Számítógépes Grafika

Valasek Gábor
valasek@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2013/2014. őszi félév

Tartalom

Tartalom

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...)

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) $\rightarrow$ az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) $\rightarrow$ az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) $\rightarrow$ az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.
- A virtuális világunkból egy kétdimenziós képet is elő kell állítanunk

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) $\rightarrow$ az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.
- A virtuális világunkból egy kétdimenziós képet is elő kell állítanunk
- $\rightarrow$ A fenti lépésekhez mind szükségünk lesz *geometriai transzformációkra*, amelyekkel az alakzatainkat megváltoztathatjuk

Tartalom

Tartalom

Transzformációk

- Az elvárásaink

Transzformációk

- Az elvárásaink
  - minden pontot lehessen transzformálni

Transzformációk

- Az elvárásaink
  - minden pontot lehessen transzformálni
  - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík

Transzformációk

- Az elvárásaink
  - minden pontot lehessen transzformálni
  - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík
  - illeszkedést tartsa

Transzformációk

- Az elvárásaink
  - minden pontot lehessen transzformálni
  - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík
  - illeszkedést tartsa
  - legyen egyértelmű és egyértelműen megfordítható

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek
- A továbbiakban azonosítsuk az Euklideszi tér, $\mathbb{E}^3$ (vagy sík, $\mathbb{E}^2$) elemeit a $\mathbb{R}^3$ (vagy $\mathbb{R}^2$) valós vektorterünk elemeivel

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek
- A továbbiakban azonosítsuk az Euklideszi tér, $\mathbb{E}^3$ (vagy sík, $\mathbb{E}^2$) elemeit a $\mathbb{R}^3$ (vagy $\mathbb{R}^2$) valós vektorterünk elemeivel
- Ehhez rögzítünk egy $\mathbf{O} \in \mathbb{E}^3$ pontot, origót, és minden $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^3$ ponthoz a $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{O}$ vektort rendeljük

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)
  - $\phi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \phi(\mathbf{a})$ (homogén)

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)
  - $\phi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \phi(\mathbf{a})$ (homogén)
- Emlékeztető: az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéseket egy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixszal fel tudjuk írni; ekkor $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Projektív és affin transzformációk - definíciók

- Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont-, egyenes-, sík-, és illeszkedést tartó leképezéseit *kollineációknak*, vagy *projektív transzformációknak* nevezzük.

Projektív és affin transzformációk - definíciók

- Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont-, egyenes-, sík-, és illeszkedést tartó leképezéseit *kollineációknak*, vagy *projektív transzformációknak* nevezzük.
- Affin transzformációk a projektív transzformációknak az az alcsoportja, amelyek a (kibővített) tér "közönséges", euklideszi részét önmagára képezik le, és az ideális síkot is önmagára képezi le.

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
  - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
  - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
  - létezik egységelem (egységtranszformáció)

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
  - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
  - létezik egységelem (egységtranszformáció)
  - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
  - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
  - létezik egységelem (egységtranszformáció)
  - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)
- Figyeljünk: a csoport nem kommutatív!

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk megadhatóak egy lineáris transzformáció és egy eltolás segítségével, azaz ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ affin transzformáció, akkor létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk megadhatóak egy lineáris transzformáció és egy eltolás segítségével, azaz ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ affin transzformáció, akkor létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- A mátrix-vektor szorzást ilyen sorrendben végezzük el, azaz: a mátrix a bal-, a vektor a jobboldalon áll

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0, 0, 0] & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
  - Biz.: legyenek a tetszőleges $\mathbf{x}$ baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$-kre vonatkoztatva α_i, ekkor
    $\varphi(\mathbf{x}) \quad = \varphi(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i)$

Affin transzformációk tulajdonságai

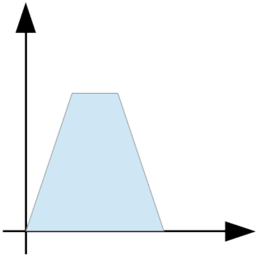
- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
  - Biz.: legyenek a tetszőleges $\mathbf{x}$ baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$-kre vonatkoztatva α_i, ekkor
    $$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(\alpha_i \mathbf{x}_i)$$

