AULA01

MATRIZES – CONCEITOS INICIAIS

1.Noções Iniciais

O estudo das matrizes é de fundamental importância pelas inúmeras aplicações que apresenta nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia: Matemática, Física, Engenharia, Computação, etc.

Noção de Matriz

Na tabela abaixo colocamos as notas obtidas por três alunos em provas de matemática, física, química e biologia:

	MAT	FIS	QUI	BIO
João	8	3	2	4
Pedro	7	5	8	3
Henrique	5	7	8	6

Consultando a tabela podemos verificar que:
O aluno Henrique obteve a nota 6 em Biologia. Observe que essa nota se encontra na terceira linha e quarta coluna da tabela. Essa tabela com linhas e colunas é o que denominamos de matrizes.

2. Definição

Uma matriz do tipo m x n (lê-se: m por n), m, n ≥ 1, é uma disposição tabular formada por m.n elementos dispostos em m linhas e n colunas. As matrizes são representadas através de parênteses ( ), colchetes [ ] ou através de barras duplas || ||

Exemplos.:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $A_{2\times 3}$ (lê-se: A dois por três)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \\ 6 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $A_{2\times 4}$ (lê-se: A dois por quatro)

A = $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$ $\mathbf{A_{3\times 2}}$ (lê-se: A três por dois)

3. Notações

3.1.Notação Explícita

Uma matriz genericamente é representada por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. Cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice *i* indica a linha e *j* a coluna às quais o elemento pertence. Sendo assim, uma matriz $A_{m\times n}$ algebricamente pode ser representada assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ com m e n} \in N^*$$

3.2.Notação Condensada

Podemos também, abreviar essa representação da seguinte forma: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$
Os elementos da matriz A são indicados por $\mathbf{a_{ij}}$ de forma que:
$i \in \{1, 2, 3,......m\}$ (indicador da linha)
$j \in \{1, 2, 3, ...n\}$ (indicador da coluna)

Exercícios Resolvidos

1) Indique explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = 2i + j^2$

Resolução: A matriz 2x2 é do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Pela lei de formação, temos:

$a_{ij} = 2i + j^2$
$a_{11} = 2.1 + 1^2 = 3$
$a_{12} = 2.1 + 2^2 = 6$
$a_{21} = 2.2 + 1^2 = 5$
$a_{22} = 2.2 + 2^2 = 8$

Portanto: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

2) Indique explicitamente a matriz A $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ em que $a_{ij} = 3i - j$.

Resolução:

A representação genérica da matriz é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3x2}$$

$a_{ij} = 3i - j$

$$\begin{array}{l} a_{11} = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \\ a_{21} = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ a_{22} = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \\ a_{31} = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \\ a_{32} = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Classificação de Matrizes

Seja a matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$, lembrando que m e n são respectivamente a quantidade de linhas e colunas da matriz A, temos:

a) MATRIZ LINHA se m = 1

Exemplo: A_{1x3} $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) MATRIZ COLUNA se n = 1

Exemplo: $A_{4x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) RETANGULAR se $m \neq n$

Exemplo: $A_{2\,x\,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) QUADRADA se m = n

Exemplo: A_{2x2} $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

Definição:
Uma matriz é quadrada se a quantidade de linhas for igual a quantidade de colunas. Uma matriz quadrada **n** x **n** é denominada matriz de ordem **n**.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Com relação a uma matriz quadrada de ordem **n**, temos:

- diagonal principal (quando $i = j$ para todo a_{ij})
- diagonal secundária (quando $i + j =$ **n** + 1)

5. Tipologia

5.1. Matriz Transposta

Seja A uma matriz de ordem m x n, denomina-se transposta de A a matriz de ordem n x m obtida, trocando-se de forma ordenada e simultânea as linhas pelas colunas. Representa-se por: $\mathbf{A^t}$

Exemplo $A_{2\,x\,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $A^t_{3\,x\,2} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Observação 1: $\boxed{(A^t)^t = A}$

Observação 2: Seja uma matriz A de ordem n.

- Se $A = A^t$, então A é dita **SIMÉTRICA**

  Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

- Se A = – $\mathbf{A^t}$, então A é dita **ANTISIMÉTRICA** (–A indica matriz oposta de A que se obtém. trocando-se o sinal dos seus elementos)

  Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.2. Matriz Identidade

Uma matriz A de ordem **n** é dita identidade, ou unidade se os elementos da diagonal principal forem iguais a 1, e os demais elementos são nulos.

Exemplos: $\mathbf{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Importante: A matriz identidade é neutra na multiplicação de matrizes.

5.3. Matriz Nula

Uma matriz é dita nula quando todos seus elementos forem iguais a zero. A matriz Nula é neutra na soma de matrizes. Notação: 0_{mxn}

$O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.4. Matriz Diagonal

É toda matriz de ordem n tal que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.5. Matriz Triangular

É toda matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou/e para $i < j$.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

6. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A_{mxn} e B_{mxn} são iguais, se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são idênticos.
Notação: A = B

Exercício Resolvido

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 0 \end{pmatrix}$, calcular x e y para que A e B sejam iguais.

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

$$4x = 12$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1$$

Portanto : $x = 3$ e $y = -1$

7. Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, denomina-se soma A + B a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo *i* e *j* possíveis.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Observe que A +B existe se, e somente se, A e B forem de mesma ordem.

Propriedades:

1) A + B = B + A (propriedade comutativa)
2) A + (B + C) = (A + B) + C (propriedade associativa)
3) A + O = A (elemento neutro)
4) $(A + B)^t = A^t + B^t$

8. Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, denomina-se subtração entre as matrizes A e B e indica-se por A – B, a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ que se obtém somando-se as matrizes A e – B(oposta de B).

Exemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & -1 \\ -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim como na adição, a subtração de matrizes só é válida para matrizes de mesma ordem.

9. Produto de um número por matriz

Dado um número real ***k*** e uma matriz $A_{m \times n}$, denomina-se produto de ***k*** por A e indica-se por ***k*.A**, à matriz que se obtém multiplicando-se todo elemento de A por ***k***.

Exemplo: $3.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 12 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

Propriedades:

Sendo *x* e *y* dois números reais e A e B duas matrizes de mesma ordem valem as seguintes propriedades:

1) $x \cdot (yA) = (xy) \cdot A$
2) $x \cdot (A + B) = xA + xB$
3) $(x + y) \cdot A = xA + yA$

Em Sala

01) (PUC – PR) Seja A = $(a_{ij})_{2x3}$ uma matriz dada por: $a_{ij} = \begin{cases} 2i, \text{ se } i \geq j \\ i + j, \text{ se } i < j \end{cases}$ Então, a matriz A, na forma de tabela é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

02) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se A = A^t . Assim, se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ 2x+3 & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, então x é igual a:

a) -2
b) -1
c) 1
d) 3
e) 5

03) Se a matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$, ela é chamada matriz anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e:

$$M = \begin{pmatrix} 4+a & a_{12} & a_{13} \\ a & b+2 & a_{23} \\ b & c & 2c-8 \end{pmatrix}.$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} valem respectivamente

a) -4, -2 e 4
b) 4, 2 e -4
c) 4, -2 e -4
d) 2, -4 e 2
e) n.d.a.

04) (UDESC – SC) Sejam X e Y matrizes de ordem dois por dois tais que X + Y = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e X – Y = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$; logo a soma dos elementos da diagonal principal da matriz X é:

a) 14
b) 7
c) 9
d) 16
e) 8

Testes

05) (PUC – RS) Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M = (m_{ij})$ de ordem 2×3. Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij} = 4i - j$. Assim, a matriz M é igual a _________.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

06) (UFSC) Dadas as matrizes: A = $\begin{pmatrix} 2x+1 & -3y & -1 \\ 0 & 4 & x+z \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 12 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Se $A = B^t$, o valor de x.y.z é:

07) Uma matriz se diz simétrica se $A^t = A$. Nessas condições, se a matriz A é simétrica, então, x + y é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & y-1 & x+3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

08) Escreva, na forma explícita ,cada matriz abaixo:

a) $A = (a_{ij})_{2x2}$, com $a_{ij} = i + j$

b) $A = (a_{ij})_{3x2}$, com $a_{ij} = 3i - j^2$

c) $A = (a_{ij})_{3x2}$, com $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ i^2, \text{se } i \neq j \end{cases}$

09) Determine o maior elemento da matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, com $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i = j \\ 2 + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

10) Uma matriz se diz anti-simétrica se $A^t = -A$. Nessas condições, se a matriz A é anti-simétrica, então, x + y + z é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) 3
b) 1
c) 0
d) –1
e) 3

11) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A = A^t$. Assim, se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, então x + y + z é igual a:

a) – 2
b) – 1
c) 1
d) 3
e) 5

12) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Obter a matriz X tal que A + X = B

b) Obter as matrizes X e Y tal que:

$$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = -B \end{cases}$$

13) Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{se } i < j \\ 7, \text{se } i = j \\ i^2 + j, \text{se } i > j \end{cases}$ o valor da expressão $2a_{23} + 3a_{22} - a_{21}$ é:

14) Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz X, tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{X + 2B}{3}$, é igual a:

15) (UFPEL) Durante a Copa do Mundo 2006, muito se ouviu falar do “quadrado magico”, aquele formado por Kaka, Ronaldinho Gaucho, Ronaldo Fenômeno e Adriano. Matematicamente, uma matriz quadrada de ordem n e chamada quadrado magico quando a soma dos numeros de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundaria da sempre o mesmo resultado.

Considerando a matriz M um quadrado mágico, onde

$$M = \begin{pmatrix} x & 2y+1 & 2y-6 \\ y-1 & z+6 & x+3 \\ 2x & 2z+3 & 2z+8 \end{pmatrix}$$

e a soma S dos elementos da diagonal principal é dada por $S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$ em que n é a ordem da matriz M, é correto afirmar que

a) $x = z$
b) $y < x$
c) $x < z$
d) $y = z$
e) $x = y$

16) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$ e sendo 3A = B + C, então:

a) $x + y + z + w = 11$
b) $x + y + z + w = 10$
c) $x + y - z - w = 0$
d) $x + y - z - w = -1$
e) $x + y + z + w > 11$

17) (UFRJ) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

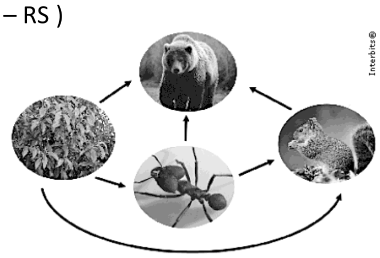
S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3. Assim, no sábado Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz S).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana?

b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

Exercícios estilo ENEM

18) (UFSM – RS)



O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz $A = (a_{ij})_{4x4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \le j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$ b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \ne j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \ge j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$ d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \ne j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$

e) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

19) (UEL – PR)Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografia. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N. A mensagem final ***M*** é dada por $A+B=M$, onde ***B*** é uma matriz fixada, que deve ser mantida em segredo, e ***A*** é uma matriz enviada ao receptor legal. Cada linha da matriz ***M*** corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o **0** (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras.

José tuitava durante o horário de trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz ***A***. De posse da matriz ***B*** e da tabela-código, ele decodificou a mensagem.
O que a chefia informou a José?

Dados:

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

a) Sorria voce esta sendo advertido.
b) Sorria voce esta sendo filmado.
c) Sorria voce esta sendo gravado.
d) Sorria voce esta sendo improdutivo.
e) Sorria voce esta sendo observado.

20) (UEL – PR) Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4×4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4×4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

a) Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.
b) Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.
c) Pode-se ir diretamente da cidade D até C.
d) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.
e) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

GABARITO – AULA 01

1) d **2)** a **3)** b 4) e **5)** c **6)** 28
7) 08

8) a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

9) 5 **10)** d **11)** e

12) a) X = $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ b) X = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ Y = $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

13) 34 **14)** $\begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ **15)** e **16)** b **17)** a) Claudio b) 2 chopes

18) c **19)** b **20)** a

AULA02

MATRIZES - MULTIPLICAÇÃO

1. Introdução

Antes de darmos uma definição formal do produto de matrizes, vamos apresentar um exemplo prático de como realizar essa operação. Observe o exemplo abaixo:

Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de 2010 (África do Sul), o grupo G era formado por 4 países: Brasil, Portugal, Costa do Marfim e Coreia do Norte. Os resultados estão registrados abaixo em uma matriz A, de ordem 4 x 3.

