

# Digitális jelfeldolgozás vizsga

Patka Zsolt-András

2020

## Tartalomjegyzék

<b>1. Feladat</b>	<b>3</b>
1.1. DSP architektúrák . . . . .	3
1.2. Processzor architektúra . . . . .	3
1.3. CPU regiszterek . . . . .	3
1.4. Aritmetikai és logikai egység . . . . .	4
1.5. DSP motor . . . . .	4
1.6. DSP utasítások . . . . .	5
1.7. Hardware osztó . . . . .	5
1.8. Utasításciklusok . . . . .	5
<b>2. Feladat</b>	<b>6</b>
2.1. Szűrők - elméleti áttekintés . . . . .	6
2.2. Átviteli függvény . . . . .	6
2.3. Szűrő struktúrák . . . . .	6
2.4. Frekvencia, amplitúdó és fáziskarakterisztikák . . . . .	7
2.5. Szűrő válaszának skálázása . . . . .	8
2.6. Ábrázolási módok . . . . .	9
2.7. Szűrőtípusok közötti transzformációk . . . . .	9
<b>3. Feladat</b>	<b>10</b>
3.1. Súlyfüggvény kiszámítása . . . . .	10
3.2. Python rész . . . . .	13
3.2.1. Súlyfüggvény ábrázolása . . . . .	13
3.2.2. Ablakozás . . . . .	13
3.2.3. Szűrés . . . . .	14
<b>4. Feladat</b>	<b>15</b>
4.1. Számolások . . . . .	15
4.2. Python ellenőrzés . . . . .	23

## Ábrák jegyzéke

1. Processzor architektúra . . . . .	3
2. DSP motor . . . . .	4
3. Utasításciklusok . . . . .	5

4.	Felül-áteresztő szűrő	6
5.	Alul-áteresztő szűrő	7
6.	Frekvenciakarakterisztika	7
7.	Lineáris fázismenet	8
8.	Fáziskésés és csoportfutási idő	8
9.	Felül-áteresztő szűrő	9
10.	Keskeny sávú sáváteresztő	9
11.	Sáváteresztő: AE + FE szűrő kapcsolás	10
12.	Sávzáró szűrő	10
13.	FIR súlyfüggvény, háromszög ablakkal	13
14.	Szűrő spektruma ablakozással és ablakozás nélkül	13
15.	Bemeneti jel, két szinusz összege	14
16.	Szűrés eredménye - ablakozás nélkül	14
17.	Szűrés eredménye - ablakozással	15
18.	Bode diagram kiszámolt és Scipy által tervezett IIR	23
19.	Stabilitás vizsgálata	23

# DSP vizsga

17.01.2009

1. DSP architektúrák – CPU dsPIC30Fxxxx .Processzor architektúra. CPU regiszterek. Aritmetikai és logikai egység. DSP motor. DSP utasítások. Hardware osztó. Utasításciklusok.
2. Bevezetés a szűrők elméletébe. Átviteli függvény. Súlyfüggvény. Átmeneti függvény. Alapvető szűrő struktúrák. Frekvencia-jellemzők, amplitudó és fáziskarakterisztikák. Lineáris és nemlineáris fázismenetű szűrők. Szűrő válaszának skálázása. Ábrázolási módok. Szűrőtípusok közötti transzformációk.
3. Tervezzetek egy alul-áteresztő FIR szűrőt a következő jellemzőkkel:
  - a.  $N = 17$
  - b.  $F_c = 400\text{Hz}$
  - c.  $F_s = 1000\text{Hz}$

Rajzoljátok le a súlyfüggvényt és mutassátok be a szűrés folyamatát egy általatok választott jelre!

Alkalmazzatok egy háromszög ablakot a kapott súlyfüggvényre. Magyarázzátok el az ablakozás lényegét, mit várunk el az ablakozástól?

4. Tervezzetek egy alul-áteresztő IIR szűrőt kiindulva egy harmadfokú Butterworth analóg szűrő átviteli függvényéből. Vágási frekvencia  $2\text{kHz}$ , mintavételezési frekvencia  $20\text{kHz}$ .

Minden feladat 2 pont.

Kutasi D.Nimród

# 1. Feladat

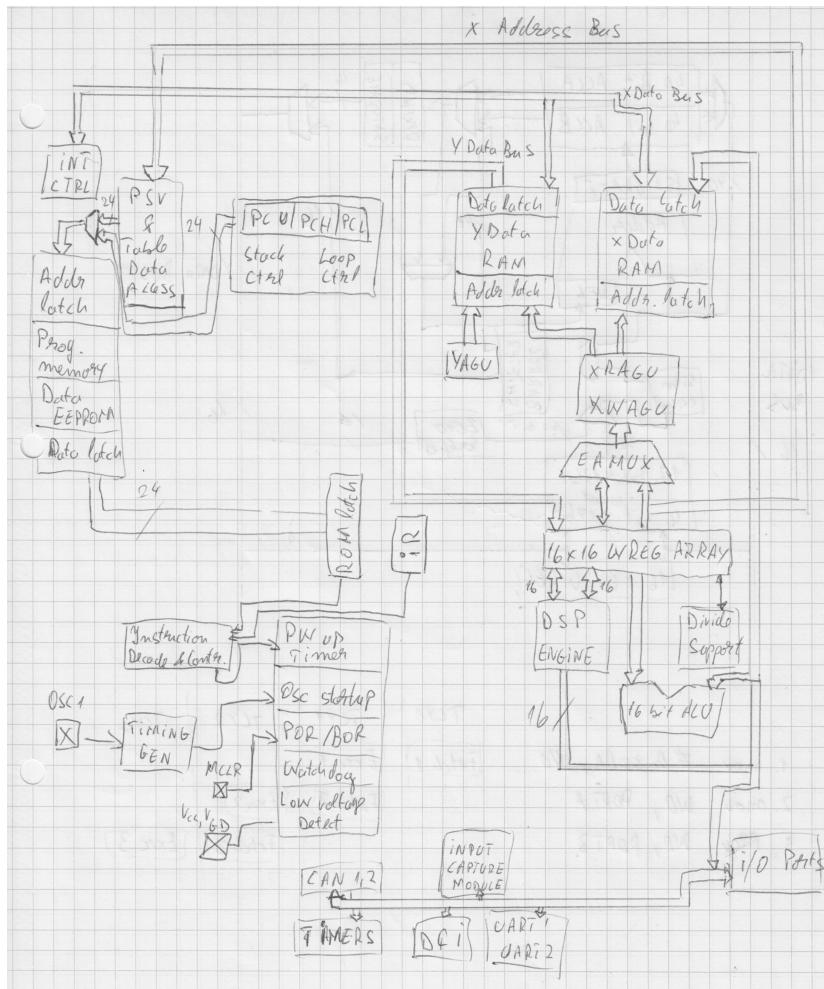
## 1.1. DSP architektúrák

A digitális jelprocesszor (DSP) egy mikroszámítógép kibővített központi egysége. A kibővítés lehetővé teszi a műveletek gyorsabb végrehajtását és a párhuzamos művelet elvégzést, mint például: hardveres szorzás, MAC művelet (szorzás és összeadás egy utasításciklus alatt), hardveres eltolás.

A mikroprocesszoroknál két fajta architektúra lehetséges: Neumann és Harvard. A dsPIC-ek a Harvard architektúrát (Pontosabban módosított Harvard) használják ami azt jelenti, hogy a programmemória és az adatmemória külön van választva. Neumann architektúra esetén egy helyen van a programmemória az adatmemóriával. A módosítás a Harvard architektúrán az, hogy a programmemória egy része használható adatmemóriaként (ezt hívják PSV - Program Space Visibility technikának).

