Számítógépes Grafika

Valasek Gábor
valasek@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2013/2014. őszi félév

Tartalom

1. Lineáris algebra emlékeztető
   - Vektorterek, vektorok
   - Mátrixok

Tartalom

Vektortér - összeadás

A $V \neq \emptyset$ halmazt a T test feletti **vektortérnek** nevezzük, ha a következő vektortéraxiómák teljesülnek:

- A V halmaz elemein értelmezve van egy

$$+ : V \times V \to V$$

  összeadás művelet, amely $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-hoz egyértelműen hozzárendeli az $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ elemet. Ezen összeadás műveletre igaz, hogy
    - *asszociatív:* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
    - *kommutatív:* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
    - létezik *nullelem*, azaz $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V : \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
    - minden elemre létezik *ellentett*, azaz $\forall \mathbf{u} \in V : \exists (-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Vektortér - skalárral szorzás

A $V \neq \emptyset$ halmazt a T test feletti **vektortérnek** nevezzük, ha a következő vektortéraxiómák teljesülnek:

- A T test és a V halmaz között pedig értelmezve van egy

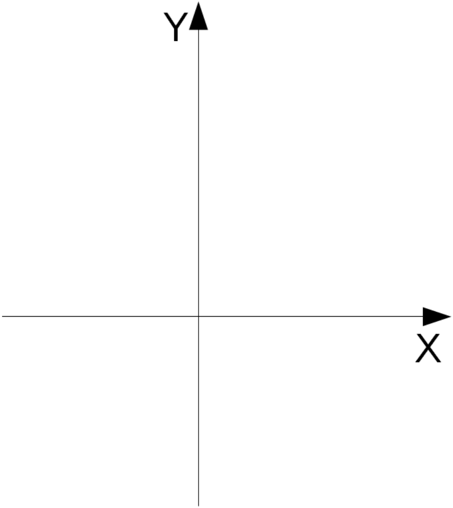
$$\cdot : V \times T \rightarrow V$$

  skalárral szorzás művelet: bármely $\lambda \in T$ és $\mathbf{u} \in V$ párhoz egyértelműen hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \mathbf{u}$ -val jelölt, V-beli elemet. Erre a skalárral szorzás műveletre teljesül, hogy
  - $\forall \alpha, \beta \in T, \forall \mathbf{u} \in V : (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$
  - $\forall \alpha \in T, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$
  - $\forall \alpha, \beta \in T, \forall \mathbf{u} \in V : (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u})$
  - 1-gyel jelölve a T test egységelemét $\forall \mathbf{u} \in V : 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

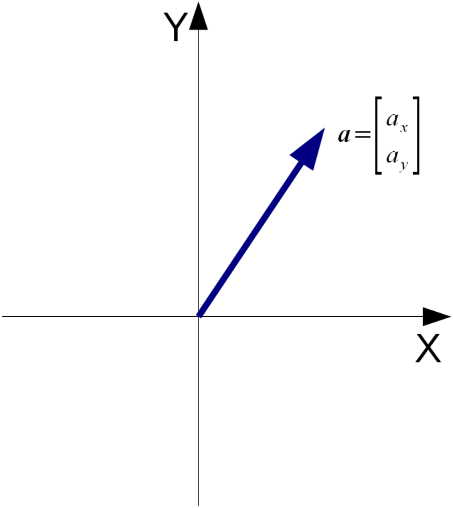
Axiómák következményei: ld. linalg!

