Kombinatorika

Izmed N slučajnih, neodvisnih dogodkov ima vsak n_i izidov. Število različnih izidov sestavljenega dogodka je $\prod_{i=1}^{N} n_i$

Variacije

Izmed N elementov množice *razvrstimo* n elementov. Število *variacij* je $\frac{N!}{(N-n)!}$

Permutacije

Razvrstimo *vse* elemente množice, moči N. Množica je razdeljena na *skupine*, moči m_i, katerih elementi so nerazločljivi. Število *permutacij* je $\frac{N!}{\prod_i (m_i!)}$

Kombinacije

Izmed N elementov množice *izberemo* n elementov, oziroma izberemo podmnožico množice. Število *kombinacij brez ponavljanja* je $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

Izid vsakega izmed zaporednih, neodvisnih dogodkov je element množice, moči N. Število *kombinacij s ponavljanjem* je $\binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!}$

Verjetnost

Uvedba novih slučajnih spremenljivk

Za $\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$ in bijektivno $h : \mathbf{X} \to \mathbf{U}$ velja
$f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = f_{\mathbf{X}}\left(h^{-1}(\mathbf{U})\right) \left|\det\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} h^{-1}(\mathbf{U})\right)\right|$
Če h ni bijekcija, def. bijekcije $h_i : X_i \to U \ni: \bigcup_i X_i = X$
S h_i dobimo (nenormiran) $f_{i,\mathbf{U}}$, torej $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = \sum_i f_{i,\mathbf{U}}$
Po dogovoru je *nosilec* podan kot domena, *domena* pa je $\mathbb{R}^n$.
$f(x_2, x_3, \dots, x_N) = \int_{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_N)\mathrm{d}x_1$

Bayesov teorem in neodvisne spremenljivke

(Sledeče enačbe so simetrične)
Za dogodka A in B velja, da je verjetnost, da se zgodi dogodek A, če se zgodi dogodek B enaka $\quad P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
Pri zvezni porazdelitvi s slučajnima spremenljivkama X in Y podobno velja $\quad f_{X,Y}(x,y) = f_y(y) f_{X|Y}(x|y)$
Dogodka A in B sta neodvisna, čee
Diskretna porazdelitev: $\quad P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$
Zvezna porazdelitev: $\quad f_X(x) = f_{X|Y}(X|Y) = f_{X|Y}(X|\overline{Y})$
Zato za neodvisne spremenljivke velja
$P(A,B) = P(A)P(B) \qquad f_{X,Y}(X,Y) = f_X(X) f_Y(Y)$

Zvezne porazdelitve ($x \in \mathbb{R}$)

Enakomerna porazdelitev ($X \sim U(a,b)$)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b) \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$\overline{X} = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Gaussova porazdelitev ($X \sim N(\mu,\sigma)$)

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad \overline{X} = \mu \qquad \sigma_X = \sigma$
$F_X(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \qquad \mathrm{WFHM} = 2\sqrt{2\log 2}\sigma$

Maxwellova porazdelitev

3 neodv. in neomej. q_i, $\quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3), \quad \overline{\mathbf{q}} = 0 \quad q = |\mathbf{q}| \geq 0$
$f_Q(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q^2}{a^3} \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2}\right) \qquad \overline{Q} = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$F_Q(q) = \mathrm{erf}\left(\frac{q}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{a} \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2}\right) \qquad \sigma_Q^2 = \frac{a^2(3\pi-8)}{\pi}$

Eksponentna porazdelitev

$t \geq 0 \qquad f_T(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad F_T(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
$\overline{T} = \tau \qquad \sigma_T^2 = \tau^2$

Cauchyjeva porazdelitev ($X \sim \mathrm{Cauchy}(\mu,\gamma)$)

$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2} \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{(x-\mu)}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$
$\nexists \langle x^\alpha \rangle$ za $|\alpha| \geq 1 \qquad \mathrm{med}(X) = \mu \qquad \mathrm{MAD}_X = \gamma$

Studentova t-porazdelitev

$f_T(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}B(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \overline{T} = 0$
$\lim_{\nu\to\infty(30)} f_T(t,\nu) = N(0,1) \qquad \sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2}$

χ^2 porazdelitev ($X \sim \chi^2(\nu)$)

$x > 0 \qquad f_X(x,\nu) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \ \overline{X} = \nu \qquad \sigma_X^2 = 2\nu$

F porazdelitev

$f_F(x;\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$
$\overline{X} = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$

Diskretne porazdelitve ($x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

Bernoullijeva porazdelitev

Velja za dogodke, ki se pri poskusu zgodijo z verjetnostjo p.
$P(X = x, p) = p^x q^{1-x} = px + q(1-x) \qquad x \in \{0,1\} \qquad p + q = 1$

Binomska porazdelitev ($X \sim B(N,p)$)

N zaporednih, enakih, neodvisnih Bernoullijevih poskusov, P verjetnost, da je x poskusov imelo pozitiven (1) izid.
$P(X = x, N, p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$
$\overline{X} = Np \qquad \sigma_X^2 = Np(1-p) \qquad P\left(a \leq \frac{X - \overline{X}}{\sigma_X} \leq b\right) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right) \qquad Np,\ Nq > 5$

Poissonova porazdelitev ($X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$)

P verjetnost za x dogodkov, če jih pričakujemo λ.
Limita binomske $N \to \infty \quad \ni: \quad Np = \lambda$
$P(X = x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad \sigma_X^2 = \overline{X} = \lambda$
$P(X = x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^x e^{-\lambda} \qquad$ (Stirling)

Momenti

Surovi moment: $M_p' = \begin{cases} \sum_X x^p f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X x^p f_X(x)\,\mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$

Centr. moment: $M_p = \begin{cases} