabilidade no meio ambiente, sua velocidade de decomposição natural é muito lenta. Muitos insetos se tornaram resistentes a esses produtos e grandes quantidades foram utilizadas para combater um número cada vez maior de espécies. Suponha que em um laboratório foi pesquisada a eficiência do DDT (dicloro-difenil-tricloroetano) no combate a uma determinada população de insetos. O gráfico abaixo representa a população de insetos em função do tempo *t*, em dias, durante o período da experiência.



01. A função que descreve a relação entre a população de insetos e o tempo é $f(t) = -t^2 + 30t + 1000$.
02. O número inicial da população de insetos é de *1200* insetos.
04. A população de insetos cresce somente até o décimo dia.
08. No vigésimo dia de experiência a população de insetos é igual à população inicial.
16. A população de insetos foi exterminada em *50* dias.

14) (UFSC – SC) Seja f: R → R, definida por: $f(x) = -x^2$, determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras:

01. O gráfico de f(x) tem vértice na origem.
02. f(x) é crescente em R.
04. As raízes de f(x) são reais e iguais.
08. f(x) é decrescente em $[0, +\infty)$
16. $Im(f) = \{ y \in R \mid y \leq 0\}$
32. O gráfico de f(x) é simétrico em relação ao eixo x

15) (ACAFE – SC) Seja a função $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ de domínio [-2, 2]. O conjunto imagem é:

a) [0, 3]
b) [-5, 4]
c) $]-\infty, 4]$
d) [-3, 1]
e) [-5, 3]

16) (IBMEC – RJ) O gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$ é uma parábola de vértice V e intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A área do triângulo AVB é

a) 27/8
b) 27/16
c) 27/32
d) 27/64
e) 27/128

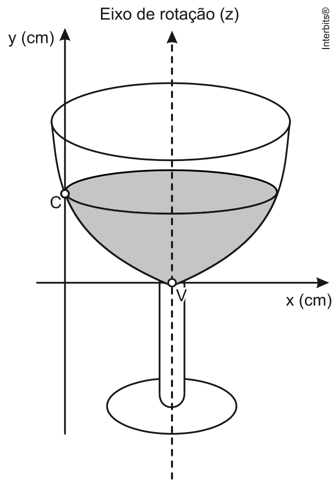
17) (UFRGS – RS) Considere os gráficos das funções f, g e h, definidas por $f(x)=2$, $g(x)=x^2 - 5x + 6$ e $h(x) = x^2 - 11x + 30$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

O número de pontos distintos em que o gráfico de f intercepta os gráficos de g e h é

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

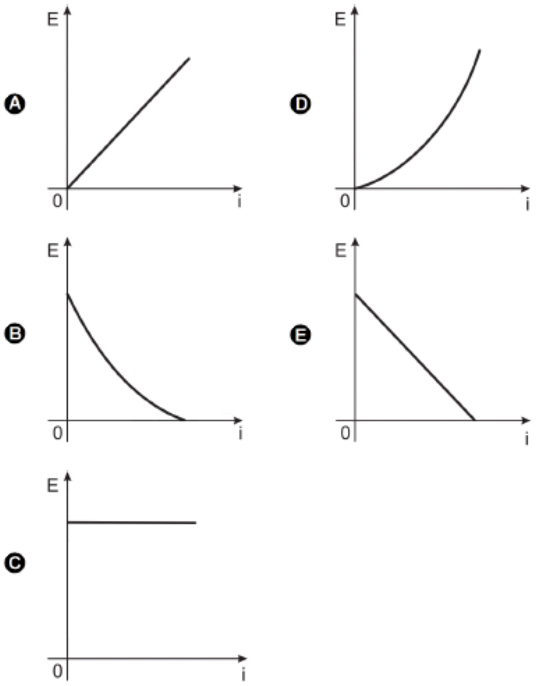


A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

19) (ENEM) Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho. Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?



20) (ENEM) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{7}{5}x.$

b) $y = -\dfrac{1}{10}x^2 + 2x.$

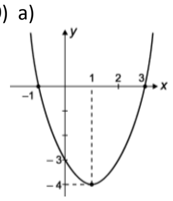
c) $y = \dfrac{1}{24}x^2 + \dfrac{7}{12}x.$

d) $y = \dfrac{4}{5}x + 2.$

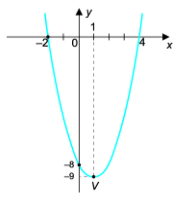
e) $y = x.$

GABARITO – AULA 05

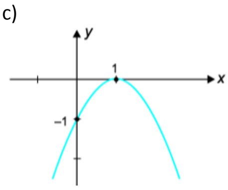
1) c
2) a) (0, 8) b) (2, 0) e (4, 0) c) (3, -1)
d) Im = [-1 , ∞ [e) 1 u.A
3) d **4)** 7 **5)** b
6) a) (0, 0) e (8, 0)b) V(4, -32)
c) Im(f) = {y ∈ℜ/ y ≥ - 32}
7) e
8) a
9) a)



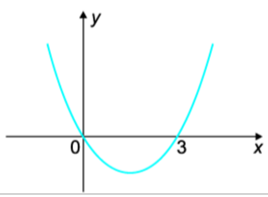
raízes: -1 e 3 vértice: (1, -4) Im = { y ∈ R / y ≥ – 4 }
b)



raízes: -2 e 4 vértice: (1, -9) Im = { y ∈ R / y ≥ -9 }
c)



raiz: 1 vértice: (1, 0) Im = { y ∈ R / y ≤ 0 }
d)



raízes: 0 e 3 vértice: (3/2, -9/4) Im = {y ∈ R/ y ≥ -9/4}
10) c **11)** d
12) a) V b) F c) V
13) 17 **14)** 29 **15)** b **16)** e **17)** c
18) e **19)** d **20)** a

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 06

Função Quadrática II

1. Forma Fatorada

Toda função da forma f(x) = $ax^2 + bx + c$, com a, b, c $\in \Re$ e $a \neq 0$ pode ser fatorada na forma: $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ onde x_1 e x_2 são as raízes da função.

Justificativa:

Sejam x_1 e x_2 raízes da função f(x) = $ax^2 + bx + c$.

Lembre-se que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Acompanhe o desenvolvimento:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2\right]$$

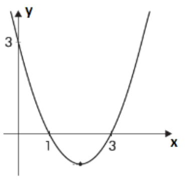
$$f(x) = a\left[x^2 - x.x_1 - x.x_2 + x_1.x_2\right]$$

$$f(x) = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right]$$

$$f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$$

Exercício Resollvido

Escrever a função do 2º grau representada pela parábola abaixo.



Observe que o gráfico fornece 1 e 3 como as raízes da função e o ponto de coordenadas (0, 3).

Partindo da forma fatorada, temos:

$$f(x) = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right]$$

f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

Para definirmos o valor do coeficiente a substituimos o ponto de coordenadas (0, 3) na função. Observe:

f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

3 = a(0 – 1).(0 – 3) $\rightarrow$ a = 1

Logo: f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

f(x) = 1.(x – 1).(x – 3)

f(x) = $x^2 - 4x + 3$

2. Forma Canônica da Função Polinomial do 2º grau

Conhecendo-se as coordenadas do vértice da parábola $V(x_V, y_V)$, podemos escrever a função polinomial do 2º grau assim:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$

Justificativa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

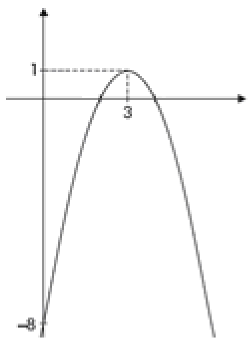
$$f(x) = a(x - x_V)^2 + a.\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\boxed{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$

Exercício Resolvido

Escrever a função do 2º grau representada pela parábola abaixo.



Observe que o gráfico fornece as coordenadas do vértice V(3, 1) e o ponto de coordenadas (0, -8).

Partindo da forma canônica, temos:

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 1$$

Para definirmos o valor do coeficiente a substituimos o ponto de coordenadas (0, -8) na função. Observe:

$f(x) = a(x - 3)^2 + 1$
$-8 = a(0 - 3)^2 + 1$
$9a = -9 \rightarrow a = -1$
Logo: $f(x) = a(x - 3)^2 + 1$
$f(x) = -1(x - 3)^2 + 1$
$f(x) = -x^2 + 6x - 8$

3. Máximos e Mínimos

Em muitas questões contextuais envolvendo funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ faz-se necessário o estudo do valor máximo ou mínimo da função.

- Se a < 0, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor máximo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_v = -\frac{b}{2a}$
- Se a > 0, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor mínimo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_v = -\frac{b}{2a}$

Exercício Resolvido

Um projétil é lançado verticalmente, para cima, e sua trajetória é uma curva de equação $s = -40t^2 + 200t$, **s** é o espaço percorrido, em metros, em **t** segundos. A altura máxima atingida por esse projétil, em metros, é:

Resolução:

A altura máxima atingida por esse projétil é dado pela ordenada do vértice, logo:

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (200)^2 - 4.(-40).0$
$\Delta = 40000$

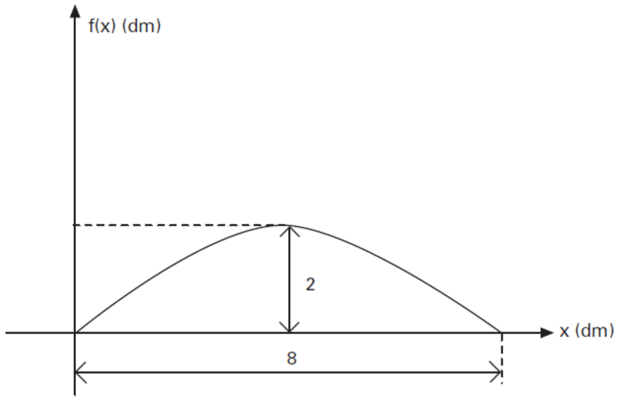
$$h_{máxima} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(40000)}{4.(-40)}$$

$$h_{máxima} = \frac{-40000}{-160}$$

$$h_{máxima} = 250\text{metros}$$

Em Sala

01) (UFSM – RS) A figura indica a trajetória parabólica do salto de uma rã e destaca a distância horizontal máxima (8 dm) e altura máxima (2 dm) atingidas. A função quadrática que expressa a altura em relação à distância horizontal é dada por:



a) $f(x) = 0,125\, x^2 + x$
b) $f(x) = -0,125\, x^2 + x$
c) $f(x) = -0,25\, x^2 + 1,5\, x$
d) $f(x) = -x^2 + 4,5\, x$
e) $f(x) = -0,5x^2 + 2,5\, x$

02) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Obtenha:

a) O valor mínimo de f(x)

b) O valor de x para o qual f(x) é mínimo

03) (PUC – PR) O lucro de uma determinada empresa é dado pela lei L(x) = $- x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em reais). A quantidade que se deve vender para que o lucro seja máximo bem como o valor desse lucro são, respectivamente:

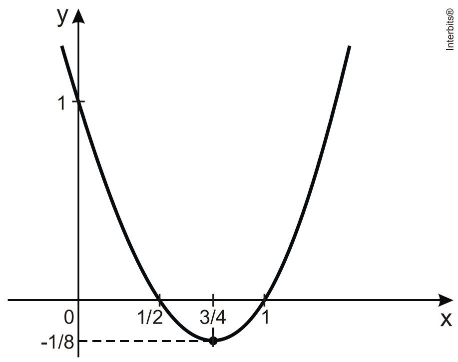
a) 3.000 unidades e R$ 6.000,00
b) 4.000 unidades e R$ 9.000,00
c) 4.000 unidades e R$ 8.000,00
d) 5.000 unidades e R$ 12.000,00
e) 4.500 unidades e R$ 9.000,00

04) (ACAFE-SC) O lucro (L) de uma empresa é dado por L(x) = $- 5x^2 + 60x - 100$, em que x representa a quantidade vendida de um certo produto. O lucro máximo, em milhões de reais, que essa empresa pode obter é:

a) 60
b) 80
c) 120
d) 180
e) 150

Testes

05) (CEFET – MG) A função real representada pelo gráfico é definida por



a) $f(x) = 2x^2 - x - 1$
b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1.$
c) $f(x) = x^2 - 3x + 1.$
d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

06) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = -2x^2 + 16x$. Obtenha:

a) O valor mínimo de f(x)

b) O valor de x para o qual f(x) é mínimo

07) (UCS – RS) O lucro obtido por um distribuidor com a venda de caixas de determinada mercadoria é dado pela expressão $L(x)=\left(\frac{6}{5}x-\frac{0,01}{5}x^2\right)-0,6x$, em que x denota o número de caixas vendidas.

Quantas caixas o distribuidor deverá vender para que o lucro seja máximo?

a) 60
b) 120
c) 150
d) 600
e) 1500

08) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = x^2 – 2x + 3$. Obtenha:

a) O valor mínimo de f(x)

b) O valor de x para o qual f(x) é mínimo

09) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = – x^2 + 4x$. Obtenha:

a) O valor máximo de f(x)

b) O valor de x para o qual f(x) é máximo

10) Um projétil é lançado verticalmente, para cima, e sua trajetória é uma curva de equação $s(t) = – 40t^2 + 200t$, **s** é o espaço percorrido, em metros, em **t** segundos. Determine:

a) O tempo, em segundos que o projétil leva para atingir a altura máxima.

b) A altura máxima atingida por esse projétil, em metros.

11) (ESPM) O Custo de produção e o preço de venda, em reais, de x unidades de certa mercadoria são dados, respectivamente, pelas funções $C(x) = 20x – x^2$ e $V(x) = 60x – 3x^2$, para $0 < x < 20$. O lucro máximo obtido com a venda dessa mercadoria é de:
a) R$ 240,00
b) R$ 200,00
c) R$ 180,00
d) R$ 280,00
e) R$ 300,00

12) (ACAFE - SC) Após o lançamento de um projétil, sua altura h, em metros, t segundos após o seu lançamento é dada por $h(t) = -t^2 + 20t$. Em relação a este lançamento, analise as afirmações a seguir.

I. A altura máxima atingida pelo projétil foi de 10m.
II. O projétil atingiu a altura máxima quando t=10s.
III. A altura do projétil é representada por uma função polinomial quadrática cujo domínio é [0,20].
IV. Quando t=11, o projétil ainda não atingiu sua altura máxima.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I – III
b) I – II – IV
c) II – III
d) III – IV

13) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas:

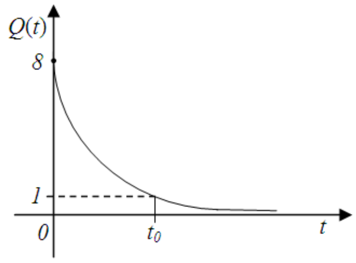
a) (   ) (UFSC – SC) Se o lucro de uma empresa é dado por $L(x) = 4(3 - x)(x - 2)$, onde x é a quantidade vendida, então o lucro da empresa é máximo quando x é igual a 2,2.

b) (   ) (UFSC – SC) O lucro, em reais, para a comercialização de x unidades de um determinado produto é dado por $L(x) = -1120 + 148x - x^2$. Então, para que se tenha lucro máximo, deve-se vender 74 produtos.

c) (   ) (UFSC) Dentre todos os retângulos com *40m* de perímetro, o de maior área é aquele com lado de *20m* e área de *400m²*.

14) (UFSC – SC) Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. Suponha que a decomposição de uma substância siga a lei dada por $Q(t) = k.2^{-0,2t}$, em que k é uma constante positiva e $Q(t)$ é a quantidade da substância (em gramas) no instante t (em minutos). O valor de t_0, em minutos, considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico a seguir, é *15*.



02. Zero é o menor número real cuja soma com o próprio quadrado é igual ao próprio cubo.

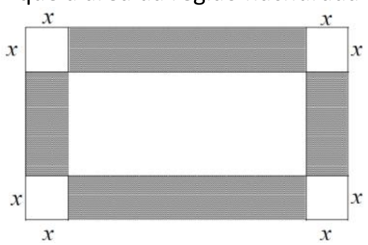
04. Para a função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 5-x & \text{se } 2 < x \le 5 \end{cases}$, a área da região limitada pelos eixos coordenados ($x = 0$ e $y = 0$) e pelo gráfico de f, é *8,5* unidades de área.

08. Se a receita mensal de uma loja de bonés é representada por $R(x) = -200(x - 10)(x - 15)$ reais, na qual x é o preço de venda de cada boné ($10 \le x \le 15$), então a receita máxima será de *R$ 2.500,00*.

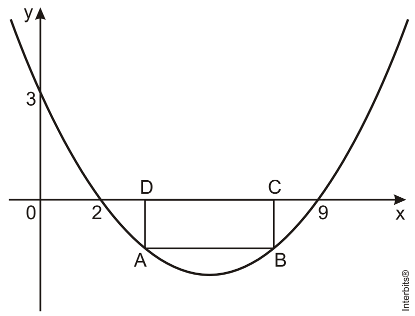
15) (UEM – PR) Sejam f e g funções quadráticas definidas por: $f(x) = 5x - x^2$ e $g(x) = -x^2 + 11x - 10$. Assinale o que for correto.

01) As raízes positivas de f (x) = 0 e g(x) = 0, ordenadas de modo crescente, formam uma progressão geométrica.
02) Existe um único x real, tal que f (x) = g(x).
04) O máximo da função f ocorre em x = 5/2.
08) O valor máximo de f (x) + g(x) é 22.
16) A função h definida por h(x) = f (x) − g(x) também é uma função quadrática.

16) (UFSC – SC) Tem-se uma folha de cartolina com forma retangular, cujos lados medem *56cm* e *32cm* e deseja-se cortar as quinas, conforme ilustração a seguir. Quanto deve medir *x*, em centímetros, para que a área da região hachurada seja a maior possível?



17) (PUC – RJ)O retângulo ABCD tem dois vértices na parábola de equação $y = \frac{x^2}{6} - \frac{11}{6}x + 3$ e dois vértices no eixo *x*, como na figura abaixo.



Sabendo que D = (3,0), faça o que se pede.

a) Determine as coordenadas do ponto A.

b) Determine as coordenadas do ponto C.

c) Calcule a área do retângulo ABCD.

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.
Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t)=\begin{cases}\frac{7}{5}t+20, \text{ para } 0\le t<100\\ \frac{2}{125}t^2-\frac{16}{5}t+320, \text{ para } t\ge 100\end{cases}$$

em que *T* é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e *t* é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.
Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200°C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

a) 100.
b) 108. .
c) 128.
d) 130.
e) 150.

19) (FURG – RS) Um número muito grande de pessoas procurou, no fim de semana, o Hospital Universitário "Dr. Miguel Riet Correa Junior", da FURG, em busca de informação e atendimento relativo à gripe A (H1N1). A direção do HU solicita que a população rio-grandina busque primeiramente atendimento nos postos de saúde. Assim, somente as pessoas realmente doentes serão encaminhadas pelos médicos dos postos ao hospital. (Jornal Agora, 21/07/2009, p. 5) Um vírus se espalha em uma cidade com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas infectadas e, também, ao número de pessoas não infectadas. Sendo *R* a rapidez de propagação desse vírus e *x* o número de pessoas infectadas, tem-se $R(x) = 2x(250.000 - x)$. A máxima rapidez de propagação do vírus ocorrerá quando o número de pessoas infectadas for igual a:

a) 312.500
b) 31.250
c) 62.500
d) 250.000
e) 125.000

20) (ACAFE – SC) O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura da barragem de Campos Novos precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago da barragem precisa ser esvaziado e estimaram que, quando da constatação da rachadura, a capacidade C de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por $C(t) = -2t^2 - 12t + 110$, onde t é o tempo em horas.

Com base no texto, analise as afirmações:

I. A quantidade de água restante no lago, 4 horas depois de iniciado o vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.
II. A capacidade desse lago, sabendo que estava completamente cheio no momento em que começou o vazamento, é de 110 milhões de metros cúbicos.
III. Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas depois do início do vazamento.
IV. Depois de 3 horas de vazamento, o lago está com 50% de sua capacidade inicial.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I - II - III
b) I - III - IV
c) III - IV
d) I - II - III - IV

GABARITO - AULA 06

1) b
2) a) 1 b) 2
3) b **4)** b **5)** d
6) a) 4 b) 32
7) c
8) a) 2 b) 1 **9)** a) 4 b) 2 **10)** a) 2,5 b) 250
11) b **12)** c
13) a) F b) V c) F
14) 05 **15)** 14 **16)** 11
17) a) (3, - 1) b) (8, 0) c) 5 unidades de área
18) d **19)** e **20)** a

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 07

Inequações

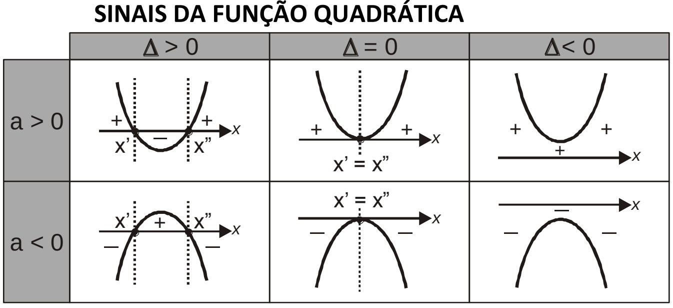
1. Inequações do 2º Grau

Inequação do 2º grau é toda desigualdade que pode ser escrita na forma geral:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \end{cases} \quad \text{com } a \neq 0$$

Para resolver a inequação do 2º grau associa-se a expressão a uma função do 2º grau; assim, pode-se estudar a variação de sinais em função da variável. Posteriormente, seleciona-se os valores da variável que tornam a sentença verdadeira. Estes valores irão compor o conjunto-solução.

SINAIS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA



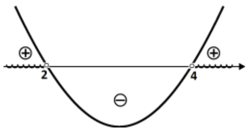
Exercícios Resolvidos:

1) Resolver a inequação $x^2 - 6x + 8 > 0$

Resolução:

Determinar a solução da inequação $x^2 - 6x + 8 > 0$ significa encontrar os valores reais de x para os quais a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ assume valores positivos.

- Raízes de f(x): $x' = 2$ e $x'' = 4$
- Parábola com concavidade para cima (a = 1 > 0)



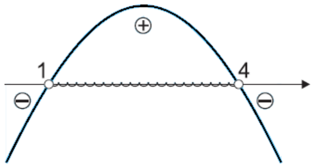
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ ou $S =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

2) Resolver a inequação $-x^2 + 5x - 4 > 0$

Resolução:

Determinar a solução da inequação $-x^2 + 5x - 4 > 0$significa encontrar os valores reais de x para os quais a função $f(x) = -x^2 + 5x - 4 > 0$ assume valores negativos.

- Raízes de f(x): $x' = 1$ e $x'' = 4$
- Parábola com concavidade para baixo (a = - 1 < 0)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$ ou $S =]1, 4[$

2. Inequações – Produto

Sejam f(x) e g(x) funções na variável x. Inequação–produto é toda inequação do tipo:

a) $f(x).g(x) \geq 0$ b) $f(x).g(x) > 0$
c) $f(x).g(x) \leq 0$ d) $f(x).g(x) < 0$

Observe como se dá resolução de algumas inequações-produto.

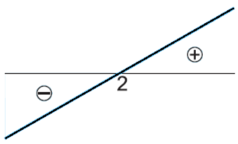
1) Resolva a inequação $(x - 2).(-2x + 8) > 0$

Resolução: Devemos encontrar valores reais de x que fazem com que o produto $(x - 2).(-2x + 8)$ seja positivo.
Observe o procedimento
Vamos considerar cada um dos fatores do primeiro membro da desigualdade como sendo uma função polinomial do 1° grau.

$$\underbrace{(x-2)}_{f(x)}\underbrace{(-2x+8)}_{g(x)} > 0$$

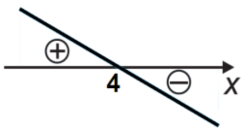
<u>Estudo do sinal de f(x)</u>:

Raiz de f(x): $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

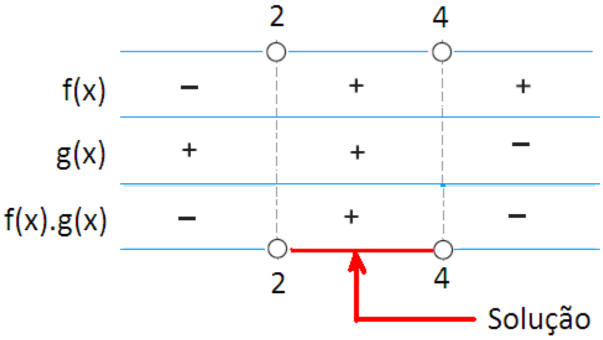


<u>Estudo do sinal de g(x)</u>:

Raiz de g(x): $-2x + 8 = 0 \rightarrow x = 4$



Colocamos agora em um quadro os sinais de cada função e determinamoso sinal do produto f(x).g(x). Acompanhe:



Veja que a parte destacada indica os valores de x que tornam o produto (x – 2).(–2x + 8) positivo.

Logo: S = $\{x \in R / 2 < x < 4\}$

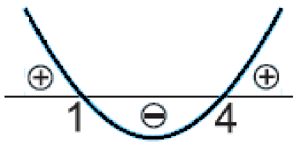
2) Resolva a inequação $(x^2 - 5x + 4)(x - 2) \le 0$

Resolução: Neste caso, devemos encontrar valores reais de x que fazem com que o produto $(x^2 - 5x + 4)(x - 2)$ seja negativo ou nulo.

$$\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{f(x)}\underbrace{(x - 2)}_{g(x)} \le 0$$

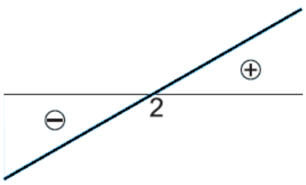
<u>Estudo do sinal de f(x)</u>:

Raiz de f(x): $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

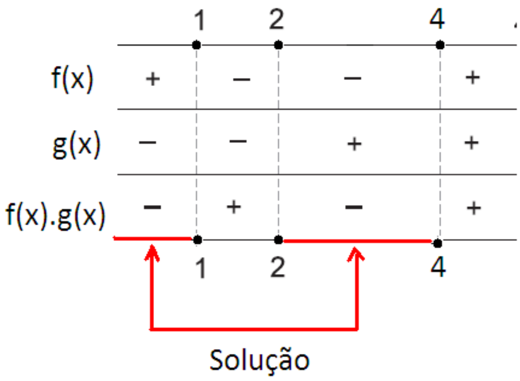


<u>Estudo do sinal de g(x)</u>:

Raiz de g(x): $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$



Finalmente, colocamos em um quadro os sinais de cada função e determinamoso sinal do produto f(x).g(x).



A parte destacada indica os valores de x que tornam o produto $(x^2 - 5x + 4)(x - 2)$ negativo ou nulo.

Logo: S = $\{x \in R / x \le 1 \text{ ou } 2 \le x \le 4\}$

3. Inequações – Quociente

Sejam f(x) e g(x) funções na variável x. Inequação–quociente é toda inequação do tipo:

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ge 0$ b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ c) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le 0$ d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$

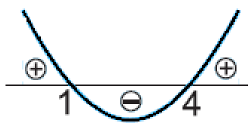
O procedimento para a resolução deste tipo de inequação é o mesmo que o utilizado nas inequações-produto. No entanto, é necessário lembrar que o denominador de uma fração não pode ser nulo, ou seja, nos casos acima vamos considerar $g(x) \ne 0$. Acompanhe um exemplo:

Resolva a inequação $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 2} \le 0$

Resolução:

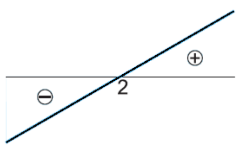
<u>Estudo do sinal de f(x)</u>:

Raiz de f(x): $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

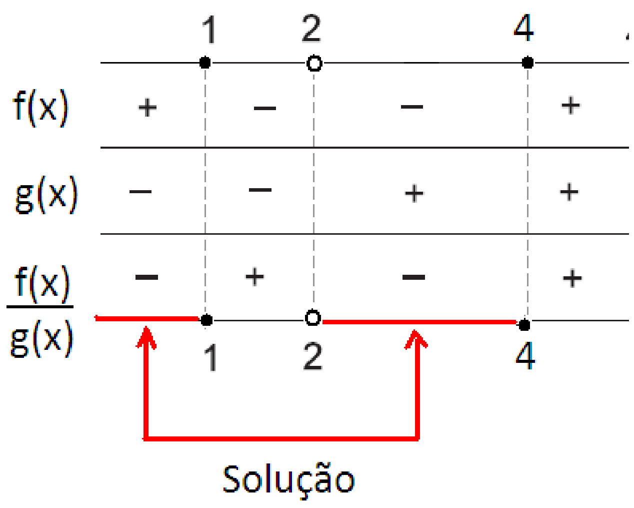


<u>Estudo do sinal de g(x)</u>:

Raiz de g(x): $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$



Quadro de sinais:



$S = \{x \in R \,/\, x \le 1 \text{ ou } 2 < x \le 4\}$

OBSERVAÇÃO:

Se for conveniente, podemos transformar qualquer inequação-quociente em uma inequação-produto. Observe o quadro abaixo:

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) > 0$

2) $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) < 0$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) \ge 0 \text{ e } g(x) \ne 0$

4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) \le 0 \text{ e } g(x) \ne 0$

Em Sala

01) (UDESC) O conjunto solução da inequação $x^2 - 2x - 3 \le 0$ é:

a) $\{x \in R \mid -1 < x < 3\}$
b) $\{x \in R \mid -1 < x \le 3\}$
c) $D = \{x \in R \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$
d) $D = \{x \in R \mid x \le -1 \text{ ou } x \ge 3\}$
e) $\{x \in R \mid -1 \le x \le 3\}$

02) Resolver, em $\Re$, as seguintes inequações:

a) $(x - 3).(x^2 - 7x + 10) > 0$

b) $\dfrac{x^2 - 8x + 12}{1 + x} \le 0$

03) Determine o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 7}}$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-7}}$

04) (UDESC – SC) Se *n* é um número inteiro, então a quantidade de números racionais da forma $\dfrac{2n}{3n+15}$ que são estritamente menores que $\dfrac{7}{13}$, é:

a) 21
b) 25
c) 20
d) infinita
e) 27

Testes

05) (PUC – RJ) O conjunto das soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x \le 0$ é:
a) {0,3}
b) {1,2}
c) {–1,0,2}
d) {1,2,3}
e) {0,1,2,3}

06) (FGV – SP) O número de soluções inteiras da inequação $\dfrac{2x+6}{14-2x} \ge 0$ é:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) infinito

07) (MACK – SP) A função $f(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto solução

a) $\{x \in \Re / -3 < x \le -2 \text{ ou } 1 \le x < 3\}$
b) $\{x \in \Re / -3 \le x < -2 \text{ ou } 1 < x \le 3\}$
c) $\{x \in \Re / -3 \le x < -2 \text{ ou } 1 \le x \le 3\}$
d) $\{x \in \Re / -2 < x \le -1 \text{ ou } 1 \le x \le 3\}$
e) $\{x \in \Re / -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x \le 3\}$

08) Resolver em $\Re$ as seguintes inequações:

a) $x^2 - 6x + 8 > 0$

b) $x^2 - 6x + 8 \le 0$

c) $-x^2 + 9 > 0$

d) $x^2 \leq 4$

e) $x^2 > 6x$

f) $x^2 \geq 1$

g) $x^2 - 12x + 27 > 0$

h) $x^2 - 12x + 27 \leq 0$

i) $x^2 - x - 20 < 0$

j) $x^2 - x - 20 \geq 0$

l) $-x^2 + 6x - 8 < 0$

m) $2x^2 \geq 5x - 2$

n) $-x^2 < -4$

09) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x^2 - 2x + 5}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

10) Se $f(x) = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{4}}$, então o domínio de f é o intervalo:

a) $[-3, 3]$
b) $]-3, 3[$
c) $]-\infty, -3] \cup [3, \infty)$
d) $]-\infty, -3[\cup]3, \infty)$
e) $[-9, 9]$

11) Resolva, em R, as seguintes inequações:

a) $(x^2 - 2x - 3).(-x^2 - 3x + 4) > 0$

b) $(x^2 - 2x - 3).(-x^2 - 3x + 4) \leq 0$

c) $(x - 3)(x^2 - 16) < 0$

d) $x^3 \leq x$

e) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 \geq 0$

12) Resolva, em R, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} < 0$

c) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$

d) $\frac{2}{x-1} < 1$

13) (UEPG - PR) O conjunto solução da inequação $\frac{3x-2}{x-3} \leq 1$ é S = {x ∈ R/ a ≤ x < b}. Assim, é correto afirmar:

01. a.b < 0
02. a – b > 0
04. a + b é um número natural
08. $\frac{a}{b}$ é um número racional

14) O domínio da função real $h(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{3-x}$ é representado pelo intervalo:

a)]0, 2[
b) [3, + ∞[
c) [1, 3]
d)]– ∞, 0] ∪ [1, 3]

15) (PUC – RS) A solução, em R, da inequação $x^2 < 8$ é:

a) $\{-2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\}$
b) $[-2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}]$
c) $(-2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2})$
d) $(-\infty;\,2\sqrt{2})$
e) $(-\infty;\,2\sqrt{2}]$

16) (UDESC) Ao determinar o domínio da função g(x) = $\sqrt{\frac{2x}{x+2}}$, um estudante fez o seguinte desenvolvimento:

$\frac{2x}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \text{ e } x+2 > 0 \Rightarrow x \geq 0 \text{ e } x > -2$

e concluiu que a solução é o conjunto {x ∈ R/ x ≥ 0}. Sobre o desenvolvimento e a solução acima, três outros estudantes fizeram as seguintes análises:

- O estudante 1 disse que o desenvolvimento e a solução estão incorretos.
- O estudante 2 disse que o desenvolvimento está correto, e que a solução correta é {x ∈ R/ x ≥ - 2 }.
- O estudante 3 disse que o desenvolvimento está incorreto, e que a solução correta é {x ∈ R/ x < - 2 ou x ≥ 0}.

Assinale a alternativa **correta**.

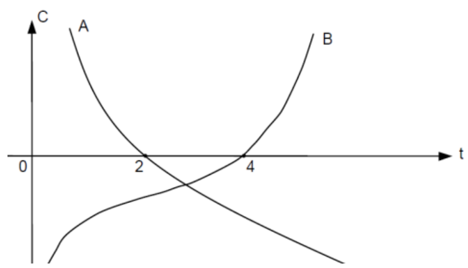
a) Somente a análise dos estudantes 1 e 3 está correta.
b) Somente a análise dos estudantes 1 e 2 está correta.
c) Somente a análise dos estudantes 2 e 3 está correta.
d) Somente a análise do estudante 1 está correta.
e) Somente a análise do estudante 2 está correta.

17) (ACAFE – SC) É correto afirmar que o conjunto domínio, D(f(x)) da função f(x) = $\frac{\sqrt{x^2-81}}{x-6}$ é:

a) D(f(x)) = [- 9, 9] e x ≠ 6
b) D(f(x)) = (9, +∞)
c) D(f(x)) = (- ∞, - 9] ∪ [9, +∞)
d) D(f(x)) = (- ∞, + ∞) x ≠ 6

Exercícios estilo ENEM

18) (IBMEC – SP) O gráfico a seguir mostra o comportamento (C) de dois processos industriais, A e B, ao longo do tempo (t). O departamento de engenharia determinou que só são viáveis os valores de t para os quais A(t) . B(t) > 0. Então, t necessariamente pertence a:



a) [2, 4]
b)]0, 2[∪]4, + ∞ [
c)]2, 4[
d)]0, 2[
e)]4, + ∞ [

19) (UFPEL) Uma certa espécie tem a sua população descrita através do modelo matemático $f(x) = 0,2x.(1 - x)$. Com base no texto e em seu conhecimentos considerando $f(x) \geq 0$ e x um número real, é correto afirmar que o domínio dessa função é:

a) $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$
b) $[0,2; 1]$
c) $]-\infty; 0,2[\cup [1; +\infty[$
d) $]0, 1]$
e) $[0; 1]$

20) (ACAFE-SC) O lucro de uma empresa é dado por $L(x) = 100(8 - x)(x - 3)$, em que x é a quantidade vendida. Neste caso podemos afirmar que o lucro é:

a) positivo para x entre 3 e 8
b) positivo para qualquer que seja x
c) positivo para x maior do que 8
d) máximo para x igual a 8
e) máximo para x igual a 3

GABARITO - AULA 07

1) e
2) a) $\{x \in R |\ 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$) $\{x \in R |\ x < -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 6\}$
3) a) $D = \{x \in R |\ x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$.
b) $D = \{x \in \Re / x \leq 2 \text{ ou } x > 7\}$ c) $D = \{x \in \Re / x > 7\}$
4) b **5)** e **6)** c **7)** b
8) a) $\{x \in R \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ b) $\{x \in R \mid 2 \leq x \leq 4\}$
c) $\{x \in R \mid -3 < x < 3\}$ d) $\{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$
e) $\{x \in R \mid x < 0 \text{ ou } x > 6\}$ f) $\{x \in R \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
g) $\{x \in R \mid x < 3 \text{ ou } x > 9\}$ h) $\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 9\}$
i) $\{x \in R \mid -4 < x < 5\}$ j) $\{x \in R \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 5\}$
l) $\{x \in R \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ m) $\{x \in R \mid x \leq 1/2 \text{ ou } x \geq 2\}$
n) $\{x \in R \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$
9) a) $\{x \in R \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$ b) $\{x \in R \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$
c) $\{x \in R \mid -5/3 \leq x \leq 1\}$ d) $\{x \in R \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$
10) a
11) a) $]-4, -1[\cup]1, 3[$ b) $]-\infty, -4] \cup [-1, 1] \cup [3, \infty[$
c) $]-\infty, -4[\cup]3, 4[$ d) $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$ e) $[3, \infty[$
12) a) $\{x \in R \mid x < -4 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x > 4\}$
b) $\{x \in R \mid -4 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
c) $\{x \in R \mid x < -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$
d) $\{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
13) 09 **14)** c **15)** c **16)** a **17)** c **18)** c **19)** e
20) a

AULA 08

Paridade e Função Composta

1. Função Par

Uma função *f* é par se, para todo $x \in D(f)$, temos $f(-x) = f(x)$.

Em síntese: Numa função par, valores simétricos do domínio possuem imagens iguais.

Exemplos:

1) Verificar se a função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = 3x^4 + 1$ é par.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 2 e 2

$$\begin{cases} f(-2) = 3(-2)^4 + 1 = 49 \\ f(2) = 3.(2)^4 + 1 = 49 \end{cases}$$

Observe que – 2 e 2 possuem a mesma imagem.

De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x) = 3(-x)^4 + 1 = 3x^4 + 1 \\ f(x) = 3.(x)^4 + 1 = 3x^4 + 1 \end{cases}$$

Observe que f(– x) = f(x). Portanto, a função f(x) é par.

2) Verificar se a função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = 2x^3 + 5x^2$ é par.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 1 e 1

$$\begin{cases} f(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 = 3 \\ f(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 = 7 \end{cases}$$

Observe que – 1 e 1 possuem imagens diferentes.

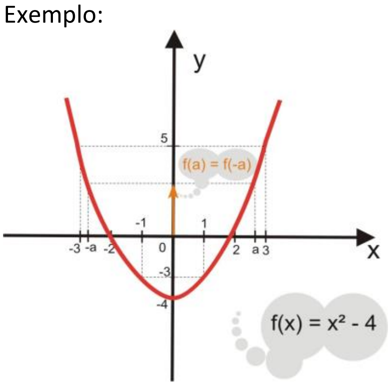
De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 = -2x^3 + 5x^2 \\ f(x) = 2(x)^3 + 5(x)^2 = 2x^3 + 5x^2 \end{cases}$$

Observe que f(– x) ≠ f(x). Portanto, a função f(x) não é par.

Como consequência da definição, uma função *f* é par se e somente se, o seu gráfico cartesiano é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo:



2. Função Ímpar

Uma função *f* é ímpar se, para todo $x \in D(f)$, temos $f(-x) = -f(x)$.

Em síntese: Numa função ímpar, valores simétricos do domínio possuem imagens simétricas.

Exemplos:

1) Verificar se a função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = 2x^3 + x$ é ímpar.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 2 e 2

$$\begin{cases} f(-2) = 2(-2)^3 + (-2) = -18 \\ f(2) = 2.(2)^3 + 2 = 18 \end{cases}$$

Observe que – 2 e 2 possuem imagens simétricas.

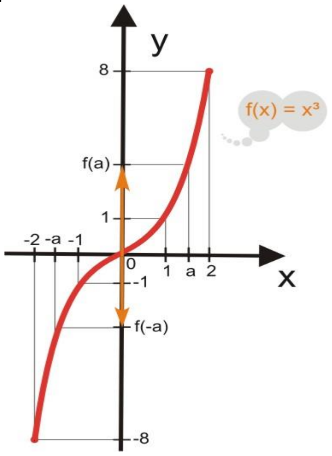
De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - x = -(2x^3 + x) \\ f(x) = 2.(x)^3 + x = 2x^3 + x \end{cases}$$

Observe que f(– x) = – f(x). Portanto, a função f(x) é ímpar.

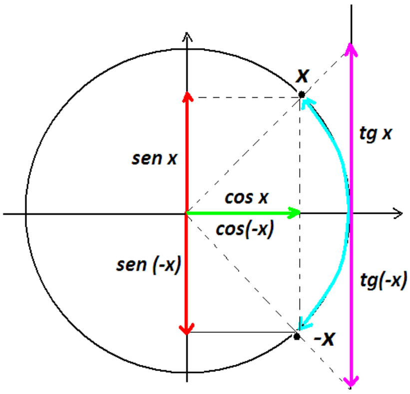
Como consequência da definição, uma função *f* é ímpar se e somente se, o seu gráfico cartesiano é simétrico em relação à origem.

Exemplo:



IMPORTANTE: Paridade das funções trigonométricas

Os arcos trigonométricos x e − x possuem extremidades simétricas em relação ao eixo x.



Podemos concluir pelo esquema acima que:

- Seno é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)}$
- Cosseno é uma função par, ou seja: $\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$
- Tangente é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)}$

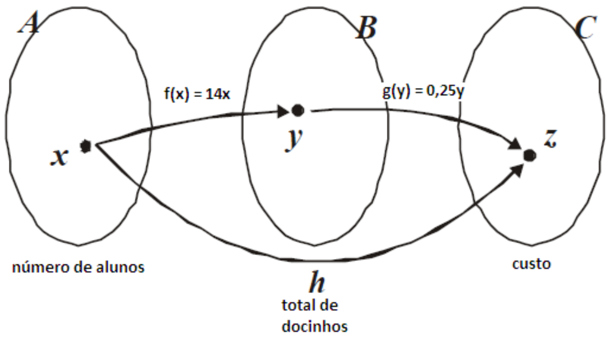
3. Função Composta

3.1. Introdução

Alguns dias antes da confraternização dos alunos da 7ª série da Escola Básica "Aprenda Bem", a diretora estava calculando o custo dos docinhos. Ela tinha uma ideia de que cada aluno comia, em média 14 docinhos e que cada um custava cerca de R$ 0,25.
Veja que na situação descrita acima existem algumas funções envolvidas:

- y = f(x) = 14x, que mostra que o total de docinhos a ser comprados depende do número de alunos.
- z = g(y) = 0,25y, que mostra que o custo total depende da quantidade de docinhos a ser comprado.

Veja isso graficamente:

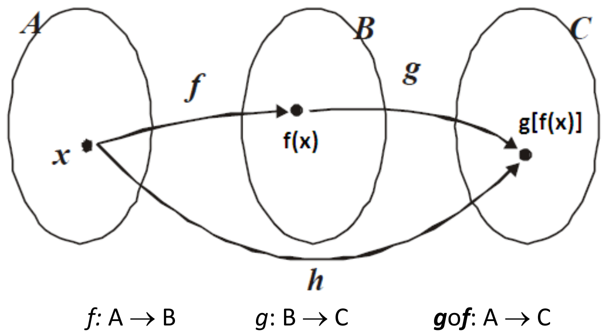


Observe que a função ***h*** faz a "ponte" do conjunto A para o conjunto C, ou seja, fornece o custo total em função do número de alunos. Indicamos, neste caso, a função h por: h = ***g*** o ***f*** (lê-se g composta com f).

Então: h(x) = ***g*** o ***f*** (x) = g[f(x)] = g[14x] = 0,25.14x = 3,5x

3.2. Definição

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, denomina-se função composta de g com f a função ***g*** o ***f***: definida de A → C tal que ***g*** o ***f(x)*** = ***g[f(x)]***



Observação:
Pela descrição acima, o contradomínio de ***f*** é igual ao domínio de ***g***, porém, para que a função composta g(f(x)) exista basta que $CDm(f) \subset Dm(g)$.

Exercícios resolvidos:

1. Dadas as funções f(x) = x + 2 e g(x) = $2x^2$. Obter as funções:

a) f[g(x)]
b) g[f(x)

Resolução:

a) $f(x) = x + 2$
$f[g(x)] = g(x) + 2$
$\boldsymbol{f[g(x)] = 2x^2 + 2}$

b) $g(x) = 2x^2$
$g[f(x)] = 2(f(x))^2$
$g[f(x)] = 2(x + 2)^2$
$g[f(x)] = 2(x^2 + 4x + 4)$
$\boldsymbol{g[f(x)] = 2x^2 + 8x + 8}$

Observe que não vale a lei comutativa para funções compostas, ou seja, em geral $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

2. Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, achar x de modo que $f[g(x)] = 0$

Resolução:

Primeiramente vamos determinar f[g(x)] e em seguida igualaremos a zero.

$f(x) = x^2 - 5x + 6$
$f[g(x)] = (x + 1)^2 – 5(x + 1) + 6$

Daí vem: $f[g(x)] = x^2 - 3x + 2$.

Igualando a zero temos:
$x^2 - 3x + 2 = 0$
onde $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$

Em Sala

01) Classifique as funções abaixo em Par, Ímpar ou sem Paridade.
a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = 3x^4 + 2x^2$
c) $f(x) = 3x$
d) $f(x) = x^3 + 2x$
e) $f(x) = x^2 + 2x$

02) Sejam as funções reais $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ e $g(x) = x - 1$ O domínio da função f(g(x)) é
a) $D = \{x \in \Re / x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1\}$
b) $D = \{x \in \Re / -3 \leq x \leq 1\}$
c) $D = \{x \in \Re / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1\}$
d) $D = \{x \in \Re / -2 \leq x \leq 3\}$
e) $D = \{x \in \Re / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

03) (PUC – RJ) Sejam $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 1$. Então $f(g(3)) - g(f(3))$ é igual a:

a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

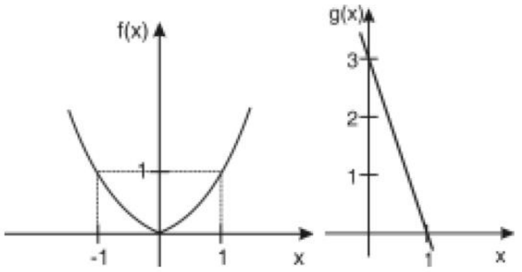
04) (UFSC – SC) Considere as funções f, g: R $\rightarrow$ R tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule f(7).

Testes

05) Classifique as funções abaixo em Par, Ímpar ou sem Paridade.

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = 6x^8 + 7x^6 + 2x^2$
c) $f(x) = 2x^3$
d) $f(x) = 6x^7 + 4x$
e) $f(x) = 5x^4 + 3x^3$
f) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3 + 1}$
g) $f(x) = (\text{sen}\, x).(x^2 - 1)$

06) (UFPEL – RS) Os gráficos abaixo representam as funções reais f(x) e g(x), respectivamente:



De acordo com os textos e seus conhecimentos, é correto afirmar que a função h(x) = (fog)(x) (função composta de f e g) é dada por

a) $h(x) = 9x^2 + 9$
b) $h(x) = 9x^2 – 18x + 9$
c) $h(x) = – 3x^2 + 3$
d) $h(x) = 3x^2 + 3$
e) $h(x) = x^2 – 2x + 1$

07) Sejam as funções compostas e $g(f(x)) = 2x - 2$. Sendo $g(x) = x + 1$, então $f(5) + g(2)$ é

a) 10.
b) 8.
c) 7.
d) 6.

08) Diz-se que uma função f é ímpar se, para todo x de seu domínio, tem-se que f(–x) = –f(x). Sendo assim, qual das funções abaixo é ímpar?

a) $f(x) = 4x^2 + 3$
b) $f(x) = 3x - 1$
c) $f(x) = x$
d) $f(x) = x^2$
e) $f(x) = 2^x$

09) Diz-se que uma função f é par se, para todo x de seu domínio, tem-se que f(–x) = f(x). Sendo assim, qual das funções abaixo é par?

a) $f(x) = 4x^5 + 3x$
b) $f(x) = 3x^2 - 2x$
c) $f(x) = 4x^4 + 2x$
d) $f(x) = 4x^2 + 7$
e) $f(x) = 2^{-x}$

10) (UEPB – PB) Sejam

I. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2}$

II. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

III. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$

III. $f(x) = (x+1)+(x-1)$

Classificando cada uma das funções reais acima em par, ímpar ou nem par nem ímpar, temos, respectivamente:

a) par, par, ímpar, ímpar
b) nem par nem ímpar, par, ímpar, ímpar
c) par, ímpar, par, ímpar
d) ímpar, par, ímpar, ímpar
e) par, par, ímpar, nem par nem ímpar

11) Dadas as funções f(x) = x + 2 e g(x) = $2x^2$. Obter:

a) f(g(x))

b) g(f(x))

c) f(f(x))

d) g(g(x))

e) f(g(3))

f) g(f(1))

g) f(f(f(2)))

12) (UEPG – PR) Sobre uma função afim f(x) = ax + b, assinale o que for correto.

01. Se a > 0 e b < 0 então f(x) é crescente e possui raiz negativa.
02. Se o gráfico de f(x) passa pelos pontos, (–1, 1) e (3, 5) então f(f(–3)) = 1.
04. Se f(x) + f(x – 3) = x então $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$.
08. Se b = – 3 e f(f(–2)) = – 5 então a = 3.
16. Se a.b > 0 a raiz de f(x) é um número positivo.

13) (UFSC – SC) Dadas as funções: $f(x) = \sqrt{5-x}$ e $g(x) = x^2 - 1$, o valor de $g_o f(4)$ é:

14) (UFSC – SC) Sendo f(x) = 4x + 1 e f(g(x)) = x^2 + 1, com f e g definidas para todo x real, determine o valor numérico da função g no ponto x = 18, ou seja, g(18).

15) (UFSC – SC) Seja *f* uma função polinomial do primeiro grau, decrescente, tal que *f(3) = 2* e *f(f(1)) = 1*. Determine a abscissa do ponto onde o gráfico de *f* corta o eixo *x*.

16) (UEL – PR) Seja h(x) = $[f_o g](x)$. $[g_o f](x)$, onde f(x) = (x + 0,5).(x – 0,5) e g(x) = $\frac{1}{x^2 + 0{,}25}$. Qual o valor de h(0,5)?

a) 15
b) 15/8
c) 16
d) – 3/4
e) – 15/4

17) Sejam as funções reais definidas por f(x) = x – 2 e f(g(x)) = 2x – 3. Então g(f(x)) é definida por:

a) 2x – 1
b) 2x – 2
c) 2x – 3
d) 2x – 4
e) 2x – 5

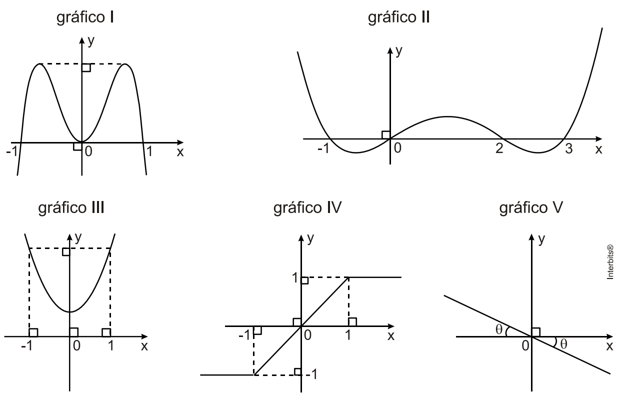
Exercícios estilo ENEM

18) (UFSM – RS) Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos. Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função f(x) = 40x + 1 converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função h que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é

a) $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$.
b) $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$.
c) $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$.
d) $h(x) = \frac{20x + 1}{3}$.
e) $h(x) = \frac{2x + 1}{3}$.

19) (UNIFESP – SP) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.



b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

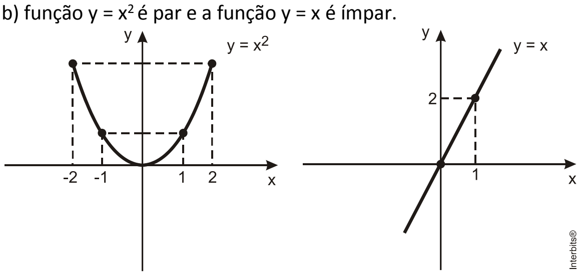
20) (UFPR – PR) O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20t - t^2$, sendo que $0 \le t \le 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por . $C(N) = 50 + 30N$.

a) Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora.

b) Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2300 milhares de reais?

GABARITO AULA 08

1) a) Par b)Par c) Ímpar d) Ímpar e) sem paridade
2) a **3)** a **4)** 56
5) a) P b) P c) I d) I e) sem paridade
f) I g) I
6) b **7)** a **8)** c **9)** d
10) b
11) a) $f(g(x)) = 2x^2 + 2$ b) $g(f(x)) = 2x^2 + 8x + 8$ c) $f(f(x)) = x + 4$
d) $g(g(x)) = 8x^4$ e) 20 f) 18 g) 8
12) 06 **13)** 00 **14)** 81 **15)** 05 **16)** a **17)** e
18) c
19) a) As funções pares são I e III, pois f(-a) = f(a) para qualquer a real. As funções ímpares são IV e V, pois f(-a) = - f(a) para qualquer **a**.
b) função $y = x^2$ é par e a função $y = x$ é ímpar.



20) a) $C(t) = 50 + 600t - 30t^2$ b) t = 5 h

AULA 09

Classificação das Funções e Função Inversa

Antes de iniciarmos o estudo desta aula, vamos relembrar alguns conceitos essenciais:

- Dados dois conjuntos não vazios, A e B, denomina-se **<u>função de A em B</u>** a qualquer relação em que para todo elemento de A existir um único correspondente em B.

Com isso, fique atento às palavras empregadas na definição de função.

“....para todo elemento de A existir um único correspondente em B”.

Então:
1°) Todos elementos de A tem de estar associados a algum elemento de B.
2°) Um mesmo elemento de A não pode estar associado a dois elementos de B;

Em contrapartida:

- Elementos distintos de A podem estar associados a um mesmo elemento de B.
- O contradomínio pode possuir elementos que não sejam imagens de qualquer elemento do domínio.

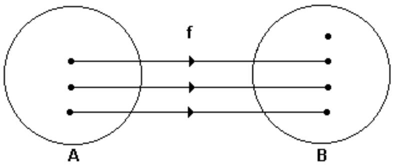
Nesta aula, estaremos estudando alguns tipos de funções que restringem algumas dessas “liberdades” que as funções possuem.

1. Qualidade das Funções

1.1. Função Injetora

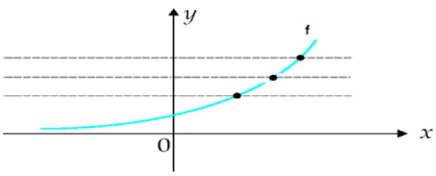
Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se elementos distintos de A têm imagens distintas em B.

$\boxed{f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$



A partir do gráfico cartesiano, uma função é injetora se, e somente se, toda reta paralela ao eixo Ox interceptar o gráfico em no máximo um ponto.

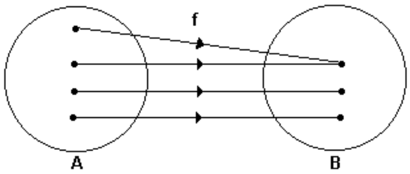
Exemplo:



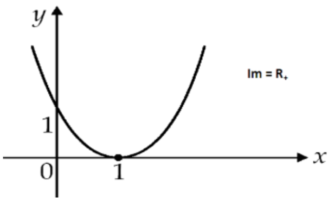
1.2. Função Sobrejetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora, se **todos** os elementos do conjunto B forem imagem dos elementos do conjunto A.

$\boxed{f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow im(f) = CD(f)}$

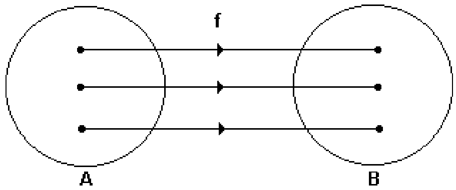


A função **f: R→ R** definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ não é sobrejetora, pois CD = R não é igual ao conjunto Imagem



1.3. Função Bijetora

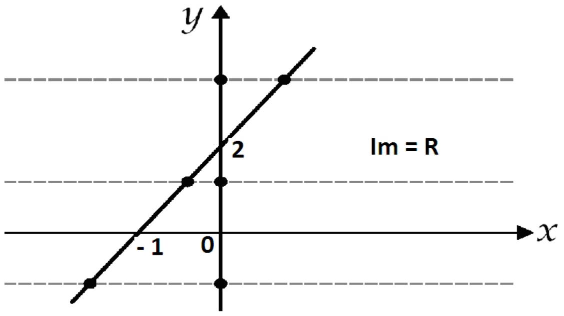
Uma função é bijetora se for ao mesmo tempo **injetora** e **sobrejetora.**



Então, numa função bijetora, todo elemento do conjunto imagem é imagem de um único elemento do domínio e o contradomínio é o próprio conjunto imagem.
A função abaixo é uma função bijetora

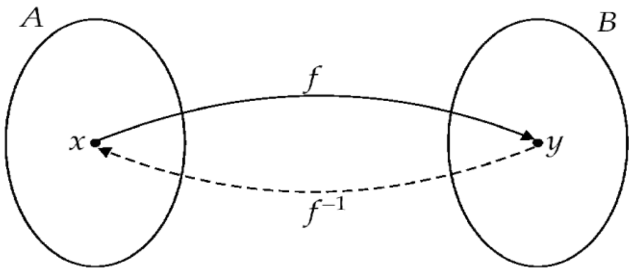
Observação:
Todas as funções polinomiais do 1º grau definidas de $\Re$ em $\Re$ são funções bijetoras.

Exemplo: f: R→ R, onde f(x) = 2x + 2



2. Função Inversa

Considere uma função f: A → B, **bijetora**, pode-se obter uma função de B em A invertendo-se a ordem dos pares ordenados da função f. Denominamos esta função de inversa e indicamos por f^{-1}.



Em símbolos, temos:

Seja $f: A \to B$, uma função bijetora,
$f: x \to y \quad (x \in A \text{ e } y \in B)$
$f^{-1}: y \to x \quad (y \in B \text{ e } x \in A)$

Obtenção da Função Inversa

Seja uma função f de A em B. A função f^{-1} de B em A é a inversa de f, se e somente se: $\boxed{f[f^{-1}(x)] = x, \forall x \in A \text{ e } f^{-1}[f(x)] = x, \forall x \in B}$

Vamos obter a inversa da função bijetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = 3x + 2$.

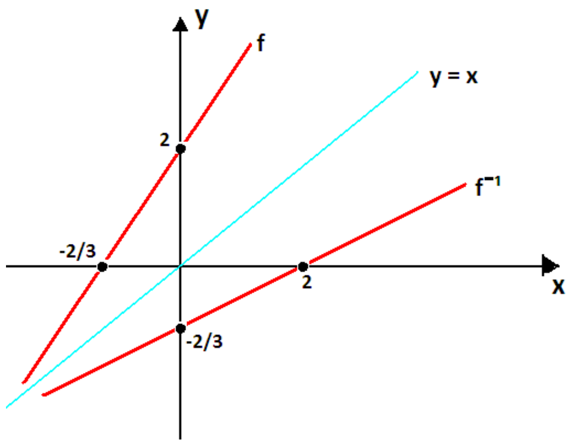
Por definição, temos que: $f[f^{-1}(x)] = x$. Logo:

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 2 \\ f\left[f^{-1}(x)\right] = 3.f^{-1}(x) + 2 \\ x = 3.f^{-1}(x) + 2 \\ \therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$$

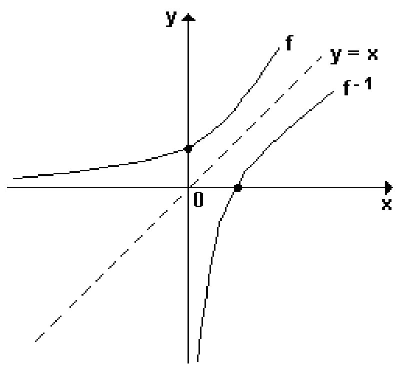
Outro caminho ainda para se determinar a inversa é permutando as variáveis e em seguida isolar y. Acompanhe:

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 2 \\ x = 3y + 2 \\ x - 2 = 3.y \\ \therefore y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$$

Contruindo os gráficos das funções f e f^{-1} num mesmo plano cartesiano, temos:



Observação: Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (y = x)



Em Sala

01) (MACK-SP) Uma função f é definida em A e tem imagem em B. Sabe-se que o conjunto A tem 2k – 2 elementos e o conjunto B, k + 3 elementos. Se f é injetora, então:

a) $1 < k \leq 5$
b) $5 < k \leq 7$
c) $7 < k \leq 8$
d) $8 < k < 10$
e) $k \geq 10$

02) Classifique as funções abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora ou simples.

a) $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = 2x + 1$

b) $g: \Re \to \Re$ definida por $g(x) = x^2 + 1$

c) $h: \Re_+ \to \Re$ definida por $h(x) = x^2$

d) $j: [3, \infty[\to [-1, \infty[$ definida por $j(x) = x^2 - 6x + 8$

03) Determine a função inversa de cada função a seguir:

a) $y = 3x - 7$

b) $y = \dfrac{3x+1}{x-5}$, $x \neq 5$

04) (ACAFE – SC) Sobre toda função $f: \Re \to \Re$ da forma $f(x) = ax^2 + bx$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, marque com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.