Megjegyzés: a továbbiakban nem írjuk ki a $\cdot$ műveleti jelet

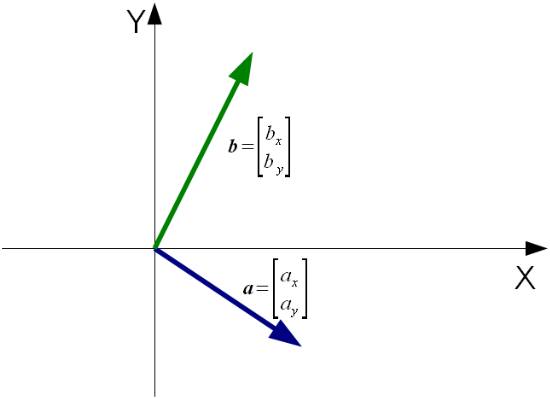
Vektortér: sík; Helyvektorok



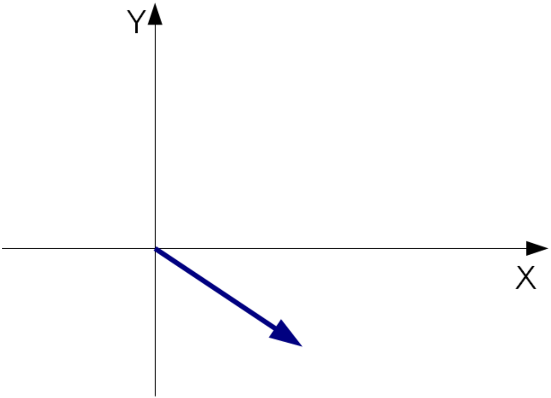
Vektortér: sík; Helyvektorok



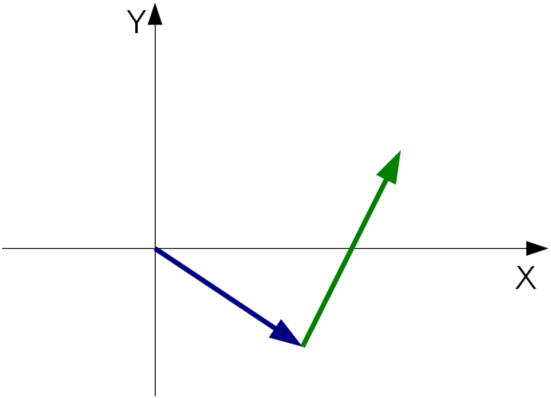
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



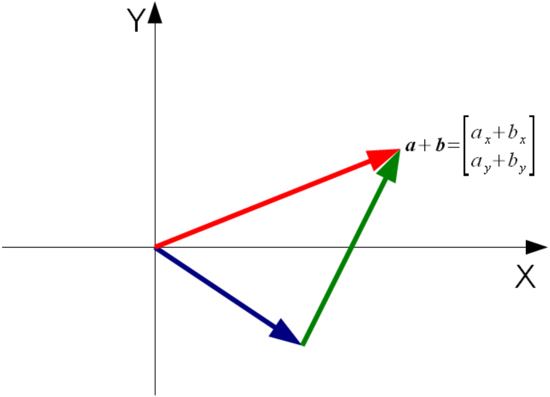
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



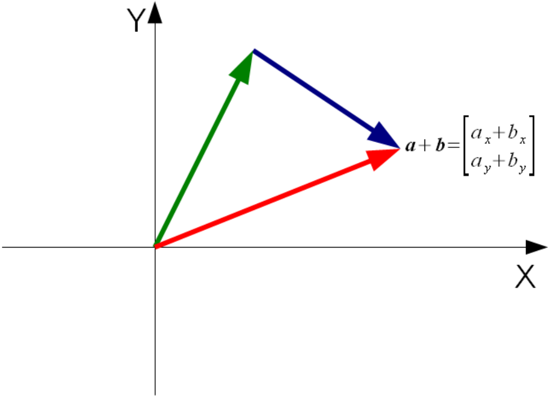
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



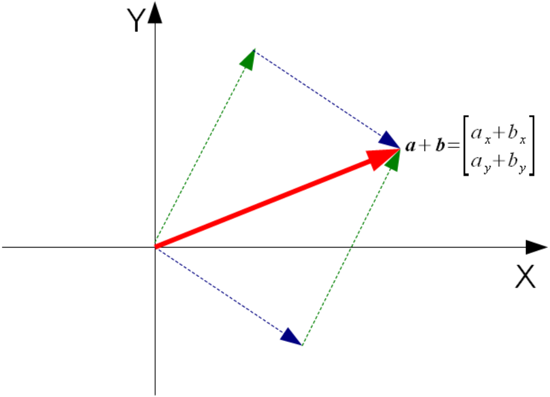
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



