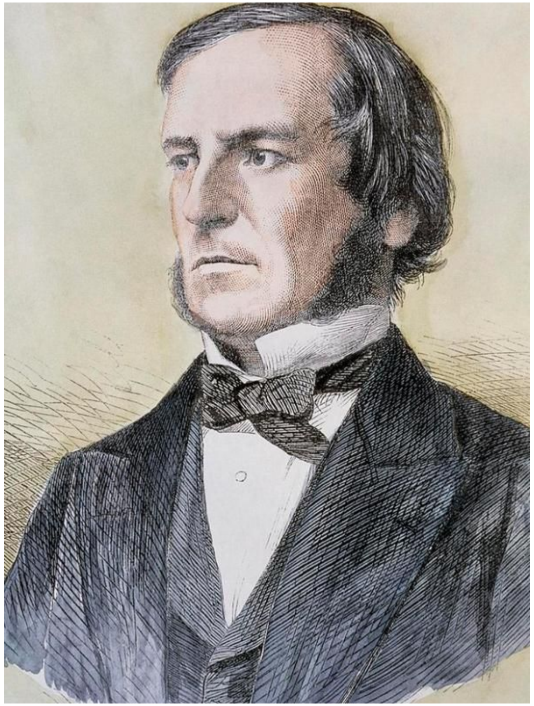
INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

CST Análise e Desenvolvimento de Sistemas
AOC786201 - Fundamentos de Arquitetura e Organização de Computadores

Álgebra de Boole

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

George Boole



George Boole nasceu em 1815 em Lincoln, Inglaterra, e foi um matemático e lógico autodidata. Sem formação universitária formal, dominou diversas áreas científicas. Foi professor de matemática no Queen's College, em Cork, na Irlanda. Morreu em 1864.

Fundou a lógica matemática moderna e criou a álgebra booleana, um sistema que associa valores binários (verdadeiro ou falso) a operações lógicas. Suas ideias revolucionaram a lógica tradicional ao tratar proposições como entidades matemáticas. Esse sistema é a base da lógica digital, que possibilitou o desenvolvimento de circuitos eletrônicos e da computação moderna.

Propriedades da Álgebra Booleana

- Complementação / negação / inversão / NOT
- Adição lógica / Soma lógica / Operação OU / Disjunção / OR
- Multiplicação lógica / Produto lógico / Operação E / Conjunção / AND

Propriedades da Álgebra Booleana

Complementação / negação / inversão / NOT

Operador: "$-$"
ex.: $\overline{A}$ (A barrado)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Operador unário: Aplicável a uma variável por vez

Propriedades da Álgebra Booleana

Multiplicação lógica / Produto lógico / Operação E / Conjunção / AND

Operador: “.”
ex.: A.B ou AB (omitindo o operador)

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	C	A·B·C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Saída será 0 se ao menos uma das entradas for 0

Saída será 1 se todas as entradas forem 1

Propriedades da Álgebra Booleana

Adição lógica / Soma lógica / Operação OU / Disjunção / OR

Operador: “+”

ex.: A+B

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Saída será 1 se ao menos uma das entradas for 1

Saída será 0 se todas as entradas forem 0

Combinando variáveis e operadores lógicos

Constantes, Variáveis e operadores lógicos podem ser combinados para formar expressões lógicas

Exemplos:

- $A.B + A.C$
- $A + B.C$
- $A.\overline{B} + B.C$
- $A.C.D + \overline{B.A}$

Precedência nas operações lógicas

1. Parênteses
   ex.: em (A+B).C a operação A+B ocorre primeiro, depois o resultado .C
2. Negação (operação unária)
   ex.: em $(\overline{A}+B).C$ a operação $\overline{A}$ ocorre primeiro, depois $\overline{A}+B$, e .C
3. Multiplicação Lógica
   ex.: em A+B.C a operação B.C ocorre primeiro, depois o resultado +A
4. Soma Lógica
   é a última operação a ser realizada

Atribuição de identificador de função

As expressões booleanas são normalmente associadas a uma identificação (ex.: Y, S, F,...)

Exemplos:

- $Y = A.B + \overline{A.C}$
- $F = (A+B) . (B+C)$

Propriedades das variáveis booleanas: valores mutuamente exclusivos

Seja A uma variável booleana

- Se $A \neq 0$, então $A = 1$
- Se $A \neq 1$, então $A = 0$

Propriedades das variáveis booleanas: adição lógica

Seja A uma variável booleana

- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A + A = A$
- $A + \overline{A} = 1$

Propriedades das variáveis booleanas: multiplicação lógica

Seja A uma variável booleana

- $A \cdot 0 = 0$
- $A \cdot 1 = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \overline{A} = 0$

Propriedades das variáveis booleanas: propriedade da complementação ou dupla negação