País	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	1	0
Portugal	1	2	0
Costa do Marfim	1	1	1
Coreia do Norte	0	0	3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento da competição, cada resultado de vitória, empate ou derrota tem pontuação descrita pela tabale abaixo. Vamos representar essa tabela pela matriz B, de ordem 3 x 1

Número de Pontos	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Então: $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terminada a 1ª fase da Copa do Mundo, a pontuação é obtida com o total de pontos feitos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de A por B). Observe:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Brasil: 2.3 + 1.1 + 0.0 = 7

Portugal: 1.3 + 2.1 + 0.0 = 5

Costa do Marfim: 1.3 + 1.1 + 1.0 = 4

Coreia do Norte: 0.3 + 0.1 + 3.0 = 0

Portanto: $A.B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

O exemplo acima sugere como deve ser efetuada o produto de matrizes. Observe que: $A_{4\times3} \cdot B_{3\times1} = AB_{4\times1}$

Perceba que definimos o produto A.B de duas matrizes quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz. Além disso, note que A.B possui a quantida de linha da primeira matriz e a quantidade de colunas da segunda matriz.

2. Definição

Considere as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e a matriz $B = [b_{jk}]_{n \times p}$. O produto de A por B é a matriz $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, de tal forma que os elementos c_{ik} são obtidos assim:

$$c_{ik} = a_{i1} . b_{1k} + a_{i2} . b_{2k} + a_{i3} . b_{3k} + ... + a_{in} . b_{nk}$$

ou seja: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $k \in \{1, 2,...,p\}$.

Exemplo: Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$. Determine A.B

Resolução: O produto AxB é uma matriz obtida da seguinte forma:

$$A.B = \begin{pmatrix} 3.(-1) + 0.9 & 3.(-3) + 0.2 \\ 2.(-1) + 1 9 & 2.(-3) + 1 2 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES

A multiplicação de Matrizes apresenta as seguintes propriedades:

1) Associativa: A.(B.C) = (A.B).C
para quaisquer matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e $C = [c_{kl}]_{m \times p}$

2) Distributiva à direita em relação à adição:
(A +B).C = A.C + B.C
para quaisquer matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{jk}]_{n \times p}$

3) Distributiva à esquerda: C.(A + B) = C.A + C.B
para quaisquer matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{jk}]_{p \times m}$

4) $(x.A).B = A(x.B) = x.(A.B)$
quaisquer que sejam o número x e as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$

5) Elemento neutro: $A \,.\, I_n = I_m \,.\, A = A$
qualquer que seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

6) Transposta do produto: $(A.B)^t = B^t.A^t$
quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$

Observações:

1) Na multiplicação de matrizes geralmente $A.B \neq B.A$. Se A.B = B.A dizemos que A e B se comutam.

2) Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento, ou seja podemos ter A.B = 0 mesmo com $A \neq 0$ $B \neq 0$.

3) Se A.B = A.C, isto não implica que B = C. Em matrizes não vale a lei do cancelamento.

Em Sala

01) (UEL-PR) Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 3 x 4 e p x q. Se a matriz A.B é 3x5, então é verdade que:

a) p = 5 e q = 5
b) p = 4 e q = 5
c) p = 3 e q = 5
d) p = 3 e q = 4
e) p = 3 e q = 3

02) (UEPG – PR) As matrizes A, B e C são do tipo m x 4, n x r e 5 x p, respectivamente. Se a matriz transposta de (AB)C é do tipo 3 x 6, assinale o que for correto.

01. n.r = m.p
02. m = r + 1
04. p = 2m
08. n = r
16. n + r = p + m

03) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) A.B

b) B.A

c) $(A.B)^t$

d) $B^t.A^t$

e) $A.I_2$

f) A.C

g) A matriz X tal que X.B = A

04) (PUC – PR) O elemento c_{22} da matriz C = A.B, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, é:

a) 0
b) 2
c) 6
d) 11
e) 22

Testes

05) Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 5 x 2 e p x q. Se a matriz transposta de A.B é 7x5, então é verdade que:

a) p = 5 e q = 5
b) p = 4 e q = 5
c) p = 3 e q = 5
d) p = 2 e q = 7
e) p = 3 e q = 3

06) Determine o maior elemento do produto:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

07) (UFSC – SC) Dadas as matrizes: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e seja P = (2A - C).B. Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.

Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

08) A.B

09) A.C

10) $(A.C)^t$

11) $C^t.A^t$

12) Efetue, quando possível, o produto A.B das matrizes A e B em cada caso:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

13) (UEL – PR) Sobre as sentenças:

I. O produto de matrizes A_{3x2} . B_{2x1} é uma matriz 3x1.
II. O produto de matrizes A_{5x4} . B_{5x2} é uma matriz 4x2.
III. O produto de matrizes A_{2x3} . B_{3x2} é uma matriz quadrada 2 x 2.

É verdade que

a) somente I é falsa
b) somente II é falsa
c) somente III é falsa
d) somente I e III são falsas.
e) I, II e III são falsas

14) (PUC – RS) Numa aula de Álgebra Matricial dos cursos de Engenharia, o professor pediu que os alunos resolvessem a seguinte questão:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então A^2 é igual a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 25 & 25 \end{bmatrix}$

15) Em cada equação matricial abaixo, determine os valores de x e y

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

16) (PUC-SP) Se A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz X, de ordem 2, tal que A.X = B, é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

17) (UCMG) O valor de x, para que o produto das matrizes:A = $\begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica, é:

Exercícios estilo ENEM

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Observe a tabela a seguir, que mostra a relação entre três redes sociais da internet e a quantidade de usuários, em milhões de pessoas, que acessam essas redes na Argentina, Brasil e Chile, segundo dados de junho de 2011.

Número de usuários de redes sociais em milhões de pessoas

	Argentina	**Brasil**	**Chile**
Facebook	11,75	24,5	6,7
Twitter	2,4	12	1,2
Windows Live profile	3,06	14,6	1,44

(http://www.slideshare.net/ecommercenews/estudoredesocialamericalatina?from=embed)

18) (UPF – RS) Durante o mês de junho de 2011, os usuários da internet na Argentina tiveram uma média de 10 horas gastas em sites de rede sociais. No Brasil, a média foi de 4,7 horas e no Chile, de 8,7 horas. Avalie as afirmações:

I. Se B é a matriz $\begin{bmatrix} 10 \\ 4{,}7 \\ 8{,}7 \end{bmatrix}$, o produto matricial AB é uma matriz 3×1, cujo primeiro elemento representa o número de horas, em milhões, gasto pelos usuários dos três países no Facebook em junho de 2011.

II. $1{,}175 \cdot 10^8$ é a quantidade de horas que os argentinos gastaram com a rede social Facebook em junho de 2011.

III. O Windows Live Profile recebeu a visita de 19,1 milhões de usuários argentinos, brasileiros ou chilenos em junho de 2011.

a) Somente I é verdadeira.
b) I e II são verdadeiras.
c) I e III são verdadeiras.
d) II e III são verdadeiras.
e) Todas são verdadeiras.

19) (ENEM) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

20) (UEL – PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz Q fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz C fornece o custo unitário, em reais, destes componentes.

Dados:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{borracha} & \text{couro} & \text{tecido} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

Interbits®

A matriz V que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por:

a) $V = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

b) $V = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$

c) $V = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

d) $V = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$

e) $V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

GABARITO – AULA 02

1) b **2)** 18

3) a) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 22 & 33 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

4) 11 **5)** d **6)** 14 **7)** 32

8) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ **10)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ **11)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

12) a) $\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -23 & 2 \end{pmatrix}$ b) (17) c) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

13) b **14)** c
15) a) x = 3 y = 2 b) x = 5 y = 8
16) a **17)** 01 **18)** e **19)** e **20)** e

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA03

DETERMINANTES

1. Introdução

Dada uma matriz quadrada de ordem **n**, podemos associar a ela, através de certas operações, um número real chamado **determinante da matriz**.

$$A_n \xrightarrow{\text{determinante}} \Re$$

Podemos simbolizar o determinante de uma matriz por duas barras verticais. Assim se $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz A, indicamos o determinante de A por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

CÁLCULO

- **1ª ORDEM**

Seja a matriz $A = [a_{11}]$, denomina-se o determinante de A o próprio elemento a_{11} e indica-se por:

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

- **2ª ORDEM**

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante dessa matriz é o número real $a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$ e indica-se por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$$

Exemplo:

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \bullet 5 - 1 \bullet 3 = 10 - 3 = \mathbf{7}$$

- **3ª ORDEM**

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o seu determinante é o número:

$$\mathbf{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}.a_{31}}$$
$$\mathbf{- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}}$$

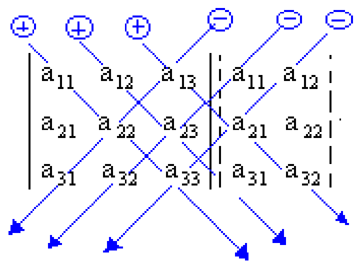
Exemplo:
Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

det A = 1.1.1 + 2.2.4 + 3.0.3 – 4 .1.3 – 3.2.1 – 2.0.1
det A = 1 + 16 + 0 – 12 – 6 – 0
det A = – 1

Para facilitar o cálculo do determinante de 3ª ordem apresentamos uma regra bem simples estabelecida pelo matemático francês P. F. Sarrus (1798-1861). Veja:

- Repete-se ao lado do determinante as duas primeiras colunas.
- Obtenha os produtos indicados abaixo como mostra o esquema.
-



$$\mathbf{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}.a_{31}}$$
$$\mathbf{- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}$$

= 2.1.1 + 3.2.(–3) – 1.4.2 – (–1).1(–3) – (2.2.2) – (3.4.1)

= 2 – 18 – 8 – 3 – 8 – 12

– 47

APÊNDICE

Vimos até agora o modo de calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3. Vejamos a partir de agora uma definição mais ampla do cálculo de determinantes para matrizes quadradas de ordem *n*.

1. Cofator de um elemento de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$)

Menor Complementar (M_{ij})

Denomina-se menor complementar M_{ij} relativo a um elemento a_{ij} ao determinante associado a matriz quadrada de ordem (**n - 1**), que se obtém de A, eliminando a linha e a coluna de A que contêm o elemento a_{ij} considerado.

Acompanhe o exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, calcular M_{11} e M_{32}.

Resolução:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Cofator ou Complemento Algébrico (C_{ij})

Cofator de um elemento a_{ij} é o número real que obtém-se multiplicando o número $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar M_{ij}. Ou seja:

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Acompanhe o exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular C_{11} e C_{32}

Resolução:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{M_{11}} = 1 \cdot (-14) = -14$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{M_{32}} = -1 \cdot (6 + 8) = -14$$

2. Teorema de Laplace

Seja a matriz quadrada de ordem **n** define-se como determinante dessa matriz **a soma dos produtos de cada elemento a_{ij} de uma fila pelo seu cofator C_{ij}.**

Acompanhe o exemplo abaixo:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Resolução:

Inicialmente vamos fixar a linha 2 (possui uma grande quantidade de zeros).

Então:

$$\boxed{\det A = a_{21}.C_{21} + a_{22}.C_{22} + a_{23}.C_{23} + a_{24}.C_{24}}$$

Como os elementos a_{21}, a_{22}.e a_{24} são nulo, vem:

$$\boxed{\det A = a_{23}.C_{23}}$$

$$\det A = 2. \underbrace{(-1)^{2+3}. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{C_{23}}$$

det A = 2.(-1).(-35)

$\boxed{\det A = 70}$

3. Regra de Chió

A regra de Chió é mais uma alternativa para o cálculo de determinantes de matriz quadrada de ordem **n** ($n \geq 2$). Com essa regra pode-se passar uma matriz de ordem **n** para uma outra de ordem **n − 1**, com o mesmo determinante. É necessário, pois, que a matriz possua pelo menos um dos seus elementos igual a 1.

Sendo assim, a regra de Chió consiste em:

a) Eliminar da matriz a linha e a coluna que contém o elemento $a_{ij} = 1$.
b) de cada um dos elementos restantes subtrair o produto dos elementos correspondentes na linha e coluna eliminadas.
c) calcula-se o determinante da matriz obtida
d) por fim, multiplica-se o determinante assim obtido por $(-\mathbf{1})^{i+j}$.

Acompanhe o exercício resolvido:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Resolução:

- Um dos elementos da matriz A que é igual a 1 é o a_{11}. Elimina-se então, a linha e a coluna onde está o elemento a_{11}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Perceba que cada elemento restante está associado a dois elementos que foram eliminados, um da linha e outro da coluna.

- Subtrai-se de cada elemento restante o produto dos dois associados que foram eliminados

$$\begin{vmatrix} 8-4.5 & 3-4.2 \\ 2-1.5 & -1-1.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 21$$

- Multiplica-se o determinante assim obtido por $(-\mathbf{1})^{i+j}$

det A = $(-1)^{1+1}.21$

$\boxed{\text{det A} = 21}$

4. Matriz de Vandermonde

A matriz $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \vdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ é chamada matriz de Vandermonde ou matriz das potências.

Observe que na matriz de Vandermonde cada coluna é formada por potências de mesma base com expoentes inteiros, que variam de 0 até n – 1.

Exemplo:

A matriz a seguir é de Vandermonde.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \\ 36 & 9 & 16 & 4 \\ 216 & 27 & 64 & 8 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz de Vandermonde pode ser calculado pelos métodos já vistos até aqui. No entando há um modo prático para o seu cálculo. O determinante da matriz de Vandermonde é dado pelo produto de todas as diferenças possíveis entre um elemento qualquer da linha base $a_1, a_2, ...a_n$ e todos os anteriores, ou seja:

$$\boxed{\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)}$$

Acompanhe o exemplo:

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$\det A = (3-2)(4-3)(4-2) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Em Sala

01) (UFPR – PR) Sendo I a matriz identidade de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ considere as afirmativas a seguir

1. $A + A^t = 2.I$
2. $\det(A \,.\, B) = -\sqrt{3}$
3. $B^{2007} = B$

Assinale a alternativa correta.

a) somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) somente a afirmativa 2 é verdadeira.
c) somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras
d) somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras

02) (UEPG – PR) Se os números x e y satisfazem as equações $\log \frac{-2}{x+1} = 0$ e $\begin{vmatrix} 3^{-2y} & 27 \\ 3^{x-1} & 3^{y^2} \end{vmatrix} = 0$ assinale o que for correto:

01. $x^y = -3$
02. $x \,.\, y = -1$
04. $x + y = -2$
08. $y^x = -2$
16. $\frac{x}{y} = 2$

03) (UEL – PR) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$ é positivo se:

a) $x > -4$
b) $x < 0$
c) $x < 2$
d) $x < -4$ ou $x > 0$
e) $x > -2$ ou $x < -6$

04) (UFPR – PR) Considere o polinômio $p(x) = \begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule as raízes de p(x). Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

Testes

05) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Calcule:

a) det A

b) det B

c) A + B

d) A.B

e) det (A + B)

f) det (A.B)

06) Com base no exercício acima, julgue o item abaixo:

Sejam A e B matrizes de ordem n. É verdade que: det(A + B) = det A + det B

07) Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) det A

b) det A^t

08) (PUC – RS) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, o determinante $\det(A \cdot B)$ é igual a

a) 18
b) 21
c) 32
d) 126
e) 720

09) (PUC – PR) Considere as seguintes desigualdades:

I. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

II. $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

III. $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}$

É correto afirmar que:

a) São verdadeiras apenas as desigualdades I e II.
b) São verdadeiras apenas as desigualdades II e III.
c) São verdadeiras apenas as desigualdades I e III.
d) As três desigualdades são verdadeiras.
e) As três desigualdades são falsas.

10) Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \text{Sen}\,x & \text{Cos}\,x \\ -2\text{Cos}\,x & 2\text{Sen}\,x \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

11) (UFSC – SC) Obtenha o valor do determinante da matriz A = $(a_{ij})_{2\times 2}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i \neq j \\ i + j, \text{se } i = j \end{cases}$

12) (UFSC – SC) Em R,a solução da equação $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} = 175$ é:

13) (UDESC – SC) Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = \det\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & x^2 \end{bmatrix}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$; portanto, o valor numérico de | *fog(-1) – gof (-1)* | é:

a) 2
b) 1
c) 0
d) $\sqrt[3]{3}$
e) -1

14) Resolva as seguintes equações e inequações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} = 12$

e) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$

15) (UDESC – SC) Sejam A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 2, cujas entradas são definidas por a_{ij} = (-1) $^{i+j}$. 2^{j-i} + 2(i – 2j), e f a função definida por f(x) = $9x^2$ – 9x + 2.

Sobre o valor do determinante da matriz *A,* é **correto** afirmar que ele é:

a) maior que a soma das raízes de *f* .
b) igual ao oposto da soma das raízes de *f* .
c) igual à soma das raízes de *f* .
d) maior que o valor absoluto da diferença das raízes de *f* .
e) igual ao valor absoluto da diferença das raízes de *f* .

16) (UFSC – SC) Determine o valor de x para que o determinante da matriz C = A x B^t seja igual a 602, onde: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} x-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ e B^t é a matriz transposta de B.

17) No sistema matricial dado por $\begin{cases} X+Y=3A \\ X-Y=2B \end{cases}$ onde A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ os determinantes das matrizes X e Y serão, respectivamente:

a) 9, – 4
b) – 4, 9
c) – 3, -9
d) 9, – 3
e) – 9, –3

Exercícios estilo ENEM

18) (UFC-CE) Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo. Então os valores de c que tornam singular a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$ são:

a) 1 e 3
b) 0 e 9
c) –2 e 4
d) –3 e 5
e) –9 e – 3

19) (UNESP- SP) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio p(x), em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, onde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Com base na fórmula p(x) = det A, determine:

a) o peso médio de uma criança de 5 anos;

b) a idade mais provável de uma criança cujo peso é 30 kg.

20) (UDESC – SC) Os valores de *x* que satisfazem a inequação det $\begin{bmatrix} \log_2(x-2) & 2 & \log_{\frac{1}{2}}(x-3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \le 1$

a) $\{x \in \Re / x > 3\}$
b) $\{x \in \Re / 1 \le x \le 4\}$
c) $\{x \in \Re / 3 < x \le 4\}$
d) $\{x \in \Re / x < 3 \text{ ou } x > 4\}$
e) $\{x \in \Re / x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

GABARITO – AULA 03

1) d **2)** 05 **3)** d

4) $\Rightarrow p(x)=(x^2-9)(x-4) \Rightarrow \begin{cases} x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \\ x-4=0 \Rightarrow x=+4 \end{cases}$

5) a) 7 b) 5 c) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 18 & 25 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$ e) 16 f) 35

6) Falso **7)** a) – 102 b) – 102 **8)** c **9)** b **10)** a) 14 b) 11 c) 2 d) 15 **11)** 08 **12)** 19 **13)** c **14)** a) {5} b) {0, 5} c) {5} d) {-2, 6} e) – 1 < x < 7 **15)** b **16)** 56 **17)** d **18)** d **19)** a) 18 b) 11 **20)** c

AULA 04

PROPRIEDADE DOS DETERMINANTES

1) Casos onde o determinante é nulo

- Se uma matriz possui uma fila de elementos iguais a zero, o determinante é nulo

Exemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- Se uma matriz possui duas filas paralelas iguais, então o determinante é nulo.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{C_1 = C_3}$

- Se uma matriz possui duas filas paralelas proporcionais, o determinante será nulo.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \\ 7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{L_2 = 2.L_1}$

- Se uma fila de uma matriz for uma combinação linear de duas outras.

Exemplos: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{L_3 = L_1 + L_2}$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 12 & 5 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{L_3 = 2.L_1 + L_2}$

2) Se trocarmos entre si a posição duas filas paralelas de uma matriz, o determinante muda de sinal.

Se $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 10$, então $\begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix} = -10$

3) Se multiplicarmos uma fila de uma matriz por um número k, o determinante da nova matriz fica multiplicado por k.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{5}.2 & \mathbf{5}.4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{5}.2 = 10$

Consequências:

- No cálculo dos determinantes, é possível colocar o fator comum em evidência.

$$\begin{vmatrix} 18 & 6 & 12 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.6 & 3.2 & 3.4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3.\underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}}_{(-72)} = 3.(-72) = -216$$

Se multiplicarmos uma matriz quadrada de ordem **n** por um número **k** o determinante fica multiplicado pelo número $\mathbf{k^n}$.

$$\boxed{\det(k.A) = k^n.\det A}$$

4) O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.4.1 = 12$

5) Se A e B são duas matrizes de ordem n, o determinante do produto de A por B é o produto do determinante da matriz A pelo determinante da matriz B, ou seja:

$$\boxed{\det(A.B) = \det(A).\det(B)}$$

(Teorema de Binet)

Exemplo:

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\det A=5}, \underbrace{B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\det B=2} \text{ e } \underbrace{A.B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}}_{\det(A.B)=10}$$

$$\underbrace{\det(A.B)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5}.\underbrace{\det B}_{2}$$

CUIDADO: $\boxed{\det(A \pm B) \neq \det(A) \pm \det(B)}$

6) Soma de determinantes

Sejam A, B e C três matrizes quadradas de ordem **n**. Considere que:

- Apenas uma das filas das três matrizes são diferentes, sendo as demais iguais.
- Se essa fila diferente da matriz C for igual à soma das filas correspondentes de A e B, temos:

$\boxed{\text{det C = det A + det B}}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\oplus$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Observe que: det C = det A + det B

7) Casos onde o determinante não se altera

- O determinante de uma matriz não se altera quando trocamos de forma ordenada e simultânea as linhas pelas colunas, ou seja:

$\boxed{\det A = \det A^t}$

- Se somarmos a uma fila de **A** uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A', tal que det A' = det A

(Teorema de Jacobi)

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 15$

Multiplicando a terceira linha por 2 e adicionando à

primeira, obtemos A': $A' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 15$

Em Sala

01) (PUC – RS) Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ m & t & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m & t & k \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ e det A = 4, o determinante de B é igual a:

a) $-\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) 4
e) – 4

02) Sabe-se que $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2$. Determine o valor de

$$\begin{vmatrix} 2a & -3d & 4g \\ 2b & -3e & 4h \\ 2c & -3f & 4i \end{vmatrix}$$

03) Sabe-se que M é uma matriz quadrada de ordem 3 e que det(M) = 5. Então det (2M) é igual a:

a) 20
b) 10
c) 18
d) 40
e) 27

04) (UFSC – SC) Sendo A uma matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$, calcule det (A).

Testes

05) Sabe-se que $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 10$. Determine o valor de

$$\begin{vmatrix} 2a & d & 3g \\ 2b & e & 3h \\ 2c & f & 3i \end{vmatrix}.$$

06) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule:

a) det A

b) det 2ª

c) det A^2

07) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

08) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} 2a & 3d & -g \\ 2b & 3e & -h \\ 2c & 3f & -i \end{vmatrix}$

09) Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ e

B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) det A

b) det B

c) det (A.B)

d) det (4A)

e) det (2B)

10) (ACAFE – SC) Analise as afirmações abaixo, sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

I) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

II) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -6$

III) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$

IV) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

Assinale a alternativa correta

a) Apenas I, III e IV são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação III é verdadeira.
c) Apenas I e II são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras

11) (UDESC – SC) Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$, então det(A) é igual a:

a) 9
b) 0
c) 3
d) 6
e) 27

12) (UDESC – SC) Dentre as afirmações sobre matrizes quadradas, temos:

I. O determinante de uma matriz com duas linhas iguais é nulo
II. O determinante de uma matriz não se altera se uma das linhas for multiplicada por 2 e outra linha for dividida por 2
III. Se, numa matriz, uma linha for a soma de duas outras linhas, o seu determinante é nulo
IV. O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta
V. Se o determinante de uma matriz é zero, então uma de suas linhas é nula

Tendo por base as afirmações dadas, assinale a alternativa verdadeira.

a) só IV e V estão incorretas
b) todas estão corretas
c) só I e V estão corretas
d) todas estão incorretas
e) só V está incorreta

13) Sendo A uma matriz dada por: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, calcule det (A)

14) (UDESC – SC) Considerando que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $X - \frac{1}{2}AB = 2C$ o valor do determinante de X é:

a) $\frac{285}{2}$
b) $\frac{325}{2}$
c) $\frac{335}{2}$
d) $\frac{245}{2}$
e) $\frac{315}{2}$

15) (UFSC – SC) Sejam A, B e C matrizes. Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. A.B só é possível quando A e B forem matrizes de mesma ordem.
02. $(A^t)^t . A^{-1} = I$
04. det(A + B) = detA + detB
08. Se A é uma matriz de ordem n x m e B é de ordem m x k, então A + B é uma matriz de ordem n x k.
16. Se A é uma matriz de ordem n, então det (kA) = k^n detA, $k \in R$.