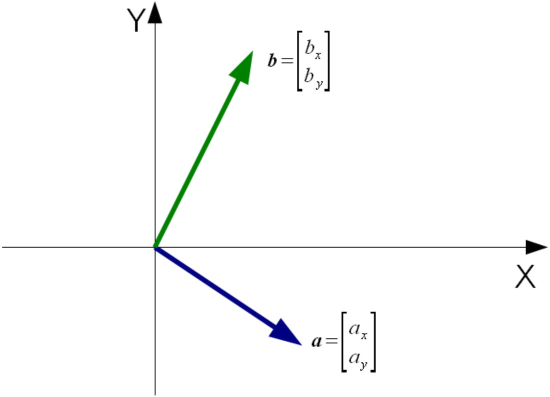
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



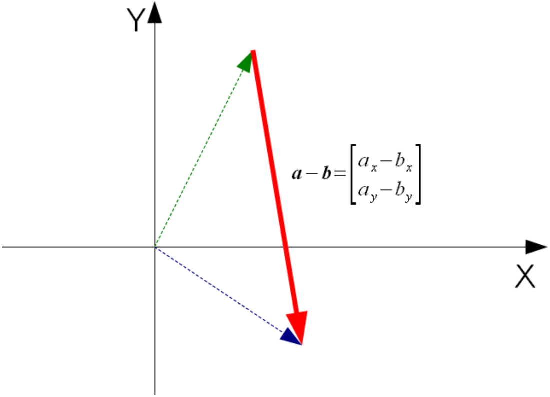
Vektorok összeadása: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$



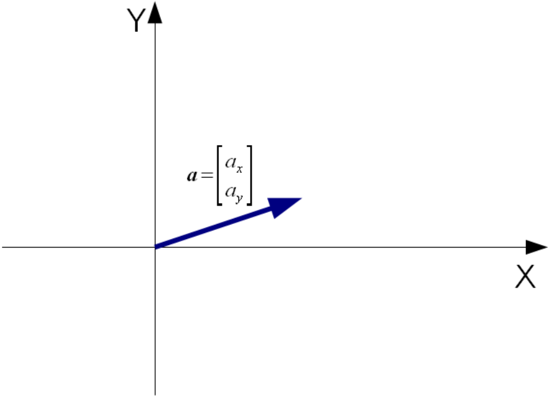
Vektorok kivonása: $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$



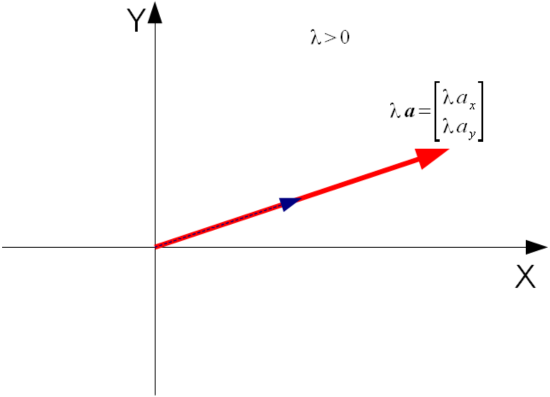
Vektorok kivonása: $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$



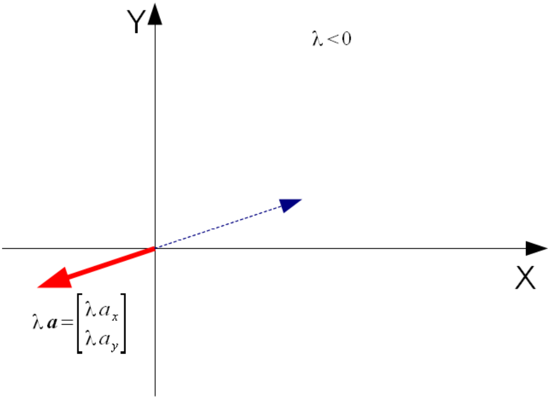
Skalárral szorzás: $\lambda\mathbf{a}$



Skalárral szorzás: $\lambda\mathbf{a}$



Skalárral szorzás: $\lambda\mathbf{a}$



Műveletek vektorokkal

- Vektor hossza: $|\mathbf{a}| = ||\mathbf{a}||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2}$
- Skaláris szorzat (valós számtest felett): $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i$
- Vektor hossza skaláris szorzattal: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ (indukált norma)

Műveletek vektorokkal

- Vektor hossza síkban: $|\mathbf{a}| = |\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
- Skaláris szorzat sík helyvektorai között: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y$
- Skaláris szorzat vektor hosszakkal: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$, ahol α az **a** és **b** vektorok által bezárt szög
- A fenti kettő ugyanazt adja: $a_x b_x + a_y b_y = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$
- Térben: ugyanígy!
- Kérdés: mekkora szöget zárnak be egymással az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok?

Műveletek vektorokkal

- Vektoriális szorzat síkban: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egy olyan vektor, amely merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, jobbsodrású rendszert alkot $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal és $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, ahol α az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög
- Térben két vektor vektoriális szorzata

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

- Többi: később

Tartalom

- Legyen T egy kommutatív test és k, n adott pozitív egészek. Ekkor a T test feletti $k \times n$-es *mátrixon* egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek k sora és n oszlopa van és minden eleme T-ből való.

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása

Legyen $A, B \in T^{k\times n}$. Ekkor

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,n-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} + b_{0,0} & a_{0,1} + b_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} + b_{0,n-1} \\ a_{1,0} + b_{1,0} & a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} + a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,0} + b_{k-1,0} & a_{k-1,1} + b_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n-1} + b_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Mátrixok skalárral szorzása

Legyen $A \in T^{k \times n}$, $\lambda \in T$. Ekkor

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{0,0} & \lambda a_{0,1} & \dots & \lambda a_{0,n-1} \\ \lambda a_{1,0} & \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k-1,0} & \lambda a_{k-1,1} & \dots & \lambda a_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása és skalárral szorzása

Tétel A $k \times n$-es mátrixok összeadása asszociatív, kommutatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik inverze. A T számtest elemeivel való skaláris szorzással pedig $\forall A, B \in T^{k \times n}, \forall \alpha, \beta \in T$:

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- 1-gyel jelölve a T test egységelemét $1A = A$

A $k \times n$-es mátrixok halmaza a mátrixok összeadásának és mátrixok T-beli skalárral való szorzásának műveletével vektorteret alkot T felett.

Mátrixok szorzása egymással

Legyen $A \in T^{k \times n}$ és $B \in T^{n \times r}$. Ekkor $C = AB \in T^{k \times r}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme

$$c_{ij} = \sum_{s=0}^{n-1} a_{is} b_{sj}$$

Mátrixok szorzása egymással

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = ?$$

Mátrixok szorzása egymással

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása egymással

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Box & \\ & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Mátrixok szorzása egymással

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ae+bg & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása egymással

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása egymással

Legyenek A, B, C tetszőleges olyan mátrixok, amelyeken a következő szorzásműveletek értelmezve vannak és legyen $\lambda \in T$. Ekkor a mátrixok szorzása

- asszociatív: $A(BC) = (AB)C$
- disztributív az összeadásra: $A(B + C) = AB + AC$ és $(A + B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Fontos: a mátrix szorzás nem kommutatív!

Mátrixok, determináns

- Az $n \times n$-es mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak T felett.
- Az egységelemet (egységmátrixot) I-vel jelöljük
- Egy A mátrixnak létezik (kétoldali) inverze, ha van olyan A^{-1} mátrix, amelyikre teljesül, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Figyeljünk: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ (ha létezik)

Tétel Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik kétoldali inverze, ha $det(A) \neq 0$

Házi feladat:

- Hogyan számoljuk egy mátrix determinánsát? Mik a tulajdonságai? Aldeterminánsok, kifejtések.
- Hogyan írhatjuk fel egy mátrix inverzét determináns és adjungáltakkal?

Mátrixok determinánsai

- 2x2-es mátrix determinánsa:

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = ad - bc$$

- 3x3-as mátrix determinánsa:

$$\left| \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Mátrixok inverzek

- 2x2-es mátrix inverze:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- 3x3-as mátrix inverze: HF!

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} =?$$