Digitális jelfeldolgozás vizsga

Sapientia

Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhely

Patka Zsolt-András

2020

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

DSP vizsga

17.01.2009

1. DSP architektúrák – CPU dsPIC30Fxxxx .Processzor architektúra. CPU regiszterek. Aritmetikai és logikai egység. DSP motor. DSP utasítások. Hardware osztó. Utasításciklusok.
2. Bevezetés a szűrők elméletébe. Átviteli függvény. Súlyfüggvény. Átmeneti függvény. Alapvető szűrő struktúrák. Frekvencia-jellemzők, amplitúdó és fáziskarakterisztikák. Lineáris és nemlineáris fázismenetű szűrők. Szűrő válaszának skálázása. Ábrázolási módok. Szűrőtípusok közötti transzformációk.
3. Tervezzetek egy alul-áteresztő FIR szűrőt a következő jellemzőkkel:
    a. N =17
    b. Fc=400Hz
    c. Fs=1000Hz

    Rajzoljátok le a súlyfüggvényt és mutassátok be a szűrés folyamatát egy általatok választott jelre!
    Alkalmazzatok egy háromszög ablakot a kapott súlyfüggvényre. Magyarázzátok el az ablakozás lényegét, mit várunk el az ablakozástól?

4. Tervezzetek egy alul-áteresztő IIR szűrőt kiindulva egy harmadfokú Butterworth analóg szűrő átviteli függvényéből. Vágási frekvencia 2kHz, mintavételezési frekvencia 20kHz.

Minden feladat 2 pont. Kutasi D.Nimród

1. 1. Feladat

2. 2. Feladat

3. 3. Feladat

3.1. Súlyfüggvény kiszámítása

3. FIR szűrő

$N = 17$ $\qquad \omega_c = 2\pi \cdot \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \cdot \frac{400}{1000} = \frac{4\pi}{5}$

$f_c = 400\,Hz$

$f_s = 1000\,Hz$

$h[n] = \frac{\sin(\omega_c \cdot m)}{\pi \cdot m} \qquad m = n - \frac{N-1}{2} = n - 8$

$n = 0 \ldots N-1 = 0 \ldots 16$

ha $n = 8$, akkor $m = 0$ így $\frac{\sin 0}{0}$ eset lép fel

L'Hospital ~~szab~~ a sinc függvényre: $\frac{[\sin(\omega_c \cdot m)]'}{[\pi \cdot m]'} = \frac{\omega_c \cdot \cos(\omega_c \cdot m)}{\pi}$

$m = 0$-ra: $\frac{\omega_c \cdot \overbrace{\cos 0}^{1}}{\pi} = \frac{4\pi}{5\pi} = \frac{4}{5} = 0.8$

$h[8] = 0.8$

$h[0] = \frac{\sin(\omega_c \cdot (-8))}{-8 \cdot \pi} = \frac{-\sin(\omega_c \cdot 8)}{-8\pi} = \frac{\sin(\frac{4\pi}{5} \cdot 8)}{8\pi} = 0.03$

