AULA 01

Conjuntos I

Pretendemos aqui introduzir alguns conceitos que também consideramos primitivos:

- **conjunto**: designado, em geral, por uma letra maiúscula (A, B, C, ..., X, Y, Z);
- **elemento**: designado, em geral, por uma letra minúscula (a, b, c, ..., x, y, z);
- **pertinência**: a relação entre elemento e conjunto, denotada pelo símbolo $\in$, que se lê "pertence a".

NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

A representação de um conjunto pode ser feita de diversas maneiras, como veremos a seguir.

1) Listagem dos Elementos

Os elementos de um conjunto, quando apresentados na forma de listagem, devem estar entre chaves e separados por vírgula ou por ponto-e-vírgula, caso tenhamos a presença de números decimais. O tipo de representação abaixo é conhecido como **representação tabular**.

Exemplos:

a) Seja *A* o conjunto das cores da bandeira brasileira, então:

A = {verde, amarelo, azul, branco}

b) Seja *B* o conjunto das vogais do nosso alfabeto, então:

B = {a, e, i, o, u}

c) Seja *C* o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração, então:

C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2) Uma Propriedade de seus elementos

A apresentação de um conjunto por meio da listagem de seus elementos traz o inconveniente de não ser uma notação prática para os casos em que o conjunto apresenta uma infinidade de elementos. Para estas situações, podemos fazer a apresentação do conjunto por meio de uma propriedade que sirva a todos os elementos do conjunto e somente a estes elementos.

Exemplos:

a) Seja *B* o conjunto das vogais do nosso alfabeto, então: *B* = {*x* / *x* é vogal do nosso alfabeto}

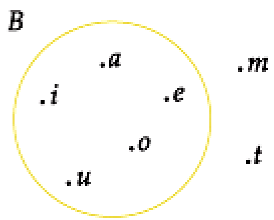
b) Seja *C* o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração, então: *C* = {*x*/*x* é algarismo do sistema decimal de numeração}

3) Diagrama de Venn

A apresentação de um conjunto por meio do diagrama de Venn é gráfica e, portanto, muito prática. Os elementos são representados por pontos interiores a uma linha fechada não entrelaçada. Dessa forma, os pontos exteriores à linha representam elementos que não pertencem ao conjunto considerado.

Exemplo:

Seja B o conjunto das vogais do nosso alfabeto.



RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Um conjunto é formado por elementos. Um objeto "**a**", qualquer, pode ser elemento de um determinado conjunto **A**. Quando for, dizemos que:

a pertence a **A** e escrevemos $a \in A$

Caso contrário, dizemos que **a** não pertence a **A** e escrevemos $a \notin A$.

Exemplo: Consideremos o conjunto: *A* = {0, 2, 4, 6, 8}

O algarismo 2 **pertence** ao conjunto *A*, então: $2 \in A$.
O algarismo 7 **não pertence** ao conjunto *A*, então: $7 \notin A$.

➔ ALGUNS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

{ } ou $\varnothing$: conjunto vazio
$\forall$: "para todo" ou "para *qualque*r que seja
$\exists$: existe
| ou / : tal que

Relação de Inclusão

Dizemos que o conjunto *A* está contido no conjunto B se todo elemento que pertencer a *A*, pertencer também a *B*. Indicamos que o conjunto *A* está contido em *B* por meio da seguinte simbologia:

$\boxed{A \subset B}$ (lê-se: A contido em B)

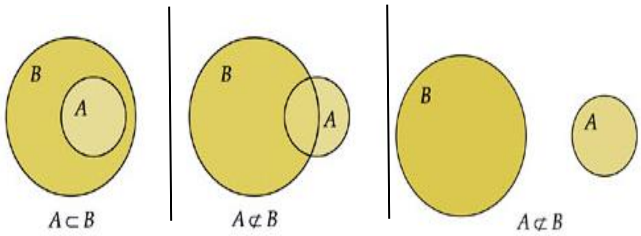
Obs.:

$\boxed{B \supset A}$ (lê-se: B contém A)

O conjunto *A* não está contido em *B* quando existe pelo menos um elemento de *A* que não pertence a *B*. Indicamos que o conjunto *A* não está contido em *B* desta maneira:

$\boxed{A \not\subset B}$ (lê-se: A não está contido em B)

Exemplos:



Se o conjunto *A* está contido no conjunto *B*, dizemos que *A* é um **subconjunto** de *B*. Como todo elemento do conjunto *A* pertence ao conjunto *A*, dizemos que *A* é subconjunto de *A* e, por extensão, todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

Importante ➔ A relação de pertinência relaciona um elemento a um conjunto e a relação de inclusão refere-se, sempre, a dois conjuntos.

Errado:	$2 \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$	**Correto:**	$2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
	$\{2\} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$		$\{2\} \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$

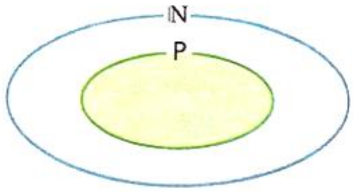
Exemplo:
Considerando **P** o conjunto dos números naturais pares e **N** o conjunto dos números naturais, temos:

P = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}

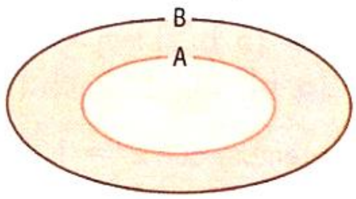
Neste caso P $\subset$ N, pois todos os elementos de P pertencem a N.

Representação por diagrama:



Exemplo:
Se **A** é o conjunto dos retângulos e **B** é o conjunto dos quadriláteros, então A $\subset$ B, pois todo retângulo é um quadrilátero.

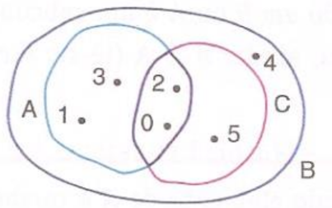
Representação por diagrama:



Exemplo:
Dados os conjuntos:
A = {0, 1, 2, 3},
B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e
C = {0, 2, 5},
temos:

a) A $\subset$ B, pois todo elemento de A pertence a B;
C $\not\subset$ A, pois 5 $\in$ C e 5 $\notin$ A;
B $\supset$ C, pois todo elemento de C pertence a B.

b) Um diagrama de Venn que representa os conjuntos A, B e C é o seguinte:



OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

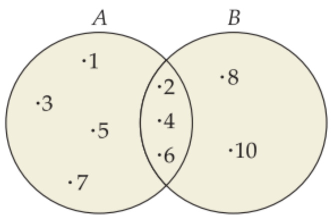
União de Conjuntos: Dados dois conjuntos **A** e **B**, a união (ou reunião) é o conjunto formado pelos elementos de **A** mais os elementos de **B**. E é indicado por $A \cup B$ (lê-se: **A** união **B** ou **A** reunião **B**). Representamos a união de dois conjuntos da seguinte forma:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}$$

Exemplo:
Dados os conjuntos
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e B = {2, 4, 6, 8, 10}, a união entre A e B é dada por:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

Graficamente, temos:



Observe que os elementos comuns não são repetidos.

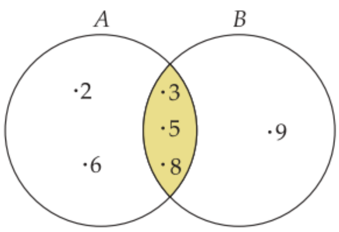
Intersecção de Conjuntos: Dados dois conjuntos **A** e **B**, a intersecção é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a **A** e **B**. E é indicado por $A \cap B$ (lê-se: **A** intersecção **B** ou, simplesmente, **A** inter **B**). Representamos a intersecção de dois conjuntos da seguinte forma:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\; e \;\; x \in B\}$$

Exemplo:
Sendo A = {2, 3, 5, 6, 8} e B = {3, 5, 8, 9}, a intersecção entre A e B é dada por:

$$A \cap B = \{3, 5, 8\}.$$

Graficamente:



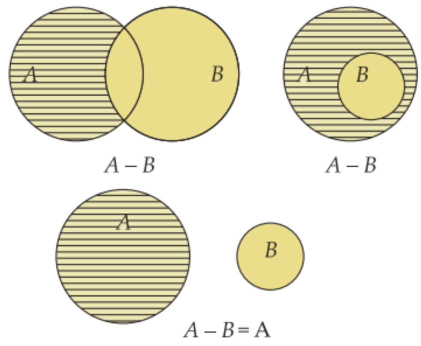
Exemplo:
Calcule $M \cap N$, em que M = {2, 3, 5} e N = {4, 6}.

Perceba que nesse caso, $M \cap N = \varnothing$, pois não há elementos comuns. Nesse caso, dizemos que os conjuntos M e N são **disjuntos**.

Diferença de Conjuntos: Dados os conjuntos A e B, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B. Esse conjunto é chamado **diferença entre A e B** e indicado por **A – B**, que se lê "**A** menos **B**".
Assim, define-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

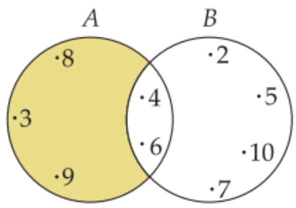
Graficamente, temos:



Exemplo:
Calcular A – B, sabendo que A = {3, 4, 6, 8, 9} e B = {2, 4, 5, 6, 7, 10}.

A – B = {3, 8, 9}, elementos que estão em A mas não estão em B.

Graficamente:



Exemplo:
Sendo A = {1, 3, 5} e B = {0, 1, 3, 5, 6}, calcule A – B.

Sol.: A – B = $\varnothing$, pois não existe elemento de A que não pertença a B.

Complementar: Quando dois conjuntos A e B são tais que B $\subset$ A, damos à diferença o nome de complementar de B em relação ao conjunto A.

Notação:

$$B \subset A \Rightarrow C_A B = A - B$$

(Lê-se complementar de B em A)

Exemplo:
Considere os conjuntos: A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { 3 , 4 }

Como B $\subset$ A $\Rightarrow$ $C_A B = A - B = \{1, 2\}$

Obs: Dado um conjunto P contido no universo U, chama-se complementar de P, simplesmente o U – P, cuja representação simbólica pode ser feita por P' ou $\overline{P}$. Ou seja: $\overline{P} = C_U P = \{x / x \in U \text{ e } x \notin P\}$

Em Sala

01) Considere A = {2; {2}; Φ}, marque V ou F:

$a)(\ \ )2 \in A$

$b)(\ \ )2 \subset A$

$c)(\ \ )\{2\} \in A$

$d)(\ \ )\{2,\{2\}\} \subset A$

$e)(\ \ )\{\{2\}\} \in A$

$f)(\ \ )\{\{2\}\} \subset A$

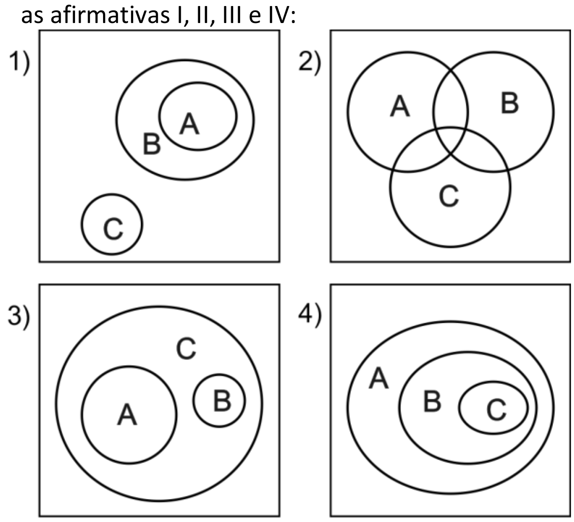
$g)(\ \ )\varnothing \in A$

$h)(\ \ )\varnothing \subset A$

$i)(\ \ )\{\varnothing\} \subset A$

02) (UEMG)

Sendo A, B e C três subconjuntos de um mesmo universo, considere os seguintes diagramas e analise as afirmativas I, II, III e IV:



I. $A \subset B, A \cap C \neq \phi$ e $C \subset B$

II. $A \subset B, B \not\subset A$ e $A \cap B \neq \phi$

III. $A \cap B \neq \phi, A \cap C \neq \phi$ e $B \cap C = \phi$

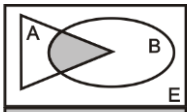
IV. $C \subset (A \cap B), B \subset A, C \neq A$ e $B \neq A$

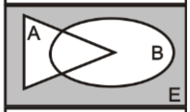
Pode–se afirmar que as associações corretas estão descritas na alternativa:

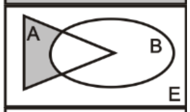
a) (2, III) e (1, I)
b) (4, IV) e (3,III)
c) (1, II) e (3, III)
d) (2, III) e (1, III)
e) (1, II) e (4, IV)

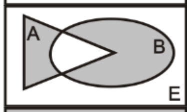
03) (CEFET PR)

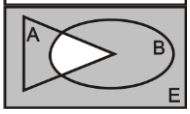
A alternativa que representa na região sombreada a operação $(A \cup B) - (A \cap B)$ é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

04) (UFPI)

Sejam *A* e *B* subconjuntos não-vazios e distintos, de números reais. Sobre o conjunto $(B - A) \cup (A - B)$ podemos afirmar que é igual a:

a) $\varnothing$ b) *B* c) $A \cap B$ d) *A* e) $(A \cup B) - (A \cap B)$

Testes

05) Considere B = {a; b; {a}; Φ}, marque V ou F:

$a)(\ \ )a \in A$

$b)(\ \ )a \subset A$

$c)(\ \ )\{a\} \in A$

$d)(\ \ )\{b\} \subset A$

$e)(\ \ )\{a,\{a\}\} \in A$

$f)(\ \ )\{b\} \notin A$

$g)(\ \ )b \not\subset A$

$h)(\ \ )\varnothing \in A$

$i)(\ \ )\varnothing \subset A$

$j)(\ \ )\{\varnothing\} \subset A$

06) (UFG GO)

Na classificação de Robert H. Whittaker, os seres vivos foram agrupados nos reinos *Monera, Protista, Fungi, Plantae* e *Animalia*. A esse respeito, considere os seguintes conjuntos de reinos *A* = {*Monera, Protista, Fungi*}, *B* = {*Plantae, Animalia, Fungi*}, *C* = {*Animalia, Protista, Fungi*} e uma lista de indivíduos que os representam formada por {bactérias, levedura, samambaia, cogumelo, algas microscópicas, caracol, esponja, musgo}. Diante do exposto, conclui-se que todos os indivíduos que pertencem aos reinos que estão no conjunto $(A \cap B)^C - C$ são os seguintes:

a) bactérias, musgo e samambaia.
b) bactérias e algas microscópicas.
c) samambaia e musgo.
d) samambaia, musgo e algas microscópicas.
e) caracol e esponja.

07) (UFG GO)

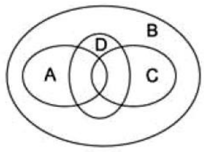
Na década de 1960, Herbert Copeland propôs uma classificação dos seres vivos em quatro reinos: Monera, Protoctista, Metaphyta e Metazoa. Em 1969, Robert H. Whitaker sugeriu uma nova classificação, que, após contribuições de Lynn Margulis, Carl Woese e Peter Raven, compreendeu os seguintes reinos: Monera, Protista, Fungi, Plantae e Animalia.

Na classificação de Copeland, considere *A* o conjunto dos seres vivos do reino Monera, *B* do reino Protoctista, *C* do reino Metaphyta e *D* do reino Metazoa. Denotando por *F o* conjunto dos seres vivos do reino Fungi*,* da classificação de Whitaker, em relação aos reinos da classificação de Copeland, tem-se que

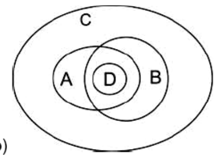
a) $F \subset B$. b) $F \subset (C \cap D)$. c) $F \subset (B \cap C)$.
d) $F \subset C$. e) $F \subset (A \cup D)$.

08) (UEL PR)

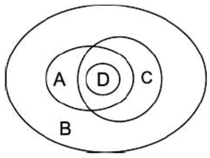
É comum representar um conjunto pelos pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada. Esta representação é chamada de diagrama de Venn. Considere quatro conjuntos não vazios A, B, C e D . Se $A \not\subset C$, $C \not\subset A$, $B \supset (A \cup C)$ e $D \subset (A \cap C)$ então o diagrama de Venn que representa tal situação é:



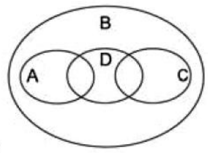
a)



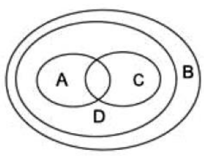
b)



c)



d)



e)

09) (UEPG PR/2012)

Sobre os conjuntos A = {2, 3, 5}, B = {3, 4} e C, tal que $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, assinale o que for correto.

01. $A \cap B \cap C = \varnothing$.
02. C – B = {1, 2}.
04. C – A = {3, 5}.
08. $3 \in C$.
16. $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 5\}$.

10) (UECE)

Os subconjuntos P, X e Y do conjunto N dos números naturais são dados por: P = {números primos}, X = {múltiplos de 2} e Y = {múltiplos de 3}.

Podemos afirmar corretamente que

a) $P \cup X \cup Y = N$
b) $P \cap X \cap Y \neq \Phi$
c) $X \cup Y \subset N - P$
d) $X \cap Y \subset N - P$

11) (IBMEC)

Dizemos que um conjunto numérico *C* é fechado pela operação ★ se, e somente se, para todo $c_1, c_2 \in C$, tem-se $(c_1 ★ c_2) \in C$. A partir dessa definição, avalie as afirmações seguintes.

I. O conjunto *A* = {0, 1} é fechado pela multiplicação.
II. O conjunto *B* de todos os números naturais que são quadrados perfeitos é fechado pela multiplicação.
III. O conjunto *C* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} é fechado pela adição.

Está(ão) corretas(s)

a) apenas a afirmação I.
b) apenas as afirmações I e II.
c) apenas as afirmações I e III.
d) apenas as afirmações II e III.
e) as três afirmações.

12) Vamos assumir que são verdadeiras as seguintes afirmações:

I. Todo matemático é cientista;
II. Alguns matemáticos são professores.

Se *C*, *M* e *P* representam, respectivamente, os conjuntos de todos os Cientistas, Matemáticos e Professores, então é INCORRETO afirmar que:

a) $M \subset C$
b) $M \cap P \neq \phi$
c) $(M \cap P) \subset C$
d) $P \subset M$
e) $C \cap P \neq \phi$

13) (PUC)

Considere o conjunto A = {3,5}. Sabendo que $B \cap A = \{3\}$ e $B \cup A = \{1,2,3,4,5\}$, determine o conjunto B.

a) B = {1,2,3}
b) B = {1,2,4}
c) B = {1,2,3,4}
d) B = {1,2,3,5}
e) B = {1,2,3,4,5}

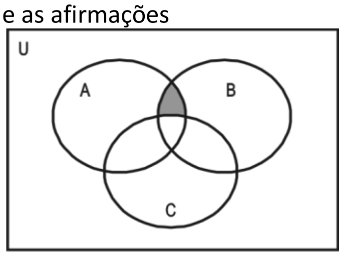
14) (UEL PR)

Dados os conjuntos X e Y , a diferença entre X e Y é o conjunto $X - Y = \{x \in X : x \notin Y\}$.

Dados os conjuntos (intervalos) A = [2 , 5] e B=[3,4] temos:

a) A − B = {2, 5} e B − A = {−1,−2}
b) A − B = B − A
c) A − B = ∅ e B − A = [2, 3] ∪ [4, 5]
d) A − B = (2, 3] ∪ [4, 5) e B − A = ∅
e) A − B = [2, 3) ∪ (4, 5] e B − A = ∅

15) Analisando-se a parte hachurada representada no diagrama e as afirmações



I. $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$
II. $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$
III. $\overline{A \cap (B \cup C)}$
IV. $A \cap (B \cap \overline{C})$

pode-se concluir que a alternativa correta é a

01. I
02. III
03. IV
04. I e III
05. II e IV

16) (UECE)

Os conjuntos X = {0,4,5,6,7,x} e Y = {1,3,6,8,x,y} possuem o mesmo número de elementos e X ∩ Y = {2,6,7}. Para os elementos x e y, o valor numérico de 7x – 2y é

a) 0.
b) 5.
c) 25.
d) 45.

17) (UEPG PR)

Considere dois conjuntos, A e B, tais que $A = \{3, 7, x, 5, 9\}$ e $B = \{1, 5, x, 8, y, 4\}$. Sabendo-se que $A \cap B = \{5, 9, 6\}$, assinale o que for correto.

01. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
02. $A - B = \{3, 7\}$
04. $A \subset B$
08. $8 \notin A$
16. $x + y = 15$

Exercícios Estilo ENEM

18) Considere as premissas: P1 – Algum A é B. P2 – Nenhum C é B. Se P1 e P2 são verdadeiras então, é necessariamente verdadeiro que:

a) Algum A é C.
b) Algum C é A.
c) Nenhum A é C.
d) Nenhum C é A.
e) Algum A não é C.

19) (UNIMONTES MG)

Considere o conjunto *B*={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Podemos afirmar:

a) Se *A* é um subconjunto de *B* que possui exatamente 7 elementos, então a soma dos elementos de *A* é um número ímpar.
b) Se *A* é um subconjunto de *B* que possui exatamente 7 elementos, então existem dois elementos em *A* que são primos entre si.
c) Se *A* é um subconjunto de *B* que possui exatamente 7 elementos, então a soma dos elementos de *A* é um número par.
d) Existe um subconjunto *A* de *B* com exatamente 7 elementos tais que todos são primos entre si.

20) (UFRR)

A linguagem corrente não atende às exigências do rigor lógico do pensamento matemático. Algo tinha de ser feito para evitar paradoxos. Isso aconteceu em 1922, quando dois matemáticos, Fraenkel e Skolem, propuseram que a linguagem corrente fosse completamente banida da Matemática e substituída por uma linguagem formal, construída com poucos símbolos e as regras de sintaxe necessários para se conduzir o raciocínio dedutivo. Os símbolos incluem os conhecidos símbolos matemáticos, como os sinais de adição, subtração, igualdade, etc., além de outros, como $\exists$ (significando existe), $\Rightarrow$ (significando implica), (significando para todo), $\in$ (significando pertence), os sinais de parênteses, símbolos para as variáveis, etc.

Tendo isso em vista, a afirmação “conjunto formado por todos os elementos comuns ao conjunto A e ao conjunto B”, está abaixo representada por:

a) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
b) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
c) $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$
d) $A \subset B \Rightarrow C_B^A = B - A$
e) $A \cap B = \{x \mid x \subset A \text{ e } x \subset B\}$

Aprofundamento

21) (UEPB)

Considere os conjuntos X e Y e as proposições abaixo:

I. ( ) Se $X \subset Y$ então $X \cap Y \subset X$

II. ( ) $X \cup \varnothing \subset \varnothing$

III. ( ) Se $A \subset X$ e $X \subset Y^c$ então $A \cap Y = \varnothing$ (Y^c : complementar de Y)

Classificando as sentenças em verdadeiras (V) ou falsas (F), nesta ordem, obtemos:

a) F V F
b) V V F
c) F V V
d) V F V
e) V F F

22) (UPE)

Dados *A* e *B* conjuntos, a operação de diferença simétrica (⊕) é definida por $A \oplus B = A \cup B - A \cap B$. Se $A = \{1,\{1\}, \varnothing, a\}$ e $B = \{1,2,\{\varnothing\}, a, b\}$, então o conjunto $A \oplus B$ é igual a

a) $\{1, \{1\}, \varnothing, \{\varnothing\}, 2,a,b\}$
b) $\{1, a\}$
c) $\{\{1\}, \{\varnothing\}, 2,b\}$
d) $\{\{1\}, \varnothing, \{\varnothing\}, 2,b\}$
e) $\varnothing$

23) (IBMEC)

Seja <u>n</u> um número natural, tal que: $1 \le n \le 24$.

Considere os conjuntos:

$$M = \left\{ x \in N \middle| \, x = \frac{48}{n} \right\}$$

$$P = \{x | \, x = 2n\}$$

$$Q = \{x | \, x = 2^n\}$$

É correto dizer que, se $X = (M \cap P) - Q$, o número de elementos do conjunto X é:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6.

24) (UEPG PR)

Considerando os conjuntos: R = {0, 1, 3, 5, 7}, S={2, 4, 6} e P = {1, 2}, assinale o que for correto.

01. $1 \in (S - P)$.
02. Existe uma função f: $S \to P$ que é bijetora.
04. $(S \cap P) \cup R = R$.
08. $R \cap S \cap P = \varnothing$.
16. Nenhuma função f: $S \to R$ é sobrejetora.

25) (ITA)

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;
II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;
III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e III.
e) II e III.

GABARITOS – Aula 01

1) V-F-V-V-F-V-V-V-V 2) E 3) D 4)E
5) V-F-V-V-F-V-F-V-V-V 6) A 7) D 8) C 9) 03 10) D
11) B 12) D 13) C 14) E 15) 03 16) A 17) 26 18) E
19) B 20) B 21) D 22) D 23) C 24) 24 25) C

AULA 02

Conjuntos II

CONJUNTO DAS PARTES

Dado um conjunto *A*, dizemos que o seu conjunto de partes, representado por *P* (*A*), é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto *A*.

1) Determinação do Conjunto de partes

Vamos observar, com o exemplo a seguir, o procedimento que se deve adotar para a determinação do conjunto de partes de um dado conjunto *A*.

Exemplo:
Seja o conjunto *A* = {2, 3, 5}. Para obtermos o conjunto de partes do conjunto *A*, basta escrevermos todos os seus subconjuntos:

1º) Subconjunto vazio: $\varnothing$, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
2º) Subconjuntos com um elemento: {2}, {3}, {5}.
3º) Subconjuntos com dois elementos: {2,3}, {2, 5} e {3, 5}.
4º) Subconjuntos com três elementos: *A* = {2, 3, 5}, pois todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

Assim, o conjunto das partes do conjunto *A* pode ser apresentado da seguinte forma:

P(*A*) = {$\varnothing$, {2}, {3}, {5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {2, 3, 5}}.

2) Número de Elementos do conjunto de partes

Podemos determinar o número de elementos do conjunto de partes de um conjunto *A* dado, ou seja, o número de subconjuntos do referido conjunto, sem que haja necessidade de escrevermos todos os elementos do conjunto *P*(*A*).

Se **A** tem **n** elementos, P(A) tem 2^n elementos.

Notação: **n(A)** indica o número de elementos do conjunto A.

Obs: No exemplo anterior, o conjunto *A* = {2, 3, 5} apresenta três elementos e, portanto, é de se supor, pelo uso da relação apresentada, que *P* (*A*) = 2^3 = 8, o que de fato ocorreu.

Exemplo:
Dado um conjunto A, chamam-se subconjuntos triviais de A: o próprio A e o conjunto vazio. Todos os demais são chamados de subconjuntos próprios. Se o conjunto A tem 254 subconjuntos próprios, determine n(A).

Solução:

O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é calculado pela potência 2^n, incluindo os triviais. No caso, temos:

$$n(P(A)) = 254 + 2 = 256$$
$$2^n = 256$$
$$2^n = 2^8$$
$$n = 8$$

Logo, n(A)=8.

NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO

O número de elementos da união de:

1) dois conjuntos A e B será:

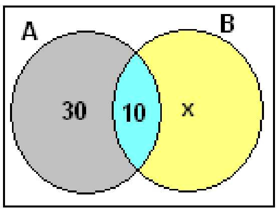
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2) três conjuntos A, B e C será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exemplo:
Sejam A e B são dois conjuntos tais que (A – B) possui 30 elementos, A ∩ B tem 10 elementos e AUB tem 48 elementos. Então o número de elementos de B – A é:
a) 8 b) 10 c) 12 d) 18

Solução:
Repare que não há elementos comuns em (A – B), (A ∩ B) e (B – A). A representação em cores no diagrama ilustra a situação. Considerando x o número de elementos de (B – A), temos:



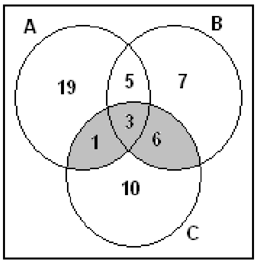
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$48 = 40 + (10 + x) - 10$$
$$48 = 40 + x$$
$$x = 8$$

Exemplo:

8. Considere três conjuntos A, B e C, tais que: n(A) = 28, n(B) = 21, n(C) = 20, n(A ∩ B) = 8, n(B ∩ C) = 9, n(A ∩ C) = 4 e n(A∩B∩C) = 3. Assim sendo, o valor de n((A U B)∩C) é:
a) 3 b) 10 c) 20 d) 21

Solução:

Representando as informações através de diagramas identifica-se o valor pedido.



A região pintada representa o número de elementos que estão na união de A com B e no conjunto C: 1 + 3 + 6 = 10.

Em sala

01) (UFAL)
O resultado de uma pesquisa realizada com alunos da Universidade Aberta do Brasil sobre a utilização dos navegadores Internet Explorer e Mozilla Firefox mostrou que dos 200 alunos entrevistados 160 usavam o primeiro e 115 usavam o segundo. Qual o número de alunos entrevistados que utilizam ambos os navegadores?
a) 40 b) 45 c) 75 d) 85 e) 200

02) (IFSP)
Dos alunos de uma escola, sabe-se que:
• 64% têm notebook;
• 40% têm tablet;
• 24% têm tablet e também notebook.
Sabendo que nessa escola há 300 alunos que não têm notebook nem tablet, então o número de alunos dessa escola é
a) 1 500.
b) 1 400.
c) 1 300.
d) 1 200.
e) 1 100.

03) (UDESC SC)
Uma empresa de telecomunicações oferece três serviços aos seus clientes: telefone fixo, internet e televisão a cabo. Um cliente dessa empresa pode contratar isoladamente cada um dos serviços, com exceção da internet que, obrigatoriamente, deve estar associada à aquisição da telefonia fixa. Também há a opção do pacote combo, que inclui os três serviços simultaneamente. Em uma determinada cidade, essa empresa possui 10 mil clientes, sendo que deste total 18% utilizam apenas a telefonia e outros 33% utilizam apenas a televisão a cabo. Além disso, 41% do total de clientes são usuários da internet e, destes, 52% assinam o pacote combo. Com isso, o percentual total de clientes da empresa que são assinantes de exatamente dois dos serviços oferecidos é:
a)31,5% b)29,32% c)19,68% d)27,68% e)49%

04) (MACK SP)
Se $A=\{x \in Z / \text{ x é ímpar e } 1 \le x \le 7\}$ e $B=\{x \in R / x^2-6x+5=0\}$, então a única sentença falsa é
a) O conjunto das partes da intersecção dos conjuntos A e B é $P(A \cap B) = \{\{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$.
b) O conjunto complementar de B em relação a A é $C_A B = \{3, 7\}$.
c) O conjunto das partes do complementar de B em relação a A é $P(C_A B) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\}$.
d) O conjunto A intersecção com o conjunto B é $A \cap B = \{1, 5\}$.
e) O número de elementos do conjunto das partes da união dos conjuntos A e B é $n[P(A \cup B)] = 16$.

Testes

05) (PUC)

Uma prova com duas questoes foi dada a uma classe de quarenta alunos. Quinze alunos acertaram as duas questoes, 20 acertaram a primeira e 22 acertaram a segunda questao. Quantos alunos erraram as duas questoes?

a) 15 b) 13 c) 22 d) 20 e) 12

06) (IFGO)

Dos 50 candidatos para tirar a Carteira Nacional de Habilitação de uma autoescola, 15 foram reprovados na prova teórica e 25, na prática. Nove candidatos foram reprovados simultaneamente nas provas teórica e prática. Determine quantos candidatos não foram reprovados em nenhuma dessas provas.

a) 19 b) 10 c) 40 d) 22 e) 31

07) (UDESC)

Considere em um conjunto universo, com 7 elementos, os subconjuntos A, B e C, com 3, 5 e 7 elementos, respectivamente. É correto afirmar que:

a) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos.
b) $(A \cap B) \cap C$ tem no mínimo 1 elemento.
c) $B \cap C$ tem 3 elementos.
d) $A \cap C$ tem no mínimo 2 elementos.
e) $A \cap B$ pode ser vazio.

08) (PUC)

O número de alunos matriculados nas disciplinas Álgebra A, Cálculo II e Geometria Analítica é 120. Constatou-se que 6 deles cursam simultaneamente Cálculo II e Geometria Analítica e que 40 cursam somente Geometria Analítica. Os alunos matriculados em Álgebra A não cursam Cálculo II nem Geometria Analítica. Sabendo que a turma de Cálculo II tem 60 alunos, então o número de estudantes em Álgebra A é

a) 8 b) 14 c) 20 d) 26 e) 32

09) (UECE)

Dos 200 professores de uma universidade, 60 dedicam tempo integral a essa instituição e 115 são doutores. Se entre os doutores apenas 33 dedicam tempo integral, então o número de professores da universidade que não dedicam tempo integral e não são doutores é

a) 107. b) 82. c) 58. d) 55.

10) (UEFS)

500 pessoas foram entrevistadas para saber se liam as revistas X, Y ou Z. Desses entrevistados, 40 declararam não ler nenhuma delas, 220 leem X, 170 leem Y, e 80 eram leitores de X e Y.

Com base nessas informações, pode-se concluir que

a) 70 entrevistados leem apenas Z.
b) 110 entrevistados leem apenas Z.
c) 150 entrevistados leem apenas Z.
d) 190 entrevistados leem apenas Z.
e) é impossível determinar quantos entrevistados leem apenas Z.

11) (FATEC SP)

Numa pesquisa com alunos das Fatecs foram feitas, entre outras, duas perguntas:

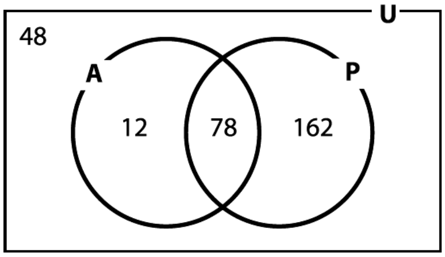
- Você se declara afrodescendente?

	Sim		Não

- Você fez o ensino médio integralmente em escola pública?

	Sim		Não

Com os dados obtidos na pesquisa, foi construído o diagrama de Euler-Venn da figura.



No diagrama, considere que:

- U é o conjunto universo da pesquisa;
- A é o conjunto dos alunos que se declaram afrodescendentes; e
- P é o conjunto dos alunos que fizeram o ensino médio integralmente em escola pública.

De acordo com os dados do diagrama, o número de alunos consultados que responderam “Sim” às duas perguntas e o número dos que responderam “Não” às duas perguntas são, respectivamente,

a) 78 e 162. b) 78 e 48. c) 90 e 60.
d) 90 e 210. e) 174 e 270.

12)(UEMA)

Um curso que prepara candidatos para concurso nas disciplinas matemática, física e química tem 200 alunos na disciplina matemática; 240 alunos na disciplina física e 180 alunos na disciplina química. Desses, 80 alunos fazem matemática e física; 50, matemática e química; 100, física e química e 30 alunos cursam as três disciplinas. Quantos alunos tem o curso?

a) 120 b) 250 c) 350 d) 420 e) 620

13) (ACAFE SC)

Sobre os conjuntos abaixo, analise as afirmações a seguir.

A={$x \in N^*$ / $x < 200$}
B={$x \in A$/ x é múltiplo de 8}
C={$x \in A$/ x é múltiplo de 3}

I. *O conjunto BUC possui 90 elementos.*
II. *O conjunto C possui 65 elementos.*
III. *O conjunto dos múltiplos naturais de 3 e 8 menores que 200 possui 8 elementos.*
IV. *A soma dos elementos contidos em AUB é igual a 8169.*

Assinale a alternativa **correta**.

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas **II** e **III** são verdadeiras.
c) Apenas a afirmação **III** é verdadeira.
d) Apenas **III** e **IV** são verdadeiras.

14) (UFGD MS)

O Colégio BOMBOM realizou uma pesquisa sobre as atividades esportivas praticadas por seus alunos, obtendo-se o seguinte resultado:

30 jogavam vôlei;
30 jogavam basquete;
40 jogavam futebol;
17 jogavam vôlei e basquete;
15 jogavam futebol e basquete;
10 jogavam futebol e vôlei;
07 jogavam vôlei, basquete e futebol;
35 não praticavam nenhum esporte.

Selecionando-se aleatoriamente um aluno deste colégio, a probabilidade de ele jogar vôlei ou basquete é de

a) 0,43. b) 0,60. c) 0,65. d) 0,70. e) 0,92.

15) (FAVIP PE)

Dos 700 estudantes de uma escola, 130 jogam futebol, 90 jogam vôlei, e 80 jogam basquete. Se 25 estudantes jogam exatamente dois, dentre os três esportes, e 12 estudantes jogam os três esportes, quantos estudantes da escola não jogam nenhum dos três esportes?

a) 440 b) 443 c) 446 d) 448 e) 449

16) (ACAFE SC)

Uma indústria de calçados recolheu em seus revendedores produtos defeituosos e, entre os pares defeituosos, observou o seguinte:

- 25% haviam descolado a sola.
- 17% havia problemas com costuras.
- 15% dos calçados recolhidos tinham descolado a sola e possuíam problemas na costura.
- em 18% o único defeito era a falta de um dos cadarços.

Nesse sentido, analise as seguintes afirmações:

I. *A probabilidade que um dos calçados recolhidos tenha como defeito as costuras ou a sola descolada é de 42%.*

II. *55% dos calçados recolhidos apresentaram outros defeitos não listados acima.*

III. *A probabilidade do calçado recolhido não ter como defeito a sola ou as costuras descoladas é de 73%.*

Assinale a alternativa **correta**.

a) As afirmações II e III estão corretas.
b) Apenas a afirmação II está correta.
c) Apenas a afirmação III está correta.
d) Nenhuma das afirmações está correta.

17) (IFGO)

Os 1800 alunos de uma escola, foram pesquisados quanto ao gosto pelas disciplinas da área de exatas: matemática (M), física (F) e química (Q). A tabela a seguir indica quantos estudantes gostam dessas disciplinas:

Disciplina	M	F	Q	M e F	F e Q	M e Q	M, F e Q
Número de estudantes	400	1220	1080	220	800	180	100

Por meio desses dados, é **correto** afirmar que o número de estudantes da escola que não gostam de nenhuma das três disciplinas é:

a) 100. b) 200. c) 900. d) 1200. e) 1650.

Exercícios Estilo ENEM

18) (UEL PR)

Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela A no canal A, a novela B no canal B e a novela C no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

Novelas	Número de telespectadores
A	1450
B	1150
C	900
A e B	350
A e C	400
B e C	300
A, B e C	100

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

a) 300 b) 370 c) 450 d) 470 e) 500

19) (UDESC)

Uma das últimas febres da internet são os sites de compras coletivas, que fazem a intermediação entre anunciantes e consumidor final, oferecendo cupons com grande percentual de descontos na compra de produtos e/ou serviços. O gestor de um destes sites, preocupado em acompanhar essa tendência e ao mesmo tempo oferecer novas opções para seus clientes, tabulou os dados referentes aos negócios realizados por sua empresa durante o ano de 2011. De posse desses dados, ele (gestor) percebeu que em seu site foram ofertados cupons apenas nas seguintes categorias: Gastronomia, Entretenimento e Saúde&Beleza. Além disso, considerando apenas os cinco mil clientes cadastrados que efetuaram a compra de pelo menos uma oferta do seu site, o gestor notou que 52% destes adquiriram cupons do segmento Gastronomia, enquanto 46% aderiram a ofertas de Saúde&Beleza e 44% compraram itens relacionados a Entretenimento. O gestor notou também que apenas 300 clientes compraram cupons dos três segmentos disponíveis, enquanto que 800 clientes adquiriram ofertas de Gastronomia e Entretenimento e 700 compraram itens de Gastronomia e Saúde&Beleza. Então a soma do número de clientes deste site que comprou ofertas relacionadas, exatamente, a um dos três segmentos disponíveis, é:

a) 3800 b) 2600 c) 3200 d) 2200 e) 3000

20) (UEPA)

Uma ONG Antidrogas realizou uma pesquisa sobre o uso de drogas em uma cidade com 200 mil habitantes adultos. Os resultados mostraram que 11% dos entrevistados que vivem na cidade pesquisada são dependentes de álcool, 9% são dependentes de tabaco, 5% são dependentes de cocaína, 4% são dependentes de álcool e tabaco, 3% são dependentes de tabaco e cocaína, 2% são dependentes de álcool e cocaína e 1% dependente das três drogas mencionadas na pesquisa. O número de habitantes que não usam alguma das drogas mencionadas na pesquisa é:

a) 146.000
b) 150.000
c) 158.000
d) 160.000
e) 166.000

Aprofundamento

21) (UFG GO)

Os tipos sanguíneos no sistema ABO são determinados de acordo com a presença de certos tipos de antígenos na superfície das hemácias. Um indivíduo tem sangue tipo ***AB***, por exemplo, se tiver antígenos ***A*** e ***B***; tipo ***A*** se tiver apenas o antígeno ***A*** e tipo ***O*** se não tiver o antígeno ***A*** e nem o ***B***. Em um grupo com 100 pessoas, verificou-se que 83 possuem o antígeno ***A*** e 69, o antígeno ***B***.

Considerando esse grupo,

a) determine quantas pessoas, no máximo, podem ter sangue tipo ***O***;
b) demonstre que mais da metade das pessoas tem sangue tipo ***AB***.

22) (UEPG PR)

Indica-se por n(X) o número de elementos do conjunto X. Se A e B são conjuntos tais que n(A)=20, n(B - A) = 15 e $n(A \cap B) = 8$, assinale o que for correto.

01. n(A - B) = 12
02. n(B) = 23
04. $n(A \cup B) = 35$
08. $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 27$
16. n(A) - n(B) = n(A - B)

23) (ITA SP)

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. n(B) – n(A) é único;
II. $n(B) + n(A) \leq 128$;
III. a dupla ordenada (n(A), n(B)) é única;

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) nenhuma.

24) (ITA SP)

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$. Então, a diferença n(A) – n(B) pode assumir

a) um único valor.
b) apenas dois valores distintos.
c) apenas três valores distintos.
d) apenas quatro valores distintos.
e) mais do que quatro valores distintos.

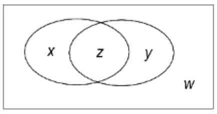
25) Sabe-se que 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16 visitaram São Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e, desses 5, 3 visitaram também São Paulo. O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

a) 29 b) 24 c) 11 d) 8 e) 5

GABARITOS – AULA 02

1) C 2) A 3) D 4) A 5) B 6) A 7) B 8) C 9) C
10) C 11) B 12) D 13) C 14) B 15) E 16) A
17) B 18) C 19) C 20) E 21)* 22) 15 23) A
24) A 25) 29

21) *

a) 

Considerando que o grupo de 100 pessoas possui x pessoas com sangue tipo *A*, y pessoas com sangue tipo *B*, z pessoas com sangue tipo *AB* e w pessoas com sangue tipo *O*, como indicado no diagrama acima, tem-se

$$x + y + z + w = 100$$
$$x + z = 83$$
$$y + z = 69$$

Logo, $y + w = 100 – 83 = 17$.

Todas as pessoas com antígeno *B* podem ter sangue do tipo *AB*, ou seja,

$$z \leq 69 \Rightarrow y \geq 0.$$

Assim,

$$w = 17 - y \leq 17$$

Desse modo, tem-se, no máximo, z = 69 e w =17.

b) A partir do diagrama anterior, obtém-se

$$x + z = 83$$
$$y + w = 100 – 83 = 17 \Rightarrow y = 17 - w$$

Assim, como $w \geq 0$, conclui-se que

$$y \leq 17$$

Logo,

$$z = 69 - y \geq 69 - 17 = 52.$$

Portanto, pelo menos 52 pessoas do grupo possuem sangue *AB*.

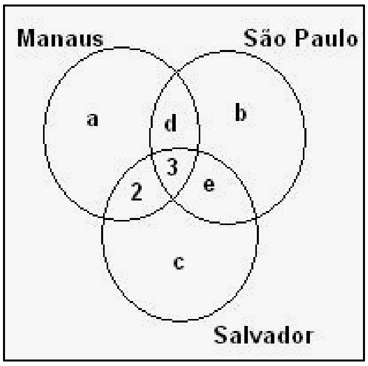
OU

a) Para ter sangue tipo *O* uma pessoa não pode ter antígenos *A* ou *B*. No grupo em questão, 83 pessoas possuem o antígeno *A*, restando apenas 17 sem esse antígeno. Considerando que as 69 pessoas que têm antígeno *B* podem ser todas de tipo *AB*, as 17 pessoas restantes, no máximo, podem ser do tipo *O*.

b) Dos 69 que possuem o antígeno *B*, no máximo 17 não possuem o antígeno *A*, visto que 83 dos 100 indivíduos possuem o antígeno *A*. Portanto, pelo menos 52 pessoas do grupo possuem sangue *AB*.

25) *

Solução. Inicialmente supomos que há interseções entre as cidades. Considere a, b, c o número de estudantes que visitaram respectivamente somente Manaus, São Paulo, Salvador. Considere ainda d o número de estudantes que visitaram respectivamente somente Manaus e São Paulo. O número de estudantes visitando somente São Paulo e Salvador será representado por e. O diagrama da situação é mostrado na figura.



$$\begin{cases} a+d+5=16 \\ d+b+e+3=16 \\ c+e+5=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+d=11 \\ d+b+e=13 \\ c+e=6 \end{cases}$$

Substituindo na soma total, vem:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+2+3=35 \\ a+b+c+d+e=30 \Rightarrow (a+d)+(c+e)+b=30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11+6+b=30$$

$$i)\ b=30-17=13.$$

$$Logo,\ d+13+e=13 \Rightarrow d+e=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ e=0 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} a+0=11 \\ c+0=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ c=6 \end{cases}$$

O valor pedido será:

$$n(M \cup SP) = a+d+5+b+e$$
$$n(M \cup SP) = 11+0+5+13+0=29$$

AULA 03

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Conjunto dos Números Naturais

N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }

Um subconjunto importante do conjunto dos números naturais (N) é o conjunto N^* (naturais sem o zero)

N^* = { 1, 2, 3, 4, 5, ... }

O conjunto dos números Naturais é fechado para a adição e multiplicação, ou seja, somando-se ou multiplicando-se números naturais, sempre resultará um outro natural.

$\boxed{\forall\ a, b \in N, (a + b) \in N \text{ e } (a\ .\ b) \in N}$

2. Conjunto dos Números Inteiros

O Conjunto dos números inteiros surgiram com a necessidade de calcular a diferença entre dois números naturais, em que o primeiro fosse menor que o segundo.

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

Podemos citar alguns subconjuntos do conjunto dos números inteiros

Z^* = inteiros não nulos... { ... -3, -2, -1, 1, 2, 3, ... }
Z_+ = inteiros não negativos... { 0, 1, 2, 3, ... }
Z^*_+ = inteiros positivos... { 1, 2, 3, 4, ... }
Z_- = inteiros não positivos... { ..., -3, -2, -1, 0}
Z^*_- = inteiros negativos... { ... -3, -2, -1 }

Observe que Z_+ = N

O conjunto dos números inteiros é fechado para a adição, multiplicação e subtração.

$\boxed{\forall\ a, b \in Z, (a + b) \in Z, (a\ .\ b) \in Z \text{ e } (a - b) \in Z}$

3. Conjunto dos Números Racionais

O Conjunto dos números Racionais surgiram com a necessidade de dividir dois números inteiros, onde o resultado era um número não inteiro.

$\boxed{Q = \{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in Z, b \in Z^* \}}$

Ou seja, todo número que pode ser colocado em forma de fração é um número racional.

Exemplos:

a) Naturais
b) Inteiros
c) decimais exatos ($0,2 = \frac{2}{10}$)
d) dízimas periódicas ($0,333... = \frac{1}{3}$)

As quatro operações são definidas nos racionais. Com a ressalva que a divisão por zero é impossível (exceto quando o numerador for zero também). Convém observar que entre dois racionais sempre existe um outro racional, como por exemplo: Entre $\frac{6}{5}$ e $\frac{3}{2}$ existe $\frac{5}{4}$. Em regra, dados a e b dois números racionais, existe entre eles um outro número racional $\frac{a+b}{2}$. Um conjunto que possui tal propriedade é chamado denso.

Geratrizes de uma dízima periódica

Toda fração que dá origem a uma dízima periódica chama-se GERATRIZ. Para se determinar a GERATRIZ de uma dízima periódica, procede-se assim:

a) Dízima Periódica Simples: é um número fracionário cujo numerador é o algarismo que representa a parte periódica e o denominador é um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.

a) $0777... = \frac{7}{9}$
b) $0,434343... = \frac{43}{99}$
c) $1,777.... = 1 + 0,777... = 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$

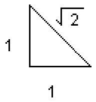
b) Dízima Periódica Composta: é um número fracionário cujo numerador é a diferença entre a parte não periódica seguida de um período e a parte não periódica, e cujo o denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.

a) $0,3777... = \frac{37-3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$

b) $0,32515151... = \frac{3251-32}{9900} = \frac{3219}{9900} = \frac{1073}{3300}$

4. Conjunto dos Números Irracionais

Apesar de que entre dois números racionais existir sempre um outro racional, isso não significa que o conjunto dos números racionais preencham toda reta. Considere o triângulo retângulo abaixo de catetos 1 e 1.



Calculando, pelo teorema de Pitágora o valor da hipotenusa, chega-se a $\sqrt{2}$.

Extraindo a raiz de 2, tem-se um número que não é natural, inteiro, nem racional, surge então o conjunto dos números irracionais. Os números irracionais são aqueles que não podem ser colocados em forma de fração $\frac{a}{b}$, com a $\in$Z, b $\in$ Z^*, como por exemplo:

a) π = 3,14... (razão entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro)
b) e = 2, 71... (base do logaritmo neperiano)
c) toda raiz não exata

Quando operamos entre um número racional(não nulo) e irracional, resultará sempre um número irracional. Quando operamos só com números irracionais o resultado pode ser racional ou irracional.

5. Conjunto dos Números Reais

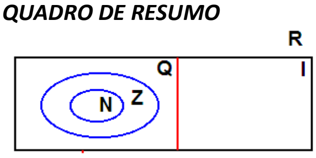
O Conjunto dos números reais, simbolizado por $\Re$, é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

$\boxed{\Re = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}}$

PROPRIEDADES EM $\Re$

- Comutativa: a + b = b + a **e** a . b = b . a
- Associativa: (a + b) + c = a + (b + c) **e** (a.b).c = a.(b.c)
- Elemento neutro: a + 0 = a **e** a . 1 = a
- Simétrico: a + (– a) = 0
- Inverso: a . $\frac{1}{a}$ = 1, a $\neq$ 0

QUADRO DE RESUMO



PROPRIEDADES EM $\Re$

- Comutativa: a + b = b + a **e** a . b = b . a
- Associativa: (a + b) + c = a + (b + c) **e** (a.b).c = a.(b.c)
- Elemento neutro: a + 0 = a **e** a . 1 = a
- Simétrico: a + (– a) = 0
- Inverso: a . $\frac{1}{a}$ = 1, a $\neq$ 0

Em Sala

01) Indique qual dos conjuntos abaixo é constituído somente de números irracionais.

a) $\{-1, 2, \sqrt{2}, \pi\}$.
b) $\{\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3}; 3{,}14;\ \sqrt{5}\}$,
c) $\{-5, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{9}\}$
d) $\{\sqrt{3};\ \pi;\ \sqrt{22}; \sqrt[3]{2}\}$,
e) $\{\sqrt{3}, \sqrt{64}, \pi, \sqrt{2}\}$

02) Escreva os números abaixo na forma irredutível $\frac{a}{b}$, $a \in Z; b \in Z^*$.

a) 0,4
b) 0,04
c) 0,004
d) 3,14
e) 6,28
f) 0,444....
g) 0,474747...
h) 0,212121...
i) 0,25555....

03) Escreva o número E na forma irredutível $\frac{a}{b}$, $a \in Z; b \in Z^*$, sendo $E = \dfrac{\left(\frac{4}{5}+1-\frac{7}{3}\right).\frac{1}{0{,}04}}{\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+2\right).\frac{1}{0{,}111...}}$.

04) $\frac{2}{3}$ do salário mensal de João é R$ 1400,00. Sabendo que as despesas que João possui mensalmente com supermercado corresponde a $\frac{1}{5}$ do seu salário, determine o valor que João gasta todo mês com supermercado.

Testes

05) (UTFPR – PR)
Indique qual dos conjuntos abaixo é constituído somente de números racionais.

a) $\{-1, 2, \sqrt{2}, \pi\}$.
b) $\left\{-5, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{9}\right\}$
c) $\left\{-2, 0, \pi, \frac{2}{3}\right\}$
d) $\{\sqrt{3}, \sqrt{64}, \pi, \sqrt{2}\}$
e) $\left\{-1, 0, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right\}$

06) Escreva o número abaixo na forma irredutível $\frac{a}{b}$, $a \in Z; b \in Z^*$.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{0{,}555...}$$

07) $\frac{2}{5}$ do valor de um número x é 200. Determine o valor de $\frac{7}{2}$ de x.

08) Escreva os números abaixo na forma irredutível $\frac{a}{b}$, $a \in Z; b \in Z^*$.

a) 1,5

b) 0,25

c) 0,125

d) 0,777......

e) 0,333.....

f) 0,232323......

g) 1,2323.....

h) 0,377777......

i) 0,2171717.....

j) 4,3555...

09) Determine o valor de cada expressão a seguir:

a) $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$ b) $\frac{1}{2}.\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$

d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ e) $\left[\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{7}{8}\right]$ f) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

g) $\dfrac{1-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$ h) $\frac{2}{5}\div(1-0{,}7)+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}-0{,}75\right)$

10) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas Falsas:

a) ( ) (UFSC – SC) $\dfrac{\sqrt{0,999...}+\sqrt{0,444...}}{1+0,424242...}=\dfrac{55}{141}$

b) ( ) O valor da expressão , $\dfrac{a.b-c^2}{c^{-1}}$ quando a = 0,333...; b = 0,5 e c = - 2 é igual a $\frac{23}{3}$

c) ( ) Se a = 0,666..., b = 1,333... e c = 0,1414..., então $a.b^{-1} + c$ é igual a $\frac{127}{198}$

d) ( ) Se B = $\dfrac{2ab+b^2}{-4ac-\frac{a}{2}}$. O valor de B para a = - 10, b = - 5 e c = 0 é 25.

11) (PUC – RS)
Pitágoras estabeleceu a seguinte relação entre as sete notas musicais e números racionais:

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Para encontrarmos o números $\frac{16}{27}$ relativo à nota LÁ, multiplicamos $\frac{2}{3}$ (o correspondente da nota SOL) por $\frac{8}{9}$. Assim, para obtermos $\frac{3}{4}$ (relativo à nota FÁ), devemos multiplicar $\frac{64}{81}$ (da nota MI) por

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{9}{8}$ c) $\frac{243}{256}$ d) $\frac{256}{243}$ e) $\frac{192}{324}$

12) (UEL – PR)
Assinale a alternativa que indica corretamente entre quais números inteiros consecutivos está o valor da expressão a seguir.

$$30\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}-0,4\right]\left(\frac{1,2-2^{-1}}{5-3,7}\right)-\sqrt{13}$$

a) 1 e 2
b) 3 e 4
c) 5 e 6
d) 7 e 8
e) 9 e 11

13) (FGV – SP)

Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y, pode-se dizer que:

a) x.y é racional
b) y.y é irracional
c) x + y racional
d) x – y + $\sqrt{2}$ é irracional
e) x + 2y é irracional

14)

Ordenando os números racionais p = $\frac{13}{24}$, q = $\frac{2}{3}$ e r = $\frac{5}{8}$, obtemos:

a) p < r < q
b) q < p < r
c) r < p < q
d) q < r < p
e) r < q < p

15)

Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. O conjunto dos números racionais é suficiente para medir (com exatidão) todo e qualquer comprimento.
02. Os números como $\sqrt{2}$ e π (e outros irracionais) só estão relacionados a coisas abstratas e “distantes” da nossa realidade.
04. A solução da equação 2x+ 3 = 7 não é um número racional.
08. 3,14 é um número racional.

16) (UEPG – PR)

Assinale o que for correto.

01. O número real representado por 0,5222... é um número racional.
02. O quadrado de qualquer número irracional é um número racional.
04. Se *m* e *n* são números irracionais então *m.n* pode ser racional.
08. O número real $\sqrt{3}$ pode ser escrito sob a forma $\frac{a}{b}$, onde *a* e *b* são inteiros e $b \neq 0$.
16. Toda raiz de uma equação algébrica do 2º grau é um número real.

17) (UFRGS – RS)

Sendo a, b e c números reais, considere as seguintes afirmações:

I – Se a ≠ 0, b ≠ 0 e a< b, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

II = Se c ≠ 0, então $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

III – Se b ≠ 0 e c ≠ 0, então (a ÷ b) ÷ c = a ÷ (b ÷ c).

Quais estão corretas?

a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas I e II
d) Apenas II e III
e) I, II e III

Exercícios Estilo ENEM

18) (ENEM)

Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2.453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

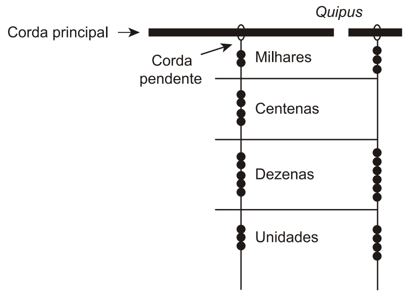


Figura 1 Figura 2

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

a) 364.
b) 463.
c) 3.064.
d) 3.640.
e) 4.603.

19) (UFF)

Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891),

"Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem."

Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas.

Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.
d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

20) (PUC – SP)

Além das informações dadas por Calvin na tira abaixo, considere que os "quatro paus" aos quais ele se refere correspondem a R$ 400,00.

O melhor de Calvin Bill Watterson

O Estado de S. Paulo - Caderno 2, 09/11/2009

Supondo a ideia de Calvin aceita por seu pai e contabilizados todos os conceitos que ele obteve o longo do ano em que foi feita a proposta, observou-se que o número de conceitos "D" era o quíntuplo do de "B" e o número de conceitos "C" excedia o de "A" em 10 unidades. Nessas condições, se a quantidade de conceitos "A" que Calvin tirou era um número par, então, para obter exatamente os "quatro paus" por ele pretendidos, o total de conceitos "B" que ele tirou era um número

a) primo.
b) maior que 17.
c) quadrado perfeito.
d) ímpar.
e) menor que 10.

Aprofundamento

21) (CEFET MG)

Considere as afirmações abaixo, em que **a** e **b** são números reais.

I. $a^2 \geq a$

II. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

III. $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$

IV. $a < b \Leftrightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$

Estão corretas apenas as afirmativas

a) I e II.
b) I e III.
c) II e IV.
d) III e IV.

22) (ITA – SP)

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais, é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) I, II e III.

23) (UFRGS – RS)

Considere a, b e c três números reais não nulos, sendo $a < b < c$, e as afirmações abaixo.

I. $a + b < b + c$
II. $a^2 < b^2$
III. $b - a > c - b$

Quais afirmações são verdadeiras?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) Apenas II e III

24) (INSPER)

Dizemos que um conjunto numérico C é fechado pela operação $\star$ se, e somente se, para todo c_1, $c_2 \in C$, tem-se ($c_1 \star c_2$) $\in C$. A partir dessa definição, avalie as afirmações seguintes.

I. O conjunto $A = \{0,1\}$ é fechado pela multiplicação.
II. O conjunto B de todos os números naturais que são quadrados perfeitos é fechado pela multiplicação.
III. O conjunto $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ é fechado pela adição.

Está(ão) correta(s)

a) apenas a afirmação I.
b) apenas as afirmações I e II.
c) apenas as afirmações I e III.
d) apenas as afirmações II e III.
e) as três afirmações.

25) (UNESP – SP)

A soma de quatro números é 100. Três deles são primos e um dos quatro é a soma dos outros três. O número de soluções existentes para este problema é

a) 3
b) 4
c) 2
d) 5
e) 6

GABARITO – AULA 03

1) d
2)
$a)\frac{2}{5}$ $b)\frac{1}{25}$ $c)\frac{1}{250}$ $d)\frac{157}{50}$ $e)\frac{157}{25}$ $f)\frac{4}{9}$ $g)\frac{47}{99}$ $h)\frac{7}{33}$ $i)\frac{23}{90}$
3) $-\frac{80}{189}$
4) R$ 420,00
5) b **6)** $\frac{153}{100}$ **7)** 1750
8) a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{7}{9}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{23}{99}$ g) $\frac{122}{99}$ h) $\frac{34}{90}$
i) $\frac{43}{198}$ j) $\frac{196}{45}$
9) a) 3 b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{23}{12}$ d) $\frac{47}{60}$ e) $\frac{104}{70}$ f) $\frac{x+y}{xy}$
g) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{13}{12}$
10) a) F b) V c) V d) V

11) c	**12)** b	**13)** e	**14)** a	**15)** 08	**16)** 05	**17) b**
18) c	**19)** d	**20)** c	**21)** d	**22)** e	**23)** a	**24)** b
25) d						

AULA 04

ARITMÉTICA BÁSICA

1. Múltiplo de um número

Sendo **a**, **b** e **c** números naturais e **a . b = c**, diz-se que **c** é múltiplo de **a** e **b**.

Exemplo: Múltiplos de 3 $\rightarrow$ M(3) = {0, 3, 6, 9, ...}

Observações:

- O zero é múltiplo de todos os números.
- Todo número é múltiplo de si mesmo.
- Os números da forma 2k, k $\in$ N, são números múltiplos de 2 e esses são chamados números pares.
- Os números da forma 2k + 1, k $\in$ N, são números ímpares.

2. Divisor de um número

Sendo **a**, **b** e **c** números naturais e **a . b = c**, diz-se que **a** e **b** são divisores **c**.

Exemplo: Divisores de 12 $\rightarrow$ D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Observações:

- O menor divisor de um número é 1.
- O maior divisor de um número é ele próprio.

2.1. Quantidade de divisores naturais de um número

Para determinar a quantidade de divisores naturais de um número procede-se assim:

- Decompõem-se em fatores primos o número dado;
- Toma-se os expoentes de cada um dos fatores e a cada um desses expoentes adiciona-se uma unidade.
- Multiplicam-se os resultados assim obtidos.

Exemplo: Determinar o número de divisores naturais de 90

$90 = 2^1 . 3^2 . 5^1$
(1 + 1).(2+1).(1 +1) = 2.3.2 = 12
Logo, 90 possui 12 divisores naturais

3. Critérios de divisibilidade

Um número *x* é divisível por um número *p* se existir um número k ∈ N, tal que k.*p* = *x*

3.1. Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 se for par, ou seja terminar em 0, 2, 4, 6, 8.
Exemplos: 28, 402, 5128.

3.2. Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3.
Exemplos: 18, 243, 3126.

3.3. Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 se os dois últimos algarismos forem divisíveis por 4 ou quando o número terminar em 00.
Exemplos: 5716, 8700, 198200.

3.4. Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se o último algarismo for 0 ou 5.

Exemplos: 235, 4670, 87210.

3.5. Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se for simultaneamente divisível por 2 e 3.

Exemplos: 24, 288, 8460.

3.6. Divisibilidade por 7

Processo prático: Veja o número 4137

1º Passo: separa-se o último algarismo e dobra-se o seu valor.
4137 → 7 → 2 x 7 = 14
2º Passo: subtrai-se o número assim obtido do número que restou após a separação do último algarismo.
413 – 14 = 399
3º Passo: procede-se assim até se obter um número múltiplo de 7.
399 → 9 → 2 x 9 = 18
39 – 18 = 21
21 → 1 → 2 x 1 = 2
2 – 2 = 0

Logo 4137 é múltiplo de 7

3.7. Divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se os três últimos algarismos forem divisíveis por 8 ou forem três zeros

Exemplos: 15320, 67000.

3.8. Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9.

Exemplos: 8316, 35289.

3.9. Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se o último algarismo for zero.

Exemplos: 5480, 1200, 345160.

4. Teorema Fundamental da divisão

Para cada par de números naturais (**D, d**) com d ≠ 0, existe um único par de números naturais (**q, r**), tal que:

$$\begin{cases} D = d.q + r \\ 0 \le r < d \end{cases} \qquad \begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

No esquema acima, temos:

D → Dividendo
d → Divisor
q → quociente
r → resto

D é divisível por d se, r = 0

5. Números Primos

Um número natural p, p ≠ 0 e *p* ≠ 1, é denominado número primo se apresentar apenas dois divisores, *1* e *p.*

Exemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13,.....

Observação: Um número é denominado composto se não for primo.

Reconhecimento de um número primo

Divisões sucessivas

Com o conhecimento de alguns números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...) procede-se assim:

- Dividi-se o número dado pela sucessão dos números primos conhecidos.

- Caso se obtenha o quociente menor ou igual ao divisor antes de se obter nessas divisões o resto nulo, diz-se que o número é primo.

Exemplo**:** Verificar se o número 113 é primo.

113	2	113	3	113	5	113	7	113	11
13	56	23	37	13	22	43	16	03	10
1		2		3		1		3	

Como o quociente é menor que o divisor antes de obtido o resto nulo, o número 113 é primo.

6. Mínimo Múltiplo Comum

Denomina-se menor ou mínimo múltiplo comum (M.M.C) de dois ou mais números naturais o número *p* diferente de zero, tal que *p* seja o menor número divisível pelos números em questão.

Considere, por exemplo, os números 6 e 8. Observe, agora os conjuntos dos múltiplos de cada um deles.

M(6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48....}
M(8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, ...}

Veja, agora abaixo o conjuntos formado pelos múltiplos comuns de 6 e 8.

{24, 48, 72, ...}

Logo, o menor múltiplo comum entre 6 e 8 é 24.

Processo Prático:

Decomponhos, simultaneamente, os números dados em fatores primos. Observe:

6 – 8	**2**
3 – 4	2
3 – 2	2
3 – 1	3
1 – 1	

Portanto: M.M.C(6, 8) = $2^3.3$ = 24

Observações:

- O M.M.C. entre dois números em que o maior é múltiplo do menor é o maior deles.
  Exemplo: M.M.C(8,16) = 16
- O M.M.C. entre dois números primos entre si é o produto deles.
  Exemplo: M.M.C(15,16) = 240

6. Máximo Divisor Comum

Denomina-se máximo divisor comum (M.D.C) de dois ou mais números naturais o maior dos seus divisores comuns.

Considere, por exemplo, os números 36 e 42. Observe, agora os conjuntos dos divisores de cada um deles.
D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
D(42) = {1, 2, 3, 6, 7, 21, 42}

Veja, agora abaixo o conjuntos formado pelos divisores comuns de 36 e 42.

{1, 2, 3, 6}

Logo, o maior divisor comum entre 36 e 42 é 6.

Processo Prático:

Determinar o M.D.C. entre 36 e 42

Decompomos os números dados em fatores primos.
Em seguida, forma-se o produto entre os fatores comuns a ambos.

$36 = 2^2.3^2$ e $42 = 2.3.7$

Os fatores comuns entre 36 e 42 são 2 e 3
Logo, o M.D.C. entre 36 e 42 é 6 (2.3).

Há ainda um outro método para a obtenção do M.D.C. Acompanhe:

Divide-se o maior número dos números dados pelo menor; caso a divisão seja exata, o M.D.C entre os números dados é o menor deles. Caso contrário, divide-se o menor número pelo resto obtido anteriormente, e assim até se obter resto nulo.
O último divisor obtido será o M.D.C entre os números dados.

Acompanhe o cálculo do M.D.C entre 36 e 20.

	1	1	4
36	20	16	4
16	4	0	

Logo: MDC(36, 20) = 4

Observações:
- O M.D.C. entre dois números em que o maior é múltiplo do menor é o menor deles.
  Exemplo: M.D.C (12, 24) = 12
- Dado dois números (a, b). Se o M.D.C entre eles for igual a 1, dizemos que a e b são primos entre si. Exemplo: 15 e 16

Em Sala

01) Determine o M.M.C. entre os números abaixo:

a) 8 e 12

b) 30 e 48

c) 12 e 24

d) x e 2x

e) 3 e 5

02) (UFSC – SC)
Um país lançou em 02/05/2000 os satélites artificiais **A**, **B** e **C** com as tarefas de fiscalizar o desmatamento em áreas de preservação, as nascentes dos rios e a pesca predatória no Oceano Atlântico. No dia 03/05/2000 podia-se observá-los alinhados, cada um em uma órbita circular diferente, tendo a Terra como centro. Se os satélites **A**, **B** e **C** levam, respectivamente, **6**, **10** e **9** dias para darem uma volta completa em torno da Terra, então o número de dias para o próximo alinhamento é:

03) Determine o M.D.C. entre os números abaixo:

a) 24 e 36

b) 300 e 360

c) 12 e 24

d) x e 2x

e) 3 e 5

f) 8 e 9

04) Três tábuas que medem respectivamente 24m, 36m e 48m, foram cortadas em pedaços iguais e do maior tamanho possível. Então o comprimento de cada pedaço (em m), assim como a quantidade de pedaços obtidos são respectivamente:

a) 12 e 20
b) 24 e 9
c) 12 e 9
d) 24 e 20
e) 12 e 24

Testes

05) O M.D.C e o M.M.C entre os números 36 e 60 são respectivamente:

a) 18 e 180
b) 12 e 360
c) 12 e 180
d) 9 e 60
e) 18 e 360

06) (UEL – PR)
Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida, pela primeira vez, e quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro ciclistas, respectivamente?

a) 5 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 13 voltas.
b) 6 minutos, 9 voltas, 10 voltas e 12 voltas.
c) 7 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 12 voltas.
d) 8 minutos, 8 voltas, 9 voltas e 10 voltas.
e) 9 minutos, 9 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

07) Três rolos de arame que medem respectivamente 24m, 84m e 90m, foram cortados em pedaços iguais e do maior tamanho possível. Então o comprimento de cada pedaço é:

08) Considere os números A = 24, B = 60; C = 48. Determine:

a) M.M.C entre A e B
b) M.D.C entre B e C
c) M.M.C entre A, B e C
d) M.D.C entre A, B e C

09) O MDC dos números 36, 40 e 56 é x e o MMC dos números 12, 24 e 144 é y. Determine o valor de x.y.

a) 576
b) 768
c) 459
d) 324
e) 312

10) Determine o número de divisores naturais dos números abaixo:
a) 72
b) 196
c) 1800

11) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas Falsas:

a) ( ) (UFSC – SC) No ponto de ônibus da Praça *X* passa um ônibus para a Linha Vermelha de *15* em *15* minutos e um ônibus para a Linha Amarela de *25* em *25* minutos. Se os dois ônibus passaram juntos às *10* horas, na primeira vez em que voltarem a passar juntos pelo ponto serão *10* horas e *40* minutos.

b) ( ) (UFSC – SC) Um carpinteiro tem um bloco de madeira, na forma de um paralelepípedo retângulo, com as dimensões *112cm*, *80cm* e *48cm*. Se o carpinteiro deve cortar esse bloco em cubos idênticos, com a maior aresta possível e sem que haja sobra de material, então a medida da aresta dos maiores cubos que ele pode obter é *16cm*.

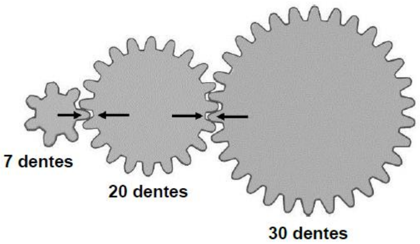
c) ( ) Um marceneiro precisa cortar três tábuas em pedaços de mesmo comprimento. Para melhor aproveitamento das tábuas, o comprimento dos pedaços deve ser o maior possível. Uma tábua mede 250 cm de comprimento, a outra mede 350 cm e a outra 550 cm. O comprimento de cada pedaço de tábua será de 50 cm.

d) ( ) O número 96 possui 12 divisores inteiros.

e) ( ) (UFSC – SC)Se a soma de quatro números primos distintos é igual a *145*, então o menor deles é *3*.

12) (UFPR – PR)

Qual é o número mínimo de voltas completas que a menor das engrenagens deve realizar para que as quatro flechas fiquem alinhadas da mesma maneira novamente?



a) 14 voltas.
b) 21 voltas.
c) 57 voltas.
d) 60 voltas.
e) 84 voltas.

13) (UEL – PR)

Em 1982 ocorreu uma conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, o que significa que podiam ser vistos bem próximos um do outro quando avistados da Terra. Se Júpiter e Saturno dão uma volta completa ao redor do Sol aproximadamente a cada 12 e 30 anos, respectivamente, em qual dos anos seguintes ambos estiveram em conjunção no céu da Terra?

a) 1840
b) 1852
c) 1864
d) 1922
e) 1960

14) Três vizinhos têm por medidas de frente: 180m, 252m e 324m, respectivamente, e mesmas medidas para os fundos. Queremos dividi-los em faixas que tenham medidas iguais de frente e cujo tamanho seja o maior possível. Então cada faixa medirá na frente:

a) 12 m
b) 18 m
c) 24 m
d) 30 m
e) 36 m

15) Um alarme soa a cada 10 horas, um segundo alarme a cada 8 horas, um terceiro a cada 9 horas e um quarto a cada 5 horas. Soando em determinado instante os quatro alarmes, depois de quanto tempo voltarão a soar juntos?

a) 240 horas
b) 120 horas
c) 32 horas
d) 360 horas
e) 320 horas

16) (UDESC – SC)

A quantidade de números naturais que são divisores do mínimo múltiplo comum entre os números a = 540, b = 720 e c = 1800 é igual a:

a) 75
b) 18
c) 30
d) 24
e) 60

17) (UEPG – PR)

Considerando os números naturais p e q, diferentes de zero, sobre o máximo divisor comum (m.d.c.) e o mínimo múltiplo comum (m.m.c.), assinale o que for correto.

01. m.d.c. (p, 1) = p, se p $\neq$ 1.
02. Se m.m.c. (p,q) = p.q então p e q são números primos.
04. Se p é múltiplo de q então m.m.c. (p, q) = p.
08. Se p é divisor de q então m.d.c. (p, q) = p.
16. m.m.c. (p, 2p) = $2p^2$

Exercícios Estilo ENEM

18) (ENEM)
Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.
O número de divisores de N, diferentes de N, é

a) $x \cdot y \cdot z$
b) $(x+1) \cdot (y+1)$
c) $x \cdot y \cdot z - 1$
d) $(x+1) \cdot (y+1) \cdot z$
e) $(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) - 1$

19) (ENEM)
O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.
Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

a) 32.
b) 34.
c) 33.
d) 35.
e) 31.

20) (PUC – SP)
Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48m, 60m e 80m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Deseja vender o tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

Aprofundamento

21) (UEM – PR)
Um número natural é chamado quadrado perfeito, se ele for o quadrado de algum número natural. Sabendo disso, assinale o que for correto.

01. Existem quadrados perfeitos cuja diferença é 730.
02. Todo quadrado perfeito que é múltiplo de 7 é múltiplo de 49.
04. A multiplicação de um quadrado perfeito por outro quadrado perfeito é sempre um quadrado perfeito.
08. O resultado da soma de quadrados perfeitos é sempre um quadrado perfeito.
16. 1025710 é um quadrado perfeito.

22) (UNIFESP – SP)
Dia 20 de julho de 2008 caiu num domingo. Três mil dias após essa data, cairá:

a) numa quinta feira
b) numa sexta feira
c) num sábado
d) num domingo
e) numa segunda feira

23)
Deseja-se acondicionar 2004 bolas de tênis em caixas de mesma capacidade, de modo que cada caixa contenha o número de bolas determinado por sua capacidade. Dispõe-se de vários tipos de caixas, desde o tipo com capacidade para apenas uma bola até o tipo com capacidade para todas as bolas. Nessas condições, o número de todos os possíveis tipos de caixas para acondicionar as 2004 bolas é

a) 12
b) 15
c) 24
d) 25
e) 30

24) (ITA – SP)

O número de divisores positivos de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24
b) 36
c) 48
d) 54
e) 72

25) (UNESP – SP)

Considere o número inteiro 3600 cuja fatoração em primos é $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Os divisores positivos de 3600 são os números da forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, com $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$ e $z \in \{0, 1, 2\}$. Determine:

a) o número total de divisores inteiros e positivos de 3600 e quantos desses divisores são também divisores de 720.

b) Quantos dos divisores inteiros e positivos de 3600 são pares e quantos são quadrados perfeitos.

GABARITO – AULA 04

1) a) 24 b) 120 c) 24 d) 2x e) 15
2) 90
3) a) 12 b) 60 c) 12 d) x e) 1 f) 1
4) c **5) c** **6)** b **7)** 6 m
8) a) 120 b) 12 c) 240 d) 12
9) a
10) a) 12 b) 9 c) 36
11) a) F b) V c) V d) F e) F
12) d **13)** d **14)** e **15)** d **16)** e **17)** 12
18) e **19)** a **20)** 47 **21)** 06 **22)** a **23)** a
24) c **25)** a) 45 e 30 b) 36 e 12

AULA 05

POTENCIAÇÃO

1. Definição

Seja **a** um número real e **m** um número natural maior que 1, tem-se que:

$$a^m = \underbrace{a.a.a......a}_{\text{m fatores}}$$

Em síntese: Potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

Casos Particulares

$\boxed{a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0}$ $\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}}$

Exemplos:

1) $2^5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 32$
2) $(-5)^2 = (-5) \,.\, (-5) = 25$
3) $-5^2 = -(5^2) = -25$
4) $(-3)^3 = (-3) \,.\, (-3) \,.\, (-3) = -27$
5) $(-701)^0 = 1$
6) $34^1 = 34$
7) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

2. Propriedades

Se ***a*** e ***b*** são números reais e ***m*** e ***n***, números inteiros, tem-se:

Potências de mesma base:

- $\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$

Exemplo: $2^3 \,.\, 2^4 \,.\, 2^7 = 2^{3+4+7} = 2^{14}$

- $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ com $a \neq 0$

Exemplos:

1) $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

2) $\dfrac{3^5.3^7}{3^{15}} = \dfrac{3^{5+7}}{3^{15}} = \dfrac{3^{12}}{3^{15}} = 3^{12-15} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

- $\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$

Exemplos:

1) $(2^3)^4 = 2^{12}$
2) $(-2^3)^4 = 2^{12}$
3) $(2^4)^3 = 2^{12}$
4) $(-2^4)^3 = 2^{12}$

Cuidado: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

Potências de mesmo expoente:

- $\boxed{a^n.b^n = (a.b)^n}$

Exemplo:
$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

- $\boxed{\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$

Exemplo:

$$\frac{10^4}{5^4} = \left(\frac{10}{5}\right)^4 = 2^4 = 16$$

3. Potência de base 10

Sabe-se que: $10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$

Então: $10^m = 1\underbrace{000.....0}_{\text{m zeros}}$

Observe ainda que: $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0{,}01$

$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = 0{,}001$

Então: $10^{-m} = 0,\underbrace{000.....1}_{\text{m casas}}$

Exemplos:

a) $10^2 = 100$
b) $10^7 = 10\,000\,000$
c) $200 = 2 \,.\, 100 = 2 \,.\, 10^2$
d) $4000 = 4 \,.\, 10^3$
e) $300\,000 = 3 \,.\, 10^5$
f) $3 \,.\, 10^8 = 300\,000\,000$
g) $0{,}001 = 10^{-3}$
h) $0{,}002 = 2 \,.\, 10^{-3}$
i) $0{,}00008 = 8 \,.\, 10^{-5}$
j) $1{,}255 = 1255 \,.\, 10^{-3}$
k) $2 \,.\, 10^{-3} = 0{,}002$
l) $0{,}0025 = \dfrac{25}{10\,000} = \dfrac{25}{10^4} = 25 \,.\, 10^{-4}$

Obs: Todo número real positivo *x* pode ser expresso pela forma $\alpha \,.\, 10^n$, com $1 \leq \alpha < 10$ e $n \in$ Z. Dizemos que $\alpha \,.\, 10^n$ é a ***notação científica*** de *x*.

Exemplos: a) $5420 = 5{,}42 \,.\, 10^3$
b) $0{,}0000032 = 3{,}2 \,.\, 10^{-6}$

Em Sala

01) (UDESC – SC)

Se $p = 2^{3^2}$, $q = (4^2)^3$, $r = 8^{2^3}$ e $s = \left(\dfrac{pq}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$, então se pode afirmar que:

a) $0 < s < \dfrac{1}{4}$
b) $0 < s < \dfrac{1}{2}$
c) $0 < s < 1$
d) $1 < s < 2$
e) $2 < s < 4$

02) Determine a alternativa correta.

a) $3^{2000} < 2^{3000}$
b) A terça parte de 27^5 é 3^{15} e a metade de 2^{50} é 2^{25}.
c) O algarismo das unidades do número 9^{15} é 2.
d) O número de algarismos do número n = $8^6 \cdot 25^{11}$ é 21.
e) A expressão $(0{,}25)^5$ é equivalente a 2^{-9}.

03) (UFRGS – RS)
A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano luz, é de aproximadamente $38.4^5.5^{12}$ km. A notação científica desse número é:

a) $9{,}5.\ 10^{10}$
b) $0{,}95.\ 10^{12}$
c) $9{,}5.\ 10^{12}$
d) 95.10^{12}
e) $9{,}5.10^{14}$

04) Simplificando a expressão $\dfrac{2^{n+4} - 2.2^n}{2.2^{n+3}}$ obtém-se:

a) $\dfrac{7}{8}$
b) $\dfrac{1}{8}$
c) $\dfrac{17}{8}$
d) $\dfrac{3}{8}$
e) $\dfrac{5}{8}$

Testes

05) Se $x = 3^{2^3}$, $y = 9^3$, $z = (3^4)^2$. O valor de $\dfrac{(x.y)^2}{z^{-1}}$ é:

a) 3^{20}
b) 3^{30}
c) 3^{26}
d) 3^{36}
e) 3^{16}

06) (UFRGS – RS)
A expressão $(0{,}125)^{15}$ é equivalente a:

a) 5^{45}
b) 5^{-45}
c) 2^{45}
d) 2^{-45}
e) $(-2)^{45}$

07) Escreva em notação científica, isto é, expresse na forma $a.10^k$ com $1 \leq a < 10$ e k inteiro os seguintes números:

a) 516000

b) 0,000516

08) Determine o valor das expressões:

a) 3^4

b) -3^4

c) $(-3)^4$

d) 1^{201}

e) 0^{80}

f) 500^0

g) 4^{-2}

h) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}$

i) $(5^{-5})^5$

j) $\dfrac{(-2)^4 + (2^2)^3}{-2^4}$

k) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$

l) $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-2}$

09) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas Falsas:

a) ( ) Sendo $x = (2^2)^3$, $y = 2^{2^3}$ e $z = 2^{3^2}$, escrevendo o produto x.y.z na forma 2^n, o valor de n é 23.

b) ( ) (UFSC – SC) Dividindo-se 2^{3^2} por 2^{2^3} obtém-se 1.

c) ( ) O valor da expressão $\dfrac{0{,}1.(0{,}001).10^{-1}}{10.(0{,}0001)}$ é equivalente a 10^{-2}

d) ( ) Simplificando a expressão $\left[\dfrac{x^{2^3} : (x^2)^3}{x^{2^4}.x^{-16}}\right]^{-2}$, obtemos x^{-4}

e) ( ) (UFSC – SC) *125* é divisor de 15^{22}

10) Escreva em notação científica, isto é, expresse na forma $a.10^k$ com $1 \leq a < 10$ e k inteiro os seguintes números:

c) 314

d) 3140

e) 31400

f) 0,314

g) 0,00000314

11) (UFRGS – RS)
O algarismo das unidades de 9^{10} é
a) 0.
b) 1.
c) 3.
d) 6.
e) 9.

12) (UFRGS – RS)
Por qual potência de 10 deve ser multiplicado o número $10^{-3}.10^{-3}.10^{-3}.10^{-3}$ para que esse produto seja igual a 10?
a) 10^9
b) 10^{10}
c) 10^{11}
d) 10^{12}
e) 10^{13}

13) Sendo A = 2^{100}, obtenha:
a) sucessor de A
b) o dobro de A
c) quádruplo de A
d) quadrado de A
e) metade de A

14) (FGV – SP)
Qual o valor da expressão $\frac{a.b^{-2}.(a^{-1}.b^2)^4.(a.b^{-1})^2}{a^{-3}.b.(a^2.b^{-1}).(a^{-1}.b)}$, quando $a = 10^{-3}$ e $b = 10^{-2}$

a) 10^6
b) 10^{-2}
c) 10^{-3}
d) 10^{-9}
e) 10^7

15) (FGV – SP)
Simplificando a expressão $\frac{2^{n+4}+2^{n+2}+2^{n-1}}{2^{n-2}+2^{n-1}}$ temos:
a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{87}{4}$
c) $\frac{82}{3}$
d) $\frac{34}{3}$
e) n.d.a.

16) (UFRGS – RS)
O algarismo das unidades de $9^{99} - 4^{44}$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

17) (UFRGS – RS)
O algarismo das unidades da soma $44^{54} + 55^{45}$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Exercícios Estilo ENEM

18) (ENEM)

A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3,25 \times 10^2$ km.
b) $3,25 \times 10^3$ km.
c) $3,25 \times 10^4$ km.
d) $3,25 \times 10^5$ km.
e) $3,25 \times 10^6$ km.

19) (UFRGS – RS)

Um adulto saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo. Esse número de bactérias pode ser escrito como:

a) 10^9
b) 10^{10}
c) 10^{11}
d) 10^{12}
e) 10^{13}

20) (ENEM)

Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior as já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9
b) 45
c) 64
d) 81
e) 285

Aprofundamento

21)

Sabendo-se que $1,098^{32}$ é aproximadamente igual a 20, qual dos valores abaixo está mais próximo do número $5^6 \cdot (1,098)^{192}$?

a) 100 mil
b) 1 milhão
c) 100 milhões
d) 1 bilhão
e) 1 trilhão

22) (FUVEST – SP)

Qual desses números é igual a 0,064?

a) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$
b) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$
c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
d) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$
e) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

23) (FUVEST – SP)

Se $4^{16} . 5^{25} = \alpha . 10^n$, com $1 \leq \alpha < 10$, então n é igual a :

a) 24
b) 25
c) 26
d) 27
e) 28

24) (UFRGS – RS)

Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue.
Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é:

a) $2{,}75 . 10^9$
b) $5{,}5 . 10^{10}$
c) $5 . 10^{11}$
d) $5{,}5 . 10^{12}$
e) $2{,}75 . 10^{13}$

25) (FUVEST - SP)

Dos números abaixo, o que está mais próximo de $\frac{(5{,}2)^4.(10{,}3)^3}{(9{,}9)^2}$ é:

a) 0,625
b) 6,25
c) 62,5
d) 625
e) 6250

GABARITO – AULA 05

1) c **2)** d **3)** c **4)** a **5)** d **6)** d
7) a) $5{,}16.10^5$ b) $5{,}16.10^{-4}$
8) a) 81 b) – 81 c) 81 d) 1 e) 0 f) 1 g) $\frac{1}{16}$ h) $\frac{8}{125}$ i) $\frac{1}{5^{25}}$ j) – 5 k) $\frac{35}{12}$ l) 1
9) a) V b) F c) V d) V e) V
10) a) $3{,}14 . 10^2$ b) $3{,}14.10^3$ c) $3{,}14.10^4$ d) $3{,}14.10^{-1}$ e) $3{,}14.10^{-6}$
11) b **12)** e
13) a) $2^{100} + 1$ b) 2^{101} c) 2^{102} d) 2^{200} e) 2^{99}
14) d **15)** c **16)** c **17)** b **18)** d **19)** c
20) d **21)** e **22)** c **23)** d **24)** e **25)** e

AULA 06

RADICIAÇÃO

1. Definição

Considere **a** um número real e **n** um número natural não nulo. O número **b** é chamado raiz enésima de **a** se, e só se, elevado ao expoente **n** reproduz **a**.

b é a raiz enésima de **a**, se $\mathbf{b^n = a}$

2. Representação

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a}$$

Exemplos: a) $\sqrt{16} = 4$ pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$

c) $\sqrt[4]{81} = 3$ pois $3^4 = 81$

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$

3. Nomenclatura

Em $\sqrt[n]{a} = b$, temos:

- **n** é o índice da raiz
- **a** é o radicando

4. Condição de existência

Em $\sqrt[n]{a}$, se **n** for par, então é necessário que **a** seja maior ou igual a zero.

Se **n** for ímpar então $\sqrt[n]{a}$ sempre existe.

5. Propriedades

Obedecidas as condições de existência das raízes, valem as seguintes propriedades:

- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exemplos:

1) Simplifique.

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3} = \sqrt{2\,.\,3} = \sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{3.5.2} = \sqrt{30}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{15}{2}}$

e) $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2\cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[24]{3}$

g) $3^{1/2} = \sqrt{3}$

h) $2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

i) $\sqrt[4]{6^3} = 6^{3/4}$

j) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2\,.\,3} = 2\sqrt{3}$

k) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2\,.\,3^2.5} = 2.3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

l) $\sqrt[4]{3^8\,.\,5^4\,.\,2} = 3^2\,.\,5\sqrt[4]{2}$

m) $\sqrt[4]{3^8} = 3^{8:4} = 3^2$

2) Simplificar a seguinte expressão:

$$\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{27}-\sqrt{108}+\sqrt{20} =$$
$$= \sqrt{5^2\cdot 2}+\sqrt{2^5}-\sqrt{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3^3}+\sqrt{2^2\cdot 5} =$$
$$= 5\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{3}+2\sqrt{5} =$$
$$= 5\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-6\sqrt{3}+2\sqrt{5} =$$
$$= 9\sqrt{2}-9\sqrt{3}+2\sqrt{5}$$

3) Simplificar $\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{3}$.

M.M.C de 4 e 6 é 12

$\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{2^3}\,.\sqrt[12]{3^2}$

$\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{8}.\sqrt[12]{9}$

$\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{72}$

6. Racionalização de denominadores

Dada uma fração com denominador contendo radical, racionalizar o denominador é um processo no qual se obtém uma fração equivalente a primeira sem no entanto com o radical no denominador.

1º CASO: O denominador é do tipo $\sqrt[n]{a^m}$

Neste caso multiplica-se numerador e denominador pelo fator: $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Exemplos:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,.\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2.3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,.\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,.\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\,.\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{36}} = \dfrac{2\sqrt{12}}{5.6} = \dfrac{2\sqrt{12}}{30} = \dfrac{\sqrt{12}}{15}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{1.\sqrt[3]{5^{3-1}}}{.\sqrt[3]{5^{3-1}}} = \dfrac{1\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

f) $\dfrac{7}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{7.\sqrt[6]{2^{6-1}}}{.\sqrt[6]{2^{6-1}}} = \dfrac{7\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[6]{2^5}} = \dfrac{7\sqrt[3]{32}}{\sqrt[6]{2^6}} = \dfrac{7\sqrt[3]{32}}{2}$

2º CASO: O denominador é do tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ Neste caso multiplica-se numerador e denominador pelo fator: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Exemplos:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{1.\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{5.\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{5.\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{5.\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = 5.\left(2-\sqrt{3}\right)$

Em Sala

01) Calcule o valor de:

a) $\sqrt{256}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[7]{0}$

e) $\sqrt[3]{1}$

f) $\sqrt{0{,}01}$

g) $\sqrt[3]{-0{,}001}$

02) Simplificando a expressão $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ obtém-se:

a) $2\sqrt{17}$
b) $34\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{2}$

03) A metade de $2^{1,2}$ e o triplo de $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ valem, respectivamente:

a) $2^{0,6}$ e $\frac{1}{3}$
b) $\sqrt[5]{2}$ e 1
c) 1 e $\sqrt[3]{9}$
d) $\sqrt[5]{2}$ e $\sqrt[3]{9}$
e) $\sqrt[3]{9}$ e $\frac{1}{3}$

04) Racionalizar os seguintes denominadores:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

$b)\ \frac{10}{\sqrt[3]{2}}$

$c)\ \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Testes

05) Determine o valor de $\sqrt[3]{15625}$.

06) Simplificando a expressão $\sqrt{48}+\sqrt{192}$ obtém-se:

a) $2\sqrt{10}$
b) $34\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{3}$
e) $14\sqrt{3}$

07) A expressão $\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{3}}$ é igual a:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{7}$
b) $\frac{3}{4}$
c) 1
d) $\frac{5}{6}\sqrt{6}$
e) $\frac{7}{6}\sqrt{3}$

Atividades

08) Usando a definição, calcule o valor de cada uma das raízes:

a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[5]{0}$

d) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt{\frac{81}{16}}$ f) $\sqrt{0,25}$

g) $\sqrt[3]{-0,125}$ h) $\sqrt[3]{-0,008}$

09) Simplificar:

a) $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{8}$

c) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

10) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas Falsas:

a) ( ) A expressão $\sqrt{8}+20\sqrt{2}+\sqrt{50}+\sqrt{32}$ é igual a $31\sqrt{2}$

b) ( ) Simplificando a expressão $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$ obtém-se 0.

c) ( ) A diferença entre os números reais $\sqrt{75}$ e $5\sqrt{3}$ é um número racional.

d) ( ) A expressão $\sqrt{2352}+\sqrt{972}$ é equivalente a: $46\sqrt{3}$

e) ( )O produto $\left(2\sqrt[3]{3}.\ 4\sqrt[3]{9}\right)$ é igual a 24

11) Racionalize os seguintes denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{3\sqrt{2}+1}$

12) (UEL – PR)

Seja o número real $x = \frac{\sqrt{500}-3\sqrt{20}+2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.
Escrevendo x na
forma $x = a + b\sqrt{c}$, tem-se que a + b + c é igual a:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

13) O valor de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) n.d.a.

14) (UFRGS – RS)

A expressão $\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}$ é igual a:

a) $\frac{8}{15}$
b) $\frac{3}{5}$
c) 1
d) $\sqrt{\frac{34}{15}}$
e) $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

15) (IFCE – CE)

Para todo número real positivo **a**, a expressão $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}}$ é equivalente a

a) $1 + \sqrt{a} + a$.
b) $1 + a + a^2$.
c) $\sqrt{a} + a$.
d) $\sqrt{a} + a^2$.
e) $1 + a$.

16) (UFRJ)

Se considerarmos satisfatória a aproximação de 3,14 para o número π, devemos achar satisfatória como aproximação de 2^{π}, o número:

a) $2\sqrt[50]{128}$
b) $4\sqrt[50]{128}$
c) $6\sqrt[50]{128}$
d) $8\sqrt[50]{128}$
e) $10\sqrt[50]{128}$

17) (UEL – PR)

A expressão $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} - 1$ é equivalente a:

a) -1
b) $\sqrt{2} - 2$
c) $\sqrt{2} + 2$
d) $\sqrt{2} - 1$
e) $\sqrt{2} + 1$

Exercícios Estilo ENEM

18) (ENEM)

Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e as faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares.

As fórmulas que determinam esses índices são:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa(kg)}}{[\text{altura(m)}]^2} \qquad \text{RIP} = \frac{\text{altura(cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa(kg)}}}$$

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m², então ela possui RIP igual a

a) $0{,}4\ \text{cm/kg}^{1/3}$
b) $2{,}5\ \text{cm/kg}^{1/3}$
c) $8\ \text{cm/kg}^{1/3}$
d) $20\ \text{cm/kg}^{1/3}$
e) $40\ \text{cm/kg}^{1/3}$

19) (UFPR – PR)

De acordo com a Organização Mundial de Saúde, um Índice de Massa Corporal inferior a 18,5 pode indicar que uma pessoa está em risco nutricional. Há, inclusive, um projeto de lei tramitando no Senado Federal, e uma lei já aprovada no Estado de Santa Catarina, proibindo a participação em eventos de modelos que apresentem esse índice inferior a 18,5. O Índice de Massa Corporal de uma pessoa, abreviado por IMC, é calculado através da expressão: $IMC = \frac{m}{h^2}$ em que m representa a massa da pessoa, em quilogramas, e h sua altura, em metros. Dessa forma, uma modelo que possua IMC = 18,5 e massa corporal de 55,5 kg, tem aproximadamente que altura?

a) 1,85 m.
b) 1,81 m.
c) 1,77 m.
d) 1,73 m.
e) 1,69 m.

20) (ENEM)

Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa *m* pela fórmula $A = k.m^{2/3}$, em que *k* é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt{16}$
b) 4
c) $\sqrt{24}$
d) 8
e) 64

Aprofundamento

21) (UDESC – SC)

Se $h^2 = \frac{16}{2-\sqrt{2}} - 4$, então o valor absoluto de h é:

a) $12 + 8\sqrt{2}$
b) 4
c) 2
d) $\frac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$
e) $2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

22) Se x = $\sqrt[3]{10}$, y = $\sqrt[6]{4}$ e z = $\sqrt[4]{9}$, então é verdade que:

a) x < y < z
b) x < z < y
c) z < x < y
d) y < x < z
e) y < z < x

23) (IFCE – CE)

Racionalizando o denominador da fração $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt[8]{2^3}}$, obtemos, como resultado,

a) $\dfrac{2\sqrt[8]{2}}{5}$

b) $\dfrac{2\sqrt[8]{2^3}}{5}$

c) $\dfrac{5\sqrt[8]{2}}{5}$

d) $\dfrac{5\sqrt[8]{2^3}}{2}$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

24) (FUVEST – SP)

O menor número natural *n*, diferente de zero, que torna o produto de 3 888 por *n* um cubo perfeito é:

a) 6
b) 12
c) 15
d) 18
e) 24

25) (UEL – PR)

Racionalizando-se o denominador da fração $\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$, obtém-se:

a) $\dfrac{6+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{12}$

b) $\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4}$

c) $\dfrac{6+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{12}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4}$

e) $\dfrac{2-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{12}$

GABARITO – AULA 06

1) a) 16 b) 9 c) – 3 d) 0 e) 1 f) 0,1 g) – 0,1
2) c **3)** d
4) a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $5\sqrt[3]{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$
5) 25 **6)** d **7)** e
8) a) 5 b) 2 c) 0 d) 1 e) $\dfrac{9}{4}$ f) 0,5 g) – 0,5 h) – 0,2
9) a) 3 b) 2 c) 2 d) 2
10) a) V b) V c) V d) V e) V
11) a) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ e) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$
f) $4\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ g) $\dfrac{3\sqrt{2}-1}{17}$

12) e	**13)** c	**14)** e	**15)** b	**16)** d	**17)** d	**18)** e
19) d	**20)** b	**21)** e	**22)** e	**23)** a	**24)** b	**25)** b

AULA 07

TÉCNICAS ALGÉBRICAS

Fatorar uma expressão é transformar uma soma ou diferença de duas ou mais parcelas em um produto de dois ou mais fatores. Os casos de fatoração mais comum são:

1. Fator Comum

$\boxed{ax + bx = x(a + b)}$

Exemplos: a) $6xy + 8xyz = 2xy(3 + 4z)$
b) $4ax^2 + 8a^2x^3 + 2a^3x = 2ax(2x + 4ax^2 + a^2)$
c) $5x^2y + x^4y^3 + 2x^2 = x^2(5y + x^2y^3 + 2)$

Agrupamento

Considere agora, a expressão ax + bx + ay + by. Perceba que não há fator comum às quatro parcelas. Podemos então, nesse caso, agrupar as parcelas de forma conveniente. Observe:

$\underleftrightarrow{ax + bx} + \underleftrightarrow{ay + by} = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

2. Diferença de Quadrados

A diferença entre dois quadrados ($a^2 - b^2$) é igual ao produto da soma (a + b) pela diferença (a – b).

$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Exemplos: a) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$
b) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$
c) $100x^4 - 36 = (10x^2 + 6).(10x^2 - 6)$
d) $2x^2 - 72 = 2(x^2 - 36) = 2(x + 6)(x - 6)$

Observação: A expressão $a^2 + b^2$ não é fatorável em $\Re$.

3. Trinômio Quadrado Perfeito

$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$

Exemplos:
a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = (x + 3)^2$
b) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 = (x + 5)^2$
c) $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2.x.6 + 6^2 = (x - 6)^2$
d) $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x)^2 + 2.2x.y + y^2 = (2x + y)^2$
e) $25x^2 - 70x + 49 = (5x)^2 - 2.5x.7 + 7^2 = (5x - 7)^2$

Em Sala

01) Fatore as seguintes expressões:

a) $x^5 + x^4 + x^2 =$

b) $4x^3y^2z + 6x^5y^3z^2 - 8x^4y^4z^3 =$

c) $x^2 + xy + xy^2 + y^3 =$

d) $x^2 - 64 =$

e) $4x^2 - 9 =$

f) $x^2 + 14x + 49 =$

g) $x^2 - 18x + 81 =$

h) $2x^2 - 20x + 50 =$

02) O valor de $E = \dfrac{mx - my - nx + ny}{2x - 2y}$, $x \neq y$, sendo m = 4,731 e n = 0,731, é:

03) Simplificando-se a expressão $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$, em que x e y são números positivos e distintos, obtém-se:

a) 1/x
b) 2y
c) xy
d) 1/y
e) 2x

04) Se $x + \frac{1}{x} = 5$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$

Testes

05) Desenvolvendo $(2a+3)^2$ obtém-se:

a) $4a^2+9$
b) $2a^2+12a+3$
c) $4a^2+12a+9$
d) a^2+a+3
e) $2a^2+3^2$

06) Simplificando a expressão $\frac{12x^2-12y^2}{3x-3y}$ para $x \neq y$, obtém-se:

a) 4
b) $4(x-y)$
c) $2(x+y)$
d) $4(x+y)$
e) 2

07) Simplificar a expressão $\frac{4x^2+12x+9}{4x+6}$ para $x \neq -\frac{3}{2}$.

Atividades

08) Desenvolva as seguintes expressões:

a) $(x+3)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(2x+7)^2$

d) $(3x-1)^2$

e) $(2a-3b)^2$

f) $(2a+b)^2-(a-b)^2$

g) $(x-6).(x+6)$

h) $(2x-5)(2x+5)$

09) Fatore as seguintes expressões

a) $ax + bx$

b) $5a + 5b$

c) $m^3 + m^2$

d) $3x^2 + 15x^5 + 12x^7$

e) $6x^3y + 8xy^2 - 2xy$

f) $ax + bx + ay + by$

g) $2x + 2y + ax + ay$

h) $2x + 2y - ax - ay$

i) $x^3 - x^2 - 3x + 3$

j) $x^2 - 36$

k) $9x^2 - 25$

l) $3x^2 - 12$

m) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 6$

10) Fatorar as seguintes expressões:

a) $x^2 + 8x + 16$

b) $x^2 - 4x + 4$

c) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

d) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

e) $x^3 - 16x^2 + 64x$

f) $3x^2 - 18x + 27$

11) (UDESC – SC)

O desenvolvimento da expressão $\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}+1\right)^2$ toma forma $a\sqrt{3}+b$; então o valor numérico de a + b é:

a) 49
b) 19
c) 57
d) 60
e) 8

12) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas Falsas:

a) (   ) (UFSC – SC)O número $A = 101^{50} - 1$ é um múltiplo de *4*.

b) (   ) (UFSC – SC) $2\sqrt{5} < 2+\sqrt{6}$

c) (   ) (UFSC – SC) Se a e b são números reais positivos, então $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

13) (ACAFE – SC)

A expressão $\frac{36y - 16x^2y}{2.(2x+3)}$ equivale a:

a) $2y(3 - 2x)$
b) $\frac{2y}{3-4x}$

c) $y(2x - 3)$

d) $\frac{y-x}{2x+3}$

e) $4x - 6$

14) Sendo **a** = $\frac{4x^2+4x+1}{6x+3}$, para $x \neq -1/2$ e **b** = $\frac{10x^3y^2 - 20x^2y^3 + 10xy^4}{5x^2 - 5y^2}$ para $x^2 - y^2 \neq 0$.

Determine **a** e **b**.

15) (UEL – PR)

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, a expressão $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ é equivalente a:

a) 1
b) 2
c) $\frac{a^2+1}{a}$
d) $\frac{a^4+1}{a^2}$
e) $\frac{a^2+2a+1}{a}$

16) (FATEC – SP)

Seja m = $\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}$. Então $\forall$ a, b reais com $a \geq b \geq 0$, tem-se:

a) $m = a^2 - ab + b^2$
b) $m = a^2 + b^2$
c) $m = (a + b)^2$
d) $m = (a - b)^2$
e) $m = (a + b)(a - b)$

17) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. Sendo x = 0,6 e y = 0,4, obtenha o valor numérico da expressão $x^2 + 2xy + y^2$ é 1
02. Simplificando a expressão $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ com $x \neq y$ obtém-se $x - y$
04. O valor de $1000^2 - 999^2$ é 1999
08. sendo x, um número real, a expressão $\frac{x^4-1}{x^2+1}$ pode ser escrita como $(x - 1)(x + 1)$
16. O valor da expressão $\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2+1}$ para x = 103 é 104
32. A expressão $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$ é equivalente a $2\sqrt{2}$:
64. Dado que x = 2,6 e y = 0,4, o valor de $\frac{x^2-y^2}{3x-3y}$ é 2

Exercícios estilo ENEM

18) Um professor de matemática tem 4 filhos. Em uma de suas aulas, ele propôs a seus alunos que descobrissem o valor da expressão **ac + ad + bc + bd** sendo que **a**, **b**, **c** e **d** são as idades de seus filhos na ordem crescente. O professor disse que a soma das idades dos dois mais velhos é 59 anos e a soma das idades dos dois mais novos é 34 anos. Neste caso, o valor numérico da expressão proposta pelo professor é igual a:

a) 93
b) 1870
c) 2006
d) 118
e) 4063

19) (UNESP – SP)

Por hipótese, considere:

a = b

Multiplique ambos os membros por ***a***

$a^2 = ab$

Subtraia de ambos os membros b^2

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

Fatore os termos de ambos os membros

$(a + b)(a - b) = b(a - b)$

Simplifique os fatores comuns

$(a + b) = b$

Use a hipótese que $a = b$

$2b = b$

Simplifique a equação e obtenha

2 = 1

A explicação para isto é:

a) a álgebra moderna quando aplicada à teoria dos conjuntos prevê tal resultado.
b) a hipótese não pode ser feita, pois como 2 = 1, *a* deveria ser (*b* +1).
c) na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.
d) na fatoração, faltou um termo igual a $-2ab$ no membro esquerdo.
e) na fatoração, faltou um termo igual a $+2ab$ no membro esquerdo.

20) (UFRGS – RS)

O quadrado do número $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Aprofundamento

21) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. Se x + $\frac{1}{x}$ = 3, então $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.
02. Calculando $\sqrt{\frac{3^{13}+3^{12}}{2^5:2^3}}$, acha-se 3^6.
04. Se **n** = $10^7 - 10$, então é múltiplo de 12.
08. O número inteiro N = $16^{15} + 2^{56}$ é divisível por 17.
16. Se n é um número natural maior que 1, a expressão $\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$ é igual a $\frac{1}{4}$.
32. Se α = $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então α é um número ímpar.
64. Considerando-se que x = 9731^2, y = 3907^2 e z = $2\cdot\sqrt{xy}$, o valor da expressão $\sqrt{x+y-z}$ é 5824.

22) (UDESC – SC)

Sejam **a** e **b** números reais quaisquer. Assinale a alternativa **correta**.

a) Se $a \le b$, então $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

a) b) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$

b) Se $\frac{2a+b}{a} \ge \frac{b+2}{a}$, então $a \ge 1$ ou $a < 0$

c) Se $a^2-b^2=a+b$, então $a=1+b$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{2}$

23) (PUC – SP)

Se x e y são números reais tais que x.y ≠ 0 e |x|≠ |y|, a expressão $\frac{x^{-8}-y^{-8}}{x^{-2}.y^{-2}.(x^{-4}+y^{-4})}$ é equivalente a:

a) $x^2y^2(x-y)(x+y)$
b) $x^2y^2(x-y)^2$
c) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$
d) $xy(x^2+y^2)$
e) $xy\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}\right)$

24) Fatorar as seguintes expressões:

a) $a^4 + 2a^2 + 4$
b) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$
c) $6x^2 - 5xy + y^2$

25) (IFAL – AL)

O número $N = \dfrac{1}{\sqrt{32+10\sqrt{7}}} + \dfrac{1}{\sqrt{32-10\sqrt{7}}}$ é um decimal ilimitado periódico. Se N for escrito sob a forma da fração irredutível $\dfrac{a}{b}$ então $a+b$ é igual a:

GABARITO – AULA 07

1) a) $x^2 (x^3 + x^2 + 1)$ b) $2x^3y^2z(2 + 3x^2yz - 4xy^2z^2)$ c) $(x + y).(x + y^2)$
d) $(x + 8).(x - 8)$ e) $(2x - 3).(2x + 3)$ f) $(x + 7)^2$
g) $(x - 9)^2$ h) $2.(x - 5)^2$

2) 2 **3)** d **4)** 23 **5)** c **6)** d

7) $\dfrac{2x+3}{2}$

8) a) $x^2 + 6x + 9$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $4x^2 + 28x + 49$
d) $9x^2 - 6x + 1$ e) $4a^2 - 12ab + 9b^2$ f) $3a^2 + 6ab$
g) $x^2 - 36$ h) $4x^2 - 25$

9) a) $x(a + b)$ b) $5(a + b)$ c) $m^2(m + 1)$ d) $3x^2(1 + 5x^3 + 4x^5)$
e) $2xy((3x^2 + 4y - 1)$ f) $(a + b)(x + y)$ g) $(a + 2)(x + y)$
h) $(2 - a)(x + y)$ i) $(x - 1).(x^2 - 3)$ j) $(x + 6)(x - 6)$
k) $(3x + 5)(3x - 5)$ l) $3(x + 2)(x - 2)$ m) $(2x + 3)(x^2 + 2)$

10) a) $(x + 4)^2$ b) $(x - 2)^2$ c) $(2x + 3y)^2$ d) $(5x - 2y)^2$ e) $x(x - 8)^2$
f) $3(x - 3)^2$

11) c

12) a) V b) F c) V

13) a

14) a = $\dfrac{2x+1}{3}$ b = $\dfrac{2xy^2.(x-y)}{x+y}$

15) e **16)** e **17)** 31 **18)** c **19)** c **20)** c **21)** 91

22) c **23)** c

24) a) $(a^2 - a\sqrt{2} + 2)\ (a^2 + a\sqrt{2} + 2)$ b) $(a - b + c)(a - b + c)$
c) $(3x - y)\ (2x - y)$

25) 14

AULA 08

EQUAÇÕES DO 1º GRAU

1. Definição

Uma sentença numérica aberta é dita equação do 1º grau se pode ser reduzida ao tipo ax + b = 0, com a diferente de zero.

2. Resolução

Resolver uma equação, dentro de um dado conjunto, é determinar os elementos pertencentes a esse conjunto e que tornem a sentença aberta em sentença verdadeira. Considere, como exemplo, a equação 4x + 1 = 9. Nela o número 2 é solução, pois 4.2 + 1 = 9. O número 2 nesse caso é denominado RAIZ da equação.

3. Propriedades

- Propriedade Reflexiva: a = a
- Propriedade Simétrica: Se a = b $\rightarrow$ b = a
- Propriedade Transitiva: Se a = b $\wedge$ b = c $\rightarrow$ a = c

PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO DA IGUALDADE

Adicionando ou multiplicando ambos os membros de uma equação por uma mesma expressão, diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à equação dada.
Em símbolos:

Se: a = b então para $\forall$m $\rightarrow$ a + m = b + m
Se: a = b então para $\forall$m $\neq$ 0 $\rightarrow$ a . m = b . m

Observe, agora, a equação: ax + b = 0

Facilmente concluimos que o conjunto-verdade da equação é V = $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

a) Se a ≠ 0, a equação admite uma única solução: S = $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

b) Se a = 0 e b ≠ 0, a equação não admite solução: S = $\varnothing$

c) Se a = 0 e b = 0, a equação admite infinitas soluções. S = $\Re$

4. Inequações do 1º grau

Inequações são expressões abertas que exprimem uma desigualdade entre as quantidades dadas.
Uma inequação é dita do 1º grau se pode ser escrita na forma:

- ax + b > 0
- ax + b < 0
- ax + b $\geq$ 0
- ax + b $\leq$ 0

Nas inequações do 1º grau valem também, os princípio aditivo e multiplicativo com uma ressalva. Veja:

Se: a > b então para $\forall$m $\rightarrow$ a + m > b + m
Se: a > b então para $\forall$m > 0 $\rightarrow$ a . m > b . m
Se: a > b então para $\forall$m < 0 $\rightarrow$ a . m < b . m

5. Sistemas de Equações

Resolver um sistema de equações com duas incógnitas é determinar os valores de x e y que satisfaçam simultaneamente às duas equações em questão. Por exemplo o sistema:

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ tem solução para $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Apenas estes valores satisfazem simultaneamente às duas igualdades.

Métodos de Resolução:

5.1. Método da Substituição

1) Seja o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

2) Isola-se uma das incógnitas em uma das equações, por exemplo, o valor de x na equação 1:

$$2x + 3y = 8$$
$$2x = 8 - 3y$$
$$x = \frac{8 - 3y}{2} \qquad \text{equação 3}$$

3) Substitui-se x da equação 2 pelo seu valor(equação 3):

$$5.\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) - 2y = 1 \qquad \text{equação 4}$$

4) Resolve-se a equação 4 determinando-se o valor de y:

$$5.(8 - 3y) - 4y = 2$$
$$40 - 15y - 4y = 2$$
$$19y = 38$$
$$\therefore\ y = 2$$

5) O valor obtido para y é levado à equação 3 (em que já está isolado) e determina-se x:

$$x = \frac{8 - 3(2)}{2}$$

$$x = \frac{8-6}{2}$$

$$\therefore \ x = 1$$

6) A solução do sistema é: x = 1 e y = 2

5.2. Método da Adição

Este método consiste em somar, membro a membro, as duas equações com o objetivo de, nesta operação, eliminar uma das incógnitas e só é vantajoso no caso de os coeficientes de uma das incógnitas serem simétricos.

Exemplos:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Somando, membro a membro, vem:

$2x = 4 \ \therefore \ x = 2$

Substituindo o valor de x na equação 1, vem:

$2 + y = 4 \ \therefore \ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \ \rightarrow \ * (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 10x - 2y = 6 \end{cases}$

Somando, membro a membro, vem:

13x = 13 ∴ x = 1

Substituindo o valor de x na 1ª equação, vem: 3.1 + 2y = 7 ∴ y = 2

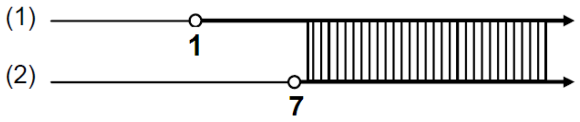
6. Sistemas de Inequações

Obter a solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2 > 5 & (I) \\ x - 3 > 4 & (II) \end{cases}$

Para se obter a solução do sistema resolvemos separadamente cada inequação e em seguida tomamos a intersecção entre as soluções. Acompanhe:

1) 3x + 2 > 5 2) x – 3 > 4

x > 1 x > 7



A solução do sistema é x > 7

Em Sala

01) (ESPM – SP)

A solução real da equação $\frac{x-2}{3} = \frac{4x-3}{2} + 7$ é um número compreendido entre

a) 0 e 10
b) – 2 e 0
c) – 3 e – 2
d) – 4 e – 3
e) – 10 e – 4

02) A sentença $\frac{x}{2} - 2 = -\frac{1}{2}(4 - x)$ é:

a) falsa para todo $x \in \Re$
b) é verdadeira somente se x = 0
c) é falsa $\forall \ x \in N$
d) é verdadeira $\forall \ x \in \Re$
e) é falsa para x = 0

03) Sendo o par (a,b) solução do sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ x - y = -1 \end{cases}$, determine o valor de $a.b$.

04) Obter a soma dos números inteiros que são soluções do sistema $\begin{cases} -3x + 4 > 13 \\ 2x - 3 > -17 \end{cases}$

Testes

05) (UFMG – MG)

Determine a raiz da equação $\frac{2(x+1)}{3} - \frac{3.(x+2)}{4} = \frac{x+1}{6}$.

06) Determine a solução do sistema $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$

07) (UFSC – SC)

A soma dos quadrados dos extremos do intervalo que satisfaz simultaneamente, as inequações: $x + 3 \geq 2$ e $2x - 1 \leq 17$; é:

Atividades

08) Resolver em R as equações:

a) $6x - 6 = 2(2x + 1)$

b) $2(x + 1) = 5x + 3$

c) $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) - 3$

d) $2(x - 2) = 2x - 4$

e) $3(x - 2) = 3x$

f) $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1}{4}$

g) $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = x$

h) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} = 1$

i) $x^3 = 9x$

j) $x^3 + 7x^2 - 4x - 28 = 0$

09) Determine a solução de cada sistema abaixo:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$

10) Resolva em R as inequações:

a) 3(x + 1) > 2(x – 2)

b) $\dfrac{x+10}{4} \leq \dfrac{3x}{2}$

c) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{4}$

11) Dada a equação 2(x + 5) – 3(5 – x) = 10, é **CORRETO** afirmar que o valor de **x** nessa equação é:

01. Um múltiplo de nove.
02. Um número inteiro negativo.
04. Um número par.
08. Um número primo.
16. Um número natural.

12) O valor de x na equação $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{x}{2}$, é:

a) um número par
b) um número negativo
c) um número irracional
d) um número primo
e) não existe x que satisfaça tal equação

13) O valor de 50x em $\frac{2x - 3}{4} - \frac{3(1 - x)}{2} = 1 - \frac{1 + x}{12}$ é:

a) 74
b) 75
c) 76
d) 77
e) 78

14) Obter a soma dos números inteiros que são soluções do sistema $\begin{cases} -3x + 2 > 5 \\ -2x - 3 < 7 \end{cases}$

15) Considere a equação 2(3x – 2) + m(x – 1) = m, na incógnita x. Obtenha a constante real m de modo que o número – 1 seja raiz dessa equação.

16) O valor de 31(x + y) sendo (x, y) solução do sistema: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{2x + 1}{3} - \frac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$ é:

a) 256
b) 345
c) 126
d) 279
e) 672

17) Resolvendo a equação $\frac{x^2 - 5x}{x(x^2 - 25)} = 0$ obtemos:

a) V = {0, 5}
b) V = {0}
c) V = {- 5, 0, 5}
d) V = {5}
e) V = $\varnothing$

Exercícios Estilo ENEM

18) (FUVEST – SP)

Na figura estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do número **xy**?

a) à esquerda de 0
b) entre zero e x
c) entre x e y
d) entre y e 1
e) à direita de 1

19) (FUVEST – SP)

Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

20) (UTFPR – PR)

Sabendo-se que um retângulo tem perímetro igual a 24m e tem lados que medem $(x+1)$ e $(2x-1)$ então sua área em metros quadrados é de:

Aprofundamento

21) (FGV – SP)

O par ordenado (x,y) que satisfaz o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = -4 \end{cases}$$ é tal que sua soma x + y vale

a) $-\dfrac{1}{7}$

b) $-\dfrac{1}{6}$

c) $-\dfrac{1}{5}$

d) $-\dfrac{1}{4}$

e) $-\dfrac{1}{3}$

22) (UEL – PR)
As variáveis reais x e y verificam as seguintes condições: $(x + y)^3 = 64$ e $(x - y)^6 = 64$. Então esse sistema tem

a) zero solução.
b) uma solução.
c) duas soluções.
d) três soluções.
e) quatro soluções.

23) (UFSC – SC)
A soma dos dígitos do número inteiro **m** tal que $\mathbf{5m + 24 > 5500}$ e $\mathbf{-\frac{8}{5}m + 700 > 42 - m}$, é:

24) Os valores reais de x e y que satisfazem a equação $(x - y)^2 + (x + y - 12)^2 = 0$ são tais que o produto de x e y é um número:

a) ímpar
b) primo
c) quadrado perfeito
d) múltiplo de 5
e) múltiplo de 7

25) (ACAFE – SC)
Analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta.

I. Os números inteiros pares compreendidos entre 9 e $9\sqrt{3}$ são todos aqueles da forma 2n, com $n \in Z$ e $5 \leq n \leq 7$.
II. Um número é inteiro. A soma de seu cubo com o quíntuplo de seu quadrado e mais o seu dobro resulta no número -10. Então, esse número inteiro é menor que 5.
III. O número 8.000.000 possui 70 divisores naturais.

a) Apenas as afirmações I e II estão corretas.
b) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
c) Todas as afirmações estão corretas.
d) Somente a afirmação II está correta.

GABARITO – AULA 08

1) d **2)** d **3)** 6 **4)** – 15 **5)** x = – 4
6) $S = \{(1,2)\}$ **7)** 82
8) a) S = {4} b) S = { $-\frac{1}{3}$ } c) S = { $-\frac{7}{4}$ } d) S = $\Re$ e) S = $\varnothing$
f) S = { $\frac{9}{10}$ } g) S = {– 3} h) S = { $-\frac{19}{2}$ } i) S = {-3, 0, 3}
j) S = {– 7, – 2, 2}
9) a) (2,1) b) (3,2) c) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ d) {(3, 5)}
10) a) {x∈ R| x >– 7} b) {x∈ R| x ≥ 2 } c) {x∈ R| x > $\frac{1}{6}$ }
11) 24 **12)** d **13)** c **14)** – 9 **15)** – 10/3
16) d **17)** e **18)** b **19)** c **20)** 35
21) b **22)** c **23)** 16 **24)** c **25)** c

AULA 09

PROBLEMAS

Em Sala

01) Uma pessoa percorreu um caminho em três dias. No primeiro dia, percorreu $\frac{3}{4}$ do caminho. No segundo dia, percorreu $\frac{1}{4}$ do restante e no terceiro dia faltou-lhe percorrer somente 75 metros. A distância total do caminho é:

a) 200 metros.
b) 150 metros.
c) 300 metros.
d) 800 metros.
e) 400 metros.

02) Se no último aniversário de João, a soma de sua idade com a de seu pai e a de seu avô era 90 anos, e no dia de seu nascimento esta soma era 75 anos, então João está com quantos anos?

03) (UFSC – SC)
A soma das idades de um pai e seu filho é 38 anos. Daqui a 7 anos o pai terá o triplo da idade do filho. A idade do pai será:

04) A tabela apresenta os produtos de uma lanchonete consumidos por dois clientes (I e II) e os valores pagos.

CLIENTE	PRODUTOS	VALOR
I	2 sucos + 3 sorvetes	R$22,00
II	4 sucos + 2 sorvetes	R$28,00

A partir dessas informações, um cliente que consumir 1 suco + 1 sorvete pagará:

a) R$ 8,00
b) R$ 9,00
c) R$ 10,00
d) R$ 11,00
e) R$ 12,00

Testes

05) (ACAFE – SC)

Um táxi começa uma corrida com o taxímetro marcando R$ 4,00. Cada quilômetro rodado custa R$ 1,50. Se, ao final de uma corrida, o passageiro pagou R$ 37,00, a quantidade de quilômetros percorridos foi:

a) 11
b) 22
c) 33
d) 26
e) 32

06) (UEL-PR)

Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R$ 4300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R$ 50,00 e cada calça de tamanho médio custou 60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

a) 30 e 50
b) 37 e 43
c) 40 e 40
d) 43 e 37
e) 50 e 30

07) (UFSC – SC)

Para produzir um objeto, um artesão gasta R$ 1,20 por unidade. Além disso, ele tem uma despesa fixa de 123,50, independente da quantidade de objetos produzidos. O preço de venda é de R$ 2,50 por unidade. O número mínimo de objetos que o artesão deve vender, para que recupere o capital empregado na produção dos mesmos, é:

08) (UFRGS – RS)

Rasgou-se uma das fichas onde foram registrados o consumo e a despesa correspondente de três mesas de uma lanchonete, como indicado abaixo.

Mesa 1	Mesa 2	Mesa 3
2 sucos	4 sucos	1 suco
3 sanduíches	5 sanduíches	1 sanduíche
R$ 14,00	R$ 25,00	R$

Nessa lanchonete, os sucos têm um preço único, e os sanduiches também. O valor da despesa da mesa 3 é

a) R$ 5,50
b) R$ 6,00
c) R$ 6,40
d) R$ 7,00
e) R$ 7,20

09) José tem hoje 47 anos. Seus três filhos estão com, 8, 12 e 15 anos. Daqui a quantos anos a soma das idades dos três filhos será igual a idade de José?

10) (ENEM)

O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

a) 4,0 m e 5,0 m
b) 5,0m e 6,0 m
c) 6,0 m e 7,0 m
d) 7,0 m e 8,0 m
e) 8,0 m e 9,0 m

11) (UFSM – RS)
Em uma determinada região do mar, foi contabilizado um total de 340 mil animais, entre lontras marinhas, ouriços do mar e lagostas. Verificou-se que o número de lontras era o triplo do de ouriços e que o número de lagostas excedia em 20 mil unidades o total de lontras e ouriços. Pode-se dizer que o número de ouriços dessa região é

a) 30 mil.
b) 35 mil.
c) 40 mil.
d) 45 mil.
e) 50 mil.

12) (UFPR – PR)
Numa empresa de transportes, um encarregado recebe R$ 400,00 a mais que um carregador, porém cada encarregado recebe apenas 75% do salário de um supervisor de cargas. Sabendo que a empresa possui 2 supervisores de cargas, 6 encarregados e 40 carregadores e que a soma dos salários de todos esses funcionários é R$ 57.000,00, qual é o salário de um encarregado?

a) R$ 2.000,00.
b) R$ 1.800,00.
c) R$ 1.500,00.
d) R$ 1.250,00.
e) R$ 1.100,00.

13) (UDESC – SC)
No caixa de uma loja havia somente cédulas de 50 e 20 reais, totalizando R$ 590,00. Após receber o pagamento, integralmente em dinheiro, de uma venda de R$ 940,00, o comerciante da loja notou que a quantidade inicial de cédulas de 50 reais triplicara, e a quantidade inicial de cédulas de 20 reais duplicara, sem que houvesse notas ou moedas de outros valores. Dessa forma, a quantidade total de cédulas disponíveis inicialmente no caixa da loja era igual a:

a) 16
b) 22
c) 25
d) 19
e) 13

14) (UNICAMP – SP)
Uma senhora comprou uma caixa de bombons para seus dois filhos. Um deles tirou para si metade dos bombons da caixa. Mais tarde, o outro menino também tirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa. Restaram 10 bombons. Calcule quantos bombons havia inicialmente na caixa.

15) (ACAFE – SC)

Uma pessoa compra um terreno de 40 metros de comprimento por 20 metros de largura. Ela deseja construir uma casa e estabelece ao arquiteto contratado pelo projeto certas condições:

I. a área destinada ao lazer deve ter 200m^2.
II. a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno;
III. o custo da construção da casa deve ser menor que R$ 450.000,00.

Sabendo que o metro quadrado construído custa R$ 1.500,00, a área interna da casa que o arquiteto irá projetar será:

a) entre 300 m^2 e 400 m^2.
b) maior que 400 m^2.
c) entre 200 m^2 e 300 m^2.
d) menor que 200 m^2.

16) (UFSC – SC)

Pedro, Luiz, André e João possuem, juntos, *90* CDs. Se tirarmos a metade dos CDs de Pedro, dobrarmos o número de CDs de Luiz, tirarmos *2* CDs de André e aumentarmos em *2* o número de CDs de João, eles ficarão com a mesma quantidade de CDs. Determine o número inicial de CDs de André.

17) (UFRGS – RS)

O dispensador de dinheiro do caixa eletrônico de um banco foi abastecido apenas com cedulas de R$5,00 e de R$20,00. Um cliente, ao realizar um saque, constatou que o dispensador liberou 6 cedulas. Entre elas, havia pelo menos uma de cada valor. Com base nesses dados, é correto afirmar que a única alternativa que apresenta uma quantia que poderia ter sido sacada pelo cliente é

a) R$90,00
b) R$95,00
c) R$100,00
d) R$110,00
e) R$120,00

Exercícios Estilo ENEM

18) (ENEM)

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

19) (ENEM)
Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.
Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos
b) 360 tijolos
c) 400 tijolos
d) 480 tijolos
e) 600 tijolos

20) (ENEM)
Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

a) R$166,00.
b) R$156,00.
c) R$84,00.
d) R$46,00.
e) R$24,00.

Aprofundamento

21) (UFSM – RS)
Num determinado mês, em uma unidade de saúde, foram realizadas 58 hospitalizações para tratar pacientes com as doenças A, B e C. O custo total em medicamentos para esses pacientes foi de R$39.200,00.
Sabe-se que, em média, o custo por paciente em medicamentos para a doença A é R$450,00, para a doença B é R$800,00 e para a doença C é R$1.250,00. Observa-se também que o número de pacientes com a doença A é o triplo do número de pacientes com a doença C. Se a, b e c representam, respectivamente, o número de pacientes com as doenças A, B e C, então o valor de $a-b-c$ é igual a

a) 14.
b) 24.
c) 26.
d) 36.
e) 58.

22) (ENEM)
Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo.

Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476
b) 675
c) 923
d) 965
e) 1 538

23) (ENEM)

Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{consumo (em kWh)} + \text{Cosip}$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	**Valor da Cosip (R$)**
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1
b) 135,0
c) 137,1
d) 138,6
e) 143,1

24) **“**Um rajá deixou às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1 pérola e um sétimo do que restasse; viria, depois, a segunda e tomaria para si 2 pérolas e um sétimo do restante; a seguir a terceira jovem receberia 3 pérolas e um sétimo do que restasse. E assim sucessivamente. Feita a partilha, cada uma das filhas recebeu o mesmo número de pérolas”. O número de pérolas é formado por dois algarismos. Pergunta-se: qual a soma desses dois algarismos?

a) 7
b) 8
c) 9
d) 5
e) 4

25) (UEL-PR)

Um trem, ao iniciar uma viagem, tinha em um de seus vagões um certo número de passageiros. Na primeira parada não subiu ninguém e desceram desse vagão 12 homens e 5 mulheres restando nele um número de mulheres igual ao dobro do de homens. Na segunda parada não desceu ninguém, entretanto subiram, nesse vagão, 18 homens e 2 mulheres, ficando o número de homens igual ao de mulheres. Qual o total de passageiros no vagão no início da viagem?

GABARITO – AULA 09

1) e **2)** 5 anos **3)** 39 anos **4)** b
5) b **6)** e **7)** 95 **8)** a **9)** 6 **10)** d **11)** c **12)** c
13) d **14)** 40 **15)** c **16)** 22 **17)** a **18)** b **19)** d **20)** b
21) a **22)** c **23)** c **24)** c **25)** 65

AULA 10

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

1. Definição

Denomina-se equação do 2º grau a toda equação que pode ser reduzida a forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ onde **a**, **b** e **c** são números reais e **a** $\neq 0$.

2. Resolução

<u>**1º CASO**</u>: Se na equação $ax^2 + bx + c = 0$, o coeficiente b for igual a zero procede-se assim:

$ax^2 + c = 0$
$ax^2 = -c$
$x^2 = -\dfrac{c}{a}$

Assim, sendo V o conjunto-verdade, em $\Re$, vem:

$x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ ou seja:

$V = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, para **a** e **c** com sinais contrários.

Para **a** e **c** com sinais iguais, temos: $V = \varnothing$.

Exemplo: Resolver, em $\Re$, as seguintes equações:

a) $x^2 - 16 = 0$

Resolução: Isola-se o termo x^2

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = -4$
$V = \{-4, 4\}$

b) $3x^2 - 15 = 0$

Resolução: Isola-se o termo x^2

$3x^2 - 15 = 0 \rightarrow 3x^2 = 15 \rightarrow x^2 = 5$
$x_1 = \sqrt{5}$ ou $x_2 = -\sqrt{5}$
$V = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

<u>**2º CASO**</u>: Se na equação $ax^2 + bx + c = 0$, o coeficiente c for igual a zero procede-se assim:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$
$$V = \{0, -\frac{b}{a}\}$$

Exemplo: Resolver, em $\Re$, a seguinte equação:
$x^2 - 16x = 0$

Resolução: Coloca-se x em evidência:

$x^2 - 16x = 0 \rightarrow x(x - 16) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x - 16 = 0$
Logo: $x_1 = 0$ ou $x_2 = 16$
$V = \{0, 16\}$

<u>**3º CASO**</u>: Se na equação $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c $\neq 0$ aplica-se a fórmula de Bháskara

$\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$ onde: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Nessa fórmula, $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação, o que determina o número de soluções reais da equação. Podemos ter as seguintes situações:

- $\Delta > 0$. Existem duas raízes reais e distintas
- $\Delta = 0$. Existem duas raízes reais e iguais
- $\Delta < 0$. Não há raiz real

Exemplo: Resolver, em $\Re$, as seguintes equações:

a) $2x^2 + 9x - 5 = 0$

Resolução: a = 2   b = 9   c = – 5
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 9^2 - 4.2.(-5)$
$\Delta = 81 + 40 = 121$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 \pm 11}{2.2} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = -5$
$V = \{-5\ \dfrac{1}{2}\}$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Resolução: a = 1   b = – 6   c = 9
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4.1.(9)$
$\Delta = 36 - 36 = 0$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) \pm 0}{2.1} \rightarrow x_1 = x_2 = 3$
$V = \{3\}$

c) $x^2 - 6x + 13 = 0$

Resolução: $a = 1$ $b = -6$ $c = 13$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.(13)$

$\Delta = 36 - 52 = -16$

Como Δ é negativo, a equação não possui raízes reais.

$V = \varnothing$

Demonstração da fórmula de Bháskara

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c$

(multiplicando os dois membros por 4a)

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

(somando b^2 os dois membros)

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

(fatorando a expressão $4a^2x^2 + 4abx + b^2$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Logo: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. Soma e produto das raízes

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c$, tem-se:

a) soma das raízes:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

b) produto das raízes

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo: Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $2x^2 - 6x + 1 = 0$, determine:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 . x_2$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Resolução: $a = 2$ $b = -6$ $c = 1$

a) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{(-6)}{2} \rightarrow x_1 + x_2 = 3$

b) $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \rightarrow x_1 . x_2 = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} \rightarrow \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 6$

4. Forma Fatorada do trinômio do 2º grau

Considere a expressão $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ com $\mathbf{a \neq 0}$ e $\mathbf{\Delta \geq 0}$. Considere, ainda, x_1 e x_2 as raízes da equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Nas condições acima, temos:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)}$$

Exemplos:

a. $x^2 - 6x + 8 = (x - 2).(x - 4)$

b. $9x^2 + 6x - 8 = 9\left(x - \dfrac{2}{3}\right).\left(x + \dfrac{4}{3}\right)$

Em Sala

01) Resolver, em $\Re$, as seguintes equações:

a) $2x^2 - 128 = 0$

b) $x^2 - 15x = 0$

c) $2x^2 = 0$

02) O conjunto solução da equação do 2º grau $3x^2 - x + 6 = 2x^2 + 3x + 38$ é:

03) Os valores reais de n, para os quais a equação $2x^2 + 4x - n = 0$ têm raízes reais distintas, são:

04) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $3x^2 - 7x + 6 = 0$, determine:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 . x_2$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Testes

05) Resolver, em $\Re$, as seguintes equações:

a) $4(x^2 - 64) = 0$

b) $2x^2 - 3x = 0$

c) $9x^2 + 6x = 8$

06) Determine o valor de **m** de modo que a equação $3x^2 + 4x - m = 0$ não possua raízes reais.

07) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $2x^2 - 8x + 9 = 0$ determine o valor de:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 . x_2$

Atividades

08) Resolva em R, as equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $- x^2 = - 6x + 8$

c) $3x^2 - 7x = -2$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $2x^2 - x + 1 = 0$

f) $4x^2 - 100 = 0$

g) $x^2 - 5x = 0$

h) $2x^2 + 5x = 0$

i) $x.x = 7.x$

j) $(x - 1).(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(2x - 4)$

09) (UNISINOS – RS)

As soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ são

a) -4 e -1 .
b) -4 e 1.
c) -4 e 3.
d) -1 e 3.
e) 1 e 3.

10) Assinale V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas.

a) ( ) A equação $2x^2 - 2x + 1 = 0$ não possui raízes reais.

b) ( ) A soma e o produto das raízes da equação $2x^2 - 6x + 9 = 0$ são respectivamente 3 e 4,5.

c) ( ) Se m e n são as raízes da equação $3x^2 + 8x + 21 = 0$, o valor de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ é $-\frac{8}{21}$

11) De uma folha retangular de 30 cm por 20 cm são retirados de seus quatro cantos quadrados de lados medindo x cm . com isso a área que sobrou da folha e de 404 cm² . qual e o valor de x.

12) (UFRGS – RS)

O conjunto solução da equação $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=x$, com $x \neq 0$ e $x \neq -1$, é igual ao conjunto solução da equação

a) $x^2 - x - 1 = 0$
b) $x^2 + x - 1 = 0$
c) $-x^2 - x + 1 = 0$
d) $x^2 + x + 1 = 0$
e) $-x^2 + x - 1 = 0$

13) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $2x^2 - 6x - 3 = 0$, determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

01. x_1 e x_2 são iguais
02. $x_1 + x_2 = 3$
04. $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{3}{2}$
08. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-2$
16. $x_1^2 + x_2^2 = 12$
32. $x_1^2.x_2 + x_1.x_2^2 = -\dfrac{9}{2}$

14) (UEPG – PR)

Sendo p e q as raízes da função $y = 2x^2 - 5x + a - 3$, onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{4}{3}$, assinale o que for correto.

01. O valor de a é um número inteiro.
02. O valor de a está entre -20 e 20.
04. O valor de a é um número positivo.
08. O valor de a é um número menor que 10.
16. O valor de a é um número fracionário.

15) Para que valores reais da constante m a equação $x^2 - 6x + m = 0$ admite:

a) raízes reais e iguais
b) raízes reais e diferentes
c) não admite raízes reais

16) (ESPM)

As raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$ são α e β. O valor da expressão $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$ é:

17) Se m e n são as raízes da equação $7x^2 + 9x + 21 = 0$ então $(m + 7)(n + 7)$ vale:

Exercícios estilo ENEM

18) (UFPR – PR)

Durante o mês de dezembro, uma loja de cosméticos obteve um total de R$ 900,00 pelas vendas de um certo perfume. Com a chegada do mês de janeiro, a loja decidiu dar um desconto para estimular as vendas, baixando o preço desse perfume em R$ 10,00. Com isso, vendeu em janeiro 5 perfumes a mais do que em dezembro, obtendo um total de R$ 1.000,00 pelas vendas de janeiro. O preço pelo qual esse perfume foi vendido em dezembro era de:

a) R$ 55,00.
b) R$ 60,00.
c) R$ 65,00.
d) R$ 70,00.
e) R$ 75,00.

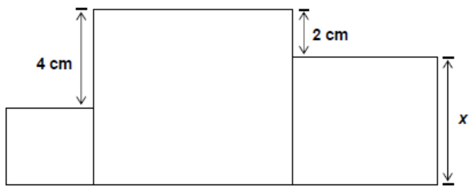
19) (UDESC – SC)

Para divulgar seus cursos de graduação, uma Universidade deseja confeccionar alguns panfletos. Sabe-se que as dimensões de cada panfleto são 12 cm x 18 cm e que as margens superior, inferior, direita e esquerda devem ser iguais a *x* cm. Se a maior área de impressão em cada panfleto é 187 cm^2, então *x* é igual a:

a) 0,5 cm
b) 1 cm
c) 14,5 cm
d) 0,25 cm
e) 2 cm

20) (UFPR – PR)

A soma das áreas dos três quadrados ao lado é igual a 83 cm^2. Qual é a área do quadrado maior?



a) 36 cm^2
b) 20 cm^2
c) 49 cm^2
d) 42 cm^2
e) 64 cm^2

Aprofundamento

21) (FUVEST – SP)
Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?

b) Quanto recebeu cada um deles?

22) Qual é a soma dos quadrados das raízes inteiras da equação $(x^2 - 4).(3x^2 + 4) = (x^2 - 4).(2 - 5x)$

23) (FGV – SP)
Deslocando-se a vírgula 4 posições para a direita na representação decimal de um número racional positivo, o número obtido é o quádruplo do inverso do número original. É correto afirmar que o número original encontra-se no intervalo real

a) $\left[\frac{1}{10000}, \frac{3}{10000}\right]$
b) $\left[\frac{1}{1000}, \frac{3}{1000}\right]$
c) $\left[\frac{1}{100}, \frac{3}{100}\right]$
d) $\left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right]$
e) [1,3]

24) (UEG)
Uma dívida de R$ 10800,00 deveria ser repartida em parcelas iguais entre um grupo de pessoas. Porém, duas estvam impossibilitadas de cumprir o compromisso, decorrendo daí que a dívida de cada uma das restantes aumentou em R$900,00. Inicialmente, o grupo era constituído de

a) 10 pessoas
b) 9 pessoas
c) 8 pessoas
d) 7 pessoas
e) 6 pessoas

25) (IBMEC – RJ)

Um grupo de amigos, numa excursão, aluga uma van por 342 reais. Ao fim do passeio, três deles estavam sem dinheiro e os outros tiveram que completar o total, pagando cada um deles 19 reais a mais. O total de amigos era:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

GABARITO – AULA 10

1) a) {-8, 8} b) {0, 15} c) {0}
2) {8, - 4}
3) n > - 2
4) a) $\frac{7}{3}$ b) 2 c) $\frac{7}{6}$
5) a) {-8, 8} b) $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ c) $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$
6) $m < -\frac{4}{3}$
7) a) 4 b) $\frac{9}{2}$
8) a) {2,3} b) {2,4} c) {2, 1/3} d) {2} e) $\varnothing$ f) {-5, 5}
g) {0,5} h) $\{0, -\frac{5}{2}\}$ i) {0, 7} j) {1, 2, 3}
9) b
10) a) V b) V c) V
11) 7 **12)** a
13) 62 **14)** 30
15) a) m = 9 b) m < 9 c) m > 9
16) 49/3 **17)** 43 **18)** b **19)** a **20)** c
21) a) 6 trabalhadores realizaram o serviço.
b) Cada um deles recebeu $\frac{10800}{6} = 1800$ reais.
22) 9 **23)** c **24)** e **25)** d

AULA 11

EQUAÇÕES ESPECIAIS

1. Equações Biquadradas

Algumas equações podem ser transformadas por um momento numa equação do 2º grau mediante uma troca de variável.

A equação $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ pode ser resolvida fazendo: $x^n = t$

Acompanhe os exemplos:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Fazendo $\boxed{x^2 = y}$, temos:

$y^2 - 13y + 36 = 0$

Resolvendo a equação, vem: $y_1 = 9$ ou $y_2 = 4$

Como $\boxed{x^2 = y}$, temos:

$x^2 = 9$ ou $x^2 = 4$

$x = \pm 3$ ou $x = \pm 2$

V = { - 3, - 2, 2, 3}

b) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

Fazendo $\boxed{x^3 = y}$, temos:

$y^2 + 2y + 1 = 0$

Resolvendo a equação, vem: $y_1 = y_2 = -1$

Como $\boxed{x^3 = y}$, temos:

$x^3 = -1 \rightarrow x = -1$

V = { – 1}

2. Equações Irracionais

Considere as seguintes equações:

$$\sqrt{x+2} = 7;\ \sqrt{3x^2 - 1} = 2;\ \sqrt[3]{x-1} = x+1$$

Observe que todas elas apresentam incógnita no radicando. Essas equações são chamadas irracionais.

A resolução de uma equação irracional deve ser efetuada procurando transformá-la inicialmente numa equação racional, obtida ao elevarmos ambos os membros da equação a uma potência conveniente.

Em seguida, resolvemos a equação racional encontrada e, finalmente, verificamos se as raízes da equação racional obtidas podem ou não ser aceitas como raízes da equação irracional dada (verificar a igualdade).

Acompanhe os exemplos:

a) Resolver em $\Re$, a equação: $\sqrt{x-5}-4=0$

Isola-se o radical em um dos membros:

$\sqrt{x-5}-4=0$

$\sqrt{x-5}=4$

Elevam-se ambos os membros ao quadrado, para eliminar a raiz:

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2=4^2$

$x-5=16 \rightarrow x=21$

Verificando x na equação original:

$\sqrt{21-5}-4=0$

$\sqrt{16}-4=0$

$0=0$ Verdadeiro

Portanto: V = {21}

b) Resolver em $\Re$, a equação: $\sqrt{4x+5}-x=0$

Isola-se o radical em um dos membros:

$\sqrt{4x+5}=x$

Elevam-se ambos os membros ao quadrado, para eliminar a raiz:

$\left(\sqrt{4x+5}\right)^2=x^2$

$x^2-4x-5=0 \rightarrow x_1=5$ ou $x_2=-1$

Verificando x_1 na equação original:

$\sqrt{4.5+5}-5=0$

$5-5=0$

$0=0$ Verdadeiro

Verificando x_2 na equação original:

$\sqrt{4.(-1)+5}-(-1)=0$

$1+1=0$

$2=0$ Falso

$\text{Portanto}: V=\{5\}$

Observação: É necessária essa verificação, pois, ao elevarmos os dois membros de uma equação a uma potência, podem aparecer sentenças verdadeiras a partir de sentenças falsas:

Veja que: $4 \neq -4$. No entanto $(4)^2=(-4)^2$

Em Sala

01) Determine o conjunto-solução da equação biquadrada $x^4-15x^2-16=0$

02) Determine o conjunto-solução da equação biquadrada $x^6-7x^3-8=0$

03) A equação irracional $\sqrt{3x-2}=5$ resulta em x igual a:

a) –9.
b) –4.
c) 3.
d) 9.
e) 19.

04) Determine a maior raiz da equação $\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x+2}$

Testes

05) Se x_1, x_2 são as raízes reais da equação $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$, então o valor da expressão $\sqrt{x_1 + x_2}$ é igual a:

06) A maior raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ é:

a) 3
b) 4
c) 8
d) 9
e) 1

07) (UTFPR – PR)
A equação irracional $\sqrt{9x - 14} = 2$ resulta em x igual a:

a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

08) (CEFET – PR)
A soma dos quadrados das raízes reais da equação $x^4+36 = 13x^2$ resulta:

a) 0.
b) 5.
c) 10.
d) 26.
e) 40.

09) (PUC – RJ)
O número de soluções da equação $x = \sqrt{(6 - x)}$, com $x > 0$, é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

10) Assinale a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. A maior raiz da equação $x^6 - x^3 - 2 = 0$ é $\sqrt[3]{2}$
02. A maior raiz da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$ é 2
04. As raízes da equação $x^2 - 13x + 42 = 0$ estão compreendidas entre 1 e 3
08. A soma das raízes da equação $x^6 - x^3 - 2 = 0$ é 3
16. a equação $x^2 - 4x + 2 = 0$ não possui raízes reais

11) Determine o conjunto-solução da equação biquadrada $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

12) (UFRGS – RS)

A soma das soluções da equação $x^2 - \sqrt{4 - x^2} = 2$ é:

a) – 2
b) – 1
c) 0
d) 1
e) 3

13) (MACK – SP)

Se x e y são números reais positivos, tais que $x^2+y^2+2xy + x + y - 6 = 0$, então x + y vale:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

14) Se p e q são raízes reais da equação $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+3}} = \frac{3}{2}$, com p > q, é correto afirmar:

01. p é um número primo
02. $p + q = 4$
04. $q^2 - p^2 = 10$
08. q é um número natural

15) Se a equação $x^4 - kx^2 = 0$ tem solução S = {- 9, 0, 9}, então:

a) k = 9.
b) k = 81.
c) k = 18.
d) k = 0.
e) k = - 9.

16) Assinale a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

01. Considere a equação $(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2$. O número de raízes reais distintas dessa equação é 3.
02. A menor raiz da equação: $\sqrt{x+4} - 2 = x$ é – 3.
04. A soma dos quadrados das raízes inteiras da equação $(x^2 - 4).(3x^2 + 4) = (x^2 - 4).(2 - 5x)$ é 9.
08. Dados dois números reais *a* e *b*. Se $a^2 = b^2$, isso implica necessariamente que $a = b$

17) (EPCAR)

Se $a \in \Re_+^*$ é raiz da equação na incógnita y, $\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}} = y-1$, então

a) $0 < a < 1$

b) $1 < a < \frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{2} < a < 2$

d) $2 < a < \frac{5}{2}$

Exercícios estilo ENEM

18) (COL NAVAL)

Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

a) $\{x \in \Re \mid -1 \le x \le 1\}$

b) $\{x \in \Re \mid 1 \le x \le 3\}$

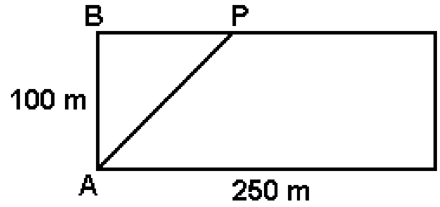
c) $\{x \in \Re \mid 3 \le x \le 5\}$

d) $\{x \in \Re \mid 5 \le x \le 7\}$

e) $\{x \in \Re \mid 7 \le x \le 9\}$

19) (UFG – GO)

Uma pista retangular para caminhada mede 100 por 250 metros. Deseja-se marcar um ponto P, conforme figura a seguir, de modo que o comprimento do percurso ABPA seja a metade do comprimento total da pista. Calcule a distância entre os pontos B e P.



20) (IFPE – PE)

Sérgio está fazendo um regime alimentar. Numa conversa com seu amigo Olavo, este lhe perguntou: “Com quantos quilogramas você está agora?”. Como os dois são professores de matemática, Sérgio lhe respondeu com o desafio: “A minha massa atual é um número que, diminuído de sete vezes a sua raiz quadrada dá como resultado o número 44”. Assinale a alternativa que apresenta a massa atual do Prof. Sérgio, em quilogramas.

a) 100
b) 110
c) 115
d) 121
e) 125

Aprofundamento

21) (EPCAR)

A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a}$, em que x é a incógnita e $x \in \Re_+^*$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \subset \Re$

Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I. Possui exatamente dois elementos.
II. Não possui elemento menor que 2.
III. Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.

22) Determine o valor de x que satisfaz as equações:

a) $\sqrt{x-1} + 3 = x$

b) $\sqrt[3]{2x + \sqrt{x+1}} = 2$

23) (ITA – SP)

Resolver a equação $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$

24) (EPCAR)

O conjunto solução da equação $-x + \sqrt{7 + \frac{x}{2}} = -14$ está contido em

a) $\{x \in \Re \mid 10 < x < 18\}$
b) $\{x \in \Re \mid 17 < x < 25\}$
c) $\{x \in \Re \mid 24 < x < 32\}$
d) $\{x \in \Re \mid 31 < x < 39\}$

25) (ESPM)

A solução da equação $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}$ pertence ao intervalo:

a) $[-3, -1[$
b) $[-1, 1[$
c) $[1, 3[$
d) $[3, 5[$
e) $[5, 7[$

GABARITO – AULA 11

1) $\{-4, 4\}$ **2)** $\{-1, 2\}$ **3)** d **4)** 7 **5)** 2
6) a **7)** e **8)** d **9)** b **10)** 03
11) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
12) c **13)** a **14)** 09 **15)** b **16)** 05 **17)** b **18)** b
19) 105 **20)** d **21)** c
22) a) 5 b) 3
23) $V=\left\{3, -\frac{5}{3}\right\}$
24) b **25)** d

AULA 12

RAZÃO E PROPORÇÃO

1. Razão

Em 2013, segundo o IBGE a população de uma cidade no sul do país ultrapassava 180 000 de habitantes. O número de médicos, nesse mesmo período nessa cidade, segundo o Conselho Federal de Medicina, era de mais de 300.
A **razão** entre o número de médicos e o número de habitantes nessa cidade era:

$$\boxed{\frac{\text{número de médicos}}{\text{número de habitantes}}=\frac{300}{180000}}$$

Ou seja:

$$\boxed{\frac{\text{número de médicos}}{\text{número de habitantes}}=\frac{1}{600}}$$

Razão é a comparação obtida pela divisão entre as medidas de duas grandezas. Então, dados dois números *a* e *b* , denomina-se razão ao quociente de *a* por *b* e indica-se por $\frac{a}{b}$.

A razão $\frac{a}{b}$ é usualmente lida assim: "***a*** está para ***b***".

O número ***a*** é chamado antecedente e o número ***b*** é chamado consequente.

2. Proporção

A igualdade entre duas razões é uma **proporção**.

Representação: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

onde: *a, d* = extremos *b, c* = meios

A expressão $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ lê-se assim: ***a*** está para ***b*** assim como ***c*** está para ***d***

Propriedade Fundamental das Proporções

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

Demais Propriedades

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

3. Grandezas diretamente proporcionais (G.D.P)

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando aumentando uma delas implicar o aumento da outra na mesma razão.

Genericamente:

Considere os conjuntos A = {*a, b, c*} e B = {*d, e, f*} duas sucessões numéricas dadas nessa ordem.

- A e B são diretamente proporcionais se: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=k$, onde k é a constante de proporção.

Propriedade: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{a+b+c}{d+e+f}$

Exemplo: Seja um carro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea. A tabela mostra o deslocamento do carro em função do tempo.

Tempo (horas)	Deslocamento (km)
1	60
2	120
3	180

Chamando de **x** o deslocamento e **t** o tempo, observa-se que a razão x/t é constante.

$$\frac{x}{t}=\frac{60}{1}=\frac{120}{2}=\frac{180}{3}=60$$

Assim x e t são grandezas diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade vale 60 (que é a velocidade do carro).

4.Grandezas inversamente proporcionais (G.I.P)

Duas grandezas são ditas inversamente proporcionais quando aumentando uma delas implicar a diminuição da outra na mesma razão.

Genericamente:

Considere os conjuntos A = {*a, b, c*} e B = {*d, e, f*} duas sucessões numéricas dadas nessa ordem.

A e B são inversamente proporcionais se: $a\,.\,d=b\,.\,e=c\,.\,f=k$

Propriedade: $a\,.\,d=b\,.\,e=c\,.\,f=\frac{a}{\frac{1}{d}}=\frac{b}{\frac{1}{e}}=\frac{c}{\frac{1}{f}}$

Exemplo: Seja um carro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea. A tabela mostra a velocidade do carro em função do tempo.

Velocidade (Km/h)	Tempo (horas)
40	6
80	3
120	2

Note que Velocidade x Tempo é constante.

$$V.t=40.6=80.3=120.2=240$$

Assim: Velocidade e Tempo são grandezas inversamente proporcionais com constante de proporcionalidade igual a 240 que é a distância percorrida.

Em Sala

01) Assinale V para as afirmações verdadeiras ou F para as afirmações falsas.

a) ( ) Sabendo-se que x + y + z = 18 e que $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, o valor de x é 4.

b) ( ) (UFSC – SC) Obter 7 acertos numa prova de 12 questões é um desempenho inferior a obter 6 acertos numa prova de 10 questões, porém superior a obter 5 acertos numa prova de 9 questões.

c) ( ) Se x + y = 50 e x e y são diretamente proporcionais a 2 e 3, então o valor de 2x + 3y é 110.

d) ( ) Três amigos formaram uma sociedade. O primeiro entrou com 60.000 reais, o segundo, com 75.000 reais e o terceiro, com 45.000. No balanço anual houve um lucro de 30.000 reais. O lucro que coube para o sócio de maior participação foi de 12.500 reais.

e) **(**) Na partida final de um campeonato de basquete, a equipe campeã venceu o jogo com uma diferença de 8 pontos. O número de pontos que assinalou a equipe vencedora, sabendo que os pontos assinalados pelas duas equipes estão na razão de 23 para 21 é 92.

f) ( ) Uma empresa distribuiu um lucro de R$ 30.000,00 a seus três sócios. A porção do lucro recebido pelo sócio de maior participação na empresa, se a participação nos lucros for diretamente proporcional aos números 2, 3 e 5, é R$ 15.000,00

02) (ENEM)

No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficara o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, “o maior olho do mundo voltado para o céu”

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1 : 20
b) 1 : 100
c) 1 : 200
d) 1 : 1 000
e) 1 : 2 000

03) (UDESC – SC)

Atualmente grande parte dos monitores de TV e de computador são feitos no formato *widescreen*, onde a medida da largura da tela é maior do que sua altura. A proporção de tela mais usual é de 16 : 9. Sabendo que a medida em polegadas de um monitor corresponde à medida da diagonal de sua tela, então um monitor de 20 polegadas na proporção 16 : 9 tem área, em polegadas quadradas, de aproximadamente:

a) 144
b) 171
c) 50
d) 400
e) 154

04) (ENEM)

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que ”o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M“.

HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cálculo e aplicações.*
São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

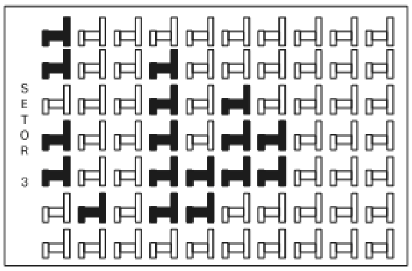
Isso é equivalente a dizer que, para uma constante k > 0, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$
b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$
c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$
d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$
e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{2}$

Testes

05) (ENEM)

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

a) $\frac{17}{70}$
b) $\frac{17}{53}$
c) $\frac{53}{70}$
d) $\frac{53}{17}$
e) $\frac{70}{17}$

06) (ENEM)

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com $14m^3$ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75
b) 2,00
c) 2,33
d) 4,00
e) 8,00

07) (ENEM)

Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

a) 1 : 250.
b) 1 : 2 500.
c) 1 : 25 000.
d) 1 : 250 000.
e) 1 : 25 000 000.

08) (ENEM)

Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

Jogador I	Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
Jogador II	Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
Jogador III	Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
Jogador IV	Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
Jogador V	Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

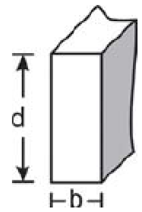
09) (ENEM)

Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

10) (ENEM)

A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura *(b)* e ao quadrado da altura *(d)*, conforme a figura. A constante de proporcionalidade *k* varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se *S* como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

a) $S = k.b.d$
b) $S = b.d^2$
c) $S = k.b.d^2$
d) $S = \frac{k.b}{d^2}$
e) $S = \frac{k.d^2}{b}$

11) (ENEM)

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção. De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

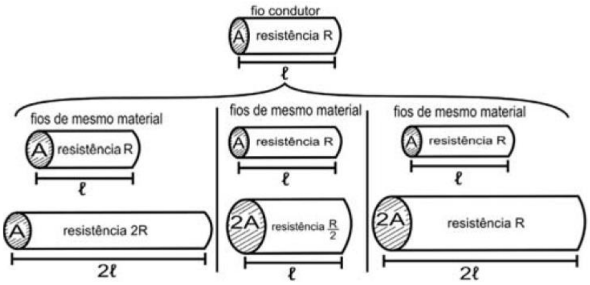
a) 4 mil.
b) 9 mil.
c) 21 mil.
d) 35 mil
e) 39 mil.

12) (ENEM)

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

13) (ENEM)

O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Sé o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

a) 1:700
b) 1:7.000
c) 1:70.000
d) 1:700.000
e) 1:7.000.000

14) (ENEM)

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo. Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de

a) 250
b) 25
c) 2,5
d) 0,25
e) 0,025.

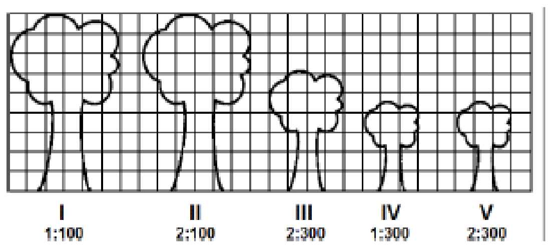
15) (UFPR – PR)

Uma piscina possui duas bombas ligadas a ela. A primeira bomba, funcionando sozinha, esvazia a piscina em 2 horas. A segunda, também funcionando sozinha, esvazia a piscina em 3 horas. Caso as duas bombas sejam ligadas juntas, mantendo o mesmo regime de funcionamento, a piscina será esvaziada em:

a) 1 hora.
b) 1,2 horas.
c) 2,5 horas.
d) 3 horas.
e) 5 horas.

16) (ENEM)

Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

17) (ENEM)

José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4: 4 : 2, respectivamente. Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM)

A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8m de comprimento e 6m de altura.

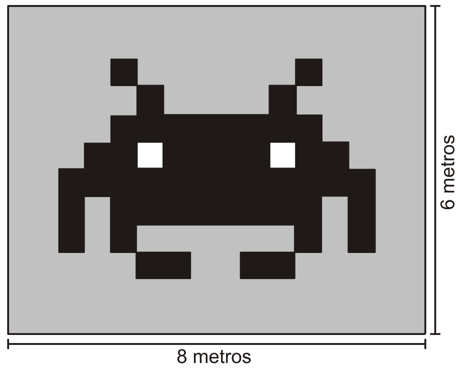


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42cm de comprimento e 30cm de altura, deixando livres 3cm em cada margem, conforme a Figura 2.

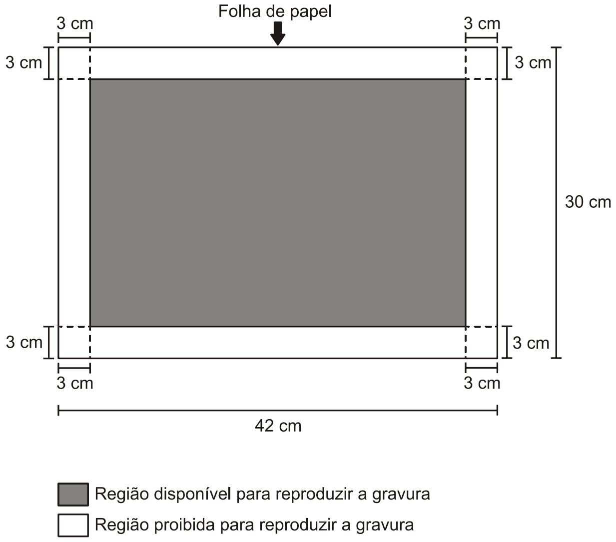


Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é

a) $1:3.$
b) $1:4.$
c) $1:20.$
d) $1:25.$
e) $1:32.$

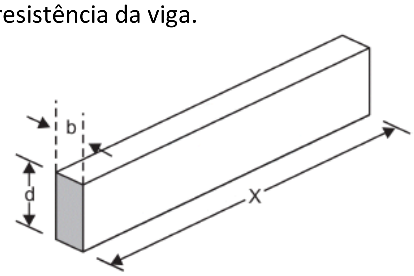
19) (ENEM)

A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas : dentro dele cabem 23 Netunos. Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

a) 406
b) 1334
c) 4002
d) 9338
e) 28 014

20) (ENEM)

A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.



A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é

a) $S = \dfrac{k.b.d^2}{x^2}$

b) $S = \dfrac{k.b.d}{x^2}$

c) $S = \dfrac{k.b.d^2}{x}$

d) $S = \dfrac{k.b^2.d}{x}$

e) $S = \dfrac{k.b.2d}{2x}$

Aprofundamento

21) (ENEM) Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{7}{8}$
c) $\frac{8}{7}$
d) $\frac{8}{9}$
e) $\frac{9}{8}$

22) (ENEM)

Diariamente, uma residência consome 20.160Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6\text{cm} \times 8\text{cm}$. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

23) (ENEM)

Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- \- Recipiente I: $0{,}125$ litro
- \- Recipiente II: $0{,}250$ litro
- \- Recipiente III: $0{,}320$ litro
- \- Recipiente IV: $0{,}500$ litro
- \- Recipiente V: $0{,}800$ litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

24) (ENEM)

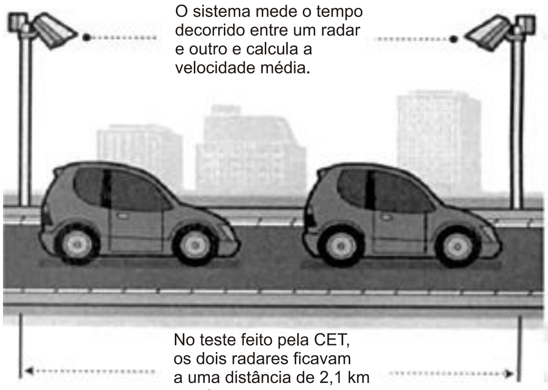
O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala $1:100$, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

a) 6.
b) 600.
c) 6.000.
d) 60.000.
e) 6.000.000.

25) (ENEM)

A Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) de São Paulo testou em 2013 novos radares que permitem o cálculo da velocidade média desenvolvida por um veículo em um trecho da via.



As medições de velocidade deixariam de ocorrer de maneira instantânea, ao se passar pelo radar, e seriam feitas a partir da velocidade média no trecho, considerando o tempo gasto no percurso entre um radar e outro. Sabe-se que a velocidade média é calculada como sendo a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

O teste realizado mostrou que o tempo que permite uma condução segura de deslocamento no percurso entre os dois radares deveria ser de, no mínimo, $1\,\text{minuto e }24\text{ segundos}$. Com isso, a CET precisa instalar uma placa antes do primeiro radar informando a velocidade média máxima permitida nesse trecho da via. O valor a ser exibido na placa deve ser o maior possível, entre os que atendem às condições de condução segura observadas.

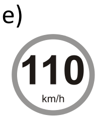
A placa de sinalização que informa a velocidade que atende a essas condições é

a)


b)


c)


d)


e)


GABARITO – AULA 12

1) a) V	b) V	c) F	d) V	e) V	f) V	
2) e	**3)** b	**4)** d	**5)** a	**6)** b	**7)** e	
8) d	**9)** c	**10)** c	**11)** d	**12)** c	**13)** d	**14)** b
15) b	**16)** d	**17)** b	**18)** d	**19)** b	**20)** a	**21)** d
22) a	**23)** c	**24)** e	**25)** c			

AULA 13

REGRA DE TRÊS

1. Regra de Três Simples

Regra de Três Simples é um processo Matemático mediante o qual podemos resolver problemas do cotidiano envolvendo "duas" grandezas, sejam elas direta ou inversamente proporcionais. Dito processo consiste no seguinte:

- Identificar as grandezas envolvidas no problema.
- Nas situações dadas (em relação às mesmas) dispô-las em colunas.
- Verificar se são G.D.P ou G.I.P.
- Montar a proporção correspondente.
- Resolver a proporção.

Observe o esquema abaixo:

Grandeza A	Grandeza B
X	*z*
Y	*t*

- Se A e B forem G.D.P (grandezas diretamente proporcionais, temos: $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{z}{t}}$
- Se A e B forem G.I.P (grandezas inversamente proporcionais, temos: $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{t}{z}}$

2. Regra de Três Composta

Regra de três composta é um processo matemático mediante o qual podemos resolver problemas do cotidiano, envolvendo três ou mais grandezas. O processo é semelhante ao caso anterior (Regra de três simples), levando em consideração apenas o item da verificação quanto a GDP ou GIP, que deve ser feito assim: analisar as grandezas duas a duas, sempre em relação à que possui a variável. A montagem e resolução da proporção segue o mesmo roteiro do caso anterior (Regra de Três Simples).

Observe o esquema abaixo:

Grandeza A	Grandeza B	Grandeza C
x	*z*	*w*
y	*t*	*v*

- Se A é diretamente proporcional a B e diretamente proporcional a C, temos: $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{z}{t} . \frac{w}{v}}$
- Se A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional a C, temos: $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{z}{t} . \frac{v}{w}}$
- Se A é inversamente proporcional a B e inversamente proporcional a C, temos: $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{t}{z} . \frac{v}{w}}$

Anotações

Em Sala

01) Se 12Kg de um certo produto custa R$ 600,00, qual o preço de 25Kg do mesmo produto?

02) Sabendo que 36 operários conseguem construir uma casa em 30 dias, se dispomos apenas de 12 desses operários, em quanto tempo será construída a mesma casa?

03) Numa indústria, 18 operários produzem 360 formas para salgadinhos em 10 dias. Quantos dias serão necessários para se produzir 480 formas de salgadinho, com 30 operários?

04) Uma impressora a laser, funcionando 6 horas por dia, durante 30 dias, produz 150 000 impressões. Em quantos dias 3 dessas mesmas impressoras, funcionando 8 horas por dia, produzirão 100 000 impressões?

Testes

05) Se trinta litros de um combustível custam R$ 16,95, quanto custará oitenta litros do mesmo combustível?

06) Se 14 pedreiros levam 180 dias para construir uma casa, quanto tempo levarão para construí-la 10 pedreiros?

07) Em 6 dias de trabalho, com 16 máquinas fabricam-se 720 uniformes. Em quantos dias, com 12 máquinas, serão fabricados 2160 uniformes?

08) (UNISINOS – RS)
Uma empresa está asfaltando uma rodovia de 50 km Sabendo-se que ela levou 12 dias para asfaltar 20 km quantos dias levará para asfaltar os 30 km restantes?

a) 14.
b) 16.
c) 18.
d) 20.
e) 24.

09) (UFSC – SC)
Um reservatório contendo 120 litros de água apresentava um índice de salinidade de 12%. Devido à evaporação, esse índice subiu para 15%.Determinar, em litros, o volume de água evaporada.

10) (PUC – RS)
Duas rodas dentadas, que estão engrenadas, têm 12 e 60 dentes, respectivamente. Enquanto a maior dá 8 voltas, a menor dará ______.

a) $\frac{1}{5}$ de volta.
b) $\frac{8}{5}$ de volta.
c) 5 voltas.
d) 40 voltas.
e) 96 voltas.

11) (ACAFE – SC)
Quatro pedreiros trabalhando 30 horas por semana pintam uma superfície de área igual 3000m^2. É correto afirmar que a área pintada por 6 pedreiros, trabalhando 40 horas semanais, seria:

a) 4000 m^2
b) 8000 m^2
c) 6000 m^2
d) 9000 m^2

12) (ACAFE –SC)
Suponha que trinta agricultores reflorestam uma área de três hectares em 16 horas de trabalho. Quantos agricultores são necessários, no mínimo, para que uma área de quatro hectares seja reflorestada em 10 horas de trabalho?

a) 50
b) 46
c) 84
d) 64

13) (UFRGS – RS)

Nas Olimpíadas de 2008, o atleta Usain Bolt percorreu 200 m no tempo de 19,30 s. Supondo que esse atleta conseguisse manter a mesma velocidade média, ele percorreria 500 m em

a) 47 s
b) 47,25 s
c) 47,50 s
d) 48 s
e) 48,25 s

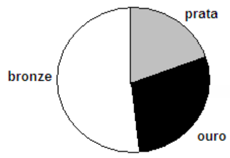
14) (UFRGS – RS)

Uma torneira com vazamento pinga, de maneira constante, 25 gotas de água por minuto. Se cada gota contém 0,2mL de água, então, em 24 horas o vazamento será de:

a) 0,072 L
b) 0,72 L
c) 1,44 L
d) 7,2 L
e) 14,4 L

15) (UFRGS – RS)

O gráfico abaixo apresenta a distribuição em ouro, prata e bronze das 90 medalhas obtidas pelo Brasil em olimpíadas mundiais desde as Olimpíadas de Atenas de 1896 até as de 2004.



Considerando-se que o ângulo central do setor circular que representa o número de medalhas de prata mede 96°, o número de medalhas desse tipo recebidas pelo Brasil em olimpíadas mundiais, nesse período de tempo, é:

a) 22
b) 24
c) 26
d) 28
e) 30

16) Responda:

a) Se quatro costureiras fazem 32 calças em cinco horas diárias de costura, quantas calças serão feitas por nove costureiras iguais às primeiras, trabalhando o mesmo número de horas diárias?

b) Quatro operários produzem, em 10 dias, 320 peças de certo produto. Quantas peças desse mesmo produto serão produzidos por 10 operários em 16 dias?

c) Um motociclista percorre 200 km em 2 dias, se rodar durante 4 horas por dia. Em quantos dias esse motociclista percorrerá 500km, se rodar 5 horas por dia?

17) (UEPG – PR)

Sabendo-se que uma máquina impressora faz certo serviço em 4 horas, trabalhando numa velocidade de 300 páginas por hora, assinale o que for correto.

01. Com velocidade de 375 páginas por hora o mesmo serviço será feito em 3 horas e 20 minutos.
02. Para que o mesmo serviço seja feito em 2 horas e 30 minutos a máquina deve imprimir 480 páginas por hora.
04. Se a velocidade da máquina for de 250 páginas por hora o mesmo serviço será feito em menos de 3 horas.
08. Se a velocidade da máquina dobrar o mesmo serviço será feito em 2 horas.

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM)
Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável. Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

a) 10^{-2}
b) 10^3
c) 10^4
d) 10^6
e) 10^9

19) (ENEM)
Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

a) 12 kg.
b) 16 kg.
c) 24 kg.
d) 36 kg.
e) 75 kg.

20) Uma pizzaria oferece aos seus clientes pizzas “grandes”de forma circular, por R$ 15,00. Para atender alguns pedidos, a pizzaria passará a oferecer a seus clientes pizzas “médias”, também na forma circular. Qual deverá ser o preço da pizza média, se os preços das pizzas “grande” e “média” são proporcionais às suas áreas?

Dados: raio da pizza “grande”: 35cm
raio da pizza “média”: 28cm

Aprofundamento

21) (FEP – PA)
Para asfaltar 1 km de estrada, 30 homens gastaram 12 dias trabalhando 8 horas por dia. Vinte homens, para asfaltar 2 km da mesma estrada, trabalhando 12 horas por dia gastarão:

a) 6 dias
b) 12 dias
c) 24 dias
d) 28 dias
e) n.d.a

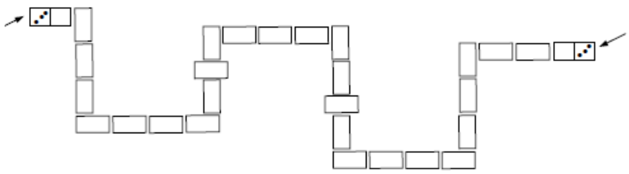
22) Um certo trabalho pode ser realizado por um grupo de 12 operários em 20 dias de trabalho de 8 horas diárias. Se esse mesmo trabalho tivesse que ser realizado em apenas 16 dias, com 16 operários igualmente eficientes, quantas horas por dia eles deveriam trabalhar?

23) (ENEM)
Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).
Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?
a) 24 litros
b) 36 litros
c) 40 litros
d) 42 litros
e) 50 litros

24) (UFSC – SC)

Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. As telas dos televisores costumam ser medidas em polegadas. Quando se diz que um televisor tem 29 polegadas, isto significa que a diagonal da tela mede 29 polegadas, isto é, aproximadamente *73,66 cm*. Então, um televisor cuja diagonal da tela meça *30,48 cm* terá 12 polegadas.
02. Se, inicialmente, um relógio marcava exatamente *15h*, então, após o ponteiro menor (das horas) percorrer um ângulo de *142º*, o relógio estará marcando *19h44min*.
04. Se um bolo de chocolate, em forma de cilindro, tem por base um círculo de *20 cm* de diâmetro, mede *8 cm* de altura e custa *R$ 15,00*, então um outro bolo feito da mesma massa e tendo a mesma forma cilíndrica, só que medindo *40 cm* de diâmetro e *16 cm* de altura, custará *R$ 30,00*.
08. A figura a seguir representa uma trilha com as 28 peças do jogo de dominó. No jogo de dominó uma trilha é uma linha formada por peças que se “casam”: nas ligações, as duas partes sempre devem ter o mesmo número de pontos. Se a trilha representada na figura começa com o número três, então ela também termina com o número três.



25) (UFSC – SC)

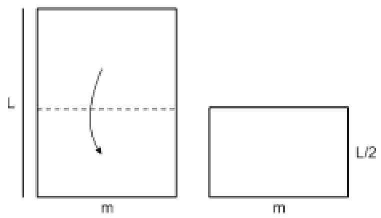
Você sabe por que as folhas que utilizamos para impressão são chamadas A4? Esta denominação está formalizada na norma ISO 216 da *International Organization for Standartization*. Pela norma, a série de formatos básicos de papel começa no A0, o maior, e decresce até o A10. Os formatos são construídos de maneira a obter o formato de número superior dobrando ao meio uma folha, na sua maior dimensão. Por exemplo, dobrando-se o A3 ao meio, obtém-se o A4. Em todos os formatos, a proporção entre as medidas dos lados se mantém. Sabe-se que o formato inicial A0 tem $1m^2$ de área.

Com estas informações, responda às perguntas a seguir, apresentando os cálculos.

a) Qual é a razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor, em qualquer formato de folha? Expresse o resultado usando radicais.
b) Quais são as dimensões do formato A0? Efetue as operações e expresse o resultado usando radicais.
c) A gramatura do papel exprime o peso, em gramas, de uma folha com $1m^2$. Sabendo que a gramatura do A0 é 75 gramas por metro quadrado, qual é o peso exato, em gramas, de uma resma (500 folhas) de papel A4?

GABARITO – AULA 13

1) R$ 1250,00 **2)** 90 **3)** 8 dias **4)** 5
5) R$ 45,20 **6)** 252 **7)** 24
8) c **9)** 24 **10)** d **11)** c **12)** d **13)** e
14) d **15)** b
16) a) 72 b) 1280 c) 4
17) 10 **18)** e **19)** a **20)** R$ 9,60
21) c **22)** 7,5 horas por dia
23) b **24)** 11
25)



a) $\frac{L}{m} = \frac{m}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \frac{L^2}{2} = m^2 \Rightarrow \frac{L}{m} = \sqrt{2}.$

b) $L.m = 1m^2 \Rightarrow m.\sqrt{2}.m = 1 \Rightarrow m^2.\sqrt{2} = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ e $L = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.$

c) Cada folha A0 é formada por 16 folhas A4, cada folha A4 pesa 75/16g, logo o peso da resma será dado por 500.75/16g = 2343,75 g.

AULA 14

PORCENTAGEM I

As razões cujos denominadores são iguais a 100 são chamadas razões centesimais.

Exemplo: $\frac{13}{100};\frac{27}{100};$ etc.

1.Noção Intuitiva

"O índice de analfabetismo da cidade x é de 23% (lê-se 23 por cento)". Significa que, em média, 23 de cada 100 habitantes são analfabetos.

2.Cálculo de uma porcentagem

Exemplo: 25% de R$ 80,00 é R$ 20,00"

pois $25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$

Logo 25% de R$ 80,00 = 0,25.80,00 = 20,00

Outros Exemplos:

a) $54\% = \frac{54}{100} = 0{,}54$

b) $542\% = \frac{542}{100} = 5{,}42$

c) $(40\%)^2 = \left(\frac{40}{100}\right)^2 = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$

d) $\sqrt{36\%} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$

3. Nomenclatura Usual

Em 25% de R$ 80,00 é R$ 20,00"

Temos:

$$\begin{cases} \text{o todo ou principal é} & P = 80 \\ \text{a taxa é} & i = 25(\%) \\ \text{a porcentagem é} & p = 20 \end{cases}$$

4. Definição

Porcentagem é uma razão centesimal que é representada pelo símbolo % que significa "por cento".

$$\boxed{x\% = \frac{x}{100}}$$

5. Acréscimos e decréscimos

- Sendo M (M > 0) o valor inicial de uma quantia, após um aumento de x% o valor final será $\left(1+\frac{x}{100}\right).M$
- Sendo M (M > 0) o valor inicial de uma quantia, após uma redução de x% o valor final será $\left(1-\frac{x}{100}\right).M$

Exemplos:

a) Aumentar 20% de um valor x equivale a multiplicá-lo por 1,2. Veja a explicação:

valor inicial		o quanto aumentou		final
x	+	20%x		
x	+	0,2x	=	1,2x

b) Diminuir 20% de um valor x equivale a multiplicá-lo por 0,8. Veja a explicação:

valor inicial		o quanto diminuiu		final
x	–	20%x		
x	–	0,2x	=	0,8x

c) Dois aumentos sucessivos um de 10% e outro de 20% equivalem a um único aumento de 32% (e não de 30%). Veja a explicação:

Indicando genericamente o valor de um produto por x, temos:

<u>Primeiro aumento:</u>
x + 10%x
x + 0,1x
1,1x $\rightarrow$ valor após o primeiro aumento
<u>Segundo aumento:</u>
1,1x + 20%(1,1x)
1,1x + 0,2(1,1x)
1,1x + 0,22x
1,32x $\rightarrow$ valor após o segundo aumento
valor final – valor inicial = 1,32x – x = 0,32x, o que representa 32% de aumento.

Observação: Podemos afirmar, com base no item a, que aumentar 10% em relação a algo é multiplicar o valor em questão por 1,1 e um aumento de 20% é multiplicar por 1,2. Veja que 1,1 . 1,2 = 1,32.

Em Sala

01) (FUVEST – SP)
$(10\%)^2$ é igual a:

a) 1%
b) 10%
c) 20%
d) 100%
e) n.d.a.

02) Nos três últimos meses, o preço da gasolina sofreu exatamente dois aumentos: o primeiro de 20% e o segundo de 30%. Se antes desses aumentos o preço por litro era x, calcule o preço atual.

03) Quando chegou o inverno, um comerciante aumentou em 10% o preço de cada jaqueta de couro do seu estoque. Terminada a estação, fez uma promoção com 20% de desconto, passando o preço da jaqueta para R$ 176,00. O preço inicial de cada jaqueta, antes do aumento, era:

04) João comprou um terreno por *R$120 000,00* e vendeu uma ano depois por *R$ 144 000,00*. Neste caso, o lucro (em %) obtido na venda do terreno foi de:

Testes

05) Os números 12%, $(40\%)^2$ e $\sqrt{49\%}$ são, respectivamente:

a) 0,12; 1600 e 0,7
b) 0,12; 0,16 e 7
c) 0,12; 0,16 e 0,7
d) 0,12; 1,6 e 70
e) 0,12; 160 e 7

06) Aumento sucessivo de 2*0%* e 40% no preço de um determinado produto é equivalente a um único aumento de:

a) 30%
b) 60%
c) 68%
d) 48%
e) 56%

07) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R$ 2160,00. Qual era o salário deste funcionário?

08) Calcular as seguintes porcentagens:

a) 25% de 80

b) 4% de 50

c) 120% de 200

d) 0,15% de 400

e) 20% de 30%

f) $(5\%)^2$

g) $\sqrt{49\%}$

09) Assinale V para as afirmações verdadeiras ou F para as afirmações falsas.

a) (   ) Numa sala de 80 alunos, 24 alunos foram aprovados. A porcentagem de reprovação foi de 70%

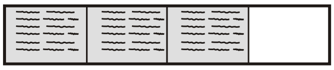
b) (   ) Ao vestibular de uma universidade, inscreveram-se 15.325 candidatos, dos quais 14.099 concluíram todas as provas. O percentual de abstenção foi de 8%

c) (   ) Aumento sucessivo de *10%* e 20% no preço de um determinado produto é equivalente a um único aumento de *30%*.

d) (   ) A base de um retângulo foi aumentada de 25% e sua altura foi diminuída de x%. O valor de x, sabendo que a área do retângulo não se alterou é 25.

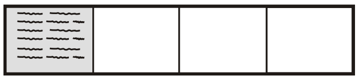
e) (   ) Se um entre 400 habitantes de uma cidade é engenheiro, então a porcentagem de engenheiros nessa cidade é dada por 0,25%.

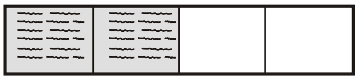
10) (ENEM)
Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

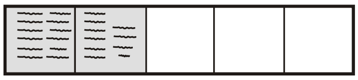


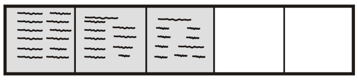
Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa, vez, utilizando 40% do espaço dela.

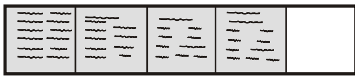
Uma representação possível para essa segunda situação é

a)


b)


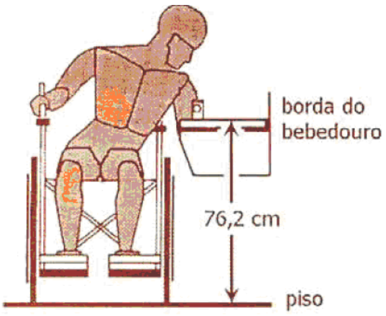
c)


d)


e)


11) (UFRGS – RS)

Alguns especialistas recomendam que para um acesso confortável aos bebedouros por parte de crianças e usuários de cadeiras de rodas, a borda desses equipamentos esteja a uma altura de 76,2cm do piso, como indicado na figura abaixo.



Um bebedouro que tenha sido instalado a uma altura de 91,4cm do piso à borda excedeu a altura recomendada. Dentre os percentuais abaixo, o que mais se aproxima do excesso em relação à altura recomendada é:

a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

12) (UFSC – SC)

Na segunda-feira, um comerciante decide vender um produto com um desconto de 10%. Na sexta-feira, como não obteve muito sucesso, decide acrescentar um novo desconto de 20% sobre o valor obtido após o primeiro desconto. Calcule o desconto total no preço original do produto.

13) (PUC – RS)

Das dezenove Copas do Mundo realizadas, os países sul-americanos venceram 9. O Brasil ganhou cinco, o que representa uma porcentagem de, aproximadamente, _____ em relação ao total de Copas já disputadas.

a) 5%
b) 18%
c) 26%
d) 50%
e) 55%

14) (UFPR – PR)

O motivo de uma pessoa ser destra ou canhota é um dos mistérios da ciência. Acredita-se que 11% dos homens e 9% das mulheres são canhotos. Supondo que 48% da população brasileira é constituída de homens, e que essa crença seja verdadeira, que percentual da população brasileira é constituído de canhotos?

a) 9,60 %.
b) 9,96 %.
c) 10,00 %.
d) 10,40 %.
e) 10,56 %.

15) (UFPR – PR)

Numa pesquisa com 500 pessoas, 50% dos homens entrevistados responderam “sim” a uma determinada pergunta, enquanto 60% das mulheres responderam “sim” à mesma pergunta. Sabendo que, na entrevista, houve 280 respostas “sim” a essa pergunta, quantas mulheres a mais que homens foram entrevistadas?

a) 40.
b) 70.
c) 100.
d) 120.
e) 160.

16) (UDESC – SC)

Um motorista costuma percorrer um trajeto rodoviário com 600 quilômetros, dirigindo sempre a uma velocidade média de 100 *km/h*, estando ele de acordo com a sinalização de trânsito ao longo de toda a rodovia. Ao saber que trafegar nesta velocidade pode causar maior desgaste ao veículo e não gerar o melhor desempenho de combustível, este motorista passou a reduzir em 20% a velocidade média do veículo. Consequentemente, o tempo gasto para percorrer o mesmo trajeto aumentou em:

a) 40%
b) 20%
c) 4%
d) 25%
e) 1,5%

17) (ACAFE – SC)

Sobre porcentagens, considere as seguintes afirmações:

I. A razão entre o número de meninos e meninas de uma sala de aula é de 5/3. O percentual de meninas na classe é de 37,5%.

II. Uma pessoa gastou 40% do que tinha e ainda ficou com R$ 570,00. Então, essa pessoa gastou R$ 380,00.

III. Numa fábrica de tintas, certa quantidade de água deve ser misturada com 840 litros de tinta corante, de modo que a mistura tenha 25% de água. Portanto, essa mistura tem 280 litros de água.

IV. Um colégio particular informa aos pais que a mensalidade paga até a data do vencimento tem um desconto de 8%, e a mensalidade paga com atraso tem um acréscimo de 8%. Se um pai paga a primeira mensalidade no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, um acréscimo de 16%.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) II - III - IV
b) II - III
c) I - IV
d) I - II - III

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM)

Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de $12\,t$. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

a) $1{,}8t;\ 8{,}4t;\ 1{,}8t.$
b) $3{,}0t;\ 6{,}0t;\ 3{,}0t.$
c) $2{,}4t;\ 7{,}2t;\ 2{,}4t.$
d) $3{,}6t;\ 4{,}8t;\ 3{,}6t.$
e) $4{,}2t;\ 3{,}6t;\ 4{,}2t.$

19) (ENEM)

O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de

a) $32{,}8\%$
b) $28{,}6\%$
c) $10{,}7\%$
d) $9{,}4\%$
e) $8{,}0\%$

20) (ENEM)

Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,

a) 22,5%.
b) 50,0%.
c) 52,3%.
d) 65,5%.
e) 77,5%.

Aprofundamento

21) (UFRGS – RS)

Na compra de três unidades idênticas de uma mesma mercadoria, o vendedor oferece um desconto de 10% no preço da segunda unidade e um desconto de 20% no preço da terceira unidade. A primeira unidade não tem desconto. Comprando três unidades dessa mercadoria, o desconto total é

a) 8%.
b) 10%.
c) 22%.
d) 30%.
e) 32%.

22) (ACAFE – SC)

Um lojista costuma vender suas mercadorias com uma margem de lucro de 150% sobre as mercadorias, ou seja, o preço de venda é o de custo acrescido de 150%. Se em uma promoção da loja ele deseja vender tudo com uma margem de lucro de 25%, qual o desconto que ele deverá dar sobre o preço de venda para atender sua pretensão?

a) 50%
b) 125%
c) 40%
d) 60%

23) (ACAFE – SC)

O preço de uma marmita fornecida por um restaurante teve três aumentos durante o último ano: o primeiro de 12,5%, o segundo de 10% e o último também de 10%. Sabendo que após estes aumentos essa mercadoria passou a ser vendida por R$ 10,89, é correto afirmar que o aumento do valor dessa marmita, no último ano, foi de:

a) R$ 2,89.
b) R$ 8,00.
c) R$ 3,53
d) R$ 2,67.

24) (FUVEST – SP)

Numa certa população, 18% das pessoas são gordas. 30% os homens são gordos, e 10% das mulheres, são gordas. Então, a porcentagem de homens que há nessa população, vale:

a) 54%
b) 40%
c) 45%
d) 55%
e) 60%

25) (ENEM)

Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	**Tipo A**	**Tipo B**
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

a) A, A, A, A.
b) A, B, A, B.
c) A, B, B, A.
d) B, A, A, B.
e) B, B, B, B.