A dsPIC jellegzetessége, hogy az adatmemória két részre van osztva: X és Y memóriára. Ez azért volt megvalósítva, mert így egyidőben lehet két adattal dolgozni.

## 1.2. Processzor architektúra



1. ábra. Processzor architektúra

## 1.3. CPU regiszterek

Fontosabb regiszterek:

- W4, W5, W6, W7 - operandus regiszterek
- W8, W9, W10, W11 - címregiszterek (W8 és W9 - X memóriának, W10 és W11 - Y memóriának)
- W14 - frame pointer
- W15 - stack pointer
- CORCON - CPU viselkedését módosító flag-eket tartalmazó regiszter
- ACCA és ACCB - 40 bites akkumulátorok (3 darab 16 bites regiszterben vannak eltárolva)

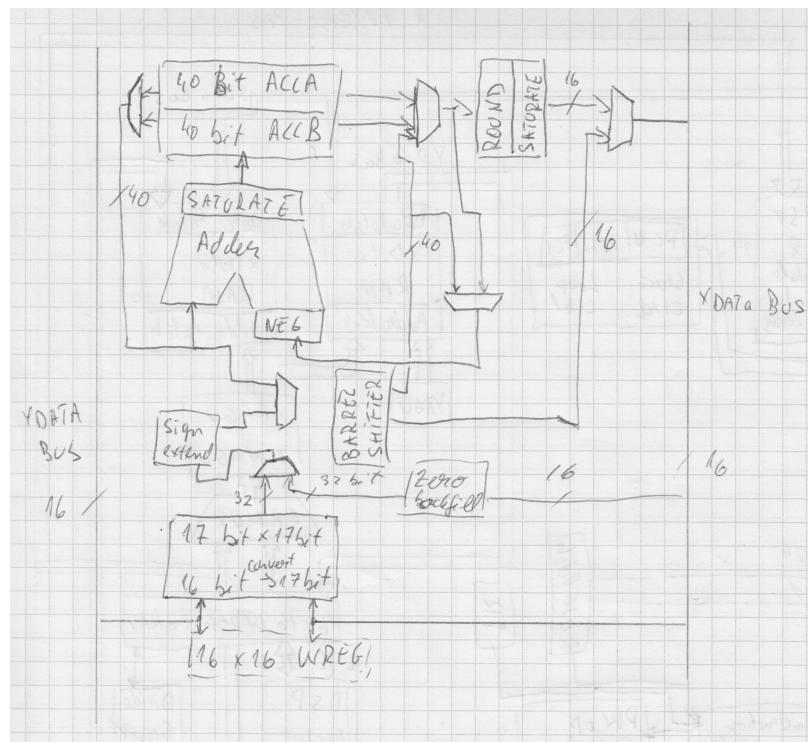
## 1.4. Aritmetikai és logikai egység

Az ALU (Arithmetic Logic Unit) képes összeadást, kivonást, logikai műveleteket és egy bites eltolást elvégezni. Az operandusokat a W regisztereiből vagy az adatmemóriából jönnek, az eredmény kerülhet ugyancsak a W regiszterbe vagy az adatmemóriába.

## 1.5. DSP motor

A DSP motor viselkedését a CORCON regiszter bitjeit állítva tudjuk módosítani:

- IF: egész vagy törtszámos szorzást végezzen
- US: előjeles vagy előjel nélküli számokkal dolgozzon
- SATA: legyen A regiszterre telítés vagy sem
- SATB: legyen a B regiszterre telítés vagy sem



2. ábra. DSP motor

## 1.6. DSP utasítások

- mac:  $a = a + b * c$  (multiply and accumulate)
- msc:  $a = a - b * c$  (multiply and subtract)
- mpy:  $a = b * c$  (multiply)
- mpy.n:  $a = -b * c$  (multiply and negate)
- ed:  $a = (b - c)^2$  (euclidean distance)
- edac:  $a = a + (b - c)^2$  (euclidean distance and accumulate)

Példa: MAC W4\*W5, A, [W8]+=2, W4, [W10]+=2, W5

Itt  $W4*W5 \rightarrow A$ ,  $[W8]+2 \rightarrow W4$ ,  $[W10]+2 \rightarrow W5$ . Fontos, hogy a harmadik operandus (itt  $[W8]$ ) X memóriát címző regiszter legyen és az ötödik operandus (itt  $[W10]$ ) Y memóriát címző regiszter.

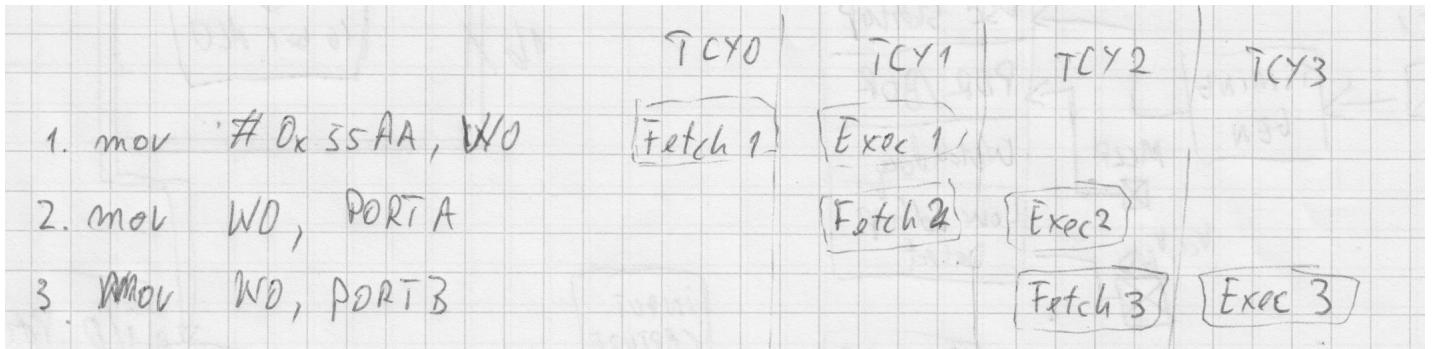
## 1.7. Hardware osztó

A dsPIC30F-nél az osztó blokk képes előjeles és előjel nélküli egész számok osztására. Az osztás hányadosa a W0 regiszterbe kerül és a maradék a W1-es regiszterbe. Műveletek:

- DIVF: 16/16 előjeles törtszám osztás
- DIV.SD: 32/16 előjeles osztás
- DIV.UD: 32/16 előjel nélküli osztás
- DIV.UW: 16/16 előjel nélküli osztás

## 1.8. Utasításciklusok

A dsPIC-ek pipeline-ozott architektúrát használnak, amiből kifolyólag az egymás után követő utasítások nem kell megvárják amíg az azelőtti utasítás minden fázisa véghez ment (Fetch és Execute), hanem amíg az első utasítás az execute fázisban van, addig a második utasítás lehet a fetch fázisban. Ez gyorsításhoz és az erőforrások hatékonyabb kihasználásához vezet.



3. ábra. Utasításciklusok

## 2. Feladat

### 2.1. Szűrők - elméleti áttekintés

Szűrés által csillapítani (kiszűrni) tudjuk a jelekből a nem kívánt frekvencia komponenseket úgy, hogy a számunkra fontos frekvencia komponenseket változatlanul átengedjük.

### 2.2. Átviteli függvény

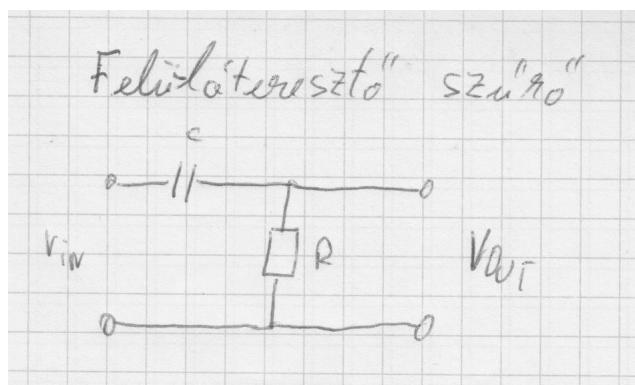
Egy szűrőt megadhatunk egy átviteli függvény segítségével. Az átviteli függvény adja meg a rendszer kimenetei és bemenetei közötti összefüggést.

A szűrés történhet úgy, hogy a jelet átvisszük a frekvencia tartományba (Fourier transzformált), összeszorozzuk az átviteli függvénnyel és ezután visszavisszük az időtartományba (Inverz Fourier transzformált). Egy másik lehetőség (FIR szűrő), hogy az átviteli függvénynek elvégezzük az inverz Fourier transzformáltját, így a szűrés csak egy egyszerű konvolúció a bemeneti jel és a súlyfüggvény között (a frekvencia tartományban szorzás megfelel az időtartományban a konvolúcióval).

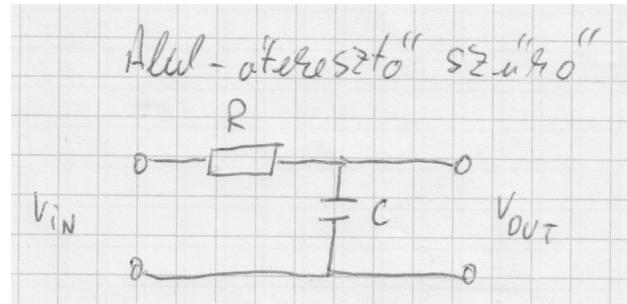
### 2.3. Szűrő struktúrák

Több fajta szűrő létezik:

- Alul-áteresztő
- Felül-áteresztő
- Sávzáró
- Sáváteresztő
- Mindent áteresztő (fázist változtatja meg, például sztereó hangzás eléréséért)



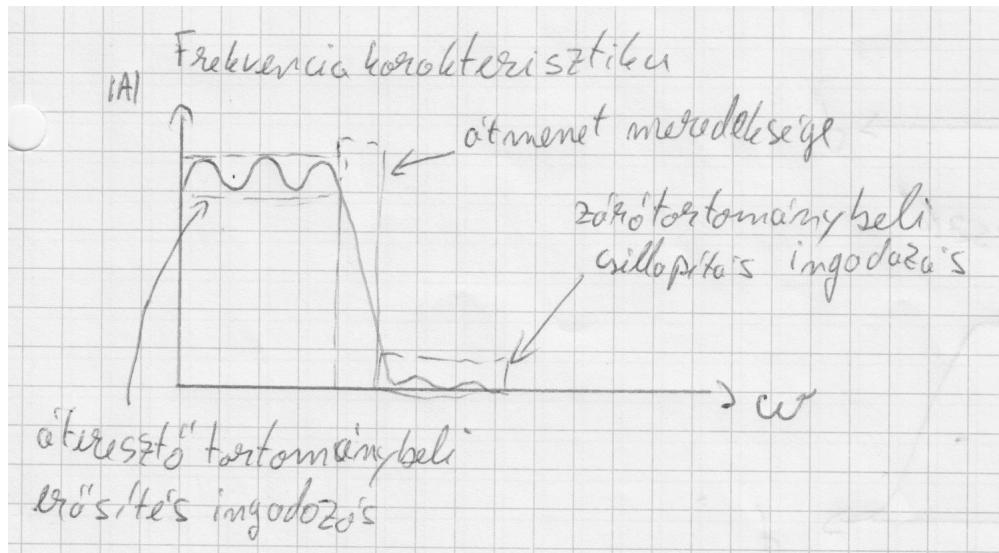
4. ábra. Felül-áteresztő szűrő



5. ábra. Alul-áteresztő szűrő

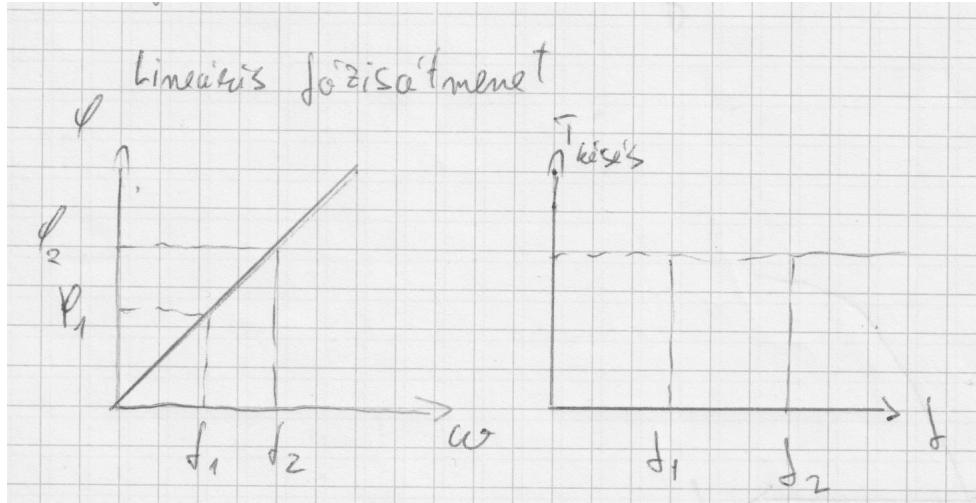
## 2.4. Frekvencia, amplitúdó és fáziskarakterisztikák

Frekvencia karakterisztikák: áteresztő tartománybeli erősítés ingadozás, átmeneti tartomány meredeksége, zárótartományi csillapítás ingadozás.

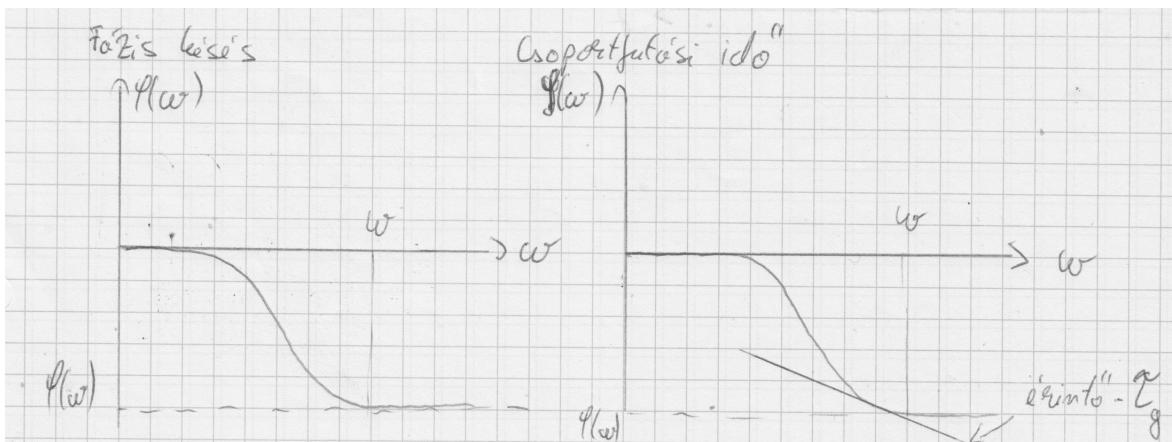


6. ábra. Frekvenciakarakterisztika

Fáziskarakterisztikák: fázismenet, csoportfutási idő. Fázismenet lehet lineáris vagy nemlineáris. Lineáris esetén minden frekvenciakomponenst ugyanannyit késleltet a szűrő. A csoportfutási idő a fázismenet frekvencia szerinti deriváltja.



7. ábra. Lineáris fázismenet



8. ábra. Fáziskésés és csoportfutási idő

- Fáziskésés:  $\tau_p(w) = \frac{\varphi(w)}{w}$
- Csoportfutási idő:  $\tau_g = \frac{d\varphi(w)}{dw}$

## 2.5. Szűrő válaszának skálázása

Az analóg szűrőknek az átviteli függvényük  $f_c = 1$ -re vannak normalizálva. Ahhoz, hogy a kívánt frekvenciánál legyen a vágás, szükséges, hogy a következő képlet szerint számoljuk ki az átviteli függvényt:

$$H_{w_c}(s) = \frac{k * \prod_{i=1}^n (s - w_c * z_i)}{w_c^{m-n} \prod_{j=1}^m (s - w_c * p_j)}$$

- $w_c$ : vágási körfrekvencia
- $k$ : erősítés
- $z_i$ : zérusok
- $p_j$ : pólusok

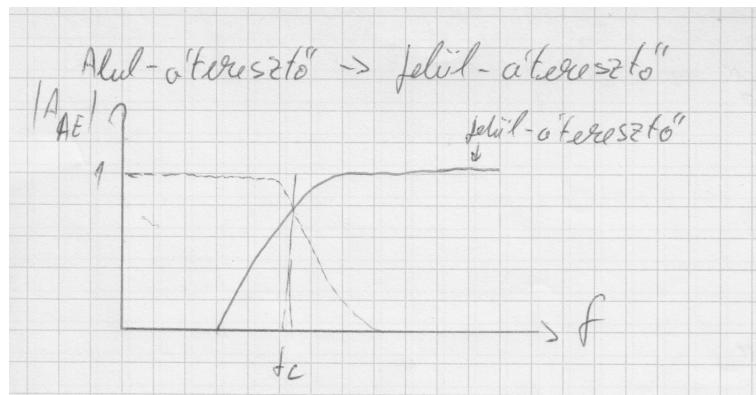
## 2.6. Ábrázolási módok

Hasznos az ábrázolási módot úgy végezni, hogy az áteresztőtartományban lineáris a skála (nagy felbontás), és a zárótartományban logaritmikus. Frekvencia tartományban ábrázoljuk a szűrőket, mert ott látható, hogy a szűrő melyik frekvenciákat engedi át és melyikeket nem.

## 2.7. Szűrőtípusok közötti transzformációk

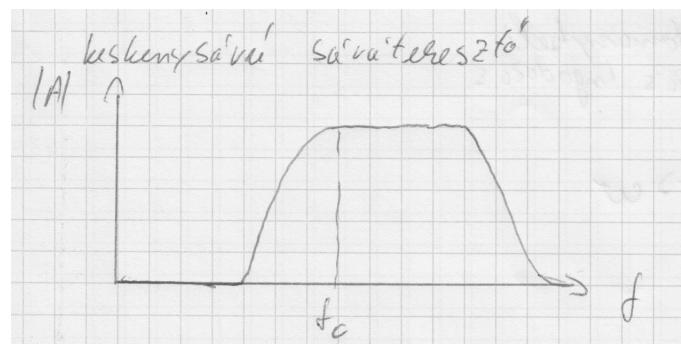
Egy jól megtervezett alul-áteresztő szűrőből egy behelyettesítés elvégzése által lehet felül-áteresztő, sáváteresztő és sávzáró szűrőt kapni.

$$\text{Felül-áteresztő: } H_{FE} : s \rightarrow \frac{1}{s}$$



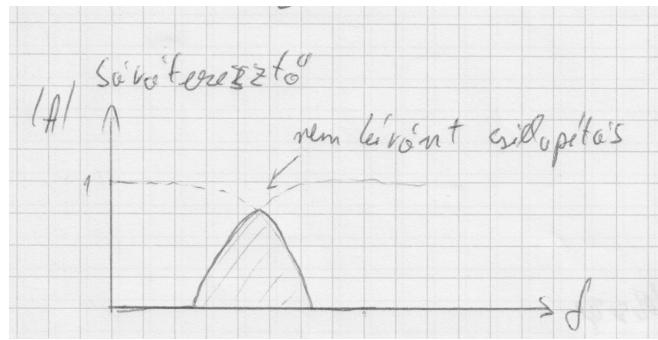
9. ábra. Felül-áteresztő szűrő

$$\text{Keskeny sávú sáváteresztő: } H_{SA} : s \rightarrow s - \frac{1}{s}$$



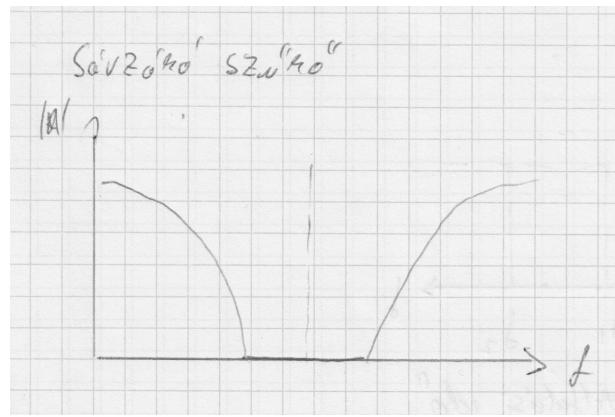
10. ábra. Keskeny sávú sáváteresztő

Sáváteresztőt lehet egy alul-áteresztő és felül-áteresztő szűrő egymás utáni kapcsolásával is megvalósítani. Ez viszont behoz egy nem kívánt csillapítást az áteresztő tartományban.



11. ábra. Sáváteresztő:  $AE + FE$  szűrő kapcsolás

Sávzáró:  $H_{SZ} : s \rightarrow \frac{s}{s^2 - 1}$



12. ábra. Sávzáró szűrő

### 3. Feladat

#### 3.1. Súlyfüggvény kiszámítása

3. Fír részletek

$$N = 17$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot \frac{f_c}{f_0} = 2\pi \cdot \frac{400}{1000} = \frac{4\pi}{5}$$

$$f_c = 400 \text{ Hz}$$

$$f_0 = 1000 \text{ Hz}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\omega_c \cdot m)}{\sqrt{m}} \quad m = m - \frac{N-1}{2} = m - 8$$

$$m = 0 \dots N-1 = 0 \dots 16$$

ha  $m=8$ , akkor  $m=0$  így  $\frac{\sin 0}{0}$  lesz lop fel

$$\text{L'Hospital szabály nincs függvényre: } \frac{\sin(\omega_c \cdot m)}{\sqrt{m}} \stackrel{1}{=} \frac{\cos(\omega_c \cdot m)}{\frac{1}{2\sqrt{m}}} = \frac{\omega_c \cdot \cos(\omega_c \cdot m)}{\sqrt{m}}$$

$$m=0 \text{ -hoz: } \frac{\omega_c \cdot \cos 0}{\sqrt{1}} = \frac{4\pi}{5\sqrt{1}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$h[8] = 0.8$$

$$h[0] = \frac{\sin(\omega_c \cdot (-8))}{-8 \cdot \sqrt{1}} = -\frac{\sin(\omega_c \cdot 8)}{-8 \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sin(\frac{4\pi}{5} \cdot 8)}{8 \cdot \sqrt{1}} = 0.03$$

$$h[1] = -0.04 \quad h[10] = -0.15$$

$$h[2] = 0.03 \quad h[11] = 0.1$$

$$h[3] \approx 0$$

$$h[12] = -0.04$$

$$h[4] = -0.04$$

$$h[13] \approx 0$$

$$h[5] = 0.1$$

$$h[14] = 0.03$$

$$h[6] = -0.15$$

$$h[15] = -0.04$$

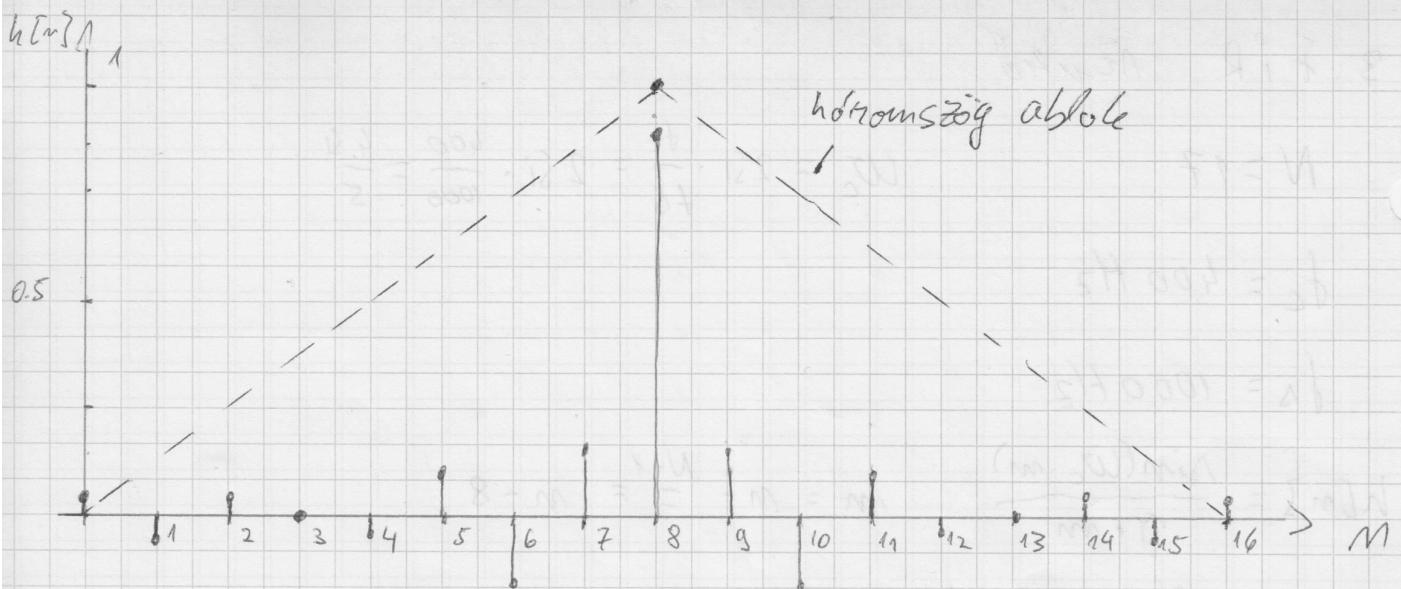
$$h[7] = 0.18$$

$$h[16] = 0.03$$

$$h[8] = 0.8$$

$$h[9] = 0.18$$

Szűrés: A szűrést jel "oppent" a bemeneti jel és a működési függvény (nincs) kanvalúciojával.

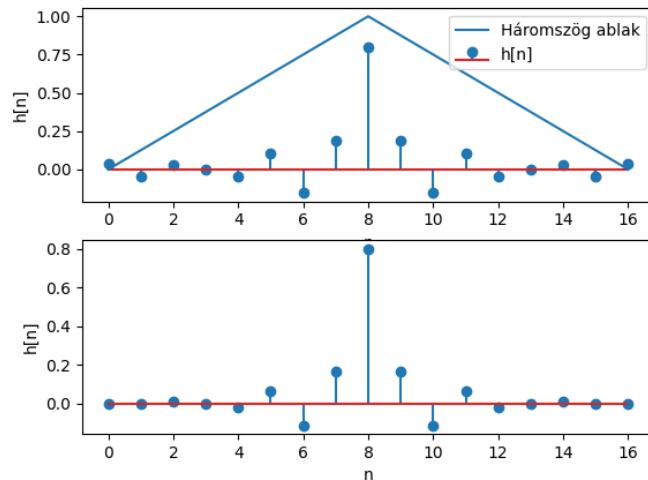


Ablakozás: a súlyfüggvényt megszorozzuk egy számyos ablakkal

## 3.2. Python rész

### 3.2.1. Súlyfüggvény ábrázolása

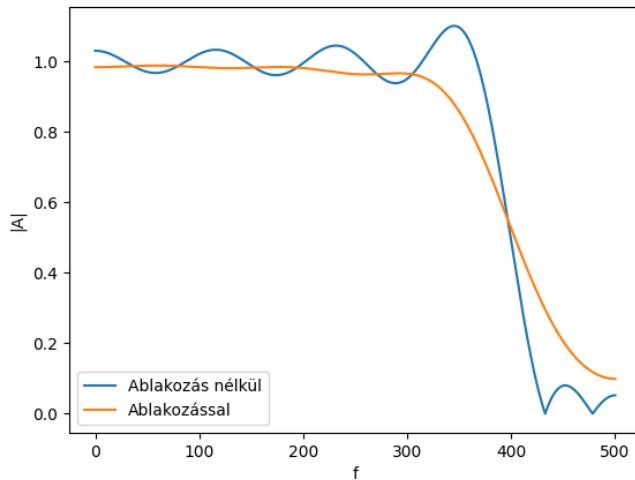
A következő ábrán látható a FIR szűrő súlyfüggvénye, a háromszög ablak és az ablakozás elvégzése utáni súlyfüggvény. Az ablakozás a súlyfüggvény beszorzása egy adott függvényvel. Egyes típusú FIR szűrő, mivel páratlan a súlyfüggvény nem nulla elemeinek száma ( $N=17$ ) és a súlyfüggvény szimmetrikus.



13. ábra. FIR súlyfüggvény, háromszög ablakkal

### 3.2.2. Ablakozás

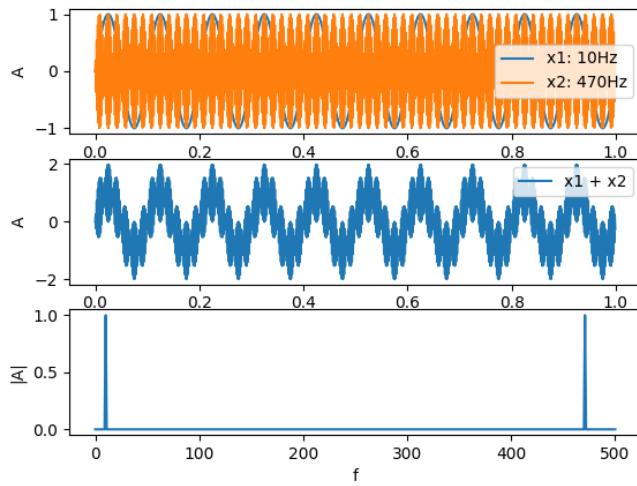
Ablakozással a Gibb's hatást ki lehet küszöbölni, viszont az átmeneti tartomány így szélesebb lesz



14. ábra. Szűrő spektruma ablakozással és ablakozás nélkül

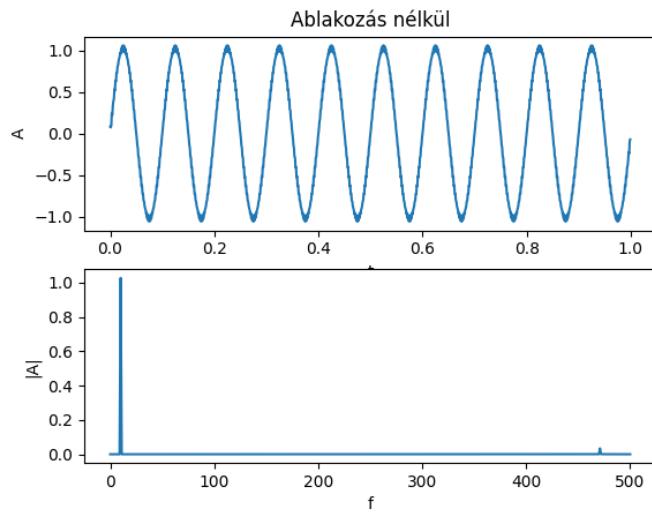
### 3.2.3. Szűrés

FIR szűrőnél a szűrt érték kiszámítható a bemeneti jel és a FIR súlyfüggvényének konvolúciójaként. Az alábbi ábrán látható egy 10 Hz-es és 470 Hz-es szinusz jel, ezek összege és a jel spektruma:



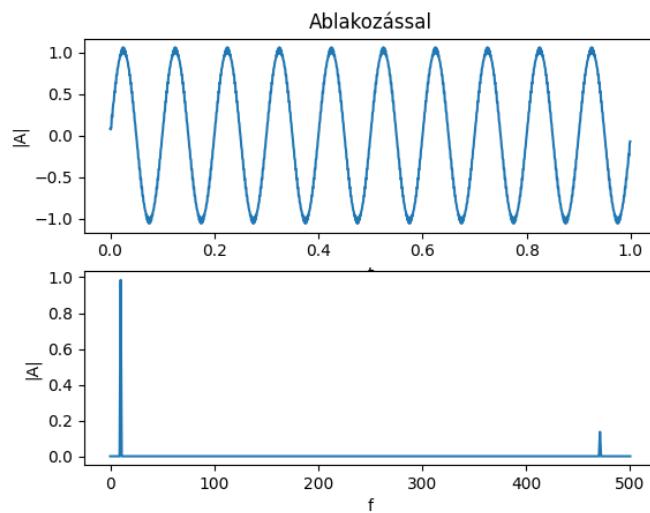
15. ábra. Bemeneti jel, két szinusz összege

A konvolúció elvégzése után a 470 Hz-es szinusz jelt ki sikerült szűrni:



16. ábra. Szűrés eredménye - ablakozás nélkül

Szűrés az ablakozott súlyfüggvénnnyel:



17. ábra. Szűrés eredménye - ablakozással

Az ablakozás hátránya, hogy az átmeneti tartomány szélesebb lesz. Mivel a 470 Hz-es jel közel van a vágási frekvenciához, ezért a szélesebb átmeneti tartomány miatt ennek a jelnek a csillapítása kisebb lesz, mint az ablakozás nélküli súlyfüggvénnyel való szűrésnél. Viszont ablakozás nélkül, az áteresztő tartományba eső jelek nem mennének át változatlanul, egyesek csillapítva, mások erősítve lennének.

## 4. Feladat

### 4.1. Számolások

4. iR, homogén Butterworth

$$f_c = 2 \text{ kHz} \quad M=3$$

$$f_s = 20 \text{ kHz}$$

Butterworth átviteli függvénye:  $H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (s - s_i)}$ , ahol  $s_i = j \sqrt{2} \cdot \sqrt{n-i}/2n$

$M=3$

$$s_1 = j \sqrt{\frac{5}{6}} = j \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = j \sqrt{\frac{5}{6}} = \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} = -1$$

$$\begin{aligned} s_3 &= j \sqrt{\frac{5}{6}} = j \sqrt{\frac{4}{3}} = \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + j \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) - j \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - j \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\omega_c$  vágószög frekvenciájának az átviteli függvénye:

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (s - \omega_c \cdot z_i)}{\omega_c^{(m-n)} \cdot \prod_{i=1}^m (s - \omega_c \cdot p_i)}$$

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{\omega_c^3}{(s - \omega_c \cdot p_1) \cdot (s - \omega_c \cdot p_2) \cdot (s - \omega_c \cdot p_3)}$$

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{\omega_c^3}{[s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] \cdot (s + \omega_c) \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)]} \quad m=0$$

Részleťosztók bontása,  $A_1, A_2, A_3$  kiszámítása:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} + \frac{A_2}{s + \omega_c} + \frac{A_3}{s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} &= A_1 \cdot (s + \omega_c) \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] + \\ + A_2 \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] + A_3 \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] \cdot (s + \omega_c) \\ \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] \cdot (s + \omega_c) \cdot [s - \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Szorzat: } A_1 \cdot [s^2 - s \cdot \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + s \cdot \omega_c \cdot \omega_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] + \\ + A_2 \cdot [s^2 - s \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - s \omega_c \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \omega_c^2 \cdot 1] + A_3 \cdot [s^2 + s \cdot \omega_c - \\ - s \cdot \omega_c \cdot \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \omega_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)] = \boxed{M_0} \end{aligned}$$

$$= A_1 \cdot \left[ s^2 + 1 \cdot w_c \left( \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - w_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] + A_2 \cdot \left[ s^2 + s \cdot w_c + w_c^2 \right] + A_3 \cdot \left[ s^2 + s \cdot \left( \frac{3}{2} w_c - j w_c \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - w_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

Egyenlőne' teszem  $w_c^3 = \omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 \cdot w_c \cdot \left( \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot w_c + A_3 \cdot w_c \cdot \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \quad | : w_c \\ -A_1 \cdot w_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_2 \cdot w_c^2 - A_3 \cdot w_c^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \quad | : w_c^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad I \\ A_1 \cdot \left( \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_2 + A_3 \cdot \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \quad II \\ -A_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_2 - A_3 \cdot \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = w_c \quad III \end{array} \right.$$

$$\text{II} - \text{III} \Rightarrow \frac{3}{2} A_1 + A_2 - j\frac{\sqrt{3}}{2} + A_2 + \frac{3}{2} A_3 - A_3 - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} A_1 - j\frac{\sqrt{3}}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 + A_3 - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -w_c$$

$$A_1 + A_3 = -w_c$$

$$\cdot I \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$\boxed{A_2 = w_c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_3 = -w_c \quad \Rightarrow A_1 = -w_c - A_3 \\ A_1 \cdot \left( \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_3 \cdot \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -w_c \\ + A_1 \cdot \left( \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_3 \cdot \left( \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$(II) (-w_c - A_3) \cdot \left( \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + A_3 \cdot \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -w_c$$

$$-\frac{3}{2} w_c - j w_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} A_3 - A_3 \cdot j \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} A_3 - A_3 \cdot j \frac{\sqrt{3}}{2} = -w_c$$

$$-A_3 \cdot j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -w_c + \frac{3}{2} w_c + j w_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad | : j \sqrt{3}$$

$$-A_3 = \frac{\frac{1}{2}w_c + jw_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{j\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}} = \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}w_c - w_c \cdot \frac{3}{2}}{-3}$$

$$A_3 = -w_c \cdot \frac{3}{6} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c = -\frac{1}{2}w_c + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c$$

$$(I) \quad A_1 + A_3 = -w_c$$

$$A_1 - \frac{1}{2}w_c + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c = -w_c$$

$$A_1 = -w_c + \frac{1}{2}w_c - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2}w_c - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \\ A_2 &= +w_c \\ A_3 &= -\frac{1}{2}w_c + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \end{aligned} \right\}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{1 - \exp(\lambda_k' \cdot T) \cdot z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \exp(w_c \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot T) \cdot z^{-1}} +$$

$$\lambda_1' = w_c \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\lambda_2' = -w_c$$

$$\lambda_3' = w_c \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}w_c - \frac{\sqrt{3}}{6}w_c \cdot j$$

$$+ \frac{A_2}{1 - \exp(-w_c \cdot \bar{T}) \cdot z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - \exp(w_c \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \bar{T}) \cdot z^{-1}} = A_2 = w_c \\ A_3 = -\frac{1}{2}w_c + \frac{\sqrt{3}}{6}w_c \cdot j \\ = A_1 \cdot (1 - \ell_2 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_3 \cdot z^{-1}) + A_2 \cdot (1 - \ell_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_3 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_2 \cdot z^{-1}) + A_3 \cdot (1 - \ell_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_2 \cdot z^{-1})$$

$$w_c \cdot \bar{T} = \frac{40000 \cdot \bar{s}}{20000} = \frac{20}{5}$$

$$\ell_1 = \exp\left(\frac{20}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$\ell_2 = \exp\left(-\frac{20}{5}\right)$$

$$\ell_3 = \exp\left(-\frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$(1 - \ell_2 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_3 \cdot z^{-1}) = 1 - \ell_3 \cdot z^{-1} - \ell_2 \cdot z^{-1} + \ell_2 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2} = 1 - z^{-1} \cdot (\ell_3 + \ell_2) + \\ + \ell_2 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2} = 1 - z^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{20}{5}\right) \right] + \left[ \exp\left(-\frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) \right] \cdot z^{-2} \\ (1 - \ell_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_3 \cdot z^{-1}) = 1 - \ell_3 \cdot z^{-1} - \ell_1 \cdot z^{-1} + \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2} = 1 - z^{-1} \cdot (\ell_3 + \ell_1) + \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2} = \\ = 1 - z^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) \right] + z^{-2} \cdot \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) = \\ = 1 - z^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{20}{10} - j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) \right] + z^{-2} \cdot \exp\left(-\frac{20}{5}\right) \\ (1 - \ell_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - \ell_2 \cdot z^{-1}) = 1 - z^{-1} \cdot (\ell_2 + \ell_1) + z^{-2} \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 = 1 - z^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{20}{5}\right) + \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10}\right) \right] + \\ + z^{-2} \cdot \exp\left(-\frac{20}{10} + j\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$$

Számláló kiszámítása:

$$A_1 \cdot (1 - z^{-1} \cdot (\ell_3 + \ell_2) + \ell_2 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2}) + A_2 \cdot (1 - z^{-1} \cdot (\ell_3 + \ell_1) + \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot z^{-2}) + \\ + A_3 \cdot (1 - z^{-1} \cdot (\ell_2 + \ell_1) + z^{-2} \cdot \ell_1 \cdot \ell_2) = A_1 + A_2 + A_3 + z^{-1} \cdot (-A_1 \cdot \ell_3 + A_1 \cdot \ell_2 - \\ - A_2 \cdot \ell_3 - A_2 \cdot \ell_1 - A_3 \cdot \ell_2 - A_3 \cdot \ell_1) + z^{-2} \cdot (A_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3 + A_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 + \\ + A_3 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2)$$

$$\text{Neurzo}^{\text{bis zu } m \text{ mit } \zeta_3}: (1 - l_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - l_2 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - l_3 \cdot z^{-1}) = (1 - l_2 \cdot z^{-1} - l_1 \cdot z^{-1} + l_1 \cdot l_2 \cdot z^{-2}) \cdot (1 - l_3 \cdot z^{-1}) =$$

$$= 1 - l_2 \cdot z^{-1} - l_1 \cdot z^{-1} + l_1 \cdot l_2 \cdot z^{-2} - l_3 \cdot z^{-1} + l_2 \cdot l_3 \cdot z^{-2} + l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot z^{-3} -$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot z^{-3} = 1 - z^{-1} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + z^{-2} \cdot (l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_3) -$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot z^{-3} \neq \text{nicht}$$

$$\begin{aligned} \underset{z^{-1}}{\blacktriangleright} l_1 + l_2 + l_3 &= \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10} + j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10} - j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \exp\left(j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \exp\left(-j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{z^{-2}}{\blacktriangleright} &= \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left[ \exp\left(j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) \right] + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) = \\ &= \left[ \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left(2 \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) \right] = 1.78 \end{aligned}$$

$$\exp j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} = \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} + j \sin \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}$$

$$\exp -j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} = \cos \left(\frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) - j \sin \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}$$

$$\underset{z^{-2}}{\blacktriangleright} l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_3 = \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10} + j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} - \frac{\sqrt{1}}{5}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5} - \frac{\sqrt{1}}{10} - j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10} + j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} - \frac{\sqrt{1}}{10} - j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) = \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10} + j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10} - j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) = \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left[ \exp\left(j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) \right] + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left( \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} + j \sin \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} + \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} - j \sin \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} \right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) =$$

$$= \left[ \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) \right] = \underline{0.53}$$

$$\underset{z^{-3}}{\blacktriangleright} l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10} + j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} - \frac{\sqrt{1}}{5} - \frac{\sqrt{1}}{10} - j \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) = \exp\left(-\frac{2\sqrt{1}}{5}\right) = 0.28$$

$$\text{Neurzo}^{\text{bis zu } m}: 1 - z^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right) \right] \cdot 2 \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10} + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) + z^{-2} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{3\sqrt{1}}{10}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos \frac{\sqrt{1}\sqrt{3}}{10}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}\right) \right] - z^{-3} \cdot \exp\left(-\frac{2\sqrt{1}}{5}\right) = 1 - 1.78 \cdot z^{-1} + 0.53 \cdot z^{-2} - 0.28 \cdot z^{-3}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c + w_c + \frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow -A_1 \cdot l_3 - A_1 \cdot l_2 - A_2 \cdot l_3 - A_2 \cdot l_1 - A_3 \cdot l_2 - A_3 \cdot l_1 = \\
 & = l_1 \cdot (-A_2 - A_3) + l_2 \cdot (-A_1 - A_3) + l_3 \cdot (-A_1 - A_2) = l_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + \\
 & + l_2 \cdot w_c + l_3 \cdot \left( \frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) = l_1 \cdot \left( -w_c + \frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + \\
 & + l_2 \cdot \left( +\frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c + \frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + l_3 \cdot \left( \frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c - w_c \right) = \\
 & = l_1 \cdot \left( -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + l_2 \cdot w_c + l_3 \cdot \left( -\frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) = \\
 & = \exp\left(-\frac{\pi i}{10}\right) \cdot \left[ \left( \cos \frac{31\sqrt{3}}{10} + j \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + \left( \cos \frac{31\sqrt{3}}{10} - j \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(-\frac{\pi i}{5}\right) \cdot w_c = \exp\left(-\frac{\pi i}{10}\right) \cdot \left[ -\frac{1}{2} w_c \cdot \cos \frac{31\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{2} w_c \cdot \cos \frac{31\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} \right] + \exp\left(-\frac{\pi i}{5}\right) \cdot w_c = \exp\left(-\frac{\pi i}{10}\right) \cdot \left[ -w_c \cdot \cos \frac{31\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{3} w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} \right] + \\
 & + \exp\left(-\frac{\pi i}{5}\right) \cdot w_c = 1594.43
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow A_1 \cdot l_2 \cdot l_3 + A_2 \cdot l_1 \cdot l_3 + A_3 \cdot l_1 \cdot l_2 = w_c \cdot \exp\left(-\frac{\pi i}{5}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{10}\right) \cdot \left[ \frac{w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10}}{\cos \frac{31\sqrt{3}}{10}} - \frac{\sqrt{3}}{3} w_c \cdot \sin \frac{31\sqrt{3}}{10} \right] = \\
 & A_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = \left( -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) \cdot \exp\left[-\frac{\pi i}{5} - \frac{\pi i}{10} - j \frac{31\sqrt{3}}{10}\right] = \left( -\frac{1}{2} w_c - j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) \cdot \exp\left(-\frac{3\pi i}{10}\right) \cdot \exp\left(-j \frac{31\sqrt{3}}{10}\right) \\
 & A_2 \cdot l_1 \cdot l_3 = w_c \cdot \exp\left[-\frac{\pi i}{10} + j \frac{31\sqrt{3}}{10} - \frac{\pi i}{10} - j \frac{31\sqrt{3}}{10}\right] = w_c \cdot \exp\left(-\frac{\pi i}{5}\right) \\
 & A_3 \cdot l_1 \cdot l_2 = \left( -\frac{1}{2} w_c + j \frac{\sqrt{3}}{6} w_c \right) \cdot \exp\left(-\frac{3\pi i}{10}\right) \cdot \exp\left(j \frac{31\sqrt{3}}{10}\right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{= 1051.06}$$