16) Dadas as matrizes A e B tais que: A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ o valor do determinante de A.B é:

17) (UEPG – PR) Dada a matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$, onde aij = $\begin{cases} 4, \text{se } i \geq j \\ 0, \text{se } i < j \end{cases}$. Então é correto afirmar:

01. det (A) = 64
02. (A).(A^t) é uma matriz quadrada de ordem 6
04. det(2A) = 8 det(A)
08. det(A) $\neq$ det(A^t)
16. $A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Exercícios estilo ENEM

18) (IFSC – SC) Após assistir a uma aula sobre determinantes de matrizes, Pedro decidiu codificar sua senha bancária. A senha é composta pelos números A, B, C e D, justapostos nessa ordem e codificados através dos determinantes abaixo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 25 \\ 0 & 3 & -8 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & -3 \\ 4 & 8 & -2 & -1 \\ 8 & 16 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sobre a senha de Pedro, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. A senha possui dois dígitos nulos.
02. A senha possui seis dígitos.
04. O último dígito da senha é zero.
08. Os dígitos da senha estão em ordem crescente.
16. A + B +C + D = 45 .
32. Os dois primeiros dígitos da senha são 1 e 5.

19) (UDESC – SC) Considere o sistema de equações $\begin{cases} 2^{x+2} + 2^{x-1} = 18 \\ (\det A)x + (\det B)y = \det(A.B) \end{cases}$, onde A e B são as matrizes definidas por A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se (x, y) é a solução deste sistema, então o produto xy é igual a:

a) 4
b) 24
c) – 12
d) 12
e) – 4

20) (UDESC – SC) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+1 & x^2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se I representa a matriz identidade de ordem dois, então o produto entre todos os valores de $x \in \Re$ que satisfazem a equação det(A.B) + det (B + I) = det (2.B^T) é igual a:

a) $-\frac{4}{3}$

b) $-\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{2}$

e) $-\frac{1}{3}$

GABARITO – AULA 04

1) e **2)** – 48 **3)** d **4)** 70 **5)** 60
6) a) 4 **b**) 32 c) 16
7) 08 **8)** – 12
9) a) 6 b) 15 c) 90 d) 384 e) 120
10) a **11)** e **12)** e **13)** – 60 **14)** d
15) 18 **16)** 192 **17)** 05 **18)** 50 **19)** a **20)** b **21)** e
22) e **23)** d **24)** 01 **25)** c

AULA 05

INVERSÃO DE MATRIZES

1. Definição

Considere A e B duas matrizes quadradas de ordem **n**. Se A.B = B.A = I_n , dizemos que B é a matriz inversa de A e indicaremos por A^{-1}

$$\boxed{\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}}$$

OBSERVAÇÕES:

- Uma matriz só possui inversa se o seu determinante for diferente de zero, sendo assim, a matriz é chamada de inversível.
- Se o determinante da matriz for igual a zero, a matriz não admite inversa, sendo assim, chamada de singular.
- Se a matriz A é inversível então ela é quadrada.
- Se a matriz A é inversível, então a sua inversa é única.

2. Obtenção da Matriz Inversa

A inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Impondo que: $\mathbf{A.A^{-1} = I_n}$, vem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 5a+3c=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2b+d=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sitemas, vem:

a = 3, b = − 1, c = − 5, d = 2

Assim sendo: $A = \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Observe que: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observação:

O processo para se obter a inversa de uma matriz por vezes pode se tornar trabalhoso, pois de um modo geral podemos recair na resolução de ***n*** sistemas de ***n*** equações e ***n*** incógnitas. Segue abaixo, um processo que simplifica esse cálculo.

Teorema

A matriz inversa A^{-1} de uma matriz A é dada por:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\overline{A}} \quad \text{com } \det A \neq 0$$

$\overline{A}$ representa a matriz adjunta.

Matriz Adjunta é a matriz transposta da matriz dos cofatores de A.

Consequências:

- Sendo: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{\det A} & -\dfrac{b}{\det A} \\ -\dfrac{c}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{pmatrix}$
- Cada elemento b_{ij} da matriz inversa de A, pode ser calculado aplicando a relação abaixo:

$$\boxed{b_{ij} = \frac{1}{\det A}.C_{ji}}$$

onde C_{ji} é o cofator do elemento a_{ji}

3. Determinante da Matriz Inversa

Sendo: $\boxed{A_n = B_n \rightarrow \det A = \det B}$

Acompanhe, agora, o desenvolvimento abaixo:

$$A.A^{-1} = I_n$$

$$\det\left(A.A^{-1}\right) = \det\left(I_n\right)$$

Aplicando o teorema de Binet, vem:

$$\det(A).\det\left(A^{-1}\right) = 1$$

Então: $$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

4. Propriedades

Sendo A e B duas matrizes de ordem **n** inversíveis, valem as seguintes propriedades:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

3) $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$

Em Sala

01) Determine a inversa da matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

02) Assinale V para as verdadeiras e F para as Falsas:

a) (   ) (UFSC – SC) Sendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, então o produto entre a matriz inversa de *A* e a matriz transposta de *B* é a matriz $A^{-1}.B^t=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$.

b) ( ) (UFSC – SC) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz D = A.B não admite inversa.

03) Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine o determinante da matriz inversa de A.

04) A matriz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, na qual x é um número real, é inversível se, e somente se:

a) x = 0
b) x = 1
c) x = -1
d) $x \neq \pm 1$
e) $x \neq 2$

Testes

05) Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

06) A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ admite inversa?

07) Calcule o determinante da inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

08) A inversa da matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

09) O maior elemento da inversa da matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ é:

a) 2
b) 5/6
c) 1/5
d) 1/6
e) 1/3

10) Calcule o determinante da inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11) (UFSC–SC) Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. Se K = (k_{ij}) é uma matriz quadrada de ordem 2 dada por $k_{ij} = 2^{2i+j}$ para $i < j$ e $k_{ij} = i^2 + 1$ para $i \geq j$, então K é uma matriz inversível.
02. Se A e B são matrizes tais que A.B é a matriz nula, então A é a matriz nula ou B é a matriz nula.
04. Sejam as matrizes M e P, respectivamente, de ordens 5 x 7 e 7 x 5. Se R = M.P, então a matriz R^2 tem 625 elementos.
08. Chamamos "traço de L" e anotamos tr(L) a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada L; então $tr(L) = tr(L^t)$.

12) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 1 & x+2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A^{-1} = 0{,}25$, então x :

a) 0
b) – 2
c) 2
d) 4
e) – 1

13) (UEL – PR) Se A é uma matriz quadrada 2x2 de determinante 10. Se B = – 2.A e C = 3. B^{-1}, onde B^{-1} é a matriz inversa de B, então o determinante de C é:

a) – 60
b) $-\dfrac{3}{20}$
c) $-\dfrac{20}{3}$
d) $\dfrac{9}{40}$
e) $\dfrac{40}{9}$

14) Determine qual das matrizes abaixo é singular.

$a)\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$b)\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$c)\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$

$d)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15) (U.F. VIÇOSA) Sejam as matrizes A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e M = $\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, onde x e y são números reais e M é a matriz inversa de A. Então o produto x.y é:

a) 3/2
b) 2/3
c) 1/2
d) 3/4
e) 1/4

16) Os valores de k para que a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ não admita inversa são:

17) (UDESC – SC) Sejam A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) matrizes quadradas de ordem 3 de tal forma que:

• $a_{ij} = i + j$
• $b_{ij} = j$ e os elementos de cada coluna, de cima para baixo, formam uma progressão geométrica de razão 2.

Analise as proposições abaixo:

( ) $A = A^t$
( ) Os elementos de cada uma das linhas da matriz B estão em progressão aritmética.
( ) Os elementos de cada uma das linhas e de cada uma das colunas da matriz *AB* estão em progressão aritmética.
( ) Existe a matriz inversa da matriz $C = A - B$.

O número de proposição(ões) verdadeira(s) é:

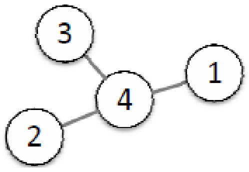
a) 0
b) 3
c) 1
d) 2
e) 4

18) (IFSC – SC) A respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, analise as proposições e assinale no cartão resposta a soma da(s) CORRETA(S).

01. A matriz é simétrica
02. A matriz é singular
04. A inversa da matriz é $\begin{bmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
08. O determinante da matriz A é 33
16. A matriz A é uma matriz quadrada de ordem 3x3
32. A transposta de A é $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Exercícios estilo ENEM

19) (IFSC – SC) O diagrama abaixo representa as relações de amizade entre Ana (1), Beatriz (2), Carla (3) e Diana (4).



Se dois círculos estão ligados por um segmento de reta, isso significa que existe uma relação de amizade entre as duas pessoas. Caso contrário, não existe relação de amizade. Por exemplo: Ana é amida de Diana, mas Ana não é amiga de Carla. Considera-se também que uma pessoa não mantém relação de amizade consigo mesma.

Deseja-se expressar essas relações através de uma matriz $M = (m_{ij})_{4x4}$ tal que:

$m_{ij} = 1$, se i é amiga de j
$m_{ij} = 0$, se i não é amiga de j

Em relação à matriz M, assinale no cartão resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas

01. M é uma matriz simétrica
02. M é inversível.
04. det(M)=0.
08. O traço de M é igual a 6.
16. M é a matriz identidade.

20) (UFPEL) Pode-se utilizar matrizes e suas inversas para codificar uma mensagem. Uma proposta para aquisição de um determinado equipamento, será enviada pela Internet. Por segurança, esse valor será transmitido pela matriz A x B = $\begin{pmatrix} 112 & 105 \\ 44 & 41 \end{pmatrix}$. A mensagem recebida deverá ser codificada através da relação A^{-1} x (A x B) = B em que B é a matriz original da mensagem. Com base no texto e em seus conhecimentos, considerando que a matriz codificadora da mensagens é A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e que o valor da proposta é dado pela soma dos elementos da matriz original, é correto afirmar que essa quantia, em mil reais, é igual a

a) 11.
b) 49.
c) 47.
d) 13.
e) 15.

GABARITO – AULA 05

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

2) a) V b) V
3) 1/26 **4)** d
5) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

6) Não, pois det A = 0
7) 1/15 **8)** a **9)** b **10)** 1/30 **11)** 09
12) e **13)** d **14)** c **15)** a **16)** 1 e 2 **17)** b
18) 21 **19)** 03 **20)** c

AULA 06

SISTEMAS LINEARES - RESOLUÇÃO -

1) Equação Linear

Equação Linear é toda equação da forma:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n = b}$$

onde:

- **a_1, a_2, a_3, ...,a_n** são números reais que recebem o nome de coeficientes das incógnitas **x_1, x_2, x_3 ...., x_n**.
- **b** é o termo independente.

Observações:

- Costuma-se por conveniência indicar as incógnitas **x_1, x_2, x_3**,…respectivamente por **x, y, z,..**
- Se b = 0, dizemos que a equação é linear homogênea.

Exemplos de equações lineares:

a) 2x + 5y – 3z = 4
incógnitas: x, y e z
coeficientes: 2, 5, -3
termo independente: 4

b) 5x - z = 0
incógnitas: x e z
coeficientes: 5, -1
termo independente: 0

Exemplos de equações não lineares:

a) $3x^2 + 4y - 5z = 5$
b) 2x + 3xy + 1 = 0
c) $4x + 3\sqrt{y} + \frac{2}{z} = 1$

Solução de Uma Equação Linear

Considere a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n = b$
A sequência ou ênupla (α_1, α_2,......., α_n) é solução da equação se $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + ...\alpha_nx_n = b$ for verificada.

Exemplos:

- O par (2, 1) é uma das soluções para a equação 3x – y = 5, pois 3.2 – 1 = 5
- A terna (0, 4, 1) é uma das soluções para a equação x + 2y + 3z = 11, pois 0 + 2.4 + 3.1 = 11
- O par (2, 4) **não** é solução para a equação 2x + y = 0, pois 2.2 + 4 ≠ 0

IMPORTANTE:

- Equação do tipo $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ...0x_n = 0$ admite qualquer ênupla como solução.
- Equação do tipo $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ...0x_n = k$, com $k \neq 0$, não admite nenhuma solução.

2) Sistemas Lineares

Sistema linear é um conjunto de duas ou mais equações lineares.
Um sistema linear com **m** equações e **n** incógnitas é representado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

- x_1, x_2, ..., x_n são as incógnitas;
- a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais que representam os coeficientes;
- b_1, b_2, ..., b_n representam os termos independentes.

Observações:

1) Se b_1, b_2, ..., b_n = 0 dizemos que o sistema é homogêneo.

2) Um Sistema linear pode ser indicado matricialmente. Podemos escrever o sistema acima utilizando as matrizes. Veja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$ em que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ é a matriz formada pelas incógnitas;

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ é a matriz formada pelos termos independentes.

Assim, por exemplo, a forma matricial do sistema $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solução de um Sistema Linear

A sequência ou ênupla (α_1, α_2,......., α_n) é solução do sistema se for simultaneamente solução de todas as equações do sistema.

Por exemplo, o par (2, 1), é solução para o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ pois $\begin{cases} 2.2 + 1 = 5 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$

Uma solução evidente para o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases}$ é a terna (0, 0, 0). Esta solução é chamada solução trivial.

Classificação de um Sistema Linear

Um Sistema Linear pode ser classificado de acordo com o número de soluções que ele apresenta. Sendo assim ele pode ser:

- POSSÍVEL
  - DETERMINADO (1 solução)
  - INDETERMINADO (infinitas soluções)
- IMPOSSÍVEL — Não Admite Solução

Exemplos:

1) O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ é possível e determinado pois admite solução única que é o par ordenado (3, 2).

2) O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ é possível e indeterminado pois admite infinitas soluções como os pares ordenados (3, 2); (2, 3); (1, 4); (k, 5 – k).

3) O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$ é impossível, pois não existem número que simultaneamente somados dão 5 e 7.

3) Regra de Cramer

A Regra de Cramer consiste num método para se resolver sistemas Lineares de **n** equações e **n** incógnitas. Seja o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para obtermos a solução para esse sistema vamos fazer alguns cálculos. Acompanhe:

- **det S**

Determinante associado a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\textbf{det S} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- **det X_i**

Determinante associado a matriz obtida a partir de S, trocando a coluna dos coeficientes de X_i, pela coluna dos termos independentes do sistema.

$$\textbf{det } X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

:

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

A solução do Sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det S} \qquad x_2 = \frac{\det X_2}{\det S} \cdots\cdots x_n = \frac{\det X_n}{\det S}$$

Veja que só é possível aplicar a Regra de Cramer em sistemas **n x n** em que det S ≠ 0. Esses sistemas são denominados **normais.**

Exercício Resolvido

1) Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10 \quad \det X = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 \quad \det Z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 30$$

Aplicando a regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{\det X}{\det S} \qquad y = \frac{\det Y}{\det S} \qquad z = \frac{\det Z}{\det S}$$

$$x = \frac{10}{10} = 1 \qquad y = \frac{20}{10} = 2 \qquad z = \frac{30}{10} = 3$$

S = {(1, 2, 3)}

Em Sala

01)(UNIMONTES MG)

Se (x_0, y_0, z_0) é solução do sistema $\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 5 \end{cases}$, então y_0 vale

a) 2.
b) 0.
c) –3.
d) –1.

02) (UFSC)

Se a terna *(a, b, c)* é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$, então calcule o valor numérico de *(a + b + c)* e assinale o valor obtido no cartão-resposta.

03) (Anhembi Morumbi SP)

A diferença das idades de dois irmãos é 12 anos. Quando a soma de suas idades for 50 anos, a idade do mais novo, em anos, será

a) 20.
b) 19.
c) 18.
d) 21.
e) 22.

04) (UFT TO)

Dado o sistema de equações.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{2x-y-2} - \dfrac{2}{x-y-1} = 4 \\ \dfrac{1}{2x-y-2} + \dfrac{3}{x-y-1} = 4 \end{cases}$$

Determine o valor de $x - y$.

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

Testes

05) Determine o conjunto solução de cada sistema abaixo:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

06) (UNISINOS – RS)

Numa loja, todas as calças têm o mesmo preço, e as camisas também, sendo o preço de uma calça diferente do de uma camisa. Ricardo comprou 1 calça e 2 camisas e pagou R$240,00. Roberto comprou 2 calças e 3 camisas e pagou R$405,00. Qual o preço, em reais, de uma calça e uma camisa, respectivamente?

a) 70 e 95. b) 75 e 90. c) 80 e 85.
d) 85 e 80. e) 90 e 75.

07) (UFSJ)

Observe o sistema de variáveis x, y, z e t.

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+z=0 \\ x+y+t=2 \\ x+z+t=4 \end{cases}$$

Com base no sistema, é **CORRETO** afirmar que sua solução, considerando x, y, z e t, nessa ordem, forma uma progressão

a) geométrica decrescente.
b) aritmética decrescente.
c) geométrica crescente.
d) aritmética crescente.

08) (UNESP – SP)

Uma família fez uma pesquisa de mercado, nas lojas de eletrodomésticos, à procura de três produtos que desejava adquirir: uma TV, um freezer e uma churrasqueira. Em três das lojas pesquisadas, os preços de cada um dos produtos eram coincidentes entre si, mas nenhuma das lojas tinha os três produtos simultaneamente para a venda. A loja A vendia a churrasqueira e o freezer por R$ 1.288,00. A loja B vendia a TV e o freezer por R$ 3.698,00 e a loja C vendia a churrasqueira e a TV por R$ 2.588,00. A família acabou comprando a TV, o freezer e a churrasqueira nestas três lojas. O valor total pago, em reais, pelos três produtos foi de

a) 3.767,00
b) 3.777,00
c) 3.787,00.
d) 3.797,00
e) 3.807,00.

09) Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x+y-z=-4 \\ x+3y-2z=-4 \\ 4x+y+z=0 \end{cases}$ os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) formam uma progressão geométrica
b) formam uma progressão aritmética
c) são iguais entre si
d) não existem
e) têm uma soma nula

10) (UNIOESTE – PR) Um fabricante de ração deseja fabricar três tipos de ração. Para isto ele dispõe de três tipos de mistura, Mistura 1, Mistura 2 e Mistura 3. Cada quilograma da Ração 1 custa R$13,00 e contém 200 gramas da Mistura 1, 200 gramas da Mistura 2 e 600 gramas da Mistura 3. Cada quilograma da Ração 2 custa R$11,00 e contém 200 gramas da Mistura 1 e 800 gramas da Mistura 3. Cada quilograma da Ração 3 custa R$16,00 e contém 600 gramas da Mistura 2 e 400 gramas da Mistura 3. Em virtude do disposto acima, é correto afirmar que

a) um quilograma da Mistura 1 custa R$30,00.
b) o custo de um quilograma da Mistura 1 somado com o custo de um quilograma da Mistura 3 é R$25,00.
c) um quilograma da Mistura 2 custa R$11,00.
d) somando-se os custos de um quilograma da Mistura 1, um quilograma da Mistura 2 e um quilograma da Mistura 3, obtém-se R$50,00.
e) um quilograma da Mistura 3 custa R$22,00.

11) (UEPG – PR) Se Bruna der 6 reais a Ana, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Carla perder 2 reais, ficará com a mesma quantia que tem Ana. Se Bruna perder um terço do que tem, ficará com a mesma quantia que tem Carla. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01. As três juntas têm mais de 50 reais.
02. Ana tem menos de 20 reais.
04. Carla tem mais de 15 reais.
08. Bruna tem mais do que Ana e Carla juntas.

12) Num determinado mês, em uma unidade de saúde, foram realizadas 58 hospitalizações para tratar pacientes com as doenças A, B e C. O custo total em medicamentos para esses pacientes foi de R$39.200,00. Sabe-se que, em média, o custo por paciente em medicamentos para a doença A é R$450,00, para a doença B é R$800,00 e para a doença C é R$1.250,00. Observa-se também que o número de pacientes com a doença A é o triplo do número de pacientes com a doença C. Se a, b e c representam, respectivamente, o número de pacientes com as doenças A, B e C, então o valor de $a-b-c$ é igual a:

a) 14. b) 24. c) 26. d) 36. e) 58.

13) (UDESC – SC) Um Pet Shop tem cães, gatos e passarinhos à venda, totalizando 38 cabeças e 112 patas. Sabe-se que nenhum destes animais apresenta algum tipo de deficiência física e que a metade do número de passarinhos mais o número de cães supera em duas unidades o número de gatos. Se o preço de venda de cada cão, gato e passarinho é, respectivamente, 500, 90 e 55 reais, então, ao vender todos estes animais, o Pet Shop terá arrecadado:

a) 4770 reais
b) 3950 reais
c) 6515 reais
d) 5250 reais
e) 5730 reais

14) (IFSC – SC) Uma empresa comercializa três modelos de parafusos: tipo A, tipo B e tipo C. Os parafusos são vendidos em embalagens com 10 unidades que contêm parafusos do mesmo tipo. O *quadro 1* mostra a quantidade de embalagens vendidas de acordo com os meses e o *quadro 2* mostra as receitas mensais obtidas com as vendas.

Quadro 1: Quantidade de embalagens vendidas

	Julho	**Agosto**	**Setembro**	**Outubro**
Tipo A	200	400	600	400
Tipo B	700	500	300	200
Tipo C	500	800	200	500

Quadro 2: Receitas mensais

Mês	**Receita**
Julho	R$ 1500,00
Agosto	R$ 2250,00
Setembro	R$ 1650,00
Outubro	R$ 1650,00

Sabendo que não houve variação de preços no período, assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Uma embalagem do parafuso B é vendida por R$ 0,50.
02. O parafuso do tipo C é o mais caro dentre os três tipos.
04. O preço unitário de um parafuso do tipo A é de R$ 0,20.
08. O parafuso B custa mais caro que o A.
16. O parafuso C custa o dobro do parafuso B.
32. Se um cliente comprar duas embalagens do parafuso A e duas do parafuso B pagará por elas um total de R$ 5,00.

15) Sabe-se que x, y e z são números reais. Se $(2x+3y-z)^2+(2y+x-1)^2+(z-3-y)^2=0$, então $x+y+z$ é igual a:

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

16) (EPCAR) Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos. Em 29 de julho de 2017, a razão entre as idades de José e Luiz, nessa ordem, será

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{9}{7}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{27}{20}$

17) (IFSC – SC) Uma loja de doces comercializa três variedades de bombons (recheados, trufados e mesclados) em caixas de três tamanhos diferentes (pequena, média e grande). O valor de cada caixa é dado pela soma dos preços unitários de cada bombom. O quadro abaixo mostra o conteúdo e o valor de cada caixa comercializada:

Caixa	Bombons contidos em cada caixa
Pequena- R$ 19,00	5 recheados, 3 mesclados e 3 trufados
Média - R$ 36,00	10 recheados, 4 mesclados e 6 trufados
Grande - R$ 50,00	12 recheados, 18 mesclados e 4 trufados

Com base na informações referentes às caixas de bombons comercializadas, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. O valor unitário do bombom trufado é igual ao dobro do bombom mesclado.
02. O bombom recheado custa R$ 2,00 a unidade.
04. Os três tipos de bombons têm valores unitários distintos.
08. Um dos tipos de bombom custa R$ 1,00 a unidade.
16. O bombom trufado custa R$ 2,50 a unidade.
32. Os valores unitários de cada bombom podem ser expressos por números inteiros.

Exercícios Estilo ENEM

18) (UNICAMP – SP) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

19) (UFPR – PR) Uma bolsa contém 20 moedas, distribuídas entre as de 5, 10 e 25 centavos, totalizando R$ 3,25. Sabendo que a quantidade de moedas de 5 centavos é a mesma das moedas de 10 centavos, quantas moedas de 25 centavos há nessa bolsa?

a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

20) (UFRGS – RS) Inovando na forma de atender aos clientes, um restaurante serve alimentos utilizando pratos de três cores diferentes: verde, amarelo e branco. Os pratos da mesma cor custam o mesmo valor. Na mesa A, foram consumidos os alimentos de 3 pratos verdes, de 2 amarelos e de 4 brancos, totalizando um gasto de R$ 88,00. Na mesa B, foram consumidos os alimentos de 2 pratos verdes e de 5 brancos, totalizando um gasto de R$ 64,00. Na mesa C, foram consumidos os alimentos de 4 pratos verdes e de 1 amarelo, totalizando um gasto de R$ 58,00. Comparando o valor do prato branco com o valor dos outros pratos, verifica-se que esse valor é:

a) 80% do valor do prato amarelo.
b) 75% do valor do prato amarelo. 2
c) 50% do valor do prato verde.
d) maior que o valor do prato verde.
e) a terça parte do valor da soma dos valores dos outros pratos

GABARITOS – Aula 06
1) D 2) 06 3) B 4) D
5) a) S = {(2, 3)} b) S = {(2, 3, 4)} c) S = {(1, 2, 3)}
6) e 7) d 8) c 9) b 10) b 11) 07 12) a 13) a
14) 37 15) d 16) b 17) 43 18) a 19) d 20) a

AULA 07

Sistema Linear Escalonado

Um sistema linear é dito escalonado se em cada equação, houver pelo menos um coeficiente não nulo e o número de coeficientes iniciais não nulos aumenta de equação para equação.

Exemplos:

1) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 4y=8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+6y+3z=7 \\ 2y+5z=1 \\ 8z=15 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+7y+8z+9t=-1 \\ 3z+8t=2 \\ -t=3 \end{cases}$

Resolução de um Sistema Linear Escalonado

Observe o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+2y+4z=17 \\ 3y+z=9 \\ 4z=12 \end{cases}$$

Perceba que o sistema está na forma escalonada. Sua resolução, neste caso, é feita de forma imediata por substituições, acompanhe:

$$\begin{cases} x+2y+4z=17 \quad (I) \\ 3y+z=9 \quad (II) \\ 4z=12 \quad (III) \end{cases}$$

Da equação (III), temos z = 3. Substituindo z = 3 na equação (II), vem:
$3y + 3 = 9 \to y = 2$
Substituindo y = 2 e z = 3 na equação (I), vem:
$x + 2.2 + 4.3 = 17 \to x = 1$.
Logo, a solução do sistema é o terno (1, 2, 3)

$\therefore$ **S = {(1, 2, 3)}**

Observe que o sistema acima é Possível e Determinado.

Acompanhe agora, a resolução do sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=2 \end{cases}$

Perceba também, que o sistema está na forma escalonada. Sua resolução é feita fazendo as devidas substituições, acompanhe:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \,(I) \\ y+3z=2 \;(II) \end{cases}$$

Fazendo em (II) $y = 2 - 3z$ e substituindo em (I), temos:
$x + 2 - 3z + z = 4 \to x = 2 + 2z$.

Logo: $x = 2 + 2z$ e $y = 2 - 3z$.
Dizemos, neste caso, que z é a variável livre do sistema. Atribuindo a z um valor **k** real arbitrário , temos:
$x = 2 + 2k$ e $y = 2 - 3k$.
Assim, o conjunto solução do sistema é:

$S = \{(2 + 2k, 2 - 3k, k), \forall k, \ k \in \Re\}$

Se desejarmos obter algumas das infinitas soluções desse sistema, basta atribuirmos a **k** valores reais, por exemplo:
Para k = 1, temos como solução a terna (4, – 1, 1);
Para k = 2, temos como solução a terna (6, – 4, 2).

Observe que o sistema acima é Possível e Indeterminado.

OBSERVAÇÃO: O Grau de indeterminação de um sistema linear indeterminado indica o número de variáveis livres. Esse número pode ser obtido pela diferença n – m, onde n indica a quantidade de equações e m a quantidade de incógnitas do sistema linear na forma escalonada.

5) Sistemas Equivalentes-Escalonamento Sistemas Equivalentes

Dois Sistemas são ditos equivalentes se e somente se:

- São Possíveis e admitem as mesmas soluções, ou
- São Impossíveis.

Exemplo: S_1: $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ S_2: $\begin{cases} 4x+y=14 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

S_1 e S_2 são equivalentes, pois ambos são determinados e admitem como solução o mesmo par ordenado (3, 2).

Sabendo que sistemas equivalentes possuem a mesma solução, podemos transformar um sistema linear qualquer em um outro sistema equivalente, no entanto, na forma escalonada, com o intuito de obtermos sua solução de maneira mais conveniente. Esse processo é chamado escalonamento e sua aplicação baseia-se em algumas *tranformações elementares*.

Transformações Elementares

Vamos obter sistemas equivalentes ao sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ através de três transformações elementares.

- Transformação 1: Trocar de posição duas equações.

$$S_1: \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \quad e \quad S_2: \begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Observe que S_1 e S_2 são equivalentes.

- Multiplicar uma equação por um número real k diferente de zero.

$$S_1: \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \quad e \quad S_2: \begin{cases} 2x+2y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

S_1 e S_2 são equivalentes. A equação 2x + 2y = 10 do sistema S_2, foi obtida multiplicando por 2 os dois membros da equação x + y = 5 do primeiro sistema.

- Adicionar a uma equação uma outra previamente multiplicada por um número real k.

$$S_1: \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \quad e \; S_2: \begin{cases} x+y=5 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$$

S_1 e S_2 são equivalentes. A equação 5x + 2y = 19 do sistema S_2, foi obtida adicionando à segunda equação do sistema S_1 com o triplo da primeira equação.

Como vimos então, podemos transformar qualquer sistema linear em outro equivalente. Vamos utilizar essas tranformações afim de obtermos um sistema escalonado.

Escalonamento

Acompanhe o escalonamento, a resolução e a classificação dos sistemas abaixo:

1) $\begin{cases} 2x+3y+4z=20 \\ x+y+z=6 \\ -x+y+2z=7 \end{cases}$

Resolução:

Passo 1: É conveniente trocar de posição as duas primeiras equações, afim de que o coeficiente da 1ª incógnita na 1ª equação seja 1.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+4z=20 \\ -x+y+2z=7 \end{cases}$$

Passo 2: Vamos repetir a primeira equação e eliminar a variável x da segunda e terceira equação. Acompanhe:

(Segunda Equação – 2.Primeira Equação)

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2z=8 \\ -x+y+2z=7 \end{cases}$$

(Terceira Equação + Primeira Equação)

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2z=8 \\ \quad 2y+3z=13 \end{cases}$$

Passo 3: Repetir as duas primeiras equações e eliminar a variável y da 3ª equação. Acompanhe:

(Terceira Equação – 2. Segunda Equação)

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2z=8 \\ \qquad -z=-3 \end{cases}$$

Perceba que o sistema está na forma escalonada. Sua resolução, neste caso, é feita de forma imediata por substituições, acompanhe:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2z=8 \\ \qquad -z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2z=8 \\ \qquad z=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y+2.3=8 \\ \qquad z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y=2 \\ \quad z=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2+3=6 \\ \quad y=2 \\ \quad z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é o terno (1, 2, 3)

$\therefore$ **S = {(1, 2, 3)}**

Observe que o sistema acima é Possível e Determinado.

2) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$

Resolução:

Passo 1: Vamos repetir a primeira equação e eliminar a variável x da segunda equação. Acompanhe:

(Segunda Equação – 2.Primeira Equação)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \quad -y+z=-1 \\ \quad\ y-z=1 \end{cases}$$

Passo 2: Repetir as duas primeiras equações e eliminar a variável y da 3ª equação. Acompanhe:

(Terceira Equação + Segunda Equação)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \quad -y+z=-1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$$

Note que a equação ***0x + 0y + 0z = 0*** é sempre verificada, podemos, então suprimi-la do sistema. O sistema possui, então, infinitas soluções. Podemos escrever uma solução geral para o sistema. Acompanhe:

$$\begin{cases} x+y=1 \quad \text{(I)} \\ \quad -y+z=-1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) vem: y = z + 1.
Substituindo y = z + 1 em (I), vem:
x = – z.
Atribuindo a z um valor **k** real arbitrário , temos:
x = – k e y = k + 1
Assim, o conjunto solução do sistema é:

$S = \{(-k,\ k+1,\ k), \forall k,\ k \in \Re\}$

Se desejarmos obter algumas das infinitas soluções desse sistema, basta atribuirmos a **k** valores reais, por exemplo:

Para k = 1, temos como solução a terna (– 1, 2, 1);
Para k = 2, temos como solução a terna (– 2, 3, 2).

Observe que o sistema acima é Possível e Indeterminado.

3) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+2z=5 \end{cases}$

Passo 1: Por conveniência vamos trocar de posição as duas primeiras equações, afim de que o coeficiente da 1ª incógnita na 1ª equação seja 1.

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2z=5 \end{cases}$$

Passo 2: Vamos repetir a primeira equação e eliminar a variável x da segunda e terceira equação. Acompanhe:

(Segunda Equação – 2.Primeira Equação)

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ \quad 3y-z=-3 \\ 3x+2z=5 \end{cases}$$

(Terceira Equação – 3.Primeira Equação)

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ \quad 3y-z=-3 \\ \quad 3y-z=-1 \end{cases}$$

Passo 3: Repetir as duas primeiras equações e eliminar a variável y da 3ª equação. Acompanhe:

(Terceira Equação + Segunda Equação)

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ \quad 3y-z=-3 \\ 0x+0y+0z=-4 \end{cases}$$

Note que a equação ***0x + 0y + 0z = – 4*** nunca é satisfeita, conclui-se, então, que o sistema não possui solução.
O sistema acima é impossível.

Em Sala

01) (UFSC) O valor absoluto do produto das raízes do sistema S = $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ -y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

02) (IFSC – SC) Uma loja de doces comercializa três variedades de bombons (recheados, trufados e mesclados) em caixas de três tamanhos diferentes (pequena, média e grande). O valor de cada caixa é dado pela soma dos preços unitários de cada bombom. O quadro abaixo mostra o conteúdo e o valor de cada caixa comercializada:

Caixa	Bombons contidos em cada caixa
Pequena- R$ 19,00	5 recheados, 3 mesclados e 3 trufados
Média - R$ 36,00	10 recheados, 4 mesclados e 6 trufados
Grande - R$ 50,00	12 recheados, 18 mesclados e 4 trufados

Com base na informações referentes às caixas de bombons comercializadas, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. O valor unitário do bombom trufado é igual ao dobro do bombom mesclado.
02. O bombom recheado custa R$ 2,00 a unidade.
04. Os três tipos de bombons têm valores unitários distintos.
08. Um dos tipos de bombom custa R$ 1,00 a unidade.
16. O bombom trufado custa R$ 2,50 a unidade.
32. Os valores unitários de cada bombom podem ser expressos por números inteiros.

03) (PUC – PR) Como está aproximando-se o término do desconto do IPI para a linha branca dos eletrodomésticos, uma determinada loja de departamentos, para vender uma geladeira, uma máquina de lavar e uma secadora, propôs a seguinte oferta: a geladeira e a máquina de lavar custam juntas R$ 2.200,00; a máquina de lavar e a secadora, R$ 2.100,00; a geladeira e a secadora, R$ 2.500,00. Quanto pagará um cliente que comprar os três produtos anunciados?

a) R$ 2.266,00
b) R$ 6.800,00
c) R$ 3.200,00
d) R$ 3.400,00
e) R$ 4.800,00

04) (PUC – RS) O valor de "b"no sistema

$$\begin{cases} a+b-3c+d=1 \\ \quad -b+7c-d=2 \\ \qquad 10c-d=-3 \\ \qquad\quad 3d=39 \end{cases}$$ é:

a) – 22
b) – 8
c) – 4
d) 4
e) 8

05) Resolva e classifique os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+4z=20 \\ -x+y+2z=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+2z=5 \end{cases}$

Testes

06) (PUC – RS) O sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ pode ser apresentado como

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

07) (USF-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ obtém-se y igual a:

08) Determine o valor de x + y + z na resolução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x + z = 10 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

09) (UFSC – SC) Se a terna (a,b,c) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$, então calcule o valor numérico de a + b + c e assinale o valor obtido no cartão resposta.

10) (UFRGS) Dado o sistema de equações lineares sobre R $\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ x + 3y - 2z = -4 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$ os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) formam uma progressão geométrica
b) formam uma progressão aritmética
c) são iguais entre si
d) não existem
e) têm uma soma nula

11) O sistema $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 3x+5y-7z=1 \\ 2x+3y-4z=3 \end{cases}$ é:

a) Possível e Determinado
b) Possível e Indeterminado
c) Homogêneo
d) Impossível
e) Possui apenas duas soluções inteiras

12) (UEL – PR) Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.
Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.
Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

13) (UFSM – RS) Um feirante comprou, por R$ 3.725,00, 3 toneladas distribuídas entre arroz, feijão e batata, num total de 76 sacas. O peso e o preço de cada saca desses produtos estão mostrados a seguir.

	BATATA	FEIJÃO	ARROZ
Peso por saca	20 kg	50 kg	60 kg
Preço por saca	R$ 25,00	R$ 100,00	R$ 50,00

Sobre essa compra, é possível afirmar:
Está(ão) correta(s)

I. O feirante comprou exatamente 30 sacas de batata.
II. A quantidade de sacas de arroz é o dobro da quantidade de sacas de feijão.
III. A quantidade de sacas de arroz é menor que a quantidade de sacas de batata.

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) apenas II e III.

14) (UFSC – SC) A figura a seguir mostra os cartazes da loja de eletrodomésticos “PREÇO BOM”, que está fazendo uma promoção de venda “casada” para vender dois eletrodomésticos. Com base nos dados fornecidos pelos cartazes, determine o valor, em reais, da décima parte do preço do forno de microondas.

15) (UFPR – PR) Uma bolsa contém 20 moedas, distribuídas entre as de 5, 10 e 25 centavos, totalizando R$ 3,25. Sabendo que a quantidade de moedas de 5 centavos é a mesma das moedas de 10 centavos, quantas moedas de 25 centavos há nessa bolsa?

a) 6.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e) 12.

16) (UFRGS – RS) Para os jogos da primeira fase da Copa do Mundo de 2014 na sede de Porto Alegre, foram sorteados ingressos entre aqueles que se inscreveram previamente. Esses ingressos foram divididos em 4 categorias, identificadas pelas letras A, B, C e D. Cada pessoa podia solicitar, no máximo, quatro ingressos por jogo. Os ingressos da categoria D foram vendidos somente para residentes no país sede e custaram, cada um, $\frac{1}{3}$ do valor unitário do ingresso da categoria C.

No quadro abaixo, estão representadas as quantidades de ingressos, por categoria, solicitados por uma pessoa, para cada um dos jogos da primeira fase, e o valor total a ser pago.

Jogo	A	B	C	D	TOTAL (em R$)
1	2	0	2	0	1.060,00
2	1	3	0	0	1.160,00
3	0	1	3	0	810,00

Se essa pessoa comprasse um ingresso de cada categoria para um dos jogos da primeira fase, ela gastaria, em reais,

a) 860.
b) 830.
c) 800.
d) 770.
e) 740.

17) (UFRGS – RS) Inovando na forma de atender aos clientes, um restaurante serve alimentos utilizando pratos de três cores diferentes: verde, amarelo e branco. Os pratos da mesma cor custam o mesmo valor. Na mesa A, foram consumidos os alimentos de 3 pratos verdes, de 2 amarelos e de 4 brancos, totalizando um gasto de R$ 88,00. Na mesa B, foram consumidos os alimentos de 2 pratos verdes e de 5 brancos, totalizando um gasto de R$ 64,00. Na mesa C, foram consumidos os alimentos de 4 pratos verdes e de 1 amarelo, totalizando um gasto de R$ 58,00.
Comparando o valor do prato branco com o valor dos outros pratos, verifica-se que esse valor é

f) 80% do valor do prato amarelo.
g) 75% do valor do prato amarelo. 2
h) 50% do valor do prato verde.
i) maior que o valor do prato verde.
j) a terça parte do valor da soma dos valores dos outros pratos

Exercícios estilo ENEM

18) (UDESC – SC) Um Pet Shop tem cães, gatos e passarinhos à venda, totalizando 38 cabeças e 112 patas. Sabe-se que nenhum destes animais apresenta algum tipo de deficiência física e que a metade do número de passarinhos mais o número de cães supera em duas unidades o número de gatos. Se o preço de venda de cada cão, gato e passarinho é, respectivamente, 500, 90 e 55 reais, então, ao vender todos estes animais, o Pet Shop terá arrecadado:

f) 4770 reais
g) 3950 reais
h) 6515 reais
i) 5250 reais
j) 5730 reais

19) (ACAFE – SC) Numa feira, uma pessoa verificou que as barracas **A**, **B** e **C** tinham preços diferentes por unidade de bombom de chocolate com recheio de doces de fruta, conforme a tabela a seguir.

	Cupuaçu	Castanha do Pará	Açaí
A	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 3,00
B	R$ 2,00	R$ 1,00	R$ 2,00
C	R$ 2,00	R$ 1,00	R$ 3,00

Comprando **x** unidades de bombons de cupuaçu, **y** unidades de bombons de castanha do Pará e **z** unidades de bombons de açaí, tanto na barraca **A** quanto na **B**, a pessoa gastaria a mesma quantia: R$ 36,00. Comprando as mesmas quantidades na barraca **C**, ela gastaria R$ 6,00 a mais.
O valor da soma x + y + z é:

a) 42
b) 20
c) 36
d) 30
e) 24

20) (IFSC – SC) Uma empresa comercializa três modelos de parafusos: tipo A, tipo B e tipo C. Os parafusos são vendidos em embalagens com 10 unidades que contêm parafusos do mesmo tipo. O *quadro 1* mostra a quantidade de embalagens vendidas de acordo com os meses e o *quadro 2* mostra as receitas mensais obtidas com as vendas.

Quadro 1: Quantidade de embalagens vendidas

	Julho	**Agosto**	**Setembro**	**Outubro**
Tipo A	200	400	600	400
Tipo B	700	500	300	200
Tipo C	500	800	200	500

Quadro 2: Receitas mensais

Mês	**Receita**
Julho	R$ 1500,00
Agosto	R$ 2250,00
Setembro	R$ 1650,00
Outubro	R$ 1650,00

Sabendo que não houve variação de preços no período, assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Uma embalagem do parafuso B é vendida por R$ 0,50.
02. O parafuso do tipo C é o mais caro dentre os três tipos.
04. O preço unitário de um parafuso do tipo A é de R$ 0,20.
08. O parafuso B custa mais caro que o parafuso A.
16. O parafuso C custa o dobro do parafuso B.
32. Se um cliente comprar duas embalagens do parafuso A e duas do parafuso B pagará por elas um total de R$ 5,00.

GABARITO – AULAS 06 e 07

1) 06 **2)** 43 **3)** d **4)** b
5) a) S.P.D e S = {1, 2, 3} b) S.P.I e S = {(- z, z + 1, z)}
c) S.I. e S = ∅
6) a **7)** 03 **8)** 12 **9)** 06 **10)** b **11)** d
12) 5 tipo A, 3 tipo B e 2 tipo C
13) c **14)** 29 **15)** d **16)** a **17)** a **18)** a
19) b **20)** 37 **21)** 25 **22)** 10 **23)** a **24)** 03 **25)** e

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

AULA 08

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR I

Vimos na aula anterior que em relação ao número de soluções de um sistema, ele pode ser classificado da seguinte forma:

- POSSÍVEL
  - DETERMINADO (uma única solução)
  - INDETERMINADO (infinitas soluções)
- IMPOSSÍVEL (não admite solução)

Vimos ainda que a resolução de um sistema linear podia ser feita com base na regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det S} \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det S} \cdots\cdots x_n = \frac{\det X_n}{\det S}$$

Lembre-se que só é possível aplicar a Regra de Cramer em sistemas **n x n** em que det S ≠ 0. Esses sistemas são denominados **normais.**

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR COM n EQUAÇÕES E n INCÓGNITAS

Discutir um sistema linear significa classificá-lo segundo um ou mais valores de determinados parâmetros. A discussão será feita em dois momentos:

1º) Casos onde o número de equações for igual ao número de incógnitas. Neste caso, a discussão será feita utilizando a regra de Cramer e o escalonamento.

2º) Casos onde o número de equações for diferente do número de incógnitas. Neste caso, a discussão será feita utilizando apenas o escalonamento.

Nesta aula estaremos discutindo sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Em um sistema linear de **n** equações e **n** incógnitas, podemos ter as seguintes situações:

a) Se $\det S \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
b) Se $\det S = 0$, o sistema é possível indeterminado ou impossível.

Acompanhe alguns exemplos resolvidos:

1) Discutir, em função de k, o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ky = 2 \end{cases}$

Resolução:

O sistema é possível determinado se $\det S \neq 0$ .Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

Se k = 4, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = -4 \end{cases}$$

Note que a equação **0x + 0y = – 4** nunca é satisfeita, conclui-se, então, que o sistema não possui solução.

Resumindo, temos:

$$\begin{cases} k \neq 4 \Rightarrow \text{sistema possível determinado} \\ k = 4 \Rightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$$

2) Discuta o sistema $\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ 2mx - y + 2z = 1 \\ mx + y + 2z = n \end{cases}$

Resolução:

O sistema é possível determinado se $\det S \neq 0$ .Assim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2m & -1 & 2 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4m - 8 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

Se m = 2, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = n \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 0x-3y-2z=-5 \\ 0x+0y+0z=n-3 \end{cases}$$

Se n = 3 $\rightarrow$ sistema possível e indeterminado
Se n $\neq$ 3 $\rightarrow$ sistema impossível

Em resumo, temos:

$$\begin{cases} m \neq 2 \Rightarrow \text{sistema possível determinado} \\ m = 2 \text{ e } n = 3 \Rightarrow \text{sistema possível indeterminado} \\ m = 2 \text{ e } n \neq 3 \Rightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$$

IMPORTANTE:

Se um sistema linear com **n** equações e **n** incógnitas é possível e indeterminado, temos:

$$\boxed{\det S = \det X = \det Y = \det Z = 0}$$

No entanto, a recíproca nem sempre é válida. Assim, por exemplo, o sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+3y+3z=6 \\ 7x+7y+7z=11 \end{cases}$ possui:

$\det S = \det X = \det Y = \det Z = 0$, no entanto, é impossível.

Em Sala

01) (PUC – RS) Se n é o número de soluções do sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$, então:

a) n = 0
b) n = 1
c) n = 2
d) n = 3
e) n > 3

02) Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+z=\beta \\ x-y+\alpha z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$ com α, β $\in$ R, então o sistema é determinado se:

a) se $\alpha \neq$ -1
b) se α = -1 e $\beta \neq 1$
c) se $\alpha \neq 1$
d) se α = -1 e β = 1
e) se α = -1 e β = -1

03) (UFSC – SC)Para que o sistema abaixo seja impossível, o valor de **a** é:

$$\begin{cases} x+3y+4z=1 \\ x+y+az=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$

04) (UEPG – PR) O sistema linear $\begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = b \end{cases}$ é:

01. impossível para a$\neq$ 2 e b = 5
02. impossível para a = 2 e b $\neq$ 5
04. possível e determinado para a = 2 $\forall$ b $\in$ R
08. possível e indeterminado para a = 2 e b = 5
16. possível e determinado para a $\neq$ 2

Testes

05) Assinale V para as verdadeiras e F para as Falsas

a) ( ) (UFSC – SC) O sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado

b) ( ) (UFSC – SC) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + a^2 y = a \end{cases}$ é impossível quando a = 1.

06) Determine o valor de m para que o sistema $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + my = 7 \end{cases}$ seja possível e determinado.

07) Determine o valor de m para que o sistema $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + my = 7 \end{cases}$ seja impossível.

08) (ACAFE – SC) O sistema linear $\begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x+z=0 \\ x+mz=0 \end{cases}$ é indeterminado para:

a) m = 0,5
b) m = 2
c) m = - 1
d) m = 1

09) (UDESC – SC) Considere o seguinte sistema linear em que *a* e *b* são constantes:

$$\begin{cases} -x+by-2z=0 \\ -3x+y+2z=0 \\ 2x+4z=a \end{cases}$$

Analise as proposições acerca do sistema linear acima, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Se *b* ≠ 0, então o sistema admite infinitas soluções.
( ) Se *b* = 0 e *a*≠ 0, então o sistem não admite solução.
( ) Se *a* = 0, então o sistema homogêneo admite solução.
( ) Para quaisquer valores de *a* e *b* o sistema admite solução.

Assinale a alternativa que contém a sequência **correta**, de cima para baixo.

a) V – V – V – F
b) F – F – V – F
c) V – V – F – V
d) F – V – F – V
e) F – V – V – F

10) (FEI-SP) Se o sistema $\begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ mx+4y+2z-2=0 \\ 2x+my-3z+2=0 \end{cases}$ admite uma única solução, então:

a) $m \neq \pm 6$
b) $m \neq \pm 2$
c) $m \neq \pm 8$
d) $m \neq \pm 4$
e) $m \neq \pm 3$

11) (UFSM – RS) As frutas são fontes naturais de vitaminas e sais minerais e auxiliam na prevenção de doenças.

Suponha que as equações do sistema

$$\begin{cases} 70X+ay=260 \\ ax+by+7z=194 \\ 20x+12z=84 \end{cases}$$

representem, respectivamente, a quantidade de vitamina C, cálcio e fósforo, quando são ingeridas as porções x, y e z de três tipos de frutas diferentes. Sabe-se que o sistema tem como solução $x=3$, $y=1$ e $z=2$.

Qual é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema?

a) 1.120.
b) 2.200.
c) 12.880.
d) 32.480.
e) 62.200.

12) (UFSC – SC) Considere o sistema S_1: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$

determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) **VERDADEIRA(S)**.

01. O par ordenado (–15,5) é uma solução do sistema S_1.
02. O sistema S_1 é possível e determinado.
04. A solução do sistema S_1 é uma reta que não passa pela origem.
08. O sistema S_2: $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -10x - 30y = 0 \end{cases}$ é equivalente ao sistema S_1.

13) Dado o sistema linear $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$ assinale a alternativa correta:

a) O sistema admite uma infinidade de soluções para qualquer **a** real.
b) O sistema não admite solução de **a** = 1.
c) O sistema admite uma única solução se **a** = 3.
d) O sistema admite somente a solução trivial.
e) O sistema admite uma única solução se **a** = 1.

14) (UFRGS – RS) O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui:

a) nenhuma solução
b) uma solução
c) duas soluções
d) três soluções
e) infinitas soluções

15) (UFRGS) O sistema abaixo admite mais de uma solução $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = b \end{cases}$. Então segue-se que

a) $a \neq -3$ e $b = 1/3$
b) $a = -3$ e $b \neq 1/3$
c) $a = -1/3$ e $b \neq 3$
d) $a \neq -1/3$ e $b \neq 3$
e) $a = -1/3$ e $b = 3$

16)(PUC-RS) Para que o sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ tenha solução única, deve-se ter:

a) ad > bc
b) ad < bc
c) ad = bc
d) ac = bd
e) ad $\neq$ bc

17) O sistema $\begin{cases} kx + 3y = 60 \\ 4x + y = t \end{cases}$ é possível e indeterminado. Determine o valor de k + t.

Exercícios estilo ENEM

18) (UFPR – PR) No processo de preparação de uma mistura, foi necessário estudar o sistema linear:

$$\begin{cases} p + 2q + r = 3 \\ 2p + 3r = 8. \\ p + 6q = 1 \end{cases}$$

Nesse sistema, p, q e r representam as quantidades dos três elementos envolvidos na mistura.

a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema.
b) Resolva o sistema.

19) (UEPG – PR) Considere a seguinte situação: Júlia tem em sua bolsa moedas de 1 real, 50 centavos, 25 centavos e 10 centavos. Dessas moedas 25% são de 1 real, 3 moedas são de 50 centavos e o número de moedas de 25 centavos é igual ao dobro do número de moedas de 10 centavos que, juntas, correspondem a 60% do número total de moedas. Com base nessas informações, assinale o que for correto.

01. O número de moedas de 1 real é menor que o número de moedas de 10 centavos.
02. O número de moedas de 25 centavos é menor que 10.
04. Júlia tem a quantia de R$ 8,90 em moedas.
08. O número total de moedas é menor que 15.

20) (UFSM – RS) Na peça "Um xadrez diferente", que encenava a vida de um preso condenado por crime de "colarinho branco", foi utilizado como cenário um mosaico formado por retângulos de três materiais diferentes, nas cores verde, violeta e vermelha. Considere que x, y e z são, respectivamente, as quantidades, em quilos, dos materiais verde, violeta e vermelho utilizados na confecção do painel e que essas quantidades satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 2x+5y+3z=420 \\ 3x+5y+2z=430 \end{cases}$$

Sobre a solução desse sistema e a quantidade dos materiais verde, violeta e vermelho utilizada no painel, afirma-se:

I. O sistema tem solução única e x + y + z = 120, isto é, a soma das quantidades dos três materiais empregados é 120 quilos.
II. O sistema não tem solução, é impossível determinar a quantidade de cada material empregado.
III. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é diferente de zero e x = 2y e y = 3z.
IV. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é zero. O sistema tem solução, porém, para determinar a quantidade dos materiais utilizados, é necessário saber previamente a quantidade de um desses materiais.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e III.
e) apenas IV.

GABARITO – AULA 08

1) b **2)** a **3)** 02 **4)** 26
5) a) F b) F **6)** m≠ 9 **7)** m = 9 **8)** a **9)** e **10)** a
11) b **12)** 09 **13)** a **14)** b **15)** e **16)** e **17)** 32
18) $\left\{(1-6\alpha,\ \alpha,\ 2+4\alpha);\ 0 \le \alpha \le \dfrac{1}{6}\right\}$. **19)** 06 **20)** e

AULA 09

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR II

1. NÚMEROS DE EQUAÇÕES DIFERENTE DO NÚMERO DE INCÓGNITAS

Para um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas, a discussão será feita pelo escalonamento. Acompanhe alguns exemplos resolvidos:

1) Discuta o sistema segundo o parâmetro real m.

$$\begin{cases} x+2y+4z=10 \\ 2x+4y+8z=m \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x+2y+4z=10 \\ 0x+0y+0z=m-20 \end{cases}$$

Analisando a segunda equação, temos:

Para m = 20 $\rightarrow$ Sistema é possível e indeterminado
Para m $\neq$ 20 $\rightarrow$ Sistema é impossível

2) Discuta em função do parâmetro m, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+5y=7 \\ 3x+7y=m \end{cases}$$

Escalonado o sistema, vem:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ \quad y=1 \\ \quad y=m-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ \quad y=1 \\ \quad 0y=m-13 \end{cases}$$

Se m = 13, resulta o sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ \quad y=1 \end{cases} \therefore x=2 \text{ e } y=1$$

Logo, o sistema é possível e determinado.

Se m $\neq$ 13, o sistema será impossível, pois a equação $0y=m-13$ nunca será verificada.

Resumindo, temos:

$$\begin{cases} m=13 \Rightarrow \text{sistema possível determinado} \\ m\neq 13 \Rightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$$

2. SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Conforme vimos na aula 6, sistema linear homogêneo é aquele em que os termos independentes são iguais a zero. Veja os exemplos abaixo:

$$\text{I)}\begin{cases} 2x+5y+2z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x+2y+7z=0 \end{cases} \qquad \text{II)}\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$$

Uma solução evidente para o sistema homogêneo é a sequência (0, 0, 0,.....0). Esta solução é chamada solução trivial. Assim, o sistema homogêneo é sempre possível.

Assim, o terno (0, 0, 0) é solução para o sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$.

Quando aplicamos a regra de Cramer num sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas, temos que:

- Se $\det S \neq 0 \rightarrow$ sistema possível determinado (solução trivial)
- Se $\det S = 0 \rightarrow$ sistema possível indeterminado (soluções próprias além da solução trivial)

Exercício Resolvido

Determine o valor de m $\in \Re$ que torna o sistema $\begin{cases} x+mz=0 \\ mx+y=0 \\ my+z=0 \end{cases}$ possível e indeterminado.

Resolução:

$$\det S = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+m^3=0 \Rightarrow m=-1$$

Em Sala

01) (UFAM)

Dado o sistema de equações lineares sobre R

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ x+z=4 \end{cases}$$

os valores de $x,\ y\ e\ z$ que constituem sua solução:

a) São iguais entre si
b) Formam uma P.G.
c) Não existem
d) Formam uma P.A.
e) Têm seu produto nulo

02) (USP Escola Politécnica)

Para que o sistema com coeficientes reais

$$\begin{cases} x+2y+az=0 \\ 2x+4z=0 \\ ax-3y+z=0 \end{cases}$$

admita mais de uma solução real, o valor de **a** deve ser

a) –4
b) –2
c) 0
d) 2
e) 4

03) (UNIMONTES MG)

O conjunto solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ é dado por

a) $\{(x,-x,+3,1) \mid x \in IR\}$
b) $\{(x, x-3, -x) \mid x \in IR\}$
c) $\{(-x, x+4, -1) \mid x \in IR\}$
d) $\{(-2x, 3x-1, 4x) \mid x \in IR\}$

04) (UECE)

Em relação ao sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-my+z=0 \\ mx-y-z=0 \end{cases}$, pode-se afirmar corretamente que

a) o sistema admite solução não nula apenas quando m = –1.
b) para qualquer valor de m, a solução nula (x = 0, y = 0, z = 0) é a única solução do sistema.
c) o sistema admite solução não nula quando m = 2 ou m = –2.
d) não temos dados suficientes para concluir que o sistema tem solução não nula.

Testes

05) Em relação ao sistema linear $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+7z=0 \\ x+2y+4z=0 \end{cases}$, é correto afirmar:

a) é impossível
b) é possível e determinado
c) não admite a solução trivial
d) admite infinitas soluções
e) admite a solução (1, 2, 3)

06) As soluções do sistema $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ estão representadas pela terna:

a) $(4z;2z;z)$
b) $(-5z;2z;z)$
c) $(-2z;4z;z)$
d) $(-5z;3z;z)$
e) $(4z;-5z;z)$

07) (UFSJ) Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

Sobre seu conjunto solução, é **CORRETO** afirmar que ele

a) possui infinitas soluções quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

b) possui uma única solução quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$

c) possui infinitas soluções quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$

d) não possui solução quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

08) Calcule o valor de m para que o sistema $\begin{cases} mx+2y=0 \\ 8x+my=0 \end{cases}$ seja possível e indeterminado.

09) O sistema $\begin{cases} x+5y=kx \\ 2x-y=ky \end{cases}$ admite solução única se, e somente se:

a)$k\neq \pm 3$ b)$k\neq \pm\sqrt{3}$ c)$k\neq \pm 11$ d)$k\neq \pm 3$ e)$k\neq \pm\sqrt{11}$

10) Determine **m** para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + my + 2z = 0 \end{cases}$$

tenha soluções próprias (soluções diferentes da trivial).

11) (IFSC – SC) A alternativa **CORRETA** que indica o valor de ***a*** para que a seguinte equação matricial admita somente a solução trivial é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $a=\dfrac{10}{3}$

b) $a=\dfrac{20}{3}$

c) $a\neq -\dfrac{20}{3}$

d) $a\neq \dfrac{20}{3}$

e) $a\neq \dfrac{10}{3}$

12) Determine o valor de m para que o sistema, abaixo, admita infinitas soluções:

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

13) Para que valores de **k** o sistema abaixo, nas incógnitas x, y e z tem somente a solução nula (trivial)?

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + ky = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

14) (PUC-RS) Para que o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

tenha solução única, deve-se ter:

a)ad>bc b)ad<bc c)ad=bc d)ac = bd e)ad $\neq$ bc

15) Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$$

assinale a alternativa correta:

a) O sistema admite uma infinidade de soluções para qualquer **a** real.
b) O sistema não admite solução de **a** = 1.
c) O sistema admite uma única solução se **a** = 3.
d) O sistema admite somente a solução trivial.
e) O sistema admite uma única solução se **a** = 1.

16) Para que o sistema
$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y + mz = 0 \end{cases}$$
admita solução única, m deve ser diferente de:

17) (UFSC – SC) Considere o sistema S_1: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$ determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) **VERDADEIRA(S)**.

02. O par ordenado (–15,5) é uma solução do sistema S_1.

02. O sistema S_1 é possível e determinado.

04. A solução do sistema S_1 é uma reta que não passa pela origem.

08. O sistema S_2: $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -10x - 30y = 0 \end{cases}$ é equivalente ao sistema S_1.

Exercícios Estilo ENEM

18) (UFPR – PR) Os clientes de um determinado banco podem fazer saques em um caixa automático, no qual há cédulas disponíveis nos valores de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00. Considere as seguintes afirmativas referentes a um saque no valor de R$ 300,00:

I. Existe somente uma maneira de compor esse valor com 60 cédulas.

II. Existem somente quatro formas de compor esse valor com 20 cédulas.

III. Existe somente uma maneira de compor esse valor com a mesma quantidade de cédulas de cada um dos três valores disponíveis.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa I é verdadeira.
b) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

19) (PUC – SP) Uma pessoa tem apenas x moedas de 5 centavos, y moedas de 10 centavos e z moedas de 25 centavos. A equação matricial seguinte permite determinar as possíveis quantidades dessas moedas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Com base nesses dados, é correto afirmar que

a) há exatamente 7 possibilidades de solução para essa equação.
b) não podem existir dois tipos de moedas distintas em quantidades iguais.
c) os três tipos de moedas totalizam a quantia de R$ 78,00.
d) se o número de moedas de 10 centavos fosse 4, o problema admitiria uma única solução.
e) o número de moedas de 25 centavos deve ser menor do que 5.

20) (UNIFESP – SP) Em uma lanchonete, o custo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é R$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma torta de maçã, o custo vai para R$ 30,50. O custo de um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã, em reais, é
a) 7,00 b) 6,50 c) 6,00 d) 5,50 e) 5,00

GABARITOS – Aula 09

1) D 2) A 3) A 4) A 5) d 6) b 7) c
8) m = 4 ou m = – 4 9) e 10) $m = \frac{3}{13}$ **11) d**
12) 02 13) $k \neq -3$ **14) e 15) a 16) 3 17) 09**
18) c 19) a 20) b