GABARITO – AULA 14

1) a **2)** 1,56x **3)** R$ 200,00 **4)** 20% **5)** c **6)** c
7) R$2000,00
8) a) 20 b) 2 c) 240 d)0,6 e) 0,06 f) 0,0025 g) 70%
9) a) V b) V c) F d) F e) V
10) c **11)** d **12)** 28 **13)** c **14)** b
15) c **16)** d **17)** d **18)** c **19)** d **20)** c
21) b **22)** a **23)** a **24)** b **25)** d

AULA 15

PORCENTAGEM II

01) (UDESC – SC)

A grande final da última Copa do Mundo de Futebol, protagonizada pelas seleções da Alemanha e da Argentina, foi realizada no dia 13 de julho de 2014, no Estádio Maracanã e contou com um público total de 74.738 pessoas de diferentes países. Estimativas oficiais sobre a distribuição das nacionalidades deste público indicam que 18,9% dos presentes eram alemães; 20,7% eram argentinos e os demais eram de outras nacionalidades (dentre elas a brasileira). Suponha que todos os conterrâneos dos países finalistas realmente torceram pela seleção de seu país. Suponha também que exatamente 25% do público das outras nacionalidades optou por apenas assistir ao jogo (sem torcer por nenhuma seleção finalista) e que $\frac{3}{5}$ do restante deste público optou por torcer pela Alemanha. De acordo com as informações acima, analise as proposições.

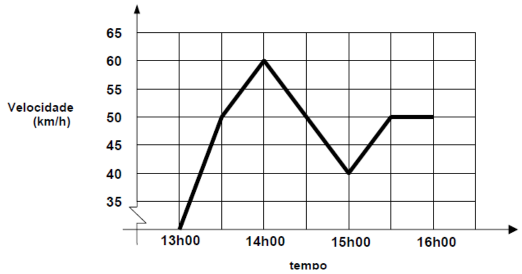
I. 41,7% do público presente na final da Copa torceu pela seleção da Alemanha.
II. 38,82% do público presente na final da Copa torceu pela seleção da Argentina.
III. Dentre os presentes na final da Copa, o número de torcedores da seleção alemã é superior em 7,26% ao número de torcedores da seleção da Argentina.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa I é verdadeira
d) Somente a afirmativa II é verdadeira.
e) Somente a afirmativa III é verdadeira.

02) (UFPR – PR)

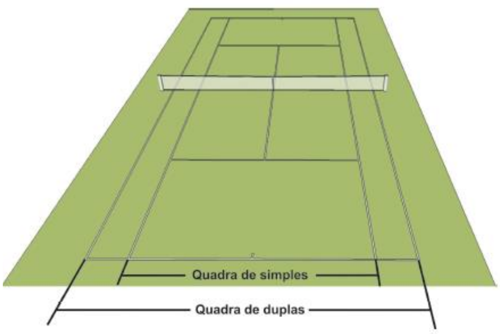
O gráfico ao lado representa a velocidade de um veículo durante um passeio de três horas, iniciado às 13h00. De acordo com o gráfico, o percentual de tempo nesse passeio em que o veículo esteve a uma velocidade igual ou superior a 50 quilômetros por hora foi de:



a) 20%.
b) 25%.
c) 30%.
d) 45%.
e) 50%.

02) (UEL – PR)

As quadras de tênis para jogos de simples e de duplas são retangulares e de mesmo comprimento, mas a largura da quadra de duplas é 34% maior do que a largura da quadra de simples.



Considerando que a área da quadra de duplas é 66,64 m^2 maior, a área da quadra de simples é:

a) 89,00 m^2
b) 106,64 m^2
c) 168,00 m^2
d) 196,00 m^2
e) 226,58 m^2

04) (UDESC – SC)

Em 2014, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) comemorou 10 anos. A Tabela 1 mostra o desempenho dos alunos catarinenses na OBMEP nas 9 primeiras edições.

Tabela 1: Quadro de premiação de Santa Catarina na OBMEP

ANO	OURO	PRATA	BRONZE	MENÇÃO HONROSA	TOTAL
2005	5	15	15	1040	1075
2006	6	15	15	1526	1562
2007	3	16	78	1213	1310
2008	4	24	54	1296	1378
2009	8	27	54	1488	1577
2010	9	25	64	1567	1665
2011	11	15	49	1279	1354
2012	19	32	124	1707	1882
2013	26	29	190	1778	2023

Fonte: adaptado de http://www.obmep.org.br/obmep_em_numeros.html, acesso em 30/05/2014

( ) O crescimento percentual do número total de premiados catarinenses foi maior de 2005 para 2006 do que de 2011 para 2012.

( ) Sabe-se que 7 medalhistas de ouro de 2013 são do município de Joinville, logo 24,13% dos medalhistas de ouro de 2013 de Santa Catarina são de Joinville.

( ) A proporção de medalhistas de bronze de 2013 por 2005 é de $\frac{38}{5}$

( ) A média de medalhistas de prata de Santa Catarina é de 22 alunos nessas 9 primeiras edições.

Assinale a alternativa que contém a sequência **correta**, de cima para baixo.

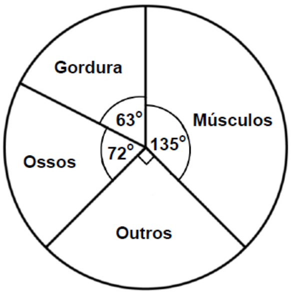
a) V – F – F – V
b) F – V – V – V
c) F – F – V – F
d) V – V – F – V
e) F – V – F – V

05) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. Com uma lata de tinta é possível pintar $50m^2$ de parede. Para pintar uma parede de $72m^2$, gasta-se uma lata e mais uma parte de uma segunda lata. A parte que se gasta da segunda lata, é 44.
02. Pedro investiu R$ 1.500,00 em ações. Após algum tempo, vendeu essas ações por R$ 2.100,00. O aumento obtido em seu capital inicial é de 40%.
04. Um recipiente está com 40 litros de uma mistura de 10% de "A", e 90% de "B". Se acrescentarmos 20 litros de "A", a porcentagem de "A" na nova mistura é de 40%
08. Numa mistura de 80kg de areia e cimento, 20% é cimento. Se acrescentarmos mais 20kg de cimento, a sua porcentagem na nova mistura será de 36%
16. O preço de uma certa mercadoria, comprada com cartão de crédito, é calculado dividindo o preço à vista por R$ 0,80. Logo, pode-se afirmar que o valor da mercadoria comprada com cartão de crédito, em relação ao preço à vista, apresenta um acréscimo de 25%.
32. Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de 26%

06) (UFPR – PR)

O gráfico de setores ao lado ilustra como a massa de um homem de 80 kg está distribuída entre músculos, gordura, ossos e outros. O ângulo de cada setor está mostrado em graus. Com base nesse gráfico, responda às perguntas:



a) Quantos quilogramas de músculos esse homem possui?

b) Juntos, gordura e ossos representam que percentual da massa desse homem?

07) (UEL – PR)

Analise a tabela a seguir:

Números totais de transferências de jogadores brasileiros de futebol por região de destino – 2007-2009

Região de Destino	2007	2008	2009*	Total
África	16	14	19	**49**
América Central	27	35	14	**76**
América do Norte	23	34	29	**86**
América do Sul	72	105	62	**239**
Ásia	213	152	127	**492**
Europa Oriental	135	149	60	**344**
Europa Ocidental	500	565	185	**1250**
Oceania	10	10	8	**28**
Oriente Médio	89	112	27	**228**
Total	**1085**	**1176**	**531**	**2792**

*Dados referentes ao primeiro semestre do ano.

Com base na tabela, é correto afirmar que, de 2007 para 2008, o aumento no número de transferências de jogadores brasileiros foi de, aproximadamente:

a) 2% para a Europa Ocidental.
b) 5% para a Europa Oriental.
c) 10% para a América Central.
d) 14% para o Oriente Médio.
e) 46 % para a América do Sul.

08) (UFRGS – RS)

O Estádio Nacional de Pequim, construído para a realização dos Jogos Olímpicos de 2008, teve um custo de 500 milhões de dólares, o que representa 1,25% do investimento total feito pelo país anfitrião para as Olimpíadas de 2008. Portanto, o investimento total da China foi, em dólares, de

a) 4.10^6
b) 4.10^7
c) 4.10^8
d) 4.10^9
e) 4.10^{10}

09) (ACAFE – SC)

Confaz reajusta preços – "A partir do dia 16 de abril o consumidor vai pagar mais caro pelo combustível. O Conselho Nacional de Política Fazendária, o Confaz, reajustou a planilha de preços. (...) O valor previsto para a gasolina é de R$ 2,86. Já para o álcool é de R$ 1,98; o diesel R$ 2,23. A maior alteração no valor foi no querosene para avião (QVA) que passa de R$ 2,03 para R$ 2,42 o litro."
Em relação ao enunciado, analise as afirmações a seguir.

I. Os R$ 0,39 a mais cobrados pelo litro do QVA representam um aumento superior a 20% em relação ao preço anterior desse combustível.
II. $1m^3$ de diesel custará R$ 250,00 a mais que $1m^3$ de álcool.
III. 20 litros de gasolina custarão 13% a mais que 20 litros de álcool.

Assinale a alternativa correta.

a) I e II estão corretas
b) I e III estão corretas.
c) Apenas a II está correta.
d) Apenas a III está correta.

10) (UEL – PR)

Em uma turma de alunos, constatou-se que 30% dos homens e 10% das mulheres estudaram em colégios particulares. Constatou-se também que 18% dos alunos dessa turma estudaram em colégios particulares. Qual a percentagem de homens dessa turma?

a) 12%
b) 20%
c) 35%
d) 40%
e) 64%

11) (UFRGS – RS)

A renda *per capita* de um país é a razão entre seu PIB (Produto Interno Bruto) e sua população. A população chinesa, em 2009, representava 19,7% da população mundial. Nesse ano, o PIB chinês foi de 4,9 trilhões de dólares e a renda *per capita* chinesa foi de 3.620 dólares. Com base nesses dados, é correto afirmar que, dentre os números abaixo, o mais próximo da população mundial, em 2009, é

a) $5,6. 10^9$
b) $6,8. 10^9$
c) $7,2. 10^9$
d) $5,6. 10^{12}$
e) $6,8. 10^{12}$

12) (UDESC – SC)
Seu Antônio, um sujeito organizado e atento a promoções, decidiu pesquisar os preços de passagens aéreas, após ler a seguinte manchete: "As medidas tomadas para aumentar a concorrência no setor aéreo já tiveram efeito.

Os preços das passagens nacionais e internacionais baixaram. Esses preços podem ficar ainda menores se o consumidor se organizar."
(*O Globo*, 12/05/2009)

Seu Antônio descobriu que certa empresa aérea estava operando o trajeto Florianópolis –São Paulo com um desconto de 40% durante o mês de novembro, e que esta empresa oferecia ainda um desconto adicional de 10%, às segundas-feiras. Ele então decidiu viajar em uma segunda-feira de novembro para economizar R$ 138,00, aproveitando esta promoção. O valor desta passagem, em reais, cobrado por esta empresa antes da promoção, era igual a:

a) 255,55
b) 215,62
c) 276,00
d) 313,63
e) 300,00

13) (ENEM)
Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%. Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16%.
b) 24%.
c) 32%.
d) 48%.
e) 64%

14) (UDESC – SC)
No dia 14 de junho de 2012 o jornal *A NOTÍCIA* (ano 89, edição 25.986, pp. 4 e 5) noticiou que pescadores de São Francisco do Sul pescaram 5 toneladas de tainhas na praia do Forte. Os pescadores relembraram que a última grande pescaria, nesta praia, foi no ano de 2004, mas naquela vez foram "apenas" 2 mil peixes. Sabe-se que nesta pesca foram pescados 3.270 peixes, que cada quilograma foi negociado a R$ 5,00, e que o dono do barco fica com um terço do valor bruto das vendas. Supondo que as tainhas pescadas em 2004 tivessem o mesmo peso médio e o mesmo preço de venda, que em 2012, então é **correto** afirmar que:

a) o valor arrecadado na pesca de 2012 foi 40% maior que o de 2004.
b) o dono do barco recebeu R$ 8.000,00 em 2012.
c) em 2004 foram pescados 1270 quilogramas a menos que em 2012.
d) o número de tainhas pescadas em 2004 foi aproximadamente 39% menor que em 2012.
e) em 2012 os pescadores arrecadaram em torno de R$ 8.000,00 a mais que em 2004.

15) No período de 2003 a 2007, o real valorizou 60% em relação ao dólar. Podemos dizer que, nesse período, a desvalorização do dólar em relação ao real foi de:

a) 60%
b) 52,5%
c) 48%
d) 37,5%
e) 32,5%

16) (ENEM)

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.
Um cliente deseja comprar um produto que custava R$50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

a) 15,00.
b) 14,00.
c) 10,00.
d) 5,00.
e) 4,00.

17) (ENEM)

Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.
Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

a) 72%
b) 68%
c) 64%
d) 54%
e) 18%

18) (ENEM)

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

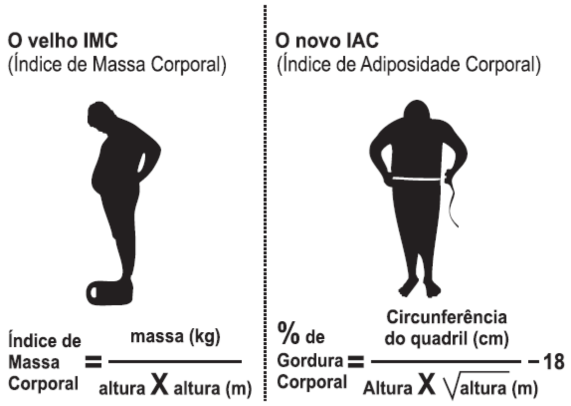
Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.
Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

a) hipoglicemia.
b) normal.
c) pré-diabetes.
d) diabetes melito.
e) hiperglicemia.

19) (ENEM)

O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%.



Uma jovem com IMC = 20 kg/m², 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC. Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é

(Use $\sqrt{3}$ = 1,7 e $\sqrt{1.7}$ = 1,3)

a) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.
b) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.
c) manter seus níveis atuais de gordura.
d) aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.
e) aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%

20) (ENEM)

A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição, reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	**Taxa de fecundidade no Brasil**
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

a) 1,14.
b) 1,42.
c) 1,52.
d) 1,70.
e) 1,80.

GABARITO – AULA 15

1) a **2)** e **3)** d **4)** a **5)** 63
6) a) 30 kg b) 37,5%
7) e **8)** e **9)** c **10)** d **11)** b **12)** e
13) b **14)** d **15)** d **16)** e **17)** b **18)** d
19) a **20)** c

AULA 16

JUROS

Se Pedro empresta a José a importância de R$ 1000,00 pelo prazo de 3 anos, é normal que, ao final desses 3 anos, José devolva a Pedro a importância de R$1000,00 acrescentada de uma compensação financeira. Essa compensação financeira é o que chamamos de juro.

Na situação descrita R$ 1000,00 vamos chamar de capital.

Juro é a remuneração, a qualquer título, atribuída ao capital (C) empregado num determinado tempo (t).

Para se determinar o valor do juro **J** é aplicado uma taxa percentual referida a um intervalo de tempo denominada taxa de juro (**i**).

Quando soma-se o valor do capital empregado com o juro obtido tem-se uma nova quantia denominada montante.

Então: $\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{C} + \mathrm{J}}$

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

Regime de capitalização é um processo de formação do juro. Há dois tipos: Juro Simples e o Juro Composto

1. Juros Simples

Nesse caso a taxa é aplicada apenas sobre o capital inicial, ou seja, o juro formado no fim de cada período a que se refere a taxa não é incorporado ao capital para, também, render juro no período seguinte; dizemos, neste caso, que os juros não são capitalizados. A aplicação dos juros simples é muito limitada e tem apenas algum sentido em um contexto não inflacionário e num curtíssimo prazo.

Fórmula do Juros Simples:

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{C.i.t}}$$

onde **J** é o juros obtido, **i** é a taxa de juro e **t** é o tempo empregado. Taxa e tempo devem estar na mesma unidade.

2. Juros Compostos

Chamamos de regime de **juros compostos** aquele em que o juro gerado pela aplicação será a ela incorporado em cada período, passando assim a participar da geração de juro no período seguinte. Assim, teremos juro gerado sobre o montante do período anterior, ou seja, juro também rende juro.

Fórmula do Juros Compostos

Sendo M, o montante, C, o capital investido, i, a taxa de juro e t, o tempo, temos:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{C}(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{t}}}$$

Anotações

Em Sala

01) Calcule o valor dos juros e do capital mais juros (montante) de R$ 100,00 aplicados por três anos a uma taxa de juros de 20% ao ano no regime de juros simples e compostos.

JUROS SIMPLES

PERÍODO	JUROS POR PERÍODO	MONTANTE (C + J)

JUROS COMPOSTOS

PERÍODO	JUROS POR PERÍODO	MONTANTE (C + J)

02) Calcule os juros simples referentes a um capital de R$ 2.000,00 investido durante 75 dias, à taxa de juros de 6% a.m. (ao mês).

03) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente desse banco deposita 1000 reais nessa aplicação. Ao final de **n** anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, será:

a) $1000 + 0,15^n$
b) $1000 \,.\, 0,15n$
c) $1000 \,.\, 0,15^n$
d) $1000 + 1,15^n$
e) $1000 \,.\, 1,15^n$

04) (UFSM – RS)
Uma empresa de cartão de crédito opera com juros compostos de 6% ao mês. Um usuário dessa empresa contraiu uma dívida de R$ 2.000,00 e, durante 6 meses, não pôde efetuar o pagamento. Ao procurar a empresa para renegociar a dívida, a empresa propôs que seja quitada em uma única parcela, com juros simples de 5% ao mês, referente aos 6 meses de atraso.

Aceita a proposta, o total de juros pagos e o desconto obtido, em reais, são, respectivamente, iguais a

Dado: $(1,06)^6 = 1,4185$

a) 600,00 e 117,00.
b) 600,00 e 120,00.
c) 600,00 e 237,00
d) 720,00 e 117,00.
e) 720,00 e 120,00.

Testes

05) Um capital de R$ 5000,00 é aplicado a juros simples. Encontre os juros quando:

a) i = 4% a.m e t = 8 meses

b) i = 3% a.m e t = 45 dias

06) Qual a taxa anual (a.a.), em %, a qual deve ser empregado um capital de R$ 35.000,00 durante 1 ano e 3 meses, a juros simples, para produzir um montante de R$ 45.500,00?

07) (UFRGS – RS)
Uma mercadoria com preço inicial de R$ 500,00 sofreu reajustes mensais e acumulados de 0,5%. O preço dessa mercadoria, ao fim de 12 meses, é

a) $500 \cdot 0{,}005^{12}$.
b) $500 \cdot 0{,}05^{12}$.
c) $500 \cdot 1{,}005^{12}$.
d) $500 \cdot 1{,}05^{12}$.
e) $500 \cdot 0{,}5^{12}$.

08) Assinale V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas.

a) (   ) A taxa anual a qual deve ser colocado o capital de R$9.540,00 durante 24 dias, para que renda juros simples de R$31,80 é de 5% ao ano.

b) (   ) Em certo trimestre as cadernetas de poupança renderam 2% de correção monetária. João deixou R$ 1000,00 depositados durante três meses. No fim do trimestre ele possuía R$1020,00

c) (   ) (UFSC – SC) Sabemos que aplicando um capital C_o após n meses a uma taxa i, obtemos o valor a ser resgatado C_f através da seguinte equação $C_f = C_0(1+i)^n$. Dessa forma, uma pessoa que aplica um capital de R$10 000,00 a uma taxa de 1% ao mês durante três meses deve resgatar um valor igual a R$ 10 303,01.

09) (UDESC – SC)
Se uma taxa de juros aplicada sobre os depósitos feitos em cadernetas de poupança é igual a 0,5% ao mês, a seqüência correspondente aos montantes mensais de um depósito feito nessa modalidade de poupança é:

a) uma progressão aritmética de razão 1,005.
b) uma progressão geométrica de razão 1,05.
c) uma progressão aritmética de razão 0,5.
d) uma progressão geométrica de razão 1,005.
e) Não é progressão geométrica, nem aritmética.

10) (ACAFE – SC)
Hoje, o preço de um certo modelo de automóvel importado é estimado em R$200.000,00. Supondo que valorize 10% ao ano, expresse a função que representa o preço P, em reais, do automóvel, em função do tempo t, em anos.

a) $P = 200.000.\ 0,1\ .\ t$
b) $P = 200.000.\ (0,1)^t$
c) $P = 200.000.\ (1,1)^t$
d) $P = 200.000 +\ (1,1)^t$
e) $P = 200.000 +\ (0,1)^t$

11) A quantia de R$ 3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos.

12) (UFSM – RS)
Com a venda dos materiais recicláveis, uma escola recolheu R$ 3.000,00. Esse dinheiro foi aplicado a juros compostos, com rendimento de 1% ao mês. Então, ao final de um ano, o montante (emR$) disponível para a escola é de:

a) $3000\ (1,01)^{12}$
b) $3000\ [1 + (1,01)^{12}]$
c) $3000\ (1,1)^{12}$
d) $3000\ (1,12)^{12}$
e) $3000\ (1,12)$

13) (UFPR – PR)
Luiz Carlos investiu R$ 10.000,00 no mercado financeiro da seguinte forma: parte no fundo de ações, parte no fundo de renda fixa e parte na poupança. Após um ano ele recebeu R$ 1.018,00 em juros simples dos três investimentos. Nesse período de um ano, o fundo de ações rendeu 15%, o fundo de renda fixa rendeu 10% e a poupança rendeu 8%.Sabendo que Luiz Carlos investiu no fundo de ações apenas metade do que ele investiu na poupança, os juros que ele obteve em cada um dos investimentos foram:

a) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 288,00 na poupança.
b) R$ 300,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 258,00 na poupança.
c) R$ 260,00 no fundo de ações, R$ 470,00 no fundo de renda fixa e R$ 288,00 na poupança.
d) R$ 260,00 no fundo de ações, R$ 480,00 no fundo de renda fixa e R$ 278,00 na poupança.
e) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 430,00 no fundo de renda fixa e R$ 318,00 na poupança.

14) Certo capital é aplicado em regime de juros simples, à uma taxa anual de 10%. Depois de quanto tempo este capital estará triplicado?

15) (UFSC – SC)
Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

No capítulo X, denominado Contas, do Romance *Vidas Secas*, do escritor brasileiro Graciliano Ramos, considerado por muitos como a maior obra deste autor, temos:

01. "Fabiano recebia na partilha a quarta parte dos bezerros e a terça dos cabritos. Mas como não tinha roça e apenas limitava a semear na vazante uns punhados de feijão e milho, comia da feira, desfazia-se dos animais, não chegava a ferrar um bezerro ou assinar a orelha de um cabrito." Suponha que Fabiano tenha vendido a sua parte dos bezerros com *4%* de prejuízo e a sua parte dos cabritos com *3%* de prejuízo. Se o prejuízo total de Fabiano foi de *Rs 400$000* (quatrocentos mil réis), então o valor total da criação de bezerros e cabritos era de *Rs 40:000$000* (quarenta contos de réis, ou seja, quarenta milhões de réis).
02. Fabiano recorda-se do dia em que fora vender um porco na cidade e o fiscal da prefeitura exigira o pagamento do imposto sobre a venda. Fabiano desconversou e disse que não iria mais vender o animal. Foi a outra rua negociar e, pego em flagrante, decidiu nunca mais criar porcos. Se o preço de venda do porco na época fosse de *Rs 53$000* (cinquenta e três mil réis) e o imposto de *20%* sobre o valor da venda, então Fabiano deveria pagar à prefeitura *Rs 3$600* (três mil e seiscentos réis).
04. Assim como das outras vezes, Fabiano pediu à sinha Vitória para que ela fizesse as contas. Como de costume, os números do patrão diferiam dos de sinha Vitória. Fabiano reclamou e obteve do patrão a explicação habitual de que a diferença era proveniente dos juros. Juros e prazos, palavras difíceis que os homens sabidos usavam quando queriam lograr os outros. Se Fabiano tomasse emprestado do patrão *Rs 800$000* (oitocentos mil réis) à taxa de *5%* ao mês, durante *6* meses, então os juros simples produzidos por este empréstimo seriam
de *Rs 20$000* (vinte mil réis).
08. Desde a década de 30, em que foi publicado o romance *Vidas Secas*, até os dias de hoje, a moeda nacional do Brasil mudou de nome várias vezes, principalmente nos períodos de altos índices de inflação. Na maioria das novas denominações monetárias foram cortados três dígitos de zero, isto é, a nova moeda vale sempre *1000* vezes a antiga. Suponha que certo país troque de moeda cada vez que a inflação acumulada atinja a cifra de *700%*. Se a inflação desse país for de *20%* ao mês, então em um ano esse país terá uma nova moeda.
(Considere: $log2 = 0,301$ e $log 3 = 0,477$)

16) (ENEM)
Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

a) R$ 4 222,22.
b) R$ 4 523,80.
c) R$ 5 000,00.
d) R$ 13 300,00.
e) R$ 17 100,00.

17) Uma pessoa comprou um televisor por R$ 600,00, sem entrada, e pagou em duas prestações. A primeira prestação foi um pagamento de R$ 300,00, mais os juros sobre a dívida total, que era da ordem de R$ 600,00. A segunda prestação foi composta pelos R$ 300,00 restantes mais os juros sobre esses R$ 300,00. Sabendo que a taxa de juros foi a mesma em ambas as prestações, e o total pago resultou em R$ 618,00, a taxa mensal de juros aplicada foi de:

a) 2,5% ao mês
b) 3% ao mês
c) 1,5% ao mês
d) 2% ao mês
e) 18% ao mês

Exercícios estilo ENEM

18) (ENEM)
Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.
Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

19) (ENEM)

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com maior rentabilidade:
anual, essa pessoa deverá

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

20) (ENEM)

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

Aprofundamento

21) Um capital de $200000,00 é aplicado a juros compostos de 10% ao ano. Calcule o montante após 4 anos. Usar: log 1,10= 0,041 e log 1,46= 0,164

LEMBRAR: $\log_B (A) = x \leftrightarrow A = B^x$

22) Uma certa quantia de dinheiro foi aplicada durante três meses a uma taxa mensal de 10%. Qual foi a quantia aplicada, sabendo que ao final desse período o valor era de R$13310,00?

23) Qual é a taxa porcentual mensal de juro composto que triplica o capital em três meses?

Usar: $3^{1/3} = 1,44$

24) Um corretor de imóveis oferece um terreno por R$ 100.000,00 à vista. A compra também pode ser realizada por meio do pagamento de duas parcelas iguais de x reais; a primeira parcela deve ser paga no ato da compra e a segunda um ano depois. Determine o valor de x, sabendo que é cobrada uma taxa de juros de 20% ao ano sobre o saldo devedor.

25) Um mutuário comprou um apartamento por R$ 100.000,00 financiado por um banco com taxa de juros de 15% ao ano, financiado em 10 anos. Logo no primeiro mês, ele perde o emprego e não consegue pagar nenhuma prestação. Qual será o valor do montante (tudo que ele deve) ao final de 10 anos? Usar: log 1,15= 0,060 e log 4,04= 0,606

GABARITO – AULA 16

1) Juros Simples: J =60,00 M = 160,00
Juro Composto: J = 72,8 M = 172,8
2) R$300,00
3) e **4)** c
5) a) R$ 1600,00 b) R$ 225,00
6) 24% **7)** c
8) a) V b) V c) V
9) d **10)** c
11) R$ 12000,00 **12)** a **13)** a **14)** 20 anos **15)** 09
16) c **17)** a **18)** d **19)** c **20)** d
21) M= 292.000,00 **22)** R$ 10000,00 **23)** 44%
24) R$ 54.545,45 **25)** M= 404.000,00