Affin transzformációk tulajdonságai

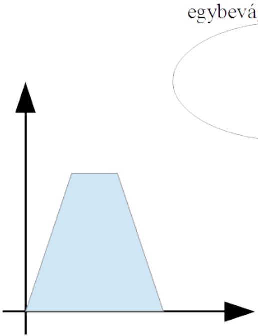
- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
    - Biz.: legyenek a tetszőleges $\mathbf{x}$ baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$-kre vonatkoztatva α_i, ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \varphi(\alpha_i \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

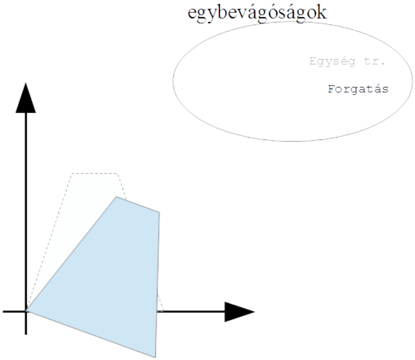
Transzformációk osztályozása



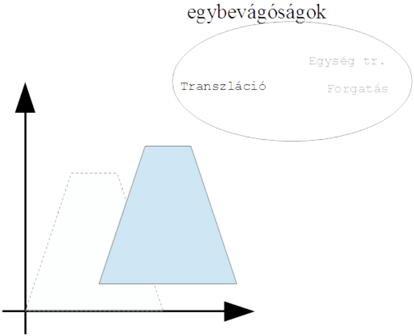
Transzformációk osztályozása



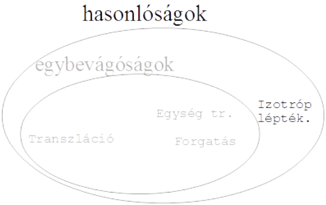
Transzformációk osztályozása

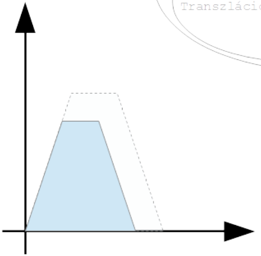


Transzformációk osztályozása

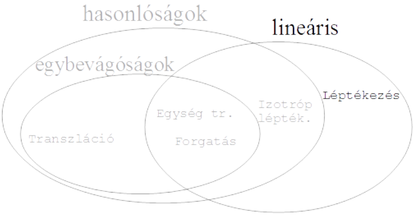


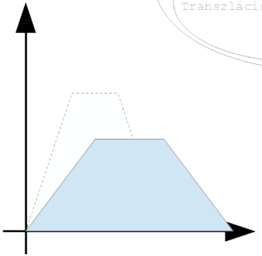
Transzformációk osztályozása



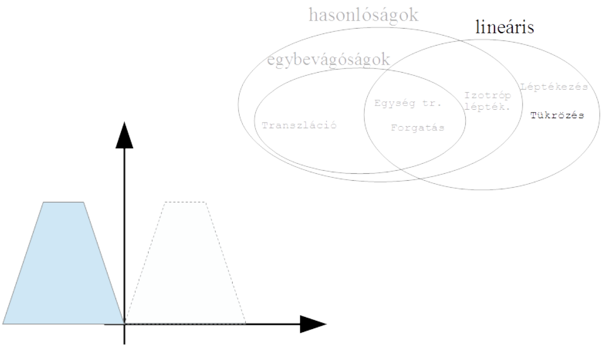


Transzformációk osztályozása

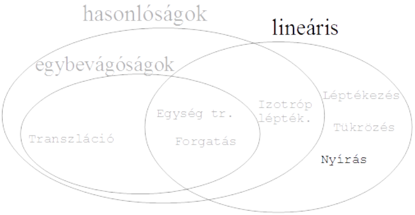


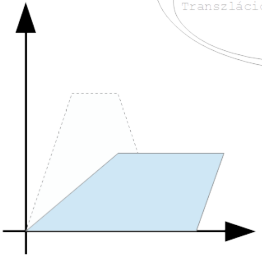


Transzformációk osztályozása

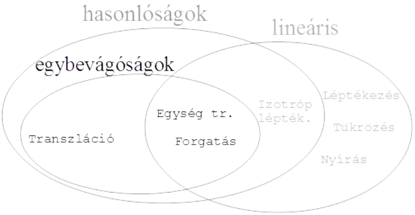


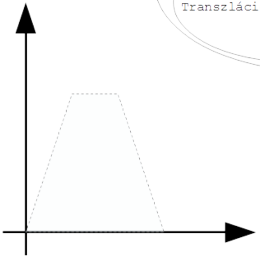
Transzformációk osztályozása



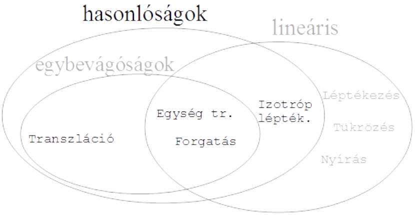


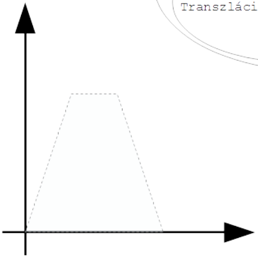
Transzformációk osztályozása



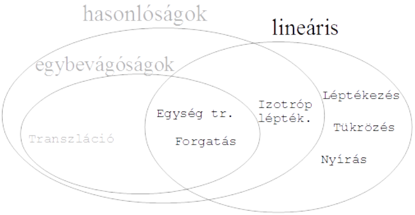


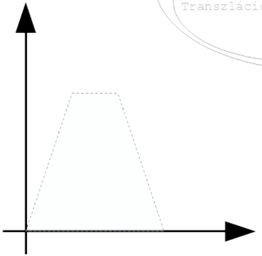
Transzformációk osztályozása



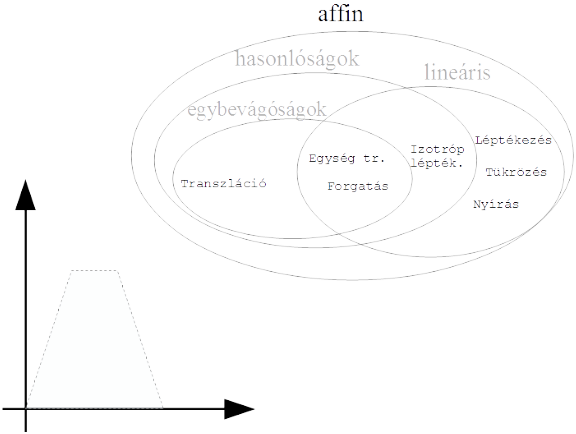


Transzformációk osztályozása

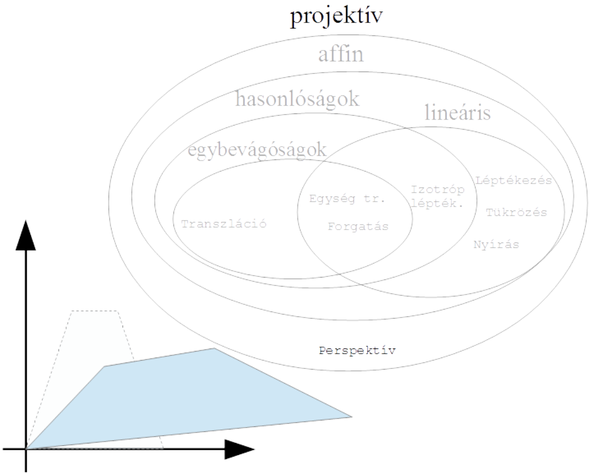




Transzformációk osztályozása



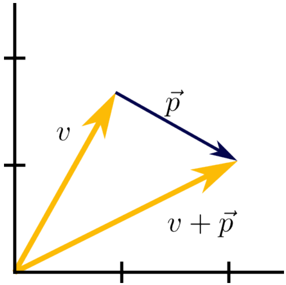
Transzformációk osztályozása



Tartalom

Tartalom

Eltolás



Eltolás

- Minden pontot egy adott **d** vektorral eltolunk:
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Eltolás

- Minden pontot egy adott **d** vektorral eltolunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

- Általában $\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z)$-vel jelöljük

Eltolás

- Minden pontot egy adott **d** vektorral eltolunk:
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$
- Általában $\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z)$-vel jelöljük
- Mátrix alakhoz homogén koordináták kellenek, $w = 1$ választással és akkor a következő 4×4-es mátrixszal adható meg:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eltolás

- Hiszen ha homogén koordinátáit használjuk az **x** pontnak, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_x \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_y \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 1 \cdot d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A $\mathbf{T}(a, b, c)$ inverze $\mathbf{T}^{-1}(a, b, c) = \mathbf{T}(-a, -b, -c)$

Tartalom

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:
  Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tegely körül) θ szöggel:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:
  Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tegely körül) θ szöggel:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:
  Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tegely körül) θ szöggel:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\
y' &= x\sin\theta + y\cos\theta.
\end{aligned}
$$

- Mátrix alakban:

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

- Hasonlóan kaphatjuk XZ és YZ síkokon is.

Forgatás mátrixok

Z tegely mentén

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y tegely mentén

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X tegely mentén

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol $c = \cos\theta$ és $s = \sin\theta$.

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatás mátrixához elég egy 3×3 mátrix (lineáris transzformáció)

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatás mátrixához elég egy 3×3 mátrix (lineáris transzformáció)
- Az eltolás és forgatás sorrendje nem cserélhető!

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatás mátrixához elég egy 3×3 mátrix (lineáris transzformáció)
- Az eltolás és forgatás sorrendje nem cserélhető!
- A forgatás inverze az eredeti forgatás nagyságával megegyező, de ellentétes irányú elforgatás

Tetszőleges forgatás

Tetszőleges orientáció előállítható a három forgatás egymás utáni használatával.

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba (**T**)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba (**T**)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)
  - ebben a síkban a két tengely közül az egyikkel forgassuk be a másik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba (**T**)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)
  - ebben a síkban a két tengely közül az egyikkel forgassuk be a másik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$)
  - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$-szel, de: ez az új (X") tengely körül forgat!)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)
  - ebben a síkban a két tengely közül az egyikkel forgassuk be a másik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$)
  - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$-szel, de: ez az új (X") tengely körül forgat!)
  - alkalmazzuk az eddigi transzformációk inverzeit

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)
  - ebben a síkban a két tengely közül az egyikkel forgassuk be a másik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$)
  - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$-szel, de: ez az új (X") tengely körül forgat!)
  - alkalmazzuk az eddigi transzformációk inverzeit
- Azaz például $\mathbf{Mx} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}_Z^{-1}\mathbf{R}_Y^{-1}\mathbf{R}_X\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_Z\mathbf{T})\mathbf{x}$

Tetszőleges tengely körüli forgatás - Rodrigues formula

Tetszőleges *tengely* közüli forgatás megadható egy $\mathbf{z}$ egységvektorral, ami a forgatás tengelyét adja, és egy θ szöggel. Ezt írja le a *Rodrigues formula*, aminek felhasználásával:

$$\mathbf{v}' = \text{Rodrigues}(\theta, \mathbf{z})\mathbf{v}$$

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Replüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Replüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három "közönséges" tengely menti forgatást használnánk.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Replüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három "közönséges" tengely menti forgatást használnánk.
- Csak akkor működik helyesen, ha az objetum tengelyei egybe esnek a koordináta rendszer tengelyeivel.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Replüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három "közönséges" tengely menti forgatást használnánk.
- Csak akkor működik helyesen, ha az objetum tengelyei egybe esnek a koordináta rendszer tengelyeivel.
- Legtöbb API támogatja.

Mozgás-transzformációk

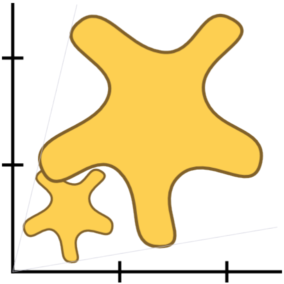
- Az eltolások és tengely körüli elforgatás mozgás-transzformációk

Mozgás-transzformációk

- Az eltolások és tengely körüli elforgatás mozgás-transzformációk
- A tárgyak alakját és méretét nem változtatják

Tartalom

Méretezés



Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén "széthúzzuk", vagy "összenyomjuk" az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk - egymástól függetlenül is akár

Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén "széthúzzuk", vagy "összenyomjuk" az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk - egymástól függetlenül is akár
- Mátrix alakban:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
    - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
  - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
  - ha kettő negatív: tükrözés egy tengelyre

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
  - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
  - ha kettő negatív: tükrözés egy tengelyre
  - ha mindhárom negatív: középpontos tükrözés

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
  - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
  - ha kettő negatív: tükrözés egy tengelyre
  - ha mindhárom negatív: középpontos tükrözés
- Figyeljünk: ha páratlan számú negatív együttható van, akkor a sodrásirány is megváltozik!

Sodrásirány?

Sodrásirány?

- Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokat felhasználva
$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\varphi(\mathbf{i}) + y\varphi(\mathbf{j}) + z\varphi(\mathbf{k})$$

Sodrásirány?

- Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokat felhasználva
$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\varphi(\mathbf{i}) + y\varphi(\mathbf{j}) + z\varphi(\mathbf{k})$$
- $\rightarrow$ ha egy transzformációs mátrix determinánsa negatív, akkor a sodrásirány (a tárgyak térbeli irányítása) megváltozik

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
  - ha kettő nulla: egy tengelyre "vetítünk"

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
  - ha kettő nulla: egy tengelyre "vetítünk"
  - ha mindhárom nulla: az origóba "vetítünk" mindent...

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
  - ha kettő nulla: egy tengelyre "vetítünk"
  - ha mindhárom nulla: az origóba "vetítünk" mindent...
- Észrevétel: a determináns nulla!

Speciális eset: vetítés

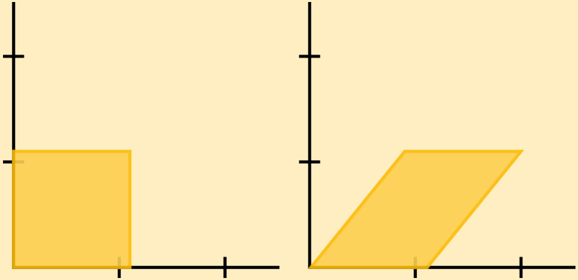
- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
  - ha kettő nulla: egy tengelyre "vetítünk"
  - ha mindhárom nulla: az origóba "vetítünk" mindent...
- Észrevétel: a determináns nulla! $\rightarrow$ nincs inverz!

Tartalom

Nyírás

Példa

Ha egy pakli kártyát lerakunk az asztalra és a lapokat egyenletesen szétcsúsztatjuk, de úgy, hogy a pakli még "állva" maradjon, az a *nyírás*.



Nyírás

Ha például minden pontban az x, y értékeket z-vel arányos mértékeben módosítjuk:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nyírás

Általánosan:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tartalom

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mi lesz az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mi lesz az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = B\mathbf{x}'$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mi lesz az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = B\mathbf{x}' \to \mathbf{x}' = B^{-1}\mathbf{x}$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mi lesz az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = B\mathbf{x}' \to \mathbf{x}' = B^{-1}\mathbf{x}$
- Ortonormált mátrix inverze a mátrix transzponáltja, így az új koordinátákat adó $M = B^{-1}$ mátrixunk a következő alakú

$$M = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mi lesz az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = B\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' = B^{-1}\mathbf{x}$
- Ortonormált mátrix inverze a mátrix transzponáltja, így az új koordinátákat adó $M = B^{-1}$ mátrixunk a következő alakú
$$M = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Ha az új origó koordinátája $\mathbf{c}$, akkor $M = B^{-1}T(-c_x, -c_y, -c_z)$

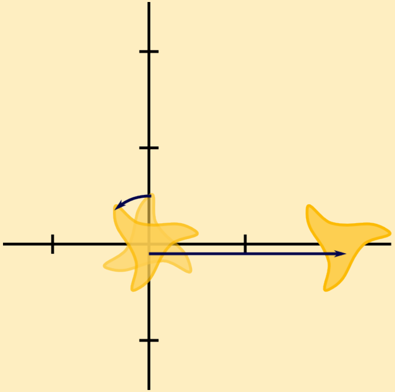
Tartalom

Kommutativitás

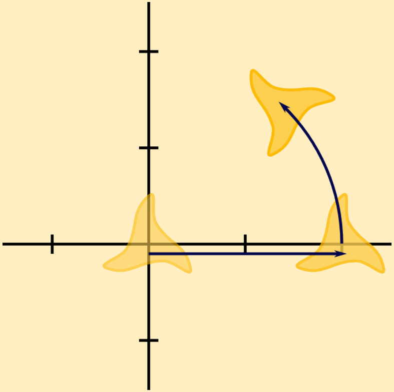
- A mátrix szorzás nem kommutatív, úgyhogy általában nem igaz, hogy
$$\mathbf{ABv} = \mathbf{BAv}$$
- Ez jó, mivel általában a transzformációk sem kommutatívak

Példa

Forgatás majd eltolás



Eltolás majd forgatás

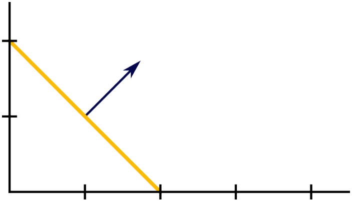


Transzformációs mátrixok determinánsai

- A méretezésnél láttuk, hogy ha egy vagy három együtthatója negatív a transzformációnak, akkor az megfordítja a sordásirányt.
- Általános esetre megfogalmazva:
- Ha $\det(\mathbf{A}) > 0$, akkor a sordás irány változatlan marad
- Ha $\det(\mathbf{A}) < 0$, akkor a sordás irány megfordul

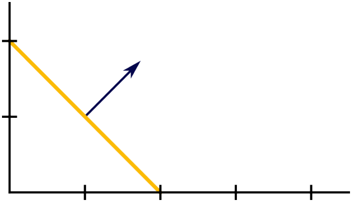
Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkba, **n** normálvekotrral. Legyen **S** az x tengely mentén kétszeres nyújtás leíró transzformáció.



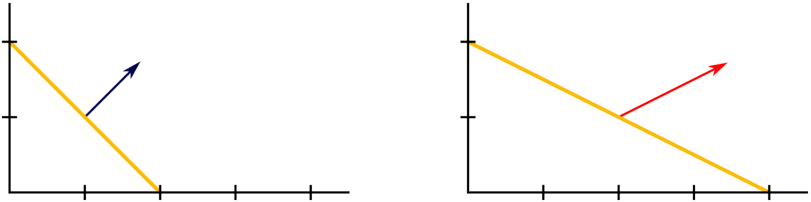
Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkba, $\mathbf{n}$ normálvekotrral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtás leíró transzformáció.
- Probléma: g'-t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz?



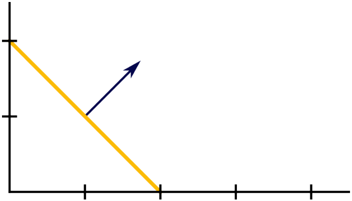
Normálvektorok transzformációja

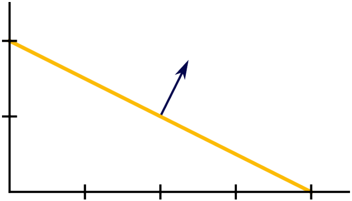
- Legyen g egy szakasz a síkba, $\mathbf{n}$ normálvekotrral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtás leíró transzformáció.
- Probléma: g'-t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz? NEM!



Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkba, $\mathbf{n}$ normálvekotrral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtás leíró transzformáció.
- Probléma: g'-t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz? NEM!





- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen p az érintősík egy pontja, ekkor x akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen p az érintősík egy pontja, ekkor x akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor nyílván, tetszőleges (invertálható) **A** transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen p az érintősík egy pontja, ekkor x akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor nyílván, tetszőleges (invertálható) **A** transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

- A skaláris szorat és a mátrix szorzás szabályai alapján kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T} \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen p az érintősík egy pontja, ekkor x akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor nyílván, tetszőleges (invertálható) **A** transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

- A skaláris szorat és a mátrix szorzás szabályai alapján kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Azaz a normálvektorokat az **A** mátrix helyett annak inverztranszponáltjával kell szorozni!

Megjegyzés

- A sík affin transzformációit egyértelműen meghatározza három független pont és azok képe

Megjegyzés

- A sík affin transzformációit egyértelműen meghatározza három független pont és azok képe
- A tér affin transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe

Tartalom

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A "távolodó" párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A "távolodó" párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *központi vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A "távolodó" párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *központi vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.
- Az affin transzformációk nem "bántották" az ideális elemeket, a fentiekhez azonban ez "kell"

Általános eset

Ha egy *homogén* transzformációs mátrix utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]$, akkor az olyan *homogén lineáris transzformáció*, ami az euklidészi térnek nem lineáris transzformációja.

Párhuzamos vetítés

- A mátrix ami megadja egyszerű, például az XY síkra való vetítés
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóbol a z tengely mentén "nézünk" a térre.