( ) Se a > 0, então seu valor máximo é $\dfrac{b^2}{4a}$
( ) Essas funções são sobrejetoras
( ) Essas funções são inversíveis

A sequência correta, e cima para baixo, é:

a) F – F – F
b) V – F – V
c) V – V – F
d) F – F – V

Testes

05) Classifique as funções abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora ou simples.

a) f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = 3x + 2

b) g: $\Re \rightarrow \Re$ definida por g(x) = $x^2 - 6x$

c) h: : [3, ∞ [$\rightarrow$ [- 9, ∞ [h(x) = $x^2 - 6x$

06) (UFSJ) Considere a função $g(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$. O domínio de g(x) e a função inversa de g(x) são, respectivamente,

a) $\left\{x \in \Re / x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$

b) $\left\{x \in \Re / x \neq -\dfrac{1}{2} e x \neq 3\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{-x-3}{2x-1}$

c) $\left\{x \in \Re / x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{-x-3}{2x-1}$

d) $\left\{x \in \Re / x \neq -\dfrac{1}{2} e x \neq -3\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{-2x+1}$

07) Seja a função f(x) = $\dfrac{2x+3}{x-6}$, com x $\neq$ 6, determine $f^{-1}(1)$.

08) Sobre toda função f: $\Re \rightarrow \Re$ da forma f(x) = ax + b com a ≠ 0, marque com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.

( ) Essas funções são sempre crescentes
( ) Essas funções são sobrejetoras
( ) Essas funções são inversíveis

A sequência correta, e cima para baixo, é:

a) F – F – F
b) V – F – V
c) V – V – F
d) F – V – V
e) V – F – F

09) Determine a função inversa de cada função a seguir:

a) y = 2x – 3

b) y = $\dfrac{x+2}{4}$

c) y = $\dfrac{2x+1}{x-4}$, $x \neq 4$

10) (UEM – PR) Sobre funções reais (domínio e contradomínio real), assinale o que for **correto**.

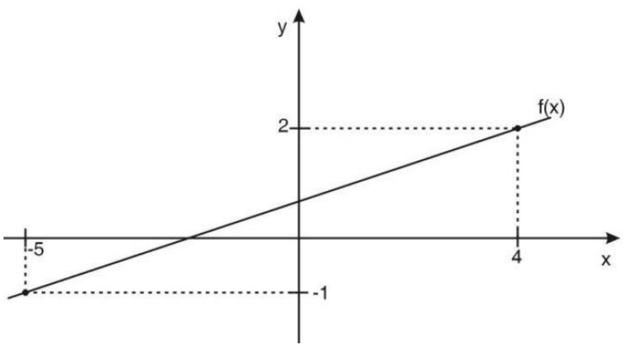
01. Uma função constante é sempre injetora.
02. Uma função de segundo grau é sempre sobrejetora.
04. Sejam *f* e *g* funções, tais que $g(x) = f(x) + 1$, para todo *x* real. Então o gráfico da função *g* corresponde sempre ao gráfico da função *f*, transladado de uma unidade para baixo no plano cartesiano.
08. Toda função do primeiro grau é injetora e sobrejetora e, portanto, possui inversa.
16. A imagem da função f , tal que, para todo *x* real, $f(x) = \text{sen}\, x$, é o intervalo fechado $[-1,1]$.

11) (UEPG – PR) Considerando as funções $f(x)$ e $g(x)$, tais que $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$ e $f(g(x)) = \dfrac{5x}{4x+4}$, assinale o que for correto.

01. O domínio de $g(x)$ é $\{x \in \Re \,/\, x \neq -1\}$
02. $g^{-1}(0) = \dfrac{3}{2}$.
04. $g(1) = -\dfrac{1}{2}$.
08. $g(f(5)) = \dfrac{1}{3}$.
16. O domínio de $f(x)$ é $\{x \in \Re \,/\, x \neq -3\}$

12) (UFSC – SC) Seja a função $f(x) = \dfrac{-2x}{x-2}$, com $x \neq 2$, determine $f^{-1}(2)$.

13) (UFPEL – RS) O gráfico abaixo representa a função f (x) . Construindo no mesmo plano cartesiano as retas que representam as funções f (x) e sua inversa $f^{-1}(x)$, é correto afirmar que o ponto de intersecção dessas retas é



a) (–2, 0)
b) (0, 1)
c) (1, 1)
d) (5, 5)
e) (2, 2)

14) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas:

a) (   ) (UFSC – SC) Se $f : A \to B$ é uma função injetora e o conjunto A possui uma infinidade de elementos, então B (necessariamente) possui uma infinidade de elementos.

b) (   ) (UFSC – SC) A função $g: [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $g(x) = x^2 - 2x + 1$ é inversível.

c) (   ) (UFSC – SC) Se $f(x) = 3x + a$ e a função inversa de f é $g(x) = \frac{x}{3} + 1$, então $a = -3$.

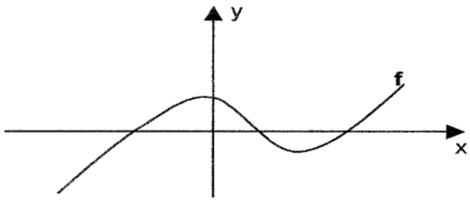
15) Obtenha as sentenças que definem as funções inversas de:

a) $f: [-3; 5] \to [1, 17]$ tal que $f(x) = 2x + 7$

b) $g: [2, 5] \to [0,9]$ tal que $g(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $h: [3, 6] \to [-1, 8]$ tal que $h(x) = x^2 - 6x + 8$

16) (UFSC – SC) Seja f uma função real de variável real, representada pelo gráfico abaixo. Determine a soma das verdadeiras:



01. f tem três zeros reais
02. f é uma função crescente.
04. a imagem de f é R.
08. f é inversível.
16. o domínio de f é R.

17) (UFSC) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. O domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 6}$ é $D = \{x \in R \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\} - \{6\}$.
02. A função inversa da função $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ é definida por $g^{-1}(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$.
04. A função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x + 2$, é uma função decrescente.
08. Sejam h e k, duas funções, dadas por $h(x) = 2x - 1$ e $k(x) = 3x + 2$. Então $h(k(1))$ é igual a 9.
16. A função $g: R \rightarrow R$ definida por $g(x) = x^2 + 1$, é uma função par.
32. O conjunto imagem da função $h: R \rightarrow R$, definida por $h(x) = |x^2 - 4x + 3|$ é $Im(h) = \{y \in R \mid y \geq -1\}$

18) (UFSC) Sejam f e g funções de R em R definidas por: $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine a soma dos números associados à(s) proposições verdadeiras.

01. A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em (0,3).
02. f é uma função crescente .
04. -1 e +1 são os zeros da função g.
08. $Im(g) = \{ y \in R \mid y \geq -1 \}$.
16. A função inversa da f é definida por $f^{-1}(x) = -x + 3$.
32. O valor de $g(f(1))$ é 3.
64. O vértice do gráfico de g é o ponto (0, 0).

Exercícios estilo ENEM

19) (UFPR) Uma fábrica de produtos químicos possui um sistema de filtragem do ar que é ligado automaticamente toda vez que a quantidade de poluentes no ar atinge certo nível previamente estabelecido. Sabe-se que a quantidade Q(t) de poluentes no ar dessa fábrica, depois de ligado o sistema de filtragem, é dada em função do tempo pela expressão:

$Q(t) = \dfrac{10t + 750}{t + 15}$ sendo a quantidade Q(t) medida em partículas por litro de ar e o tempo t em minutos.

a) Qual a quantidade de poluentes existente no ar no instante inicial t = 0 em que o sistema de filtragem foi acionado? E quinze minutos depois da filtragem ter sido iniciada?

b) Esse sistema de filtragem está programado para desligar automaticamente no momento em que a quantidade de poluentes no ar atingir 12 partículas por litro de ar. Quantas horas esse sistema de filtragem precisa funcionar até atingir o ponto de desligamento automático?

20) (ACAFE) Sejam as funções f(x) = $\dfrac{x+2}{x-2}$ definida para todo x real e x ≠ 2e g(x) = 3x + 2 definida para todo x real, então:

a) o domínio da função f(g(x)) é D = R – {–2}

b) o valor de g(f(3)) = $\dfrac{9}{2}$

c) a função inversa de g(x) é definida por $g^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

d) a reta que representa a função g(x) intercepta o eixo das ordenadas no ponto $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

e) a função f(x) assume valores estritamente positivos somente para x > 2.

GABARITO AULA 09

1) a
2) a) Bijetora b) Simples c) Injetora d) Bijetora
3) a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3}$ b) $f^{-1}(x) = 4x - 2$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+1}{x-3}$
4) a
5) a) Bijetora b) simples c) bijetora
6) c **7)** – 9 **8)** d
9) a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ b) $f^{-1}(x) = 4x - 2$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$
10) 24 **11)** 15

12) 01 **13)** c **14)** a) V b) F c) V
15) a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-7}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$ c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 3$
16) 21 **17)** 27 **18)** 61
19) a) 50 e 30 partículas por litro de ar b) 4 horas e 45 minutos
20) c
21) 59 **22)** 06 **23)** b **24)** c **25)** 22

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 10

Módulo

1. Módulo de um número real

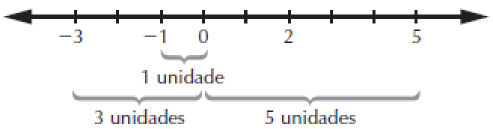
Dado um número real x, denominamos módulo (ou valor absoluto) de x e indicamos por $|x|$ ao número:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}}$$

Então:

$$a)\ |5| = 5$$
$$b)\ |-1| = -(-1) = 1$$
$$c)\ |-3| = -(-3) = 3$$

Observe que o módulo de um número real nunca é negativo. Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância deste número à origem.



Acompanhe mais alguns exemplos resolvidos:

a) $\left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$

b) $\left|1-\sqrt{5}\right| = -\left(1-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-1$

c) $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), \text{ se } x-2 < 0 \end{cases}$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Propriedades Importantes

- $|x| \geq 0$
- $|x|^n = x^n, \text{se } n \text{ é par}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x| \geq x$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdade triangular)

2. Equação Modular

Tipos de equações modulares:

1) Para k > 0

$$\boxed{|x| = k \leftrightarrow x = k \text{ ou } x = -k}$$

Exemplo:

$$|x+2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \rightarrow x = 1 \\ x+2 = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

S = {-5, 1}

2) Para k = 0

$$\boxed{|x| = k \leftrightarrow x = 0}$$

3) Para k < 0

$$\boxed{|x| = k \text{ não possui solução}}$$

4) $|x| = |y| \leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

Exemplo:

$$|2x+1| = |x+3| \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x+3 \rightarrow x = 2 \\ 2x+1 = -(x+3) \rightarrow x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$$

3. Inequação Modular

Vamos resolver as inequações modulares com base nas seguintes propriedades:

Considerando **a** um número positivo, temos:

1) $|x| < a \ \leftrightarrow \ -a < x < a$

2) $|x| \leq a \ \leftrightarrow \ -a \leq x \leq a$

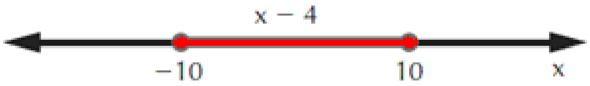
3) $|x| > a \ \leftrightarrow \ x < -a \text{ ou } x > a$

4) $|x| \geq a \ \leftrightarrow \ x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

Exemplo:

a) Resolva a inequação: $|x-4| \le 10$

Resolução:



$|x-4| \le 10 \Rightarrow -10 \le x-4 \le 10 \Rightarrow -6 \le x \le 14$

S = $\{x \in \Re / -6 \le x \le 14\}$

b) Resolva a inequação: $|x-4| > 10$

$$|x-4| > 10 \Rightarrow \begin{cases} x-4 < -10 \to x < -6 \\ \text{ou} \\ x-4 > 10 \to x > 14 \end{cases}$$

S = $\{x \in \Re / x < -6 \text{ ou } x > 14\}$

4. Função Modular

Uma função f: $\Re \to \Re$ é denominada função modular quando a cada $x \in R$ associa o elemento $|x| \in \Re$.

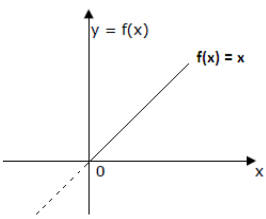
$$\boxed{f(x) = |x|}$$

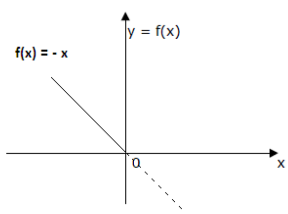
O gráfico da função modular pode ser obtido por dois modos. Acompanhe:

1º modo: A partir da definição de módulo.

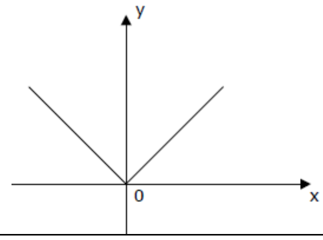
Exemplo: Construa o gráfico da função $f(x) = |x|$

Resolução: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \ge 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$





Colocando as duas condições num só gráfico, vem:



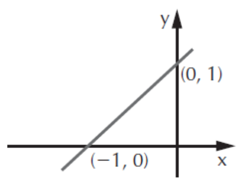
A imagem desta função é $Im(f) = R_+$

2º modo: De um modo geral, pode-se construir o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$ sem se ater ao módulo. O que se faz é construir o gráfico da função g(x) e depois rebater por simetria ao eixo x todos os pontos situados abaixo do eixo x, pois nessa região g(x) < 0.

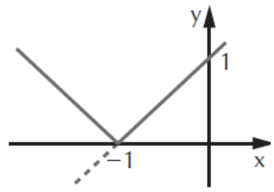
Exemplo: Construa o gráfico da função $f(x) = |x+1|$

Resolução:

1) Gráfico de $f(x) = x+1$



2) Gráfico de $f(x) = |x+1|$



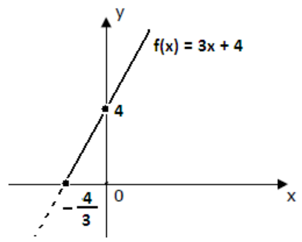
Acompanhe a seguir mais alguns exemplos:

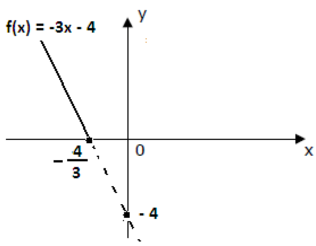
1) Construa o gráfico da função $f(x) = |3x+4|$

Resolução:

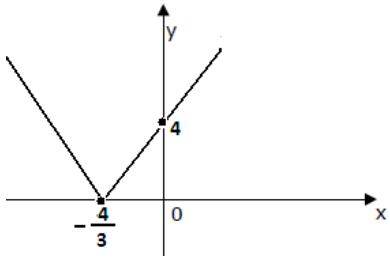
Modo 1: Usando a definição de módulo, vem:

$$f(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 \ \text{ se } x \ge -\dfrac{4}{3} \\ -3x-4 \ \text{ se } x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$



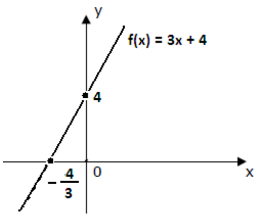


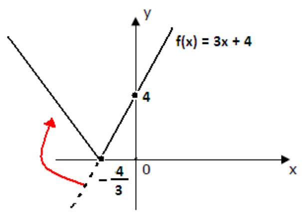
Colocando as duas condições num só gráfico, vem:



Modo 2: Usando o modo "rebatimento", temos:

Gráfico de $f(x) = 3x + 4$ Gráfico de $f(x) = |3x + 4|$





2) Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

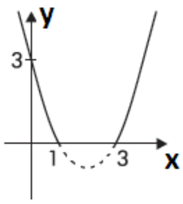
Resolução:

1º Modo: Pela definição, temos:

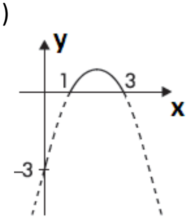
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ se } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3), \text{ se } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ se } x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3 \text{ (I)} \\ -x^2 + 4x - 3, \text{ se } 1 < x < 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

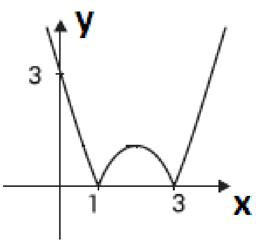
I)



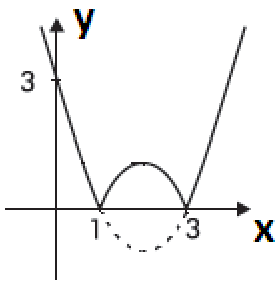
II)



Compondo o gráfico de $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$, temos:



Modo 2: Constrói-se o gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e rebate-se em relação ao eixo x os pontos de ordenadas negativas.



Em Sala

01) A expressão $|2 - 2\sqrt{2}|$ é equivalente a:

a) $2 - 2\sqrt{2}$
b) $2 + 2\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{2} - 2$
d) $2\sqrt{2} + 1$
e) 0

02) Determine a soma das raízes das equações abaixo:

a) $|2x - 1| = 15$ é:

b) $|x|^2 - 5|x| + 4 = 0$

03) Quantos números inteiros e não negativos satisfazem a inequação $| x - 2 | < 3$

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

04) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções, determinando o conjunto imagem de cada uma.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = |x| + 2$

c) $f(x) = |x| - 1$

d) $f(x) = |x + 2|$

e) $f(x) = |x - 1|$

Testes

05) (UEPB – PB) A soma das raízes que a equação modular $||x-2|-7| = 6$ é

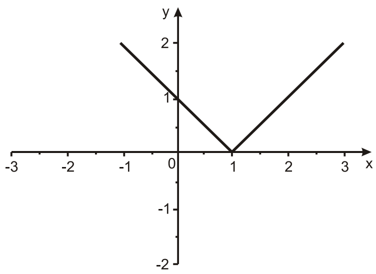
a) 15
b) 30
c) 4
d) 2
e) 8

06) O conjunto solução da inequação modular $|x-1| \leq 2$ é $S = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$. O valor de "b – a" é:

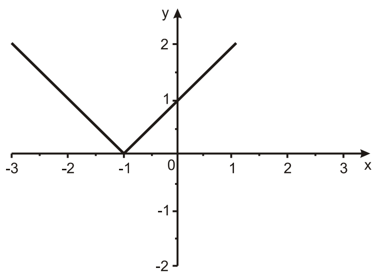
a) 0
b) 4
c) 2
d) 3
e) 1

07) (PUC – RJ) Considere a função real $f(x) = |-x+1|$. O gráfico que representa a função é:

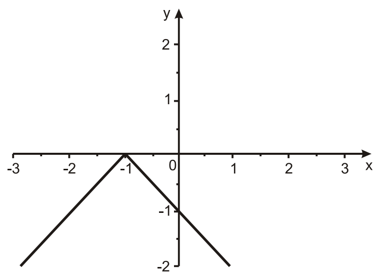
a)



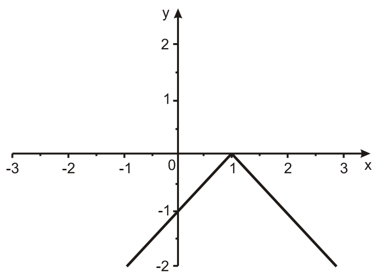
b)



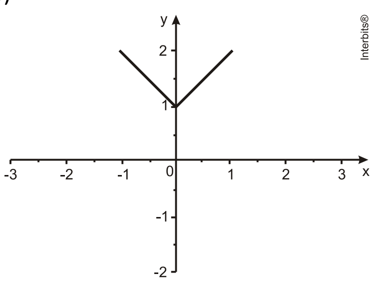
c)



d)



e)



Atividades

08) O valor de $|1 - \sqrt{3}\,|$ é igual a:

a) $1 - \sqrt{3}$
b) $1 + \sqrt{3}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3} - 1$
e) 1

09) (UDESC – SC) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x-3|$ é:

a) 10
b) 7
c) 0
d) 3
e) 4

10) A solução da inequação $|2x - 1| \le 5$ é o conjunto:

a) $\{x \in \Re \mid -2 \le x \le 3\}$
b) $\{x \in \Re \mid -1 \le x \le 6\}$
c) $\{x \in \Re \mid x \le 3\}$
d) $\{x \in \Re \mid x \le 7\}$
e) $\{x \in \Re \mid -3 \le x \le 2\}$

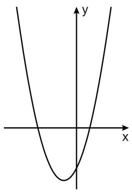
11) O valor de $|5 - \sqrt{3}\,| - |\sqrt{3} - 5|$ é igual a:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

12) (UCS-RS) O conjunto solução da equação $|x|^2 + 3\,|x| - 4 = 0$ é:

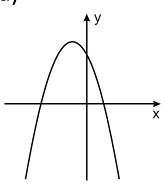
a) { 1 }
b) {-1, 1}
c) {3}
d) {1,4}
e) {-1}

13) (UFRGS – RS) Se

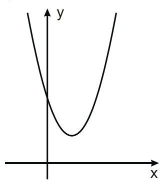


é o gráfico da função f definida por $y = f(x)$, então, das alternativas abaixo, a que pode representar o gráfico da função z, definida por $z = |f(x)|$, é

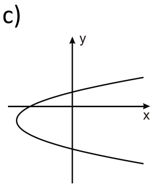
a)



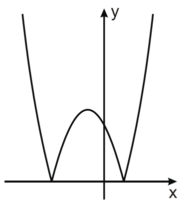
b)



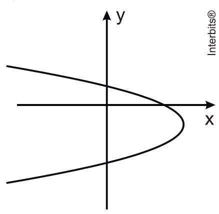
c)



d)



e)



14) (UFGO) Os zeros da função $f(x) = \left|\dfrac{2x-1}{5}\right| - 3$ são:

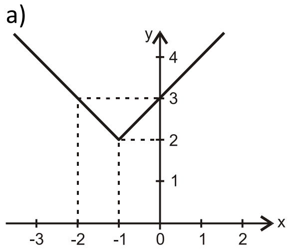
a) –7 e –8
b) 7 e –8
c) 7 e 8
d) –7 e 8
e) n.d.a.

15) (IFSC – SC) Dada a equação $2x + 1 = 7 - |x|$, na qual x é um número inteiro, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

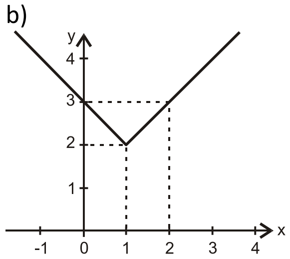
01. A equação acima tem o mesmo conjunto solução da equação $|x| + 2x = 6$.
02. Existe apenas um valor inteiro de x que satisfaz a equação.
04. Existem dois valores de x que satisfazem a equação.
08. A solução da equação apresentada acima é a mesma solução da equação $\log_x (4x - 4) = 2$.
16. Satisfazem a equação um número inteiro positivo e um número inteiro negativo.
32. Satisfazem a equação dois números inteiros negativos.

16) (UDESC – SC) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x+1| + 2$ é:

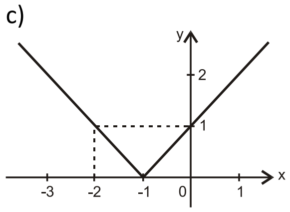
a)



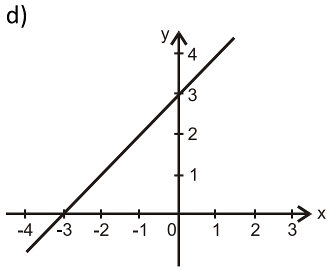
b)



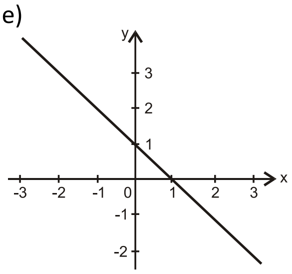
c)



d)



e)



17) Resolva em $\Re$ as seguintes equações:

a) $||x| - 4| = 5$

b) $||x - 2| - 3| = 4$

c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

d) $|3x - 1| = |2x + 3|$

e) $|x + 1| = 3x + 2$

Exercícios estilo ENEM

18) (UFRGS – RS) A intersecção dos gráficos das funções *f* e *g*, definidas por f(x) = | x | e g(x) = 1 – | x | os quais são desenhados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, determina um polígono. A área desse polígono é:

a) 0,125
b) 0,25
c) 0,5
d) 1
e) 2

19) (PUC – MG) Os pesos aceitáveis do pãozinho de 50 g verificam a desigualdade $|x-50| \leq 2$, em que x é medido em gramas. Então, assinale o peso mínimo aceitável de uma fornada de 100 pãezinhos, em quilogramas.

a) 4,50
b) 4,80
c) 5,20
d) 5,50

20) (PUC – MG) As alturas das mulheres adultas que habitam certa ilha do Pacífico satisfazem a desigualdade $\left|\frac{h-153}{22}\right| \leq 1$, em que a altura h é medida em centímetros. Então, a altura máxima de uma mulher dessa ilha, em metros, é igual a:

a) 1,60
b) 1,65
c) 1,70
d) 1,75

GABARITO AULA 10

1) c **2)** a) 1 b) 0 **3)** c
4) a) Im = $\Re$ b) [2, +∞[c) [–1+∞[d) Im = $\Re$ e) Im = $\Re$
5) e **6)** b **7)** a **8)** d **9)** e
10) a **11)** e **12)** b **13)** d
14) d **15)** 11 **16)** a
17) a) S = {-9,9} b) S = {-5,9} c) S = {-3,3}
d) S = {4, $-\frac{2}{5}$} e) S = {$-\frac{1}{2}$}
18) c **19)** b **20)** d

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 11

Função Exponencial

1. Definição:

A função $f:\Re \to \Re_+^*$, definida por $y = f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é denomidada função exponencial de base **a**.

$\boxed{y = f(x) = a^x}$

São exemplos de funções exponenciais:

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $h(x) = (0{,}2)^x$

A imposição feita em relação a base **a** se deve aos seguintes casos. Acompanhe:

a) Na função $f(x) = a^x$ considere $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$.

Então $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \Re$

b) Na função $f(x) = a^x$ considere $a = 0$ e $x = -2$.

Então $f(-2) = 0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$

c) Na função $f(x) = a^x$ considere $a = 1$.

Então $f(x) = (1)^x = 1$. A função $f(x) = 1^x$ é uma função constante e não uma função exponencial.

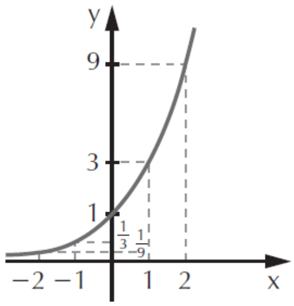
2. Gráfico:

Para termos uma noção do gráfico da função exponencial $y = f(x) = a^x$ vamos obter alguns de seus pontos, atribuindo valores convenientes para x e tomando os resultados em y.

Vamos analisar dois casos abaixo. O primeiro com a base **a** maior do que 1 (a > 1) e no segundo com a base **a** situada entre 0 e 1 (0 < a < 1).

1) $f:\Re \to \Re_+^*$ definida por $f(x) = 3^x$

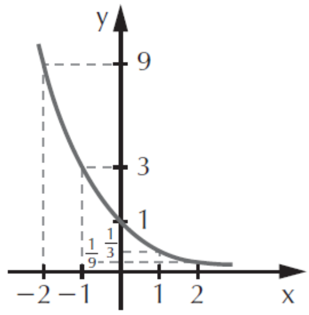
x	$y = 3^x$
−2	1/9
−1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



Note que à medida que x cresce, y também cresce, ou seja, $f(x) = 3^x$ é uma função crescente.

2) $f:\Re \to \Re_+^*$ definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	9
−1	3
0	1
1	1/3
2	1/9



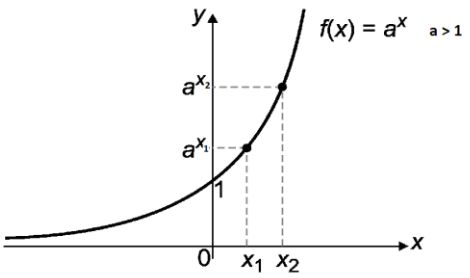
Note que à medida que x cresce, y decresce, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é uma função decrescente.

Observando os exemplos acima em relação à funções da forma $f:\Re \to \Re_+^*$, definida por $y = f(x) = a^x$ podemos concluir:

1) O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ está situado todo acima do eixo x, pois $a^x > 0$ para todo x real.

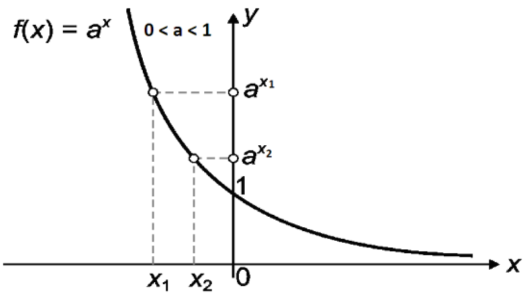
2) A curva que representa a função $f(x) = a^x$ intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0;1)$.

3) Para $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente e para $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente.



$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2}$

- Quando as bases estão compreendidas entre 0 e 1 (0 < a < 1), a relação de desigualdade se inverte.



$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2}$

4) A função exponencial $y = f(x) = a^x$ é injetora pois valores distintos do domínio geram imagens distintas. Então: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

5) $f : \Re \rightarrow \Re_+^*$, definida por $y = f(x) = a^x$ é sobrejetora pois o contradomínio e o a imagem da função são ambos, iguais $CD(f) = Im(f) = \Re_+^*$. Logo, a função $f : \Re \rightarrow \Re_+^*$, definida por $y = f(x) = a^x$ é bijetora e com isso admite inversa.

Em Sala

01) Dentre as funções exponenciais seguintes, identifique as que são crescentes e as que são decrescentes.

a) $f(x) = 6^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 3$

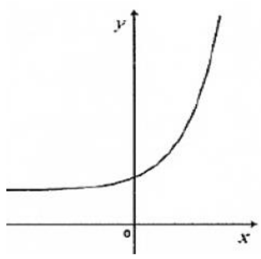
c) $f(x) = e^x + 3$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

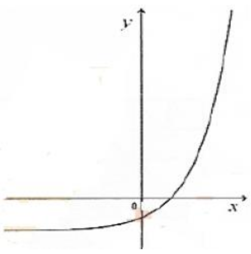
e) $f(x) = (0{,}3)^x$

02) (UFRGS – RS) Considere a função f tal que $f(x) = k + \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$, com k > 0. Assinale a alternativa correspondente ao gráfico que pode representar a função f.

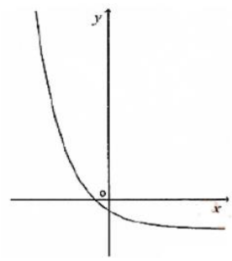
a)



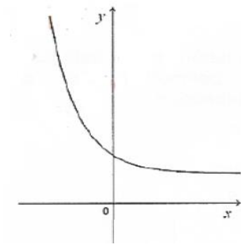
b)



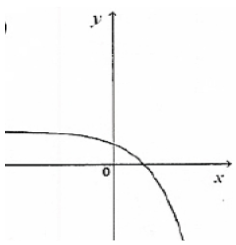
c)



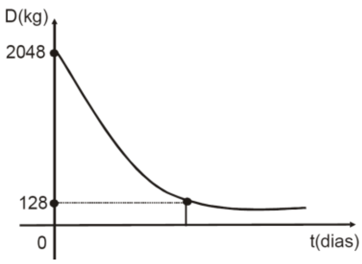
d)



e)



03) (ACAFE – SC) Num tanque biodigestor, os dejetos suínos sob a presença de determinadas bactérias se decompõem segundo a lei $D(t) = K.2^{\frac{-1t}{4}}$, na qual K é uma constante, t indica o tempo (em dias) e D(t) indica a quantidade de dejetos (em quilogramas) no instante **t**. Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico abaixo, a quantidade de dejetos estará reduzida a 128 kg depois de:



a) 16 dias
b) 12 dias
c) 4 dias
d) 20 dias
e) 8 dias

04) (UFPR – PR) Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, P(t), de determinada espécie numa área de proteção ambiental: $P(t) = \dfrac{500}{1 + 2^{2-t}}$ sendo t o tempo em anos e t = 0 o momento em que o estudo foi iniciado.

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

b) À medida que o tempo t aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor?

Testes

05) (UFRGS – RS) A função f, definida por $f(x) = 4^{-x} - 2$, intercepta o eixo das abscissas em

a) -2.
b) -1.
c) $-\frac{1}{2}$.
d) 0.
e) $\frac{1}{2}$.

06) (UEPG – PR) Certa população de insetos cresce de acordo com a expressão $N = 500.2^{\frac{t}{6}}$, sendo t o tempo em meses e N o número de insetos na população após o tempo t. Nesse contexto, assinale o que for correto.

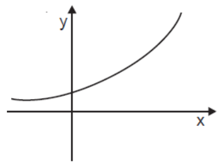
01. O número inicial de insetos é de 500.
02. Após 3 meses o número de insetos será maior que 800.
04. Após um ano o número total de insetos terá quadruplicado.
08. Após seis meses o número de insetos terá dobrado.

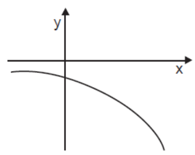
07) (UERJ – RJ) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor V(*t*) desse imóvel em *t* anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

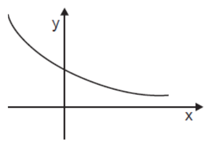
$$V_{(t)} = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}}$$

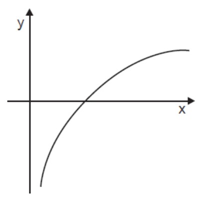
Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

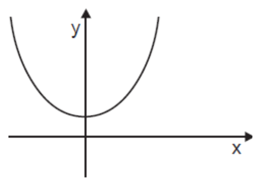
08) (PUC – RS) A função exponencial é usada para representar as frequências das notas musicais. Dentre os gráficos abaixo, o que melhor representa a função f (x) = $e^x + 2$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


09) (UEL – PR) A função real definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$:

a) só assume valores positivos
b) assume valores positivos somente se $x > 0$
c) assume valores negativos para $x < 0$
d) é crescente para $0 < a < 1$
e) é decrescente para $a > 1$

10) Dadas $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ e as proposições:

I) f(x) é crescente
II) f(x) é decrescente
III) $f(3) = 8$
IV) $(0,1) \in f(x)$

podemos afirmar que:

a) todas as proposições são verdadeiras
b) somente II é falsa
c) todas são falsas
d) II e III são falsas
e) somente III e IV são verdadeiras

11) (UFPR – PR) Suponha que o número P de indivíduos de uma população, em função do tempo t, possa ser descrito de maneira aproximada pela expressão $P = \dfrac{3600}{9 + 3.4^{-t}}$

Sobre essa expressão, considere as seguintes afirmativas:

1. No instante inicial, t = 0, a população é de 360 indivíduos.
2. Com o passar do tempo, o valor de P aumenta.
3. Conforme t aumenta, a população se aproxima de 400 indivíduos.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

12) (ACAFE – SC) A população de pássaros de uma localidade está diminuindo devido à construção de um empreendimento imobiliário naquela região. A lei $P(t) = 3125 - 125.5^{t-1}$ fornece uma estimativa para o número de pássaros P(t) que permaneceram no local depois de t semanas do início das obras. Sobre essa situação, analise as afirmações a seguir.

(I) P(t) representa uma função exponencial crescente, pois a base é positiva (igual a 5) e diferente de 1.
(II) Se a obra continuar, em menos de um mês toda a população de pássaros terá se evadido da localidade.
(III) Na primeira semana após o início da obra 3000 pássaros deixaram o local.
(IV) Estima-se que antes do início das obras viviam na região 3100 pássaros.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I, II, III
b) II, IV
c) II, III, IV
d) III, IV

13) (UFSM – RS) Num raio de x km, marcado a partir de uma escola de periferia, o Sr. Jones constatou que o número de famílias que recebem menos de 4 salários mínimos é dado por $N(x) = k.2^{2x}$, em que k é uma constante e $x > 0$. Se há 6 144 famílias nessa situação num raio de 5km da escola, o número que você encontraria delas, num raio de 2km da escola, seria:

14) (ACAFE – SC) A Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 1512 - 2^{-0{,}5t+16}$ em que:

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário.
T = meses de experiência.

Em quantos meses um funcionário produzirá 1000 peças mensalmente?

a) 14 meses
b) 12 meses
c) 16 meses
d) 13 meses

15) (ACAFE – SC) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de um experimento, é dado por: $B(t) = B_O \cdot 2^{2t}$ em que B_O é o número de bactérias quando t = 0 . Sabendo que após 2 horas do início do experimento havia 19200 bactérias na cultura, o valor de B_O é igual a:

a) 4800
b) 19200
c) 2400
d) 1200

16) (UEPG – PR) Dadas as funções definidas por $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$, é correto afirmar que:

01. os gráficos de f(x) e g(x) não se interceptam
02. f(x) é crescente e g(x) é decrescente
04. g(-2).f(-1) = f(1)
08. f(g(0)) = f(1)
16. $f(-1) + g(1) = \frac{5}{2}$

17) Um grande lago está sendo infestado por algas. A área do lago afetada pelas algas cresce exponencialmente de acordo com a função $f(x) = 10.2^x$, na qual x é o tempo em meses após a observação inicial e f representa a área em metros quadrados.

a) Qual a área, em metros quadrados, afetada pelas algas após dois meses?

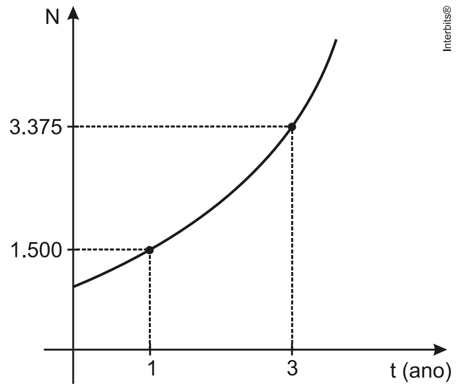
b) Em quantos meses a área afetada pelas algas será de 320 m^2

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y e a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre:

a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
e) 870 e 910 milhões.

19) (UFSM – RS) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.
O gráfico mostra o número de mudas $N(t) = ba^t (o < a \neq 1 \text{ e } b > 0)$ a serem plantadas no tempo t (em anos), numa determinada região.



De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2$ anos, é igual a

a) 2.137.
b) 2.150.
c) 2.250.
d) 2.437.
e) 2.500.

20) (UFPR – PR) Em estudos realizados numa área de proteção ambiental, biólogos constataram que o número N de indivíduos de certa espécie primata está crescendo em função do tempo t (dado em anos), segundo a expressão:

$$N(t) = \frac{600}{5 + 3.2^{-0,1t}}$$

Supondo que o instante t = 0 corresponda ao início desse estudo e que essa expressão continue sendo válida com o passar dos anos, considere as seguintes afirmativas:

1. O número de primatas dessa espécie presentes na reserva no início do estudo era de 75 indivíduos.
2. Vinte anos após o início desse estudo, o número de primatas dessa espécie será superior a 110 indivíduos.
3. A população dessa espécie nunca ultrapassará 120 indivíduos.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

GABARITO – AULA 11

1) a) C b) D c) C d) C e) D
2) a **3)** a
4) a) 4 anos b) 500
5) c **06)** 13
7) $V(3) = 50000 \times [(0,8)^2]^{\frac{3}{2}} = 50000 \times \frac{512}{1000} = R\$\ 25.600,00.$
8) a **9)** a **10)** b **11)** c
12) b **13)** 96 **14)** a **15)** d **16)** 28
17) a) 40m² b) 5 meses
18) e **19)** c **20)** c
21) c **22)** 60% **23)** 14 **24)** e **25)** 14

AULA 12

Equações e Inequações Exponenciais

1. Equação Exponencial

Considere a equação $3^x = 9$. Nela a variável aparece como expoente. Uma equação em que isso ocorre é denominada equação exponencial.