Seja A uma variável booleana

- $\overline{\overline{A}} = A$

Propriedades das variáveis booleanas: propriedade comutativa

Sejam A e B variaveis booleanas

- $A + B = B + A$
- $A . B = B . A$

Propriedades das variáveis booleanas: propriedade associativa

Sejam A, B e C variaveis booleanas

- $A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B$

Propriedades das variáveis booleanas: propriedade distributiva

Sejam A, B e C variaveis booleanas

- $A + BC = (A + B).(A + C)$
- $A . (B + C) = A . B + A . C$

Propriedades das variáveis booleanas: lei da absorção

Sejam A e B variaveis booleanas

- $A \cdot (A + B) = A$
- $A + A \cdot B = A$

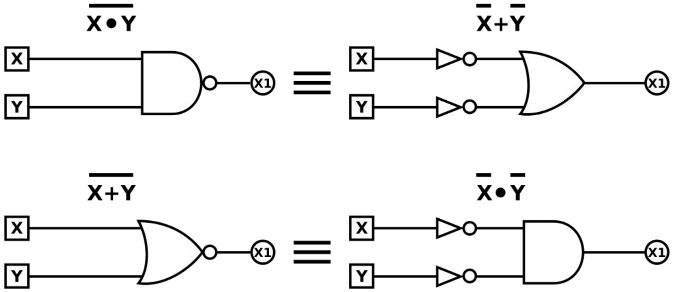
INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Leis de De Morgan

Para 2 variáveis:

$$\overline{A.B} \Leftrightarrow \overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{A+B} \Leftrightarrow \overline{A}.\overline{B}$$



Para n variáveis:

$$\overline{A.B.C.\ \ldots} \Leftrightarrow \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ \ldots$$

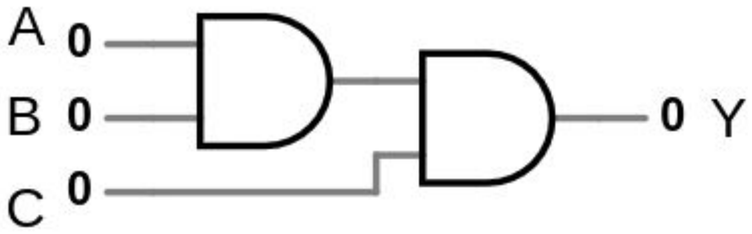
$$\overline{A+B+C+\ \ldots} \Leftrightarrow \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\ \ldots$$

Augustus De Morgan foi educado no Trinity College, em Cambridge, e em 1828 tornou-se professor de matemática em Londres.

Equivalências pela propriedade associativa

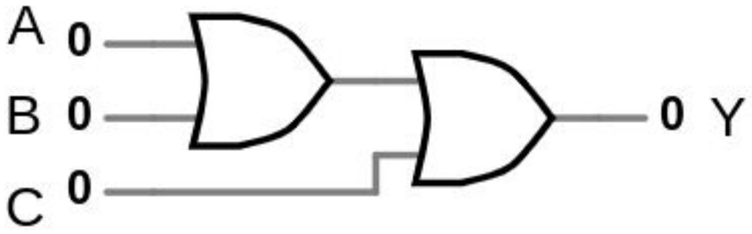
Porta **E / AND**

$$Y = A.B.C$$



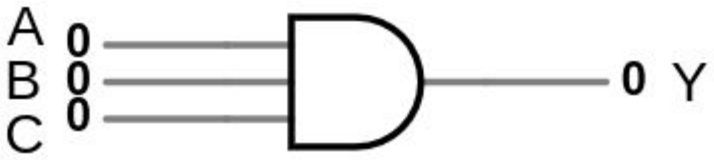
Porta **OU / OR**

$$Y = A + B + C$$



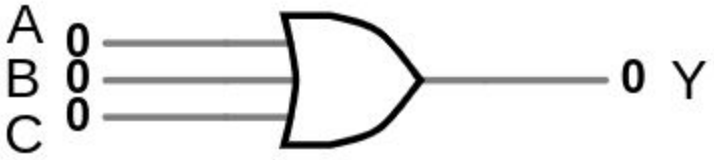
Porta **E / AND**

$$Y = A.B.C$$



Porta **OU / OR**

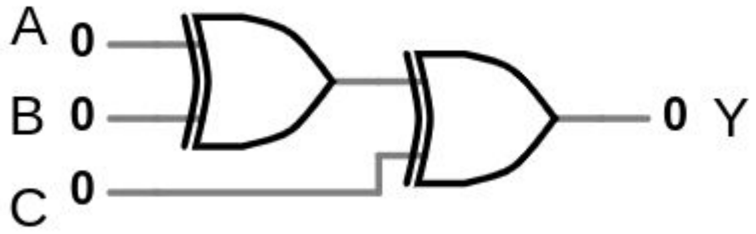
$$Y = A + B + C$$



Equivalências pela propriedade associativa

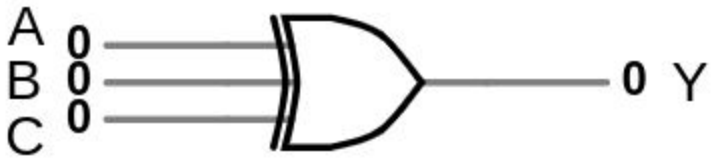
Porta **XOU / XOR**

$$Y = A \oplus B \oplus C$$

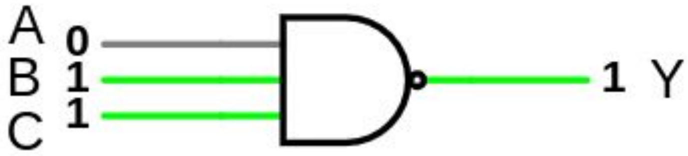
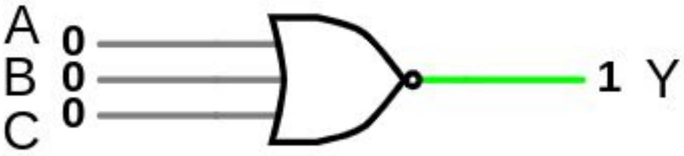
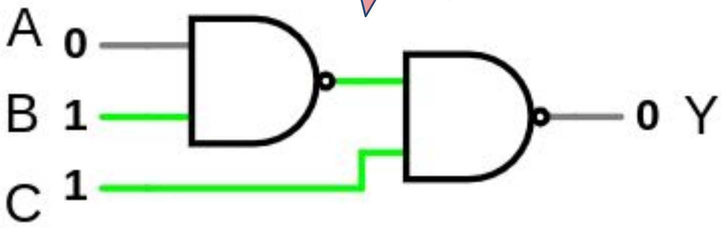
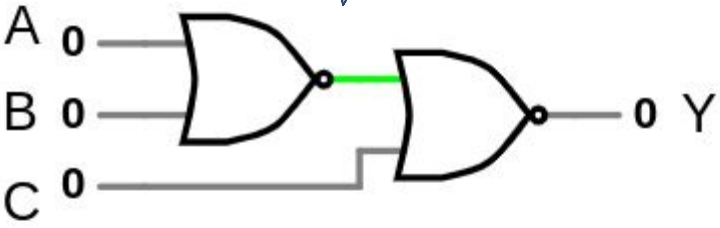


Porta **XOU / XOR**

$$Y = A \oplus B \oplus C$$



Alguns cuidados com equivalências

Porta **NÃO E / NAND**	Porta **NÃO OU / NOR**
	
Não equivalem	Não equivalem
	

Derivação de expressões booleanas

Tabela verdade → equação

2 Possibilidades:

Soma de Produtos (SdP)

Lista todas as combinações das variáveis de entrada para os quais a função vale **1**

ou

Produto de Somas (PdS)

Lista todas as combinações das variáveis de entrada para os quais a função vale **0**

Soma de produtos

Dada uma função Booleana de n variáveis (=n entradas) há 2^n combinações possíveis dessas variáveis

Para cada combinação pode-se associar um produto entre as variáveis de entrada

A B C	mintermo
0 0 0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0 0 1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0 1 0	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0 1 1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1 0 0	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1 0 1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1 1 0	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
1 1 1	$A\cdot B\cdot C$

cada produto é chamado **mintermo**

Exemplo: encontrar a equação em soma de produtos (SdP) para a função F, descrita pela seguinte tabela verdade:

A B C	F	
0 0 0	0	
0 0 1	0	
0 1 0	1	$\overline{A}B\overline{C}$
0 1 1	1	$\overline{A}BC$
1 0 0	0	
1 0 1	1	$A\overline{B}C$
1 1 0	1	$AB\overline{C}$
1 1 1	0	

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Produto de somas

Para cada combinação pode-se associar uma soma lógica ("**OU**") entre as variáveis de entrada

A B C	maxtermos
0 0 0	$A+B+C$
0 0 1	$A+B+\overline{C}$
0 1 0	$A+\overline{B}+C$
0 1 1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1 0 0	$\overline{A}+B+C$
1 0 1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1 1 0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1 1 1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

Cada soma é chamada **maxtermo**

Exemplo: encontrar a equação em soma de produtos (SdP) para a função F, descrita pela seguinte tabela verdade:

A B C	F	
0 0 0	0	$\rightarrow A+B+C$
0 0 1	0	$\rightarrow A+B+\overline{C}$
0 1 0	1	
0 1 1	1	
1 0 0	0	$\rightarrow \overline{A}+B+C$
1 0 1	1	
1 1 0	1	
1 1 1	0	$\rightarrow \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

$$F= (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Simplificação

Redução do número de literais ou de operações na equação Booleana, através da aplicação das propriedades da Álgebra Booleana

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (4), $\overline{C} + C = 1$

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (6), $\overline{A}B \cdot 1 = \overline{A}B$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada

Exercícios: Obtenha a expressão e circuito lógico das seguintes tabelas verdade

a)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b)

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

c)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

d)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Exercícios: Obtenha a tabela verdade e circuito lógico das seguintes expressões, depois simplifique-os utilizando álgebra booleana, comparando os resultados.

a) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + ABC$

b) $\bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$

c) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + ABCD$

d) $\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + ABCD$