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóbol a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóbol a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóbol a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóbol a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:
  - a gúla függőleges nyílásszöge,

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:
  - a gúla függőleges nyílásszöge,
  - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,

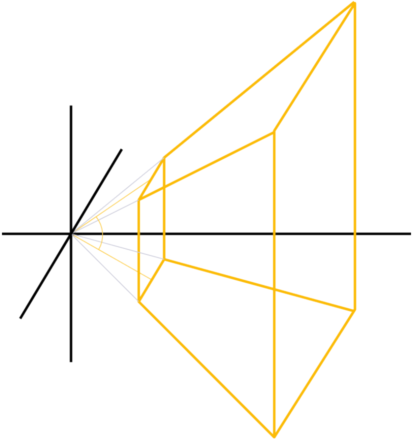
Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:
  - a gúla függőleges nyílásszöge,
  - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
  - a közeli vágósík távolsága

Perspektív transzformáció

- Központi vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén "nézünk" a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- Paraméterei:
  - a gúla függőleges nyílásszöge,
  - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
  - a közeli vágósík távolsága
  - a távoli vágósík távolsága

Perspektív transzformáció



Homogén osztás

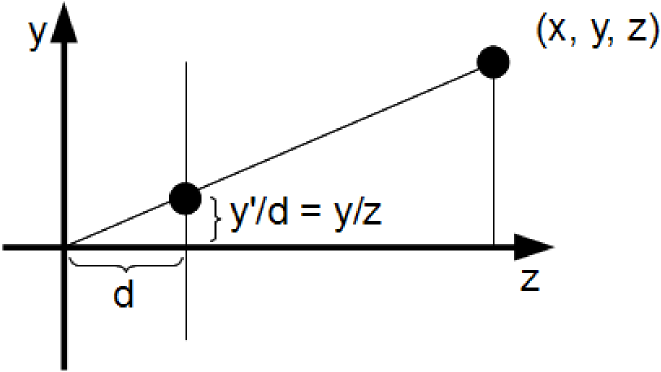
- Mivel egy **M** "valódi" projektív transzformáció utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]^T$, ezért

$$[x, y, z, w]^T = \mathbf{Mv}$$

transzformáció után, $w \neq 1$ általános esetben.

- Ha ezt a pontot az eukleidészi térbe szeretnénk átvinni (mert pl. meg akarjuk jeleníteni), akkor végig kell osztanunk w-vel.
- (Persze csak akkor, ha $w \neq 0$)
- Ezt nevezzünk homogén osztásnak.

Középpontos vetítés



Középpontos vetítés

- Vagyis:

$$x' = \frac{x}{z}d$$
$$y' = \frac{y}{z}d$$
$$z' = \frac{z}{z}d = d$$

Középpontos vetítés

- Az origó, mint vetítési középpont és egy, attól a Z tengely mentén d egységre található, XY síkkal párhuzamos vetítősíkra való vetítés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

- Homogén osztás után ($\frac{z}{d}$-vel) a fentit kapjuk

Megjegyzés

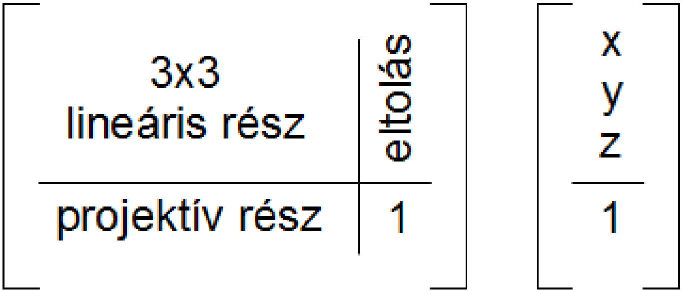
- A sík projektív transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe

Megjegyzés

- A sík projektív transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe
- A tér projektív transzformációit egyértelműen meghatározza öt független pont és azok képe

Tartalom

Transzformációs mátrixok



Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?

Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!

Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!
- Figyeljünk: nem mindenhol szoroznak jobbról a vektorokkal!

Transzformációs mátrixok

$$\left[\begin{array}{c|c} x,\ y,\ z & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\mathbf{A}^{T}\text{: 3x3} \\ \text{lineáris rész}\end{array} & \text{projektív} \\ \hline \text{eltolás rész} & 1 \end{array}\right]$$