$h[1] = -0.04$

$h[2] = 0.03$

$h[3] \simeq 0$

$h[4] = -0.04$

$h[5] = 0.1$

$h[6] = -0.15$

$h[7] = 0.18$

$h[8] = 0.8$

$h[9] = 0.18$

$h[10] = -0.15$

$h[11] = 0.1$

$h[12] = -0.04$

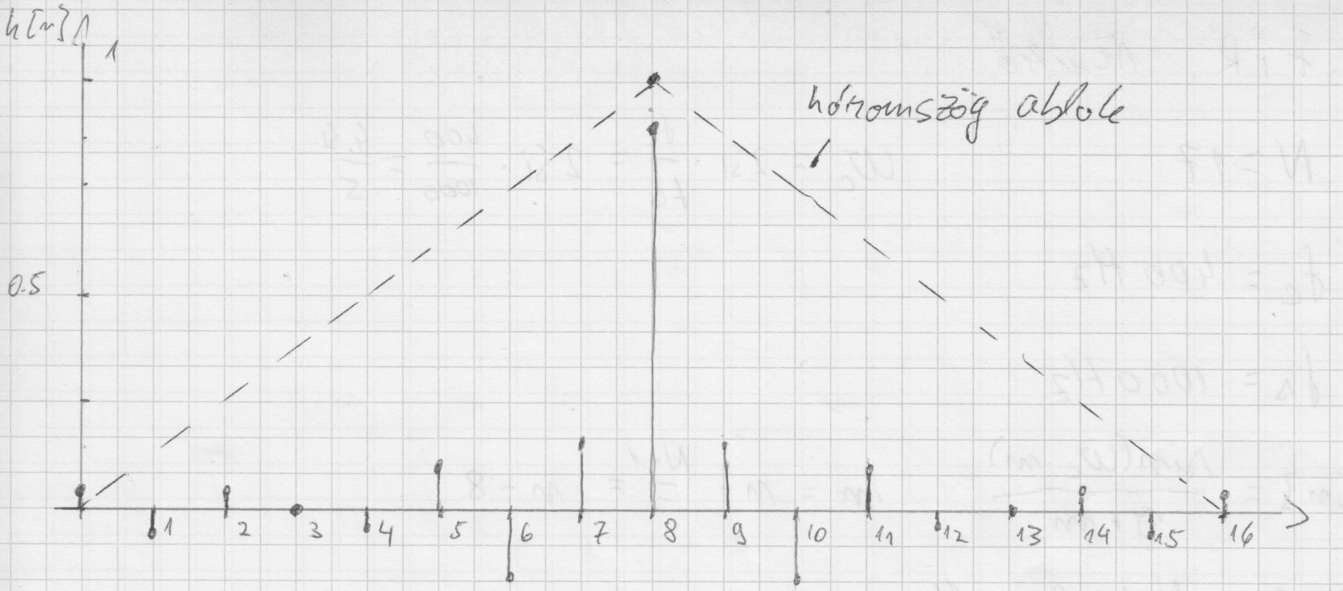
$h[13] \simeq 0$

$h[14] = 0.03$

$h[15] = -0.04$

$h[16] = 0.03$

Szűrés: A szűrt jel egyenlő a bemeneti jel és a súlyfüggvény (sinc) konvolúciójával.

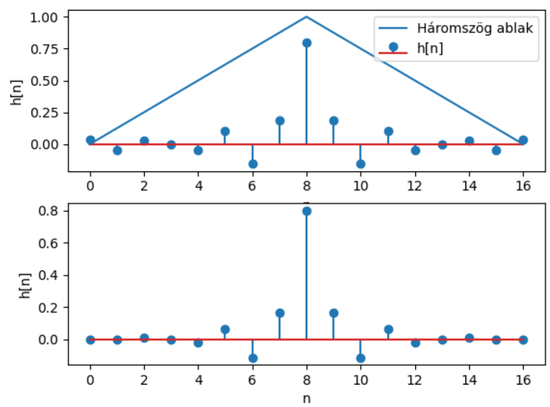


Ablakozás: a súlyfüggvényt megszorozzuk egy bizonyos ablakkal

3.2. Python rész

3.2.1. Súlyfüggvény

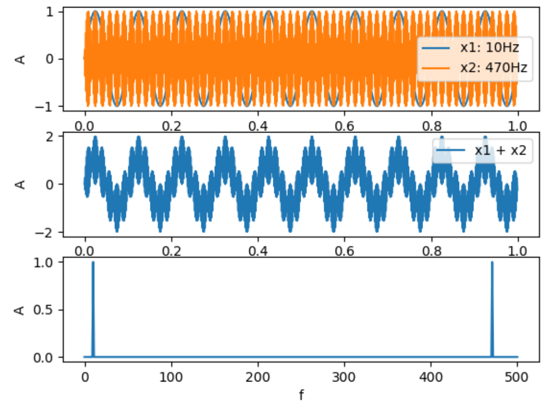
A következő ábrán látható a FIR szűrő súlyfüggvénye, a háromszög ablak és az ablakozás elvégzése utáni súlyfüggvény. Az ablakozás a súlyfüggvény beszorzása egy adott függvénnyel.