Definição:

Chama-se equação exponencial toda equação que pode ser reduzida a forma $a^x = b$, com $0 < a \neq 1$.

Exemplos: a) $2^{x+1} = 16$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

Para resolver tais equações de um modo geral é necessário transformar a equação dada em igualdade de potência de mesma base.

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

A igualdade acima é verdadeira pois a função exponencial é injetora como vimos na última aula.
Antes de apresentarmos uma série de exercícios resolvidos, vamos reforçar nossos conhecimentos sobre potenciação e radiciação.

Potenciação

$$a^m = \underbrace{a.a.a......a}_{\text{m fatores}}$$

$\boxed{a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0}$ $\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

Se ***a*** e ***b*** são números reais e ***m*** e ***n***, números inteiros, tem-se:

$\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$

$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ com $a \neq 0$

$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$

$\boxed{a^n.b^n = (a.b)^n}$

$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$

Radiciação

$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a}$

Obedecidas as condições de existência das raízes, valem as seguintes propriedades:

$\boxed{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}}$

$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$

$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$

$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$

Exercícios Resolvidos

1) Resolver a equação $2^{x+1} = 16$

Resolução:

Transformando a equação dada em igualdade de mesma base temos:

$$2^{x+1} = 16 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, o conjunto solução é S = {3}

2) Resolver a equação $2^{2x+3} = 0{,}25$

Resolução:

Transformando a equação dada em igualdade de mesma base temos:

$$2^{2x+3} = 0{,}25 \Rightarrow 2^{2x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{2x+3} = 2^{-2} \Rightarrow 2x + 3 = -2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é S = $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Em algumas equações exponenciais é conveniente o uso de uma variável auxiliar, pois por vezes não é possível de imediato, obter igualdade de bases iguais.

1) Resolver a equação $5^x + 5^{x+1} = 30$

Resolução:

Podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&5^x + 5^x.5^1 = 30 \quad \text{Fazendo } 5^x = y\text{, temos:}\\
&y + y.5 = 30\\
&6y = 30 \Rightarrow y = 5\\
&\text{Mas } 5^x = y;\ \text{então:}\\
&\quad 5^x = 5 \Rightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é S = $\{1\}$

2) Resolver a equação $3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$

Resolução:

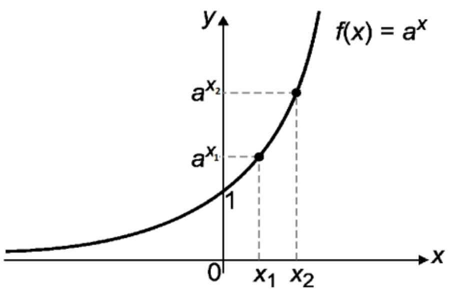
$$\begin{aligned}
&3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0 \quad \text{Fazendo } 3^x = y\text{, temos:}\\
&y^2 - 4y + 3 = 0\\
&y_1 = 3 \ \text{ou}\ y_2 = 1\\
&\text{Mas } 3^x = y;\ \text{então:}\\
&\quad 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \text{ ou}\\
&\quad 3^x = 1 \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é S = $\{0{,}1\}$

2. Inequação Exponencial

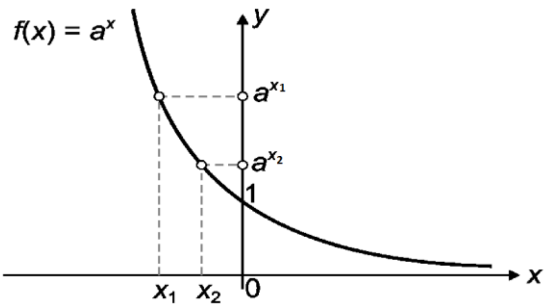
Para resolvermos uma inequação exponencial, devemos respeitar as seguintes propriedades:

- Quando as bases são maiores que 1 (a > 1), a relação de desigualdade se mantém.



$$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2}$$

- Quando as bases estão compreendidas entre 0 e 1 (0 < a < 1), a relação de desigualdade se inverte.



$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2}$$

Exercícios Resolvidos

1) Resolver a inequação: $3^{2x} > \dfrac{1}{81}$

Resolução:

Reduzindo os membros da desigualdade à base 3, vem:

$3^{2x} > 3^{-4}$

Como a base é maior que 1 (a > 1) a desigualdade se mantém:

$$\begin{aligned}
&3^{2x} > 3^{-4} \Rightarrow 2x > -4 \Rightarrow x > -2\\
&S = \{x \in \Re \,/\, x > -2\}
\end{aligned}$$

2) Resolver a inequação: $(0{,}1)^{5x-2} > (0{,}1)^{4x+6}$

Resolução:

Como a base está entre 0 e 1 (0 < a < 1) a desigualdade se inverte.

$$\begin{aligned}
&(0{,}1)^{5x-2} > (0{,}1)^{4x+6} \Rightarrow 5x - 2 < 4x + 6 \Rightarrow x < 8\\
&S = \{x \in \Re \,/\, x < 8\}
\end{aligned}$$

Em Sala

01) (UFSC) Dado o sistema $\begin{cases} 7^{2x+y} = 1 \\ 5^{\frac{x}{2}+y} = 25 \end{cases}$, o valor de $\left(\frac{y}{x}\right)^4$ é:

02) (UFSC – SC) O valor de x, que satisfaz a equação $2^{2x+1} - 3.2^{x+2} = 32$, é:

03) (UDESC – SC) Se x é solução da equação $3^{4x-1} + 9^x = 6$, então x^x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) 27

04) (ACAFE – SC) O conjunto S é formado pela solução da inequação dada a seguir, com $x \in Z$.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x(x+5)} - \left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} \geq 0$$

O número de conjuntos de 3 elementos cada um, que podemos formar com os elementos obtidos em S é igual a:

a) 10
b) 120
c) 64
d) 20

Testes

05) (PUC – RJ) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

a) -5
b) 0
c) 2
d) 14
e) 1024

06) (CEFET – MG) O produto das raízes da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ é igual a

a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.

07) A solução da inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ é:

a) $\{x \in \Re / 1 \leq x \leq 4\}$
b) $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 6\}$
c) $\{x \in \Re / x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$
d) $\{x \in \Re / x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$
e) $\{x \in \Re / x \leq 4\}$

08) Resolva, em R, as equações a seguir:

a) $2^x = 128$

b) $2^x = \frac{1}{16}$

c) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

d) $25.3^x = 15^x$ é:

e) $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$

f) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$

09) (UFSC – SC) A afirmação seguinte está correta?
Os valores reais de *x* que satisfazem a equação $4^x + 4 = 5 \,.\, 2^x$ pertencem ao intervalo *(2, 4]*.

10) (PUC – SP) O conjunto verdade da equação $3.9^x - 26.3^x - 9 = 0$, é:

11) (UFSC – SC) O valor de x que satisfaz a equação $\frac{5^{4x-12}}{5^{3x+8}} = \frac{1}{125}$ é:

12) Resolva, em R, as inequações a seguir:

a) $2^{2x-1} > 2^{x+1}$

b) $(0,1)^{5x-1} < (0,1)^{2x+8}$

c) $\left(\frac{7}{4}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^3$

13) (UEPG – PR) Assinale o que for correto.

01. A função $f(x) = a^x$, $1 < a < 0$ e $x \in R$, intercepta o eixo das abscissas no ponto (1,0)
02. A solução da equação $2^x.3^x = \sqrt[3]{36}$ pertence ao intervalo [0, 1]
04. Dada a função $f(x) = 4^x$, então D = R e $I_m = R_+^*$
08. A função $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ é crescente
16. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b \Rightarrow a < b$

14) (UEPG – PR) Dada a equação $3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$, assinale o que for correto.

01. A soma entre suas raízes é 4 e o produto é 3.
02. A soma entre suas raízes é nula.
04. Se **s** é a soma entre suas raízes, então $10^s = 10$
08. Se **p** é o produto entre suas raízes, então $3^p = 1$
16. O produto entre suas raízes é um número ímpar

15) (OSEC-SP) O domínio da função de definida por $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$, é

16) (UFSC – SC) Sendo: $7^{x+1} + 7^x - 34256 = 100200$, determine o valor de 18x.

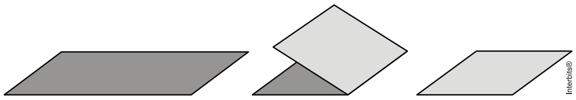
17) Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{(1,4)^{x^2-5} - \frac{5}{7}}$$

18) Se x é um número real positivo tal que $2^{x^2} = 2^{x+2}$, então $\left(\sqrt[x]{x}\right)^{\sqrt[x]{x^2}}$ é igual a:

Exercícios estilo ENEM

19) (UERJ – RJ) Considere uma folha de papel retangular que foi dobrada ao meio, resultando em duas partes, cada uma com metade da área inicial da folha, conforme as ilustrações.

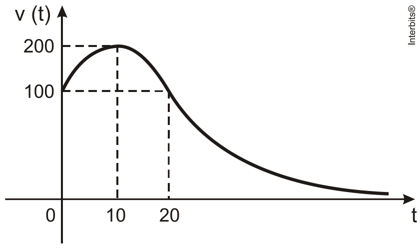


Esse procedimento de dobradura pode ser repetido *n* vezes, até resultar em partes com áreas inferiores a 0,0001% da área inicial da folha.

Calcule o menor valor de *n*. Se necessário, utilize em seus cálculos os dados da tabela.

x	2^x
9	$10^{2,70}$
10	$10^{3,01}$
11	$10^{3,32}$
12	$10^{3,63}$

20) (UFBA – BA) O gráfico representa uma projeção do valor de mercado, v(t), de um imóvel, em função do tempo t, contado a partir da data de conclusão de sua construção, considerada como a data inicial t = 0. O valor v(t) é expresso em milhares de reais, e o tempo t, em anos.



Com base nesse gráfico, sobre o valor de mercado projetado v(t), pode-se afirmar:

01. Aos dez anos de construído, o imóvel terá valor máximo.
02. No vigésimo quinto ano de construído, o imóvel terá um valor maior que o inicial.
04. Em alguma data, o valor do imóvel corresponderá a 37,5% do seu valor inicial.
08. Ao completar vinte anos de construído, o imóvel voltará a ter o mesmo valor inicial.
16. Se $v(t) = 200.2^{-\frac{(t-10)^2}{100}}$, então, ao completar trinta anos de construído, o valor do imóvel será igual na um oitavo do seu valor inicial.

GABARITO – AULA 12

1) 16 **2)** 03 **3)** a **4)** d **5)** b **6)** b
7) a **8)** a) 7 b) – 4 c) 3 d) 02 e) 00 f) 03
9) NÃO **10)** 02 **11)** 17
12) a) S = { x∈ R| x > 2 } b) S = { x∈ R| x > 3 }
c) S = { x∈ R| - 2 < x < 2 }
13) 30 **14)** 12
15) ($-\infty, -5$ [
16) 90
17)) {x ∈ℜ| x ≤ - 2 ou x ≥ 2}
18) 02 **19)** * **20)** 29 **21)** d **22)** c **23)** 01
24)00
25) a) {-1, 1} b) {0, 1}

* 19) A área A(n) de cada parte, após n dobraduras, é dada por

$$A(n) = A_0 \cdot 2^{-n},$$

com A_0 sendo a área inicial da folha.

O menor valor de n para o qual $A(n) < 0{,}0001\% \cdot A_0$ é tal que

$$A_0 \cdot 2^{-n} < 0{,}0001\% \cdot A_0 \Leftrightarrow 2^{-n} < 10^{-6}$$
$$\Leftrightarrow 2^n > 10^6.$$

Considerando as aproximações fornecidas na tabela, obtemos

$$2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 \cong 10^{3,01} \cdot 10^{2,70} = 10^{5,71} < 10^6$$

e

$$2^{20} = (2^{10})^2 \cong (10^{3,01})^2 = 10^{6,02} > 10^6.$$

Portanto, o menor valor de n que satisfaz a condição do enunciado é 20.

AULA 13

Logaritmos I

1. Definição

Dado um número a, positivo e diferente de um, e um número b positivo, chama-se logaritmo de b na base a ao real x tal que $a^x = b$ $(a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } b > 0)$.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Em $\log_a b = x$ temos que:

a é a base do logaritmo
b é o logaritmando ou antilogaritmo
x é o logaritmo

Observe que a base muda de membro e carrega x como expoente.
Acompanhe abaixo uma série de exercícios resolvidos.

Exercícios Resolvidos:

1) $\log_6 216 = x \Rightarrow 216 = 6^x \Rightarrow 6^3 = 6^x \Rightarrow x = 3$

2) $\log_5 3125 = x \Rightarrow 3125 = 5^x \Rightarrow 5^5 = 5^x \Rightarrow x = 5$

3) $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

4) $\log_{0,25} \sqrt[3]{128} = x \Rightarrow (0,25)^x = \sqrt[3]{128} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \sqrt[3]{2^7}$

$(2^{-2})^x = 2^{\frac{7}{3}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{7}{3}} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{6}$

Abaixo seguem dois dos principais sistemas de logaritmos.

Sistemas de Logaritmos Decimais:

É o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns ou vulgares ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês (1561-1630)).
Quando a base é 10 costuma-se omitir a base na sua representação.

Sistemas de Logaritmos Neperianos

É o sistema de base e (e = 2, 718...), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano deve-se a J. Neper (1550-1617).

2. Condição de Existência

Para que os logaritmos existam é necessário que em: $\log_a b$ tenha-se:

$$\begin{cases} \text{logaritmando positivo} \\ \text{base positiva} \\ \text{base diferente de 1} \end{cases}$$

Em resumo : $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$

Exemplo:

Determinar para que valores de x o logaritmo abaixo existe.

$$\log_{(2-x)}(2x+6).$$

Resolução:

De acordo com a condição de existência do logaritmo, devemos ter:

$2x + 6 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -3}$
$2 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 2}$
$2 - x \neq 1 \Rightarrow \boxed{x \neq 1}$

Fazendo a intersecção dos resultados obtidos, temos que $-3 < x < 2$ e $x \neq 1$.

3. Consequências da Definição

Observe os exemplos:

1) $\log_2 1 = x \Rightarrow 1 = 2^x \Rightarrow 2^0 = 2^x \Rightarrow x = 0$
2) $\log_3 1 = x \Rightarrow 1 = 3^x \Rightarrow 3^0 = 3^x \Rightarrow x = 0$
3) $\log_6 1 = x \Rightarrow 1 = 6^x \Rightarrow 6^0 = 6^x \Rightarrow x = 0$

$\boxed{\log_a 1 = 0}$ pois: $a^0 = 1$

4) $\log_2 2 = x \Rightarrow 2 = 2^x \Rightarrow 2^1 = 2^x \Rightarrow x = 1$
5) $\log_5 5 = x \Rightarrow 5 = 5^x \Rightarrow 5^1 = 5^x \Rightarrow x = 1$

$\boxed{\log_a a = 1}$ pois: $a^1 = a$

6) $\log_2 2^3 = x \Rightarrow 2^3 = 2^x \Rightarrow x = 3$
7) $\log_5 5^2 = x \Rightarrow 5^2 = 5^x \Rightarrow x = 2$

$\boxed{\log_a a^m = m}$ pois: $a^m = a^m$

8) $2^{\log_2 4} = x \Rightarrow 2^2 = x \Rightarrow x = 4$
9) $3^{\log_3 9} = x \Rightarrow 3^2 = x \Rightarrow x = 9$

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$

Fazendo $\log_a b = x$, temos: $b = a^x$
Então, em: $a^{\log_a b} = b$, temos $a^x = b$

Em Sala

01) A expressão $\log_{\frac{1}{3}} 81 + \log 0{,}001 + \log \sqrt[3]{10}$ vale:

a) $-\frac{4}{3}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $-\frac{20}{3}$
d) $-\frac{21}{3}$
e) $-\frac{19}{3}$

02) Assinale V para as verdadeiras e F para as Falsas

(   ) (UFSC – SC) Se $16^x = 9$ e $\log_3 2 = y$, então x.y é igual a 1/2.

(   ) (UFSC – SC) O valor de $81^{\log_9 3}$ é igual a 9.

03) (UDESC – SC) Se $\log_3 (x - y) = 5$ e $\log_5 (x + y) = 3$, então $\log_2(3x - 8y)$ é igual a:

a) 9
b) $4 + \log_2 5$
c) 8
d) $2 + \log_2 10$
e) 10

04) (ACAFE-SC) Os valores de m, com $\in$ R, para os quais a equação $x^2 - 2x + \log_2(m - 1) = 0$ admite raízes (zeros) reais e distintas são:

a) $2 < m < 4$
b) $m < 3$
c) $m \leq 3$
d) $1 \leq m \leq 3$
e) $1 < m < 3$

Testes

05) Calculando o valor de $\log_{0,2} 5$ obtemos:

a) 1
b) -1
c) 0
d) $-\dfrac{1}{2}$
e) 2

06) Determine o número cujo logaritmo no sistema de base $\sqrt[3]{9}$ vale 0,75.

07) O número $\log_2 24$ está entre

a) 1 e 2
b) 3 e 4
c) 4 e 5
d) 5 e 6
e) 6 e 7

08) Calculando o valor de $\log_{0,25} 32$ obtemos:

a) 1
b) -1
c) 0
d) $-\dfrac{5}{2}$
e) 2

09) Se $\log_2 (x - 2) = 4$ então $\log(3x + 46)$ é igual a:

a) 5
b) 2
c) 8
d) 21
e) 10

10) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $\log_2 512$

b) $\log_{0,25} 0,25$

c) $\log_7 1$

d) $\log_{0,25} \sqrt[13]{128}$

e) $\log_3 27$

f) $\log_{27} 3$

g) $\log_4 8$

h) $\log_8 4$

i) $\log_5 13 . \log_{13} 5$

11) (UFRGS – RS) Aproximando log 2 por 0,301, verificamos que o número 16^{10} está entre

a) 10^9 e 10^{10}
b) 10^{10} e 10^{11}
c) 10^{11} e 10^{12}
d) 10^{12} e 10^{13}
e) 10^{13} e 10^{14}

12) Determine o valor das expressões abaixo

a) $3 \log_a a^5 + \log_a 1 - 4 \log_a \sqrt{a}$, onde $0 < a \neq 1$, é:

b) $\log_2 \sqrt{8} - \log_9 \frac{1}{3} + 16.\log_{625} 5$ é:

c) $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0,001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$

d) $\dfrac{\log_3 1 + \log_{10} 0,01}{\log_2 \frac{1}{64} . \log_4 \sqrt{8}}$

13) (UDESC - SC) Sabendo que $\log_3(7x - 1) = 3$ e que $\log_2(y^3 + 3) = 7$, pode-se afirmar que $\log_y(x^2 + 9)$ é igual a:

a) 6
b) 2
c) 4
d) – 2
e) – 4

14) (UFRGS – RS) O número $\log_2 7$ está entre

a) 0 e 1
b) 1 e 2
c) 2 e 3
d) 3 e 4
e) 4 e 5

15) (UDESC – SC) Sejam *a* e *b* números naturais para os quais $\log_{(a+1)}(b + 2a) = 2$ e $1 + \log_a (b - 1) = a$. Então $\log_{3a} (3b - a)$ é igual a:

a) $-\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{3}{2}$

16) (ACAFE – SC) É correto afirmar que a solução da equação $3^x = 5^x + 5^{x+1}$ é:

a) $\frac{6}{\log_{0,6} 6}$

b) $\log_{0,6} 6$
c) 2,4
d) 5,256

17) (UDESC – SC) A expressão que representa a solução da equação $11^x - 130 = 0$ é:

a) $x = \log_{120} 11$
b) b) $x = \log_{11} 130$
c) $x = \frac{\log 130}{11}$
d) $x = \log\left(\frac{130}{11}\right)$
e) $\log 130^{11}$

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_o)$$

Onde M0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
e) $10^{27,00}$

19) (UFPR – PR) Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em lumens, a uma profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x$$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de 12,5 cm?

a) 150 lumens.
b) 15 lumens.
c) 10 lumens.
d) 1,5 lumens.
e) 1 lúmen.

20) (UFPR – PR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão

$S = – 18. \log(t + 1) + 86$

.

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

GABARITO – AULA 13

1) c **2)** a) V b) V **3)** e **4)** e **5)** b **6)** $\sqrt{3}$ **7)** c **8)** d
9) b **10)** a) 9 b) 1 c) 0 d) -7/26 e) 3 f) 1/3 g) 3/2 h) 2/3 i) 1
11) d **12)** a) 13 b) 6 c) – 13/2 d) 4/9 **13)** b **14)** c **15)** e
16) b **17)** b **18)** e **19)** d **20)** a) 68 b) 99 minutos

AULA 14

Logaritmos II

Nessa aula estudaremos ass propriedades dos logaritmos, denominadas propriedades operatórias que serão muito utilizadas nos cálculos que faremos adiante.

Para $B>0, C>0$ e $0<A\neq 1$ valem as seguintes propriedades:

1. Logaritmo do Produto

O logaritmo do produto é igual a soma dos logaritmos dos fatores.

$$\boxed{\log_A(B.C)=\log_A B+\log_A C}$$

Exemplos:

a) $\log_2(3.5)=\log_2 3+\log_2 5$

b) $\log_7(6.9)=\log_7 6+\log_7 9$

2. Logaritmo do Quociente

O logaritmo do quociente é o logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.

$$\boxed{\log_A\left(\frac{B}{C}\right)=\log_A B-\log_A C}$$

Exemplos:

a) $\log_2\left(\frac{7}{3}\right)=\log_2 7-\log_2 3$

b) $\log_{10}\left(\frac{13}{2}\right)=\log_{10}13-\log_{10}2$

3. Logaritmo da Potência

O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\boxed{\log_A\left(B^c\right)=c.\log_A B}$$

Exemplos:

a) $\log_3\left(5^2\right)=2\log_3 5$

b) $\log_7\left(2^3\right)=3\log_7 2$

Caso Particular $\boxed{\log_A \sqrt[c]{B}=\log_A B^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{c}.\log_A B}$

Demonstração da Primeira Propriedade

$\log_A(B.C)=z\rightarrow B.C=A^z$ (I)

$\log_A B=x\rightarrow B=A^x$ (II)

$\log_A C=y\rightarrow C=A^y$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$B.C=A^z$

$A^x.A^y=A^z$

$A^{x+y}=A^z\rightarrow z=x+y;$ logo:

$$\log_A(B.C)=\log_A B+\log_A C$$

Demonstração da Segunda Propriedade

$\log_A\left(\frac{B}{C}\right)=z\rightarrow\frac{B}{C}=A^z$ (I)

$\log_A B=x\rightarrow B=A^x$ (II)

$\log_A C=y\rightarrow C=A^y$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$\frac{B}{C}=A^z$

$\frac{A^x}{A^y}=A^z$

$A^{x-y}=A^z\rightarrow z=x-y;$ logo:

$$\log_A\left(\frac{B}{C}\right)=\log_A B-\log_A C$$

Demonstração da Terceira Propriedade

$\log_A\left(B^c\right)=x\rightarrow B^c=A^x$ (I)

$c.\log_A B=y\rightarrow B=A^{\frac{y}{c}}$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem:

$B^c=A^x$

$\left(A^{\frac{y}{c}}\right)^c=A^x\rightarrow A^y=A^x\rightarrow x=y;$ logo:

$$\log_A\left(B^c\right)=c.\log_A B$$

4. Mudança de Base

Estudamos na última aula as propriedades operatórias dos logaritmos. No entanto ao aplicarmos àquelas propriedades ficamos sujeitos a uma restrição: os logaritmos devem estar na mesma base. Dado esse problema, apresentamos então, um processo no qual nos permite reduzir logaritmos de bases diferentes para bases iguais. Este processo é denominado mudança de base e é expresso assim:

$$\boxed{\log_A B = \frac{\log_C B}{\log_C A}}$$

com $B > 0;\ 0 < A \neq 1;\ 0 < C \neq 1$

Demonstração da Mudança de Base

$$\log_A B = x \rightarrow B = A^x \ \text{(I)}$$
$$\log_C B = y \rightarrow B = C^y \ \text{(II)}$$
$$\log_C A = z \rightarrow A = C^z \ \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$B = A^x$$

$$C^y = (C^z)^x \rightarrow y = x.z \rightarrow x = \frac{y}{z} \ \text{Logo:}$$

$$\log_A B = \frac{\log_C B}{\log_C A}$$

Exercício Resolvido

Sendo $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$, calcule $\log_3 2$.

Resolução: $\log_3 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \dfrac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$

Consequências

Como consequência e com as condições de existência dos logaritmos obedecidas, temos:

$$\boxed{1)\ \log_B A = \frac{1}{\log_A B}} \qquad \boxed{2)\ \log_{A^k} B = \frac{1}{k}\log_A B}$$

Em Sala

01) Dados log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47. Calcule o valor de:

a) log 6

b) log 12

c) log 5

d) $\log \sqrt[3]{2}$

02) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as Falsas:

a) (   ) (UFSC – SC) Se a, b e c são números reais positivos e $x = \frac{a^3}{b^2\sqrt{c}}$ então log x = 3 log a – 2log b – 1/2 log c

b) (   ) (UFSC – SC) Em Química, o *pH* é definido por: $pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right)$ onde $[H^+]$ é a concentração de hidrogênio em *mol* por litro de solução. Para uma solução de ácido clorídrico cuja concentração hidrogeniônica é 2×10^{-4} $molL^{-1}$, o *pH* é igual a *4,3*. Considere: *log 2 = 0,30*.

c) (   ) (UFSC – SC) Se $3^n = 5$, então $\log_5 225 = \frac{2 + 2n}{n}$.

d) (   ) O valor da expressão $\log_3 5 . \log_{125} 27$ é 2.

03) (UDESC – SC) Sabendo que os números reais x, y e z são tais que $\log_y x = 5$ e $\log_y z = 7$, então $\log_x\left(\frac{x^2.y^3}{z^4}\right)$ é igual a:

a) – 5
b) – 3
c) – 2
d) $\frac{57}{5}$
e) $\frac{41}{5}$

04) (UFPR – PR) Uma quantia inicial de R$ 1.000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? (Use $\log_2 (1,06) = 0,084$.)

Testes

05) (UFRGS – RS) Atribuindo para $\log 2$ o valor $0,3$, então os valores de $\log 0,2$ e $\log 20$ são, respectivamente,

a) $-0,7$ e 3.
b) $-0,7$ e $1,3$.
c) $0,3$ e $1,3$.
d) $0,7$ e $2,3$.
e) $0,7$ e 3.

06) (UEL – PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que este imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente:
(dados: log 2 = 0,30 e log 7 = 0,84)

a) 3 anos
b) 4 anos e 3 meses
c) 5 anos
d) 6 anos e 7 meses
e) 7 anos e 6 meses

07) (FGV – SP) O produto $\log_9 2.\log_2 5.\log_5 3$ é :

a) 0
b) 1/2
c) 10
d) 30
e) 1/10

08) Sabendo-se que log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47. Calcule o valor dos logaritmos abaixo:

a) log 24

b) log 54

c) log 1,5

d) $\log \sqrt[5]{512}$

e) $\log \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

a) $\log_3 2$

b) $\log_2 12$

09) (MACK) O ph do sangue humano é calculado por $pH = \log\left(\frac{1}{X}\right)$, sendo X a molaridade dos íons H_3O^+. Se essa molaridade for dada por $4{,}0.10^{-8}$ e adotando-se log 2 = 0,30, o valor desse PH será:

a) 7,20
b) 4,60
c) 6,80
d) 4,80
e) 7,40

10) Sejam log x = a e log y = b. Então o log $\left(x.\sqrt{y}\right)$ é igual a:

a) a + b/2
b) 2a + b
c) a + b
d) a + 2b
e) a – b/2

11) (ACAFE – SC) O valor da expressão $\log_3 2 . \log_4 3$ é:

a) 1/2
b) 3
c) 4
d) 2/3
e) 2

12) (UEL – PR) Uma universidade tem 5000 alunos e uma estimativa de crescimento do número de alunos de 10% ao ano. Com base nessas informações, o tempo previsto para que a população estudantil da universidade ultrapasse 10000 alunos é de
Dados: $\log_{10} 2 = 0,\ 30$; $\log_{10} 1{,}1 = 0,\ 04$

a) 6 anos.
b) 7 anos.
c) 8 anos.
d) 9 anos.
e) 10 anos.

13) (UEPG – PR) As soluções da equação $3^{x+1} + 3^{4-x} - 36 = 0$ são **a** e **b**, com **a** < **b**. Com base nestes dados, assinale o que for correto.

01. $\log_3 (a + b) = 1$
02. $\log_4 a + \log_4 b = 1/2$
04. $\log (b - a) = 0$
08. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = -\log b$

14) (UDESC – SC) Considere $\log x = \frac{5}{2}$, $\log y = \frac{13}{5}$, $\log(y - x) = 1{,}913$ e $\log(x = y) = 2{,}854$. Com base nestes dados, analise as proposições.

I. $xy = 10^{\frac{51}{10}}$

II. $\log(y^2 - x^2) = 0{,}2$

III. $\log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right) = 0{,}608$

Assinale a alternativa **correta**.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa I é verdadeira.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

15) (UFPR – PR) Num certo exprerimento científico, os dados são organizados em forma de tabelas, e a relação entre as grandezas está na forma logarítmica. Por algum motivo, há a necessidade de troca de base logarítimica. O resultado x da equação $\log_2 x + \log_8 x = 8$ será igual a:

a) 64
b) 24
c) 32
d) 50
e) 84

16) (UFSM – RS) Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares.
Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t(em anos), por

$$V = 6{,}775(1{,}05)^{t-1}$$

com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante.
Em que ano o valor movimentado será igual a 13,55 bilhões de dólares?
Dados: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$.

a) 2015.
b) 2016.
c) 2020.
d) 2025.
e) 2026.

17) (FGV – SP) Em regime de juros compostos, um capital inicial aplicado à taxa mensal de juros i irá triplicar em um prazo, indicado em meses, igual a

a) $\log_{1+i} 3$.
b) $\log_i 3$.
c) $\log_3 (1 + i)$.
d) $\log_3 i$.
e) $\log_{3i} (1 + i)$.

Exercícios estilo ENEM

18) (UFPR) Um método para se estimar a ordem de grandeza de um número positivo N é usar uma pequena variação do conceito de notação científica. O método consiste em determinar o valor x que satisfaz a equação $10^x = N$ e usar propriedades dos logaritmos para saber o número de casas decimais desse número. Dados log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, use esse método para decidir qual dos números abaixo mais se aproxima de $N = 2^{120}3^{30}$.

a) 10^{45}
b) 10^{50}
c) 10^{55}
d) 10^{60}
e) 10^{65}

19) Investindo-se um capital a uma taxa de juros mensais de 7%, em regime de capitalização composta, em quanto tempo o capital dobrará? (Considere: log 2 = 0,3 e log 1, 07 = 0,03)

a) 10 meses
b) 11 meses
c) 12 meses
d) 13 meses
e) 14 meses

20) Suponha que a taxa de juros de débitos no cartão de crédito seja de 9% ao mês, sendo calculada cumulativamente. Em quantos meses uma dívida no cartão de crédito triplicará de valor? (Use as aproximações ln 3 = 1,08 e ln 1,09 = 0,09)

GABARITO – AULA 14

1) a) 0,77 b) 1,07 c) 0,70 d) 0,10
2) a) V b) F c) V d) F
3) b **4)** 12 anos **5)** b **6)** e **7)** b
8) a) 1,37 b) 1, 71 c) 0, 17 d) 0, 54 e) 0,22
f) ≅ 0,64 g) ≅ 3,57
9) e **10)** a **11)** a **12)** c **13)** 15 **14)** a
15) a **16)** e **17)** a

18) b **19)** a **20)** 12 meses **21)** a
22) d **23)** a **24)** 31 **25)** b

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 15

Função Logarítmica

1. Definição:

A função $f: \Re_+^* \to \Re$, definida por $y = f(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$, é denomidada função logarítmica de base **a**.

$\boxed{y = f(x) = \log_a x}$

São exemplos de funções logarítmicas:

a) $f(x) = \log_2 x$
b) $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
c) $h(x) = \log_{\frac{7}{5}} x$

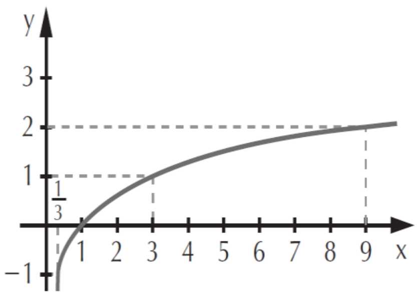
2. Gráfico:

Para termos uma noção do gráfico da função logarítmica $y = f(x) = \log_a x$ vamos obter alguns de seus pontos, atribuindo valores convenientes para x e tomando os resultados em y.

Vamos analisar dois casos abaixo. O primeiro com a base **a** maior do que 1 (a > 1) e no segundo com a base **a** situada entre 0 e 1 (0 < a < 1).

1) $f: \Re_+^* \to \Re$ definida por $f(x) = \log_3 x$

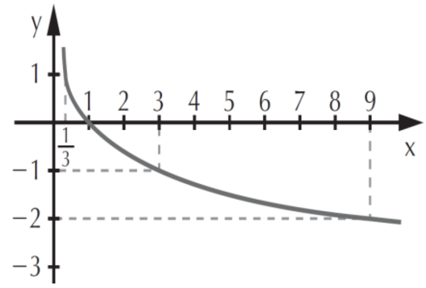
x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



Note que à medida que x cresce, y também cresce, ou seja, $f(x) = \log_3 x$ é uma função crescente.

2) $f: \Re_+^* \to \Re$ definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

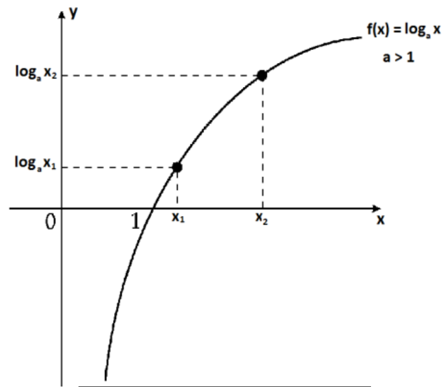
x	y
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



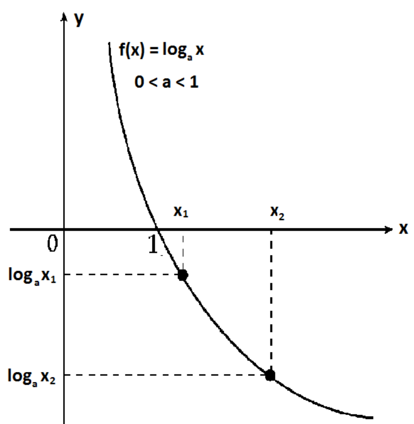
Note que à medida que x cresce, y decresce, ou seja, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é uma função decrescente.

Observando os exemplos acima em relação à funções da forma $f: \Re_+^* \to \Re$, definida por $y = f(x) = \log_a x$ podemos concluir:

1) O gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ está situado todo à direita do eixo y pois $D(f) = \Re_+^*$.
2) A curva que representa a função $f(x) = \log_a x$ intercepta o eixo das abscissas no ponto $(1;0)$.
3) Para $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é crescente e para $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente.



$\boxed{\log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2}$



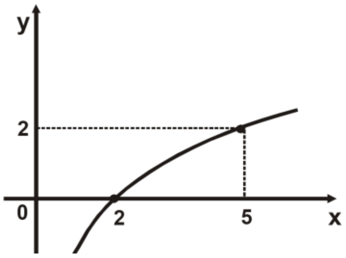
$\boxed{\log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2}$

4) A função exponencial $f(x)=\log_a x$ é injetora pois valores distintos do domínio geram imagens distintas. Então: $\log_a x=\log_a y \Leftrightarrow x=y$.

5) A função $f:\Re_+^* \to \Re$, definida por $y=f(x)=\log_a x$, é sobrejetora pois o contradomínio e o a imagem da função são ambos, iguais $CD(f)=Im(f)=\Re$. Logo, a função $f:\Re_+^* \to \Re$, definida por $y=f(x)=\log_a x$ é bijetora e com isso admite inversa.

Em sala

01) (ACAFE – SC) A figura a seguir está representando o gráfico de f(x) = log $_b$ (x – 1). O valor de f(129) é:



a) 10
b) 5/2
c) 2
d) 7
e) 8

02) (UFSM-09) A partir de dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o Índice de Desenvol-vimento da Educação Básica (IDEB) para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental da Escola Estadual Básica Professora Margarida Lopes (Santa Maria,RS) pode ser representado pela expressão:

$$f(t)=5+\log_2\left(\frac{t-1997}{8}\right)$$

onde f(t) representa o IDEP em função do ano t em que o dado foi coletado. Diante dessas informações, pode-se afirmar que o acréscimo do IDEB previsto para essa escola, de 2005 a 2013 é:

a) 5 b) 1 c) 1/2 d) 1/4 e) 0

03) (UFSM-09) Considerando a função $f(t)=5+\log_2\left(\frac{t-1997}{8}\right)$ da questão anterior, o ano t pode ser obtido, em função do IDEB u=f(t), pela expressão:

a) $1997 - 2^{u-1}$
b) $1997 - 2^{u-5}$
c) $1997 + 2^{u-2}$
d) $1997 + 2^{u-1}$
e) $1997 + 2^{u-5}$

04) (UDESC – SC) Sabendo que os gráficos das funções f(x) = ax – b e g(x) = log$_b$x e se interceptam no ponto $P\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$, então o produto a.b é igual a:

a) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{-5\sqrt{3}}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

Testes

05) Dentre as funções logarítimicas seguintes, identifique as que são crescentes e as que são decrescentes.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$

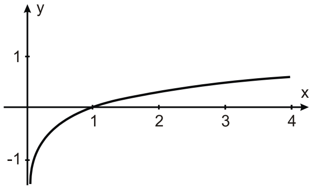
c) $f(x) = \log_{\frac{5}{3}} x$

d) $f(x) = \ln x$

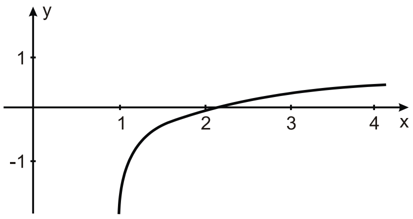
e) $f(x) = -\log_{10} x$

06) (UEG) O gráfico da função $y = \log(x+1)$ é representado por:

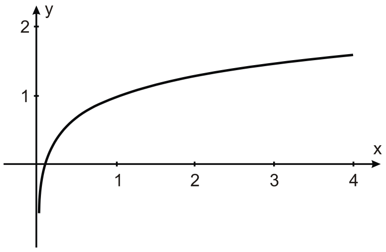
a)



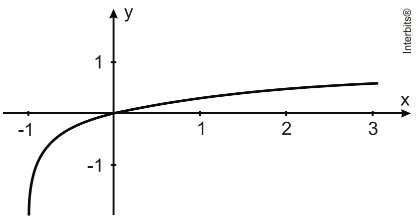
b)



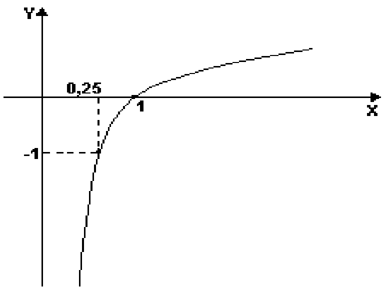
c)



d)

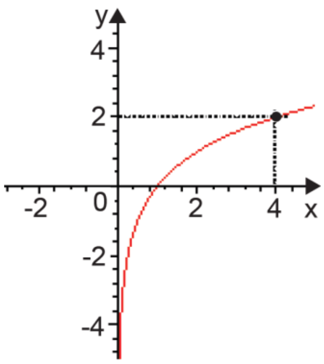


07) A figura mostra o gráfico da função logaritmo na base b. O valor de b é:



a) 1/4
b) 2
c) 3
d) 4
e) 10

08) (PUC – RS) A representação



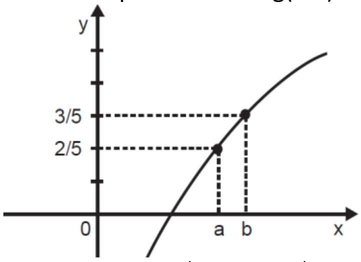
é da função dada por y = f(x) = $\log_a(x)$. O valor de $\log_a(a^3 + 8)$ é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

09) (UDESC-07) A expressão que representa a inversa da função $f(x) = \log_3 (x + 1)$ é

a) $f^{-1}(x) = 3^x + 1$
b) $f^{-1}(x) = 3^x - 1$
c) $f^{-1}(x) = 3x - 1$
d) $f^{-1}(x) = (3x - 1)^x$
e) $f^{-1}(x) = \log_{(x+1)} 3$

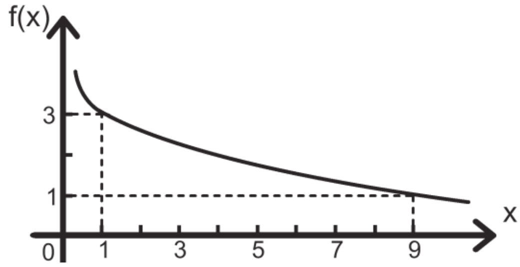
10) (PUC–RS–09) Observe a representação da função dada por $y = \log(x)$, a seguir. Pelos dados da figura, podemos afirmar que valor de $\log(a.b)$ é:



a) 1 b) 10 c) $10^{2/5}$ d) $10^{3/5}$ e) 10^5

11) (UFRGS – 09) Os pontos (5, 0) e (6, 1) pertencem ao gráfico da função $y = \log_{10} (ax + b)$. Os valores de a e b são, respectivamente:
a) 9; –44 b) 9; 11 c) 9; –22 d) –9; – 44 e) –9; 11

12) (UFSM – 07)
O gráfico do desempenho de certo candidato à Câmara Federal foi ajustado através da função $f(x) = \log_a x + m$ e está apresentado na figura, onde x representa o número de dias que precediam o pleito e f(x) o número de votos em milhares de unidades. Sabendo que $g(x) = f(x) - 3$, o valor de $g^{-1}(-4)$ é:



a) 1 b) 3 c) 9 d) 27 e) 81

13) (UEPG-08) A respeito da função real definida por $f(x) = \log (3x - 5)$, assinale o que for correto.
01. $f(2) = 1$
02. $f(35) = 2$
04. $f(3) = 2\log 2$
08. $f(10) - f(15) = \log \frac{5}{8}$

14) (UDESC – SC) Seja *f*: D $\rightarrow \Re$ a função definida por f(x) = log (x^2 – x), onde D é dado por D = {x $\in$ R/ x >1}.