$$w_c = 4000 \text{ rad/s}$$

$$H_{w_c}(z) = \frac{1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}}{1 - 1.78 \cdot z^{-1} + 0.53 \cdot z^{-2} - 0.28 \cdot z^{-3}}$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}}{1 - 1.78 \cdot z^{-1} + 0.53 \cdot z^{-2} - 0.28 \cdot z^{-3}}$$

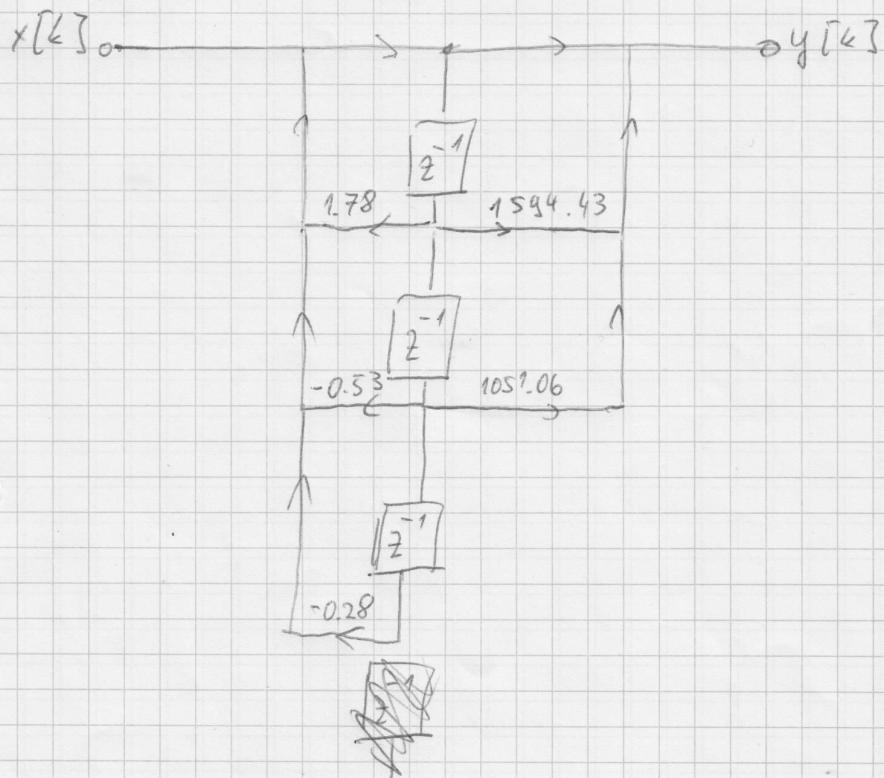
$$y(z) - 1.78 \cdot z^{-1} \cdot y(z) + 0.53 \cdot z^{-2} \cdot y(z) - 0.28 \cdot z^{-3} \cdot y(z) = u(z) \cdot 1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}$$

$\downarrow z \text{ transformieren}$

$$y[k] - 1.78 \cdot y[k-1] + 0.53 \cdot y[k-2] - 0.28 \cdot y[k-3] = 1594.43 \cdot u[k-1] + 1051.06 \cdot u[k-2]$$

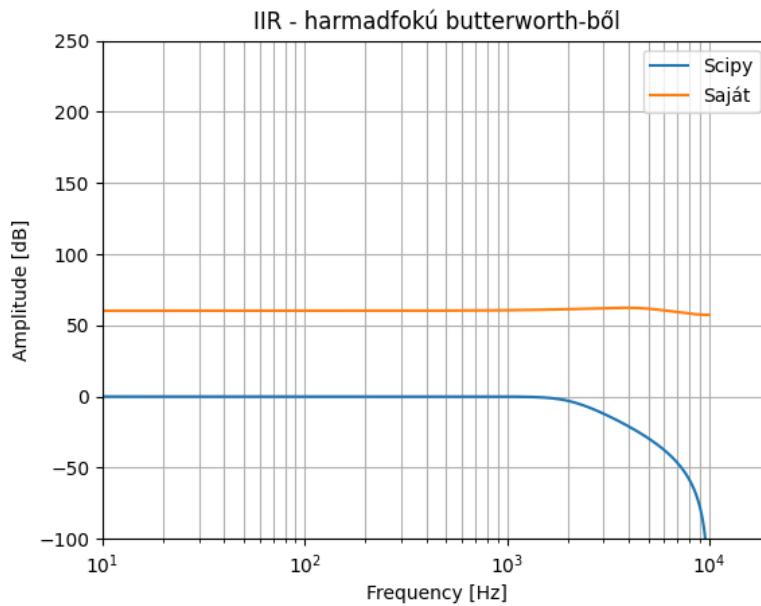
$$y[k] = 1.78 \cdot y[k-1] - 0.53 \cdot y[k-2] - 0.28 \cdot y[k-3] + 1594.43 \cdot u[k-1] + 1051.06 \cdot u[k-2]$$

II. direkt meghodósítási forma



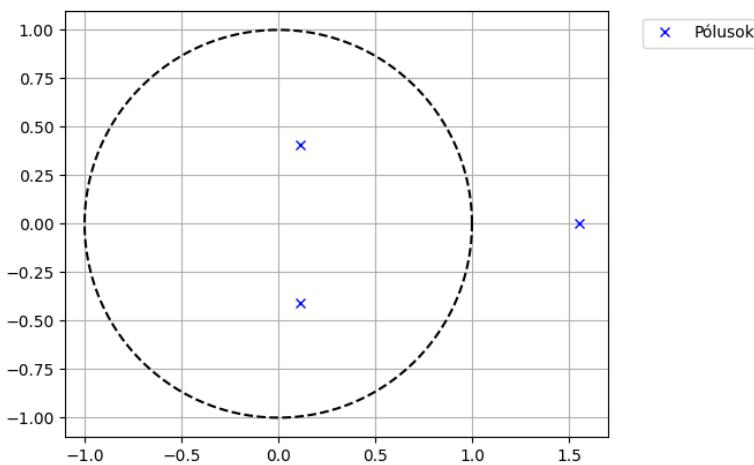
## 4.2. Python ellenőrzés

A kézzel számolt értékeket bevezettem Python-ba és kirajzoltam az átviteli függvény Bode diagramját. Az összehasonlításért a Scipy modult használva kirajzoltam a modul által tervezett szűrő Bode diagramját.



18. ábra. Bode diagram kiszámolt és Scipy által tervezett IIR

A kézzel tervezett szűrő közel sem áll egy alul-áteresztő szűrőhöz. A számításokat többször leellenőriztem, viszont nem kaptam hibát. Mivel az IIR szűrő tervezésénél stabilitásprobléma léphet fel, úgy véltem az lehet a probléma. Kirajzoltam a rendszer pólusait és azt láttam, hogy ez valóban instabil (az egyik pólus az egységsugarú körön kívül van).



19. ábra. Stabilitás vizsgálata