1. ábra. FIR súlyfüggvény, háromszög ablakkal

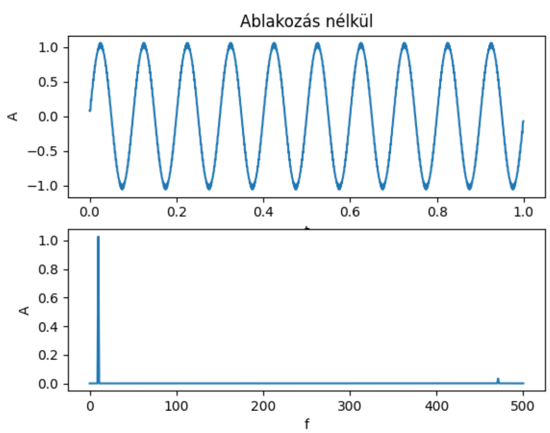
3.2.2. Szűrés

FIR szűrőnél a szűrt érték kiszámítható a bemeneti jel és a FIR súlyfüggvényének konvolúciójaként. Az alábbi ábrán látható egy 10 Hz-es és 470 Hz-es szinusz jel, ezek összege és a jel spektruma:



2. ábra. Bemeneti jel, két szinusz összege

A konvolúció elvégzése után a 470 Hz-es szinusz jelt ki sikerült szűrni:



3. ábra. Szűrés eredménye

4. 4. Feladat

4.1. Számolások

4. IIR, harmadfokú Butterworth

$f_c = 2\,k\,Hz \quad n=3$

$f_s = 20\,k\,Hz$

Butterworth átviteli függvénye: $H(s) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}$, ahol $s_i = e^{j\pi[(2i+n-1)/2n]}$

$n=3$

$$s_1 = e^{j\pi\cdot\frac{4}{6}} = e^{j\pi\cdot\frac{2}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = e^{j\pi} = \cos\pi + j\cdot\sin\pi = -1$$

$$s_3 = e^{j\pi\cdot\frac{8}{6}} = e^{j\pi\frac{4}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right) - j\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j\cdot\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ω_c vágási frekvenciára az átviteli függvény:

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{K\cdot\prod_{i=1}^{m}(s-\omega_c\cdot z_i)}{\omega_c^{(m-n)}\cdot\prod_{i=1}^{n}(s-\omega_c\cdot p_i)}$$

m - zérusok száma

n - pólusok száma

K - erősítés

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{\omega_c^3}{(s-\omega_c\cdot p_1)\cdot(s-\omega_c\cdot p_2)\cdot(s-\omega_c\cdot p_3)}$$

$p_1 = s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$p_2 = s_2 = -1$

$p_3 = s_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$H_{\omega_c}(s) = \frac{\omega_c^3}{\left[s-\omega_c\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cdot(s+\omega_c)\cdot\left[s-\omega_c\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

$m=0$

$n=3$

Részlettörtre bontás, A_1, A_2, A_3 kiszámítása:

$$\frac{A_1}{s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{A_2}{s+\omega_c} + \frac{A_3}{s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{A_1\cdot(s+\omega_c)\cdot\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + A_2\cdot\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cdot\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + A_3\cdot\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cdot(s+\omega_c)}{\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cdot(s+\omega_c)\cdot\left[s-\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

számláló: $A_1\cdot\left[s^2 - s\cdot\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s\cdot\omega_c - \omega_c^2\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] +$

$+ A_2\cdot\left[s^2 - s\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - s\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \omega_c^2\cdot 1\right] + A_3\cdot\left[s^2 + s\cdot\omega_c -\right.$

$\left.- s\cdot\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \omega_c^2\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$

$$= A_1 \cdot \left[s^2 + s\cdot\omega_c\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \omega_c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + A_2 \cdot \left[s^2 + s\cdot \omega_c +\right.$$

$$\left. + \omega_c^2 \right] + A_3 \cdot \left[s^2 + s \cdot \left(\frac{3}{2}\omega_c - j\omega_c \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \omega_c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Egyenlővé teszem ω_c^3-el

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 \cdot \omega_c \cdot \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_2 \cdot \omega_c + A_3 \cdot \omega_c \cdot \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad /:\omega_c \\ -A_1 \cdot \omega_c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_2 \cdot \omega_c^2 - A_3 \cdot \omega_c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \omega_c^3 \quad /:\omega_c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 & \text{I} \\ A_1 \cdot \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_2 + A_3 \cdot \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 & \text{II} \\ -A_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_2 - A_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \omega_c & \text{III} \end{cases}$$

$$\text{II} - \text{III} \Rightarrow \frac{3}{2}A_1 + \cancel{A_1 \cdot j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{A_2} + \frac{3}{2}A_3 - \cancel{A_3 \cdot j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}A_1 - \cancel{j\frac{\sqrt{3}}{2}A_1} - \cancel{A_2} -$$