Analise as proposições abaixo.

II. A função *f* não admite nenhuma raiz pertencente a D.
III. Exise um único valor de x $\in$ D para o qual *f(x)* = 2log 2 + log 3
IV. Existe um único valor de x $\in$ D para o qual $f(x) = \frac{2}{\log_3 10} + \frac{3}{\log_2 10}$

a) Somente a afirmativa II é verdadeira.
b) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa III é verdadeira.
d) Somente a afirmativa I é verdadeira.
e) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

15) (UFSM – RS) Um estudo com um grupo de vestibulandos indica que a função $f(t) = 9\, e^{-t/3} + 1$, com $t \geq 0$ é a quantidade do conteúdo de Geometria que um aluno consegue relembrar decorridas t semanas após o estudo. A função g, que expressa o tempo t em função da quantidade de conteúdo que o aluno consegue relembrar, é a inversa da função f e é dada por

a) $g(x) = \ln\left(\frac{9}{x-1}\right)^3$

b) $g(x) = \ln\left(\frac{9}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{9}\right)^3$

d) $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)$

16) (FUVEST – SP)
Seja *f* uma função a valores reais, com domínio $D \subset \Re$ tal que $f(x) = \log_{10}(\log_{1/3}(x^2 - x + 1))$, para todo $x \in D$.

O conjunto que pode ser o domínio D é

a) $\{x \in \Re \,/\, 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \Re \,/\, x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$
c) $\left\{x \in \Re \,/\, \frac{1}{3} < x < 10\right\}$
d) $\left\{x \in \Re \,/\, x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 10\right\}$
e) $\left\{x \in \Re \,/\, \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

17) (UNIFAP AP)
Ezequiel olhando as questões que envolvem funções logarítmicas encontra uma que para resolvê-la é necessário usar as propriedades de logaritmos. Então resolve levar a questão para Marta tentar fazê-la. Ao chegar lá ele apresenta a seguinte questão:

Dada a função cuja lei é $f(x) = \log_{10} \frac{10^x}{2000}$, qual é o valor de f(3).
O que Marta deve marcar como resposta correta:

a) – log 20
b) – log 2
c) – log 0,2
d) – log 0,02
e) – log 0,002

Exercícios Estilo ENEM

18) (PUC GO)

Não gostei da reunião de ontem na Casa do Couro. A reunião em si foi excelente, a melhor desde muito tempo. Todo mundo estava inspirado e tinindo, quem quis falar falou o que quis sem medo de desagradar; e quem achou que devia discordar discordou, também sem pensar em consequências. Foi uma reunião civilizada, se posso usar essa palavra que lembra tão comprometedoramente o tempo antigo. Não gostei foi de certas ocorrências marginais que observei durante os trabalhos, e que me deixaram com uma pulga na virilha, como dizemos aqui.

Pensando nesses pequeninos sinais, e juntando-os, estou inclinado a concluir que muito breve não teremos mais reuniões na Casa do Couro. É possível mesmo que a de ontem fique sendo a última, pelo menos por algum tempo, cuja duração não posso ainda precisar. As ocorrências que observei enquanto meus companheiros falavam me levam a concluir que vamos entrar numa fase de retrocessos e rejeições semelhante àquela que precedeu o fim da Era dos Inventos.

Notei, por exemplo, que os anotadores não estavam anotando nada, apenas fingiam escrever, fazendo movimentos fúteis com o carvão. Isso podia significar ou que já estavam com medo de ser responsabilizados pelo que escrevessem, ou que haviam recebido ordem de não registrar o que fosse dito na reunião. Também uns homens que nunca vi antes na Casa do Couro iam fechando sorrateiramente as janelas e fixando-as com uma substância pastosa que de longe me pareceu ser cola instantânea.

Notei ainda que um grupo de indivíduos estranhos à Casa, espalhados pelo grande salão, contava e anotava os luzeiros, as estátuas, os defumadores, as esteiras, banquetas, todos os utensílios e objetos de decoração, como leiloeiros contratados para organizar um leilão.

Não falei de minha suspeita a ninguém porque ultimamente ando muito cauteloso. Se me perguntarem por que tanta cautela, não saberei responder. Talvez seja faro, sexto sentido. A grande maioria do povo está como que enfeitiçada pelo Umahla, para eles é o Sol no céu e o Umahla na terra, julgam-no incapaz de transgredir qualquer dos Quatrocentos Princípios, baixados por ele mesmo quando tomou as rédeas depois de evaporar o Umahla antigo. Por isso acho melhor fazer de conta que penso como todo mundo, para poder continuar pescando e comendo o bom pacu, que felizmente ainda pula em nossos rios e lagos; o que não me impede de tomar precauções para não ser confundido com os bate-caixas de hoje; e na medida do possível pretendo ir anotando certas coisinhas que talvez interessem ao novo Umahla que há de vir, se eu gostar do jeito dele; mas vou fazer isso devagar, sem afobação nem imprudências, e sem alterar o meu sistema de vida.

Tanto que esta tarde vou pescar com meu irmão Rudêncio. Ele na certa vai me sondar sobre a reunião de ontem, e já armei minhas defesas. Rudêncio é meu irmão, pessoa razoavelmente correta e tudo mais, mas é casado com filha de Caincara e não devo me abrir com ele. Depois que ele casou só temos falado de pescarias, de comida — assunto que o deixa de olhos vidrados —, das festas que ele frequenta (das minhas não falo para não perder tempo ouvindo conselhos).

Vale a pena contar como foi o casamento de Rudêncio. Joanda, hoje mulher dele, estudava plantas curativas e fazia longas expedições pelas matas e campos procurando ervas raras para suas experiências. Um dia ela se separou dos companheiros numa expedição à fronteira das Terras Altas, perdeu-se na mata e não voltou ao acampamento. Os companheiros esperaram, procuraram, desistiram. Dias depois apareceu um caçador dizendo que ela tinha sido raptada por um bando de Aruguas.

O Caincara quis organizar uma expedição de resgate, chegou a reunir mais de cem voluntários, mas o Umahla vetou, e com boa razão. Estávamos empenhados na atração dos Aruguas, e uma expedição de resgate comandada por um Caincara violento estragaria o trabalho já feito. O Umahla preferia negociar.

[...]

(VEIGA, José J. **Os pecados da tribo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2005, p. 7-9. Adaptado.)

O texto faz alusão a plantas curativas e a experiências com medicamentos. A absorção de um medicamento aplicado por via intravenosa é dada pela função $F(x) = 180 - 52\ \ell n\,(1 + x)$ que fornece o número de unidades do medicamento remanescente no organismo depois de x horas.

Nessas condições, depois de quantas horas a quantidade de unidades de medicamento presente será igual a 24? Assinale a alternativa correta:

a) 24 horas e 15 minutos
b) 18 horas e 41 minutos
c) 12 horas e 30 minutos
d) 8 horas e 45 minutos

19) (UNIFAP AP)

Ezequiel e Marta estudando problemas que envolvam logaritmos, se depararam com uma questão envolvendo logaritmo, onde dois terremotos, com R_1 e R_2 pontos na escala *Richter* estão relacionados por:

$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Onde M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos respectivos terremotos. Usando a fórmula acima, se $M_1 = 10^3\ M_2$, então $R_1 - R_2$ é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

20) (UFAM)

Com o objetivo de combater a proliferação do mosquito transmissor da dengue, estão sendo produzidos em laboratório *aedes aegyptis* machos geneticamente modificados.

Eles possuem dois genes adicionais. Quando são soltos se reproduzem com fêmeas que vivem livres na natureza. Depois de cruzar elas vão produzir ovos, que se transformam em larvas e pupas, mas toda a nova geração de mosquitos vai morrer antes de se reproduzir. Com o passar do tempo, a população de *aedes aegypti* diminuirá drasticamente.

Supondo que em um determinado bairro após a soltura destes mosquitos modificados, a diminuição da população de *aedes aegypti* se dá segundo a função $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{5}}$, onde N_0 indica a população inicial de mosquitos (t = 0) e *t* o tempo medido em meses. O tempo necessário, em meses, para que a população de *aedes aegypti* neste bairro se reduza à metade é de: Obs. Considere ln 2 = 0,7

a) 2
b) 2,5
c) 3
d) 3,5
e) 4

GABARITO – Aula 15

1) d 2) b 3) c 4) a 5) a) C b) D c) C d) C e) D 6) d 7) d 8) b 9) b 10) a 11) a 12) e 13) 14 14) b 15) a 16) a 17) B 18) B 19) D 20) D

AULA 16

Equação e Inequação Logarítmica

1. Equações Logarítmicas

Equações Logarítmicas são equações onde os logaritmos apresentam incógnita na base do logaritmo ou no logaritmando.

Existem dois métodos básicos para resolver equações logarítmicas. Em ambos os casos, se faz necessário discutir as raízes, lembrando que não existem logaritmos com base negativa e um e não existem logaritmos com logaritmando negativos.

1º Método: $\boxed{\log_c A = \log_c B \Leftrightarrow A = B}$

A igualdade acima é verdadeira pois a função logarítmica é injetora.

2° Método: $\boxed{\log_c A = B \Leftrightarrow A = C^B}$

Exercícios Resolvidos

1) Resolver a equação $\log_5 x + \log_5 (x-3) = \log_5 4$

Resolução:

$$\log_5 x + \log_5 (x-3) = \log_5 4$$
$$\log_5 x.(x-3) = \log_5 4$$
$$\text{Então:} \quad x.(x-3) = 4$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Das raízes encontradas, apenas x = 4 satisfaz as condições de existência do logaritmo.

$$\text{Logo:} \ S = \{4\}$$

2) Resolver a equação $\log_5 (x-2) = 3$

Resolução:

$\log_5 (x-2) = 3$

Aplicando a definição do logaritmo, temos:

$x - 2 = 5^3$

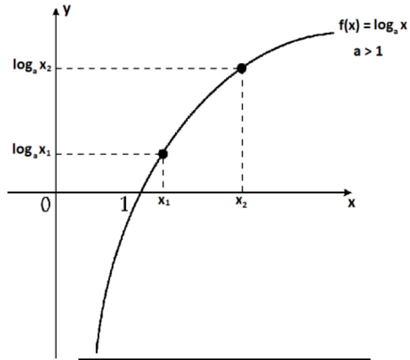
$x - 2 = 125 \Rightarrow x = 127$

Logo: $S = \{127\}$

2. Inequações Logarítmicas

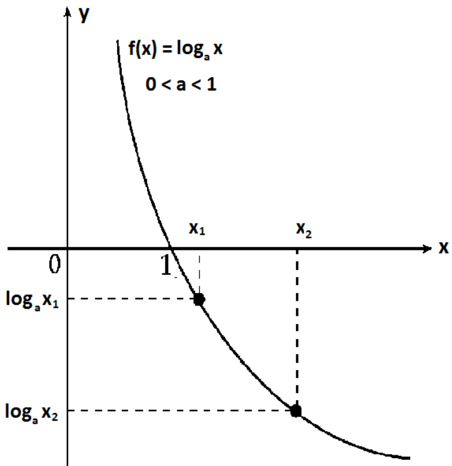
Para resolvermos uma inequação logarítmica, devemos respeitar as seguintes propriedades:

- Quando as bases são maiores que 1 (a > 1), a relação de desigualdade se mantém.



$\boxed{\log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2}$

- Quando as bases estão compreendidas entre 0 e 1 (0 < a < 1), a relação de desigualdade se inverte.



$\boxed{\log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2}$

Em Sala

Resolva a equações e inequações logarítmicas abaixo:

01) $\log_2(x + 4) + \log_2(x - 3) = \log_2 18$, é:

02) $\log_{25}\log_2(x - 4) = \frac{1}{2}$ é:

03) $\log_2 (x + 2) > \log_2 8$

04) $\log_{1/2} (x - 3) \geq \log_{1/2} 4$

Testes

05) Resolver, em R as equações:

a) $\log_5 (1 - 4x) = 2$

b) $\log[x(x - 1)] = \log 2$

c) $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 = 0$

d) $\log(\log(x + 1)) = 0$

e) $\log_2 (x - 8) - \log_2 (x + 6) = 3$

f) $\log_5 (x - 3) + \log_5 (x - 3) = 2$ é:

06) (UFRGS – 2010) Um número real satisfaz somente uma das seguintes inequações.

I) $\log x \leq 0$

II) $2\log x \leq \log(4x)$

III) $2^{x^2+8} \leq 2^{6x}$

Então, esse número está entre:

a) 0 e 1 b) 1 e 2 c) 2 e 3 d) 2 e 4 e) 3 e 4

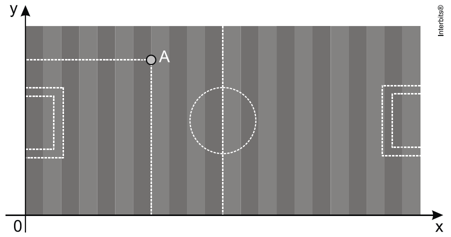
07) (UFSC) O valor de x compatível para a equação $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 2$ é:

08) (UFSM-RS) A raiz real da equação $\log_{10}(x + 1) + 1 = \log_{10}(x^2 + 35)$ é:

a) – 5 b) – 1 c) 2 d) 5 e) 10

Testes

09) (UFSM – RS) Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.



Para que o ponto $A(\log_{10}(x+1)+1, \log_{10}(x^2+35))$ tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que

a) $x > -1$.
b) $x = 5$.
c) $x < -1$.
d) $x = -5$
e) $x > 5$.

10) Se $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}} 7$, então:

a) $x < 8$
b) $2 < x < 9$
c) $x \leq 9$
d) $x > 1$
e) $1 \leq x < 6$

11) (UFSC – SC) Se $\begin{cases} 3\log(x-y) = \log 125 \\ \log x + \log y = \log 14 \end{cases}$, então o valor de x + y é

12) (UFSC – SC) O valor de x compatível para a equação $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 2$ é:

13) (UDESC – SC) O conjunto de números reais que representa a interseção entre os domínios das funções

$f(x) = \sqrt{(-2x^2 - 6x + 8)}$ e $g(x) = \log(x + 2)$

é um intervalo:

a) aberto à direita e fechado à esquerda.
b) aberto nos dois extremos.
c) fechado nos dois extremos.
d) infinito.
e) aberto à esquerda e fechado à direita.

14) (UPF – RS) As populações de duas cidades, M e N, são dadas em milhares de habitantes pelas funções

$M(t) = \log_8 (1+t)^6$
$N(t) = \log_2 (4t+4)$

Onde a variável t representa o tempo em anos. Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior do que a da outra. O valor mínimo desse instante t é:

a) –1
b) 0
c) 2
d) 3
e) 4

15) (UEPB - PB) Na equação logarítmica $\log_4[\log_2(\log_3 x)] = \frac{1}{2}$ o valor de x é

a) um múltiplo de 5
b) um número divisível por 3 e 9
c) um número par
d) um decimal
e) um número irracional

16) (UFRGS – RS) Representando no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções reais de variável real f(x) = log | x | e g(x) = x(x² – 4) ,verificamos que o número de soluções da equação f(x) = g(x) é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

17) (FUVEST – SP) O número real **a** é o menor dentre os valores de x que satisfazem a equação $2\log_2\left(1+\sqrt{2}x\right)-\log_2\left(\sqrt{2}x\right)=3$. Então, $\log_2\left(\frac{2a+4}{3}\right)$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) 2

Exercícios estilo ENEM

18) (UNIRIO) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida comparativa de riqueza, alfabetização, educaçã, esperança de vida, natalidade e outros fatores para os diversos países do mundo. É uma maneira padronizada de avaliação e medida do bem-estar de uma população, especialmente bem-estar infantil. Todo ao, os países membros da ONU são classificados de acordo com essas medidas. Para se calcular o Índice de Desenvolvimento Humano – Renda (IDH-R), determina-se o PIB per capita do país em dólares (P), e, em seguida, aplica-se a fórmula: IDH-R = $\frac{(\log_{10} P)-2}{2,6}$. Se um determinado país possui IDH-R = $\frac{10}{13}$, podemos afirmar que seu PIB per capita (P) é

a) US $ 8.500,00
b) US $ 9.000,00
c) US $ 9.500,00
d) US $ 10.000,00
e) US $ 10.500,00

19) (UFPR – PR) Suponha que o tempo t (em minutos) necessário para ferver água em um forno de micro-ondas seja dado pela função $t(n) = a.n^b$ sendo a e b constantes e n o número de copos de água que se deseja aquecer.

Número de copos	Tempo de aquecimento
1	1 minuto e 30 segundos
2	2 minutos

a) Com base nos dados da tabela ao lado, determine os valores de a e b.
Sugestão: use log2 = 0,30 e log3 = 0, 45.

b) Qual é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas?

20) (UFRGS – RS) Após tomar dois cálices de vinho, um motorista verificou que o índice de álcool em seu sangue era de 0,5 g/L. Ele foi informado de que esse índice decresceria de acordo com a seguinte igualdade: $I(t) = k.\ 2^{-t}$ (Onde k = índice constatado quando foi feita a medida; t = tempo, medido em horas, a partir do momento dessa medida) Sabendo-se que o limite do índice permitido pela lei seca é de 0,2 g/L, para dirigir mantendo-se dentro da lei, o motorista deverá esperar, pelo menos: (Use 0,3 para $\log_{10}2$).

a) 50 min
b) 1 h
c) 1h 20 min
d) 1h 30 min
e) 2 h

GABARITO – AULAS 16

1) S={5} 2) S={36} 3) {x∈R|x>6} 4) {x∈R|3<x≤7}
5) a) {– 6} b) {2, -1} c) {27} d) {9} e) { } f) 08
6) b 7) 99 8) d 9) b 10) b 11) 09 12) 99
13) e 14) d 15) b 16) d 17) b 18) d
19) a) 3/2 e 1/2 b) 3min 20) c