$$- \frac{1}{2}A_3 + \cancel{A_3 \cdot j\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\omega_c$$

$$A_1 + A_3 = -\omega_c$$

$$\text{I} \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$\boxed{A_2 = \omega_c}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = -\omega_c \quad \Rightarrow A_1 = -\omega_c - A_3 \\ A_1 \cdot \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_3 \cdot \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\omega_c \\ +A_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_3 \cdot \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(\text{II}) \quad (-\omega_c - A_3) \cdot \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A_3 \cdot \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\omega_c$$

$$-\frac{3}{2}\omega_c - j\omega_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{3}{2}A_3} - A_3 \cdot j\frac{\sqrt{3}}{2} + \cancel{\frac{3}{2}A_3} - A_3 \cdot j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\omega_c$$

$$-A_3 \cdot j \cdot \sqrt{3} = \overbrace{-\omega_c + \frac{3}{2}\omega_c}^{\frac{1}{2}\omega_c} + j\omega_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad /:j\sqrt{3}$$

$$-A_3 = \frac{\frac{1}{2}\omega_c + j\omega_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}} \cdot j\sqrt{3} = \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c - \omega_c \cdot \frac{3}{2}}{-3}$$

$$A_3 = -\omega_c \cdot \frac{3}{6} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c = -\frac{1}{2}\omega_c + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c$$

(I) $A_1 + A_3 = -\omega_c$

$$A_1 - \frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c = -\omega_c$$

$$A_1 = -\omega_c + \frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c \\ A_2 &= +\omega_c \\ A_3 &= -\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c \end{aligned}}$$

$$H(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{1-\exp(s_k'\cdot T)\cdot z^{-1}}$$

$$s_1'=\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$s_2'=-\omega_c$$

$$s_3'=\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_1=-\frac{1}{2}\omega_c-\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\cdot j$$

$$A_2=\omega_c$$

$$A_3=-\frac{1}{2}\omega_c+\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\cdot j$$

$$\omega_c\cdot T=\frac{4000\pi}{20.000}=\frac{\pi}{5}$$

$$H(z)=\frac{A_1}{1-\underbrace{\exp\left(\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot T\right)}_{e_1}\cdot z^{-1}}+$$

$$+\frac{A_2}{1-\underbrace{\exp(-\omega_c\cdot T)}_{e_2}\cdot z^{-1}}+\frac{A_3}{1-\underbrace{\exp\left(\omega_c\cdot\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot T\right)}_{e_3}\cdot z^{-1}}=$$

$$=\frac{A_1\cdot(1-e_2\cdot z^{-1})\cdot(1-e_3\cdot z^{-1})+A_2\cdot(1-e_1\cdot z^{-1})\cdot(1-e_3\cdot z^{-1})+A_3\cdot(1-e_1\cdot z^{-1})\cdot(1-e_2\cdot z^{-1})}{(1-e_1\cdot z^{-1})\cdot(1-e_2\cdot z^{-1})\cdot(1-e_3\cdot z^{-1})}$$

$$e_1=\exp\left(\frac{\pi}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$e_2=\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$e_3=\exp\left(-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$(1-e_2\cdot z^{-1})\cdot(1-e_3\cdot z^{-1})=1-e_3\cdot z^{-1}-e_2\cdot z^{-1}+e_2\cdot e_3\cdot z^{-1}=1-z^{-1}\cdot(e_3+e_2)+$$
$$+e_2\cdot e_3\cdot z^{-2}\cancel{=1-z^{-1}\cdot\left[\exp\left(-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]+\left[\exp\left(-\frac{3\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)\right]\cdot z^{-2}}$$

$$(1-e_1\cdot z^{-1})\cdot(1-e_3\cdot z^{-1})=1-e_3\cdot z^{-1}-e_1\cdot z^{-1}+e_1\cdot e_3\cdot z^{-2}=1-z^{-1}\cdot(e_3+e_1)+e_1\cdot e_3\cdot z^{-2}=$$
$$\cancel{=1-z^{-1}\cdot\left[\exp\left(-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)\right]+z^{-2}\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)=}$$
$$\cancel{=1-z^{-1}\cdot\left[\exp\left(-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)\right]+z^{-2}\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$(1-e_1\cdot z^{-1})\cdot(1-e_2\cdot z^{-1})=1-z^{-1}\cdot(e_2+e_1)+z^{-2}\cdot e_1\cdot e_2\cancel{=1-z^{-1}\cdot\left[\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)\right]+}$$
$$\cancel{+z^{-2}\cdot\exp\left(-\frac{3\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)}$$

Számláló kiszámítása:

$$A_1\cdot\left(1-z^{-1}\cdot(e_3+e_2)+e_2\cdot e_3\cdot z^{-2}\right)+A_2\cdot\left(1-z^{-1}\cdot(e_3+e_1)+e_1\cdot e_3\cdot z^{-2}\right)+$$
$$+A_3\cdot\left(1-z^{-1}\cdot(e_2+e_1)+z^{-2}\cdot e_1\cdot e_2\right)=A_1+A_2+A_3+z^{-1}\cdot(-A_1\cdot e_3-A_1\cdot e_2-$$
$$-A_2\cdot e_3-A_2\cdot e_1-A_3\cdot e_2-A_3\cdot e_1)+z^{-2}\cdot(A_1\cdot e_2\cdot e_3+A_2\cdot e_1\cdot e_3+$$
$$+A_3\cdot e_1\cdot e_2)$$

Nevező kiszámítása:

$$\left(1-\ell_1\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-\ell_2\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-\ell_3\cdot z^{-1}\right)=\left(1-\ell_2\cdot z^{-1}-\ell_1\cdot z^{-1}+\ell_1\cdot\ell_2\cdot z^{-2}\right)\cdot\left(1-\ell_3\cdot z^{-1}\right)=$$

$$=1-\ell_2\cdot z^{-1}-\ell_1\cdot z^{-1}+\ell_1\cdot\ell_2\cdot z^{-2}-\ell_3\cdot z^{-1}+\ell_2\cdot\ell_3\cdot z^{-2}+\ell_1\cdot\ell_3\cdot z^{-2}-$$

$$-\ell_1\cdot\ell_2\cdot\ell_3\cdot z^{-3}=1-z^{-1}\cdot\left(\ell_1+\ell_2+\ell_3\right)+z^{-2}\cdot\left(\ell_1\cdot\ell_2+\ell_2\cdot\ell_3+\ell_1\cdot\ell_3\right)-$$

$$-\ell_1\cdot\ell_2\cdot\ell_3\cdot z^{-3}$$

z^{-1}

$$\underline{\ell_1+\ell_2+\ell_3}=\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{\pi}{10}\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{10}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\exp\left(-\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\cdot\left[\exp\left(j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)\right]+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\boxed{\exp\left[-\frac{\pi}{10}\right]\cdot\left(2\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)}=1.78$$

$$\exp j\frac{\pi\sqrt3}{10}=\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}+j\sin\frac{\pi\sqrt3}{10}$$

$$\exp -j\frac{\pi\sqrt3}{10}=\cos\left(\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)-j\sin\frac{\pi\sqrt3}{10}$$

z^{-2}

$$\underline{\ell_1\cdot\ell_2+\ell_2\cdot\ell_3+\ell_1\cdot\ell_3}=\exp\left(-\frac{\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt3}{10}-\frac{\pi}{5}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+$$

$$+\exp\left(-\frac{\pi}{10}+\cancel{j\frac{\pi\sqrt3}{10}}-\frac{\pi}{10}-\cancel{j\frac{\pi\sqrt3}{10}}\right)=\exp\left(-\frac{3\pi}{10}+j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{3\pi}{10}-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+$$

$$+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\left[\exp\left(j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-j\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)\right]+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}+\cancel{j\sin\frac{\pi\sqrt3}{10}}+\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}-\cancel{j\sin\frac{\pi\sqrt3}{10}}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\boxed{\exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\left(2\cdot\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)}=\cancel{1.06}\ 0.53$$

z^{-3}

$$\ell_1\cdot\ell_2\cdot\ell_3=\exp\left(-\frac{\pi}{10}+\cancel{j\frac{\pi\sqrt3}{10}}-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{10}-\cancel{j\frac{\pi\sqrt3}{10}}\right)\boxed{=\exp\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}=0.28$$

$$\text{nevező: }1-z^{-1}\cdot\left[\left[\exp\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]\cdot2\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]+z^{-2}\cdot\left[\exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(2\cdot\cos\frac{\pi\sqrt3}{10}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]-z^{-3}\cdot\exp\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=1-1.78\cdot z^{-1}+0.53\cdot z^{-2}-0.28\cdot z^{-3}$$

z^{0}

$$\blacktriangleright \quad A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{1}{2}\omega_c - j\cancel{\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c} + \omega_c - \frac{1}{2}\omega_c + j\cancel{\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c} = 0$$

z^{-1}

$$\blacktriangleright \quad -A_1 \cdot e_3 - A_1 \cdot e_2 - A_2 \cdot e_3 - A_2 \cdot e_1 - A_3 \cdot e_2 - A_3 \cdot e_1 =$$

$$= e_1 \cdot (-A_2 - A_3) + e_2 \cdot (-A_1 - A_3) + e_3 \cdot (-A_1 - A_2) = \cancel{e_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) +}$$

$$\cancel{+ e_2 \cdot \omega_c + e_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right)} = e_1 \cdot \left(-\omega_c + \frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) +$$

$$+ e_2 \cdot \left(+\frac{1}{2}\omega_c + j\cancel{\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c} + \frac{1}{2}\omega_c - j\cancel{\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c}\right) + e_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c - \omega_c\right) =$$

$$= e_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) + e_2 \cdot \omega_c + e_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) =$$

(j=-j tylko licznik)

$$= \exp\left(-\frac{\pi}{10}\right) \cdot \left[\left(\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} + j\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) + \left(\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} - j\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right)\right] +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \omega_c = \exp\left(-\frac{\pi}{10}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \omega_c \cdot \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \omega_c \cdot \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{2}\cdot\omega_c \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right] + \exp\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \omega_c = \exp\left(-\frac{\pi}{10}\right) \cdot \left[-\omega_c \cdot \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \omega_c \cdot \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right] +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \omega_c = 1594.43$$

z^{-2}

$$\blacktriangleright \quad A_1 \cdot e_2 \cdot e_3 + A_2 \cdot e_1 \cdot e_3 + A_3 \cdot e_1 \cdot e_2 = \omega_c \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{5}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \left[-\omega_c \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{10} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \omega_c \cdot \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right] =$$

$$A_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = \left(-\frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) \cdot \exp\left[-\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10} - j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right] = \left(-\frac{1}{2}\omega_c - j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) \cdot \exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \exp\left(-j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$A_2 \cdot e_1 \cdot e_3 = \omega_c \cdot \exp\left[-\frac{\pi}{10} + j\cancel{\frac{\pi\sqrt{3}}{10}} - \frac{\pi}{10} - j\cancel{\frac{\pi\sqrt{3}}{10}}\right] = \omega_c \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$A_3 \cdot e_1 \cdot e_2 = \left(-\frac{1}{2}\omega_c + j\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_c\right) \cdot \exp\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \exp\left(j\frac{\pi\sqrt{3}}{10}\right)$$

z^{-2}

$$\blacktriangleright = 1051.06$$

$$\omega_c = 4000\pi$$

$$H_{\omega_c}(z) = \frac{1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}}{1 - 1.78 \cdot z^{-1} + 0.53 \cdot z^{-2} - 0.28 \cdot z^{-3}}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}}{1 - 1.78 \cdot z^{-1} + 0.53 \cdot z^{-2} - 0.28 \cdot z^{-3}}$$

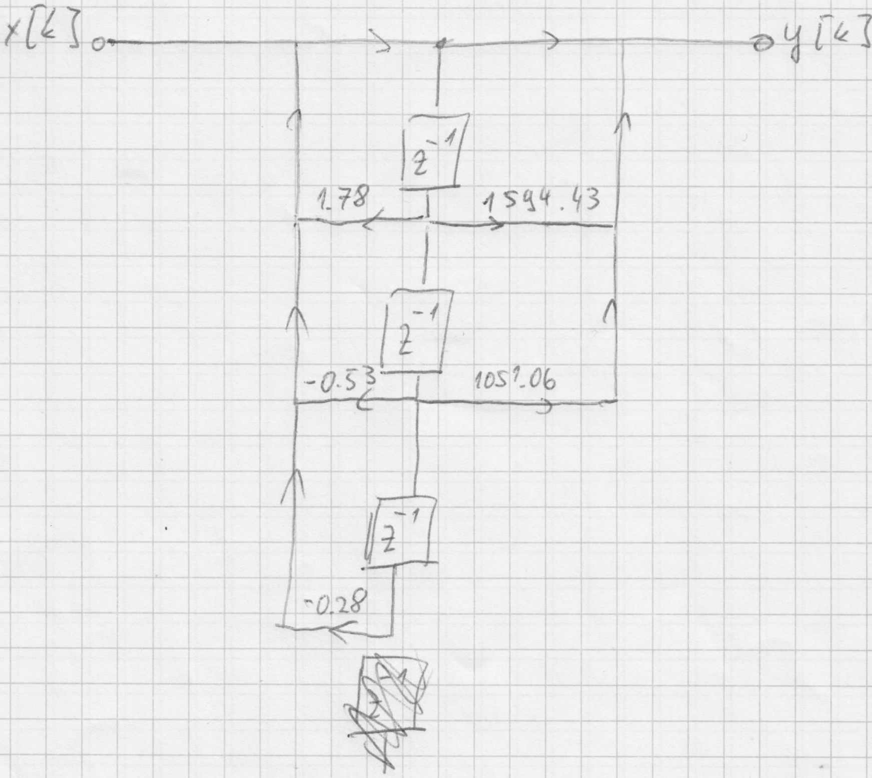
$$Y(z) - 1.78 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + 0.53 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) - 0.28 \cdot z^{-3} \cdot y(z) = u(z) \cdot 1594.43 \cdot z^{-1} + 1051.06 \cdot z^{-2}$$

$\downarrow$ z transformácia

$$y[k] - 1.78 \cdot y[k-1] + 0.53 \cdot y[k-2] - 0.28 \cdot y[k-3] = 1594.43 \cdot u[k-1] + 1051.06 \cdot u[k-2]$$

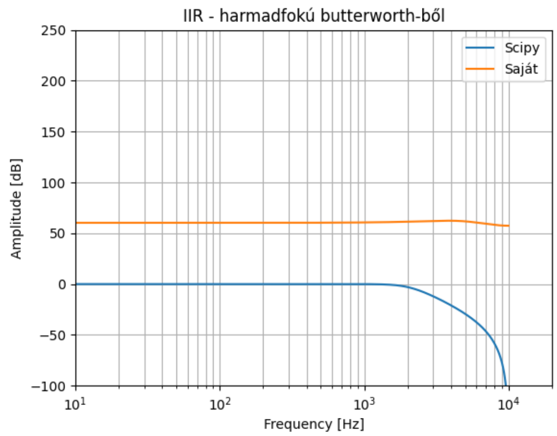
$$y[k] = 1.78 \cdot y[k-1] - 0.53 \cdot y[k-2] - 0.28 \cdot y[k-3] + 1594.43 \cdot u[k-1] +$$
$$+ 1051.06 \cdot u[k-2]$$

II. direkt megvalósítási forma



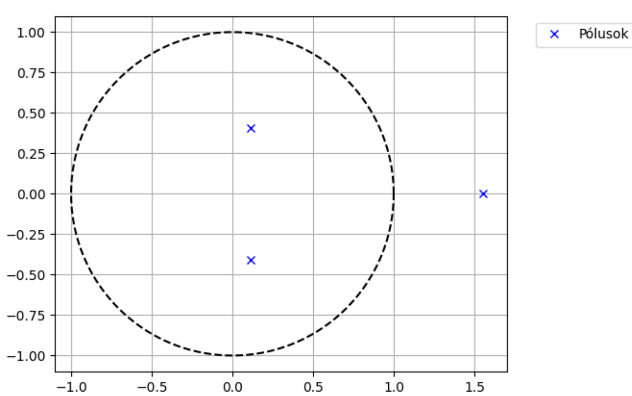
4.2. Python ellenőrzés

A kézzel számolt értékeket bevezettem Python-ba és kirajzoltam az átviteli függvény Bode diagramját. Az összehasonlításért a Scipy modult használva kirajzoltam a modul által tervezett szűrő Bode diagramját.



4. ábra. Bode diagram kiszámolt és Scipy által tervezett IIR

A kézzel tervezett szűrő közel sem áll egy alul-áteresztő szűrőhöz. A számításokat többször leellenőriztem, viszont nem kaptam hibát. Mivel az IIR szűrőnél stabilitásprobléma léphet fel, úgy véltem az lehet a probléma. Kirajzoltam a rendszer pólusait és azt láttam, hogy ez valóban instabil (az egyik pólus az egységsugarú körön kívül van).



5. ábra. Stabilitás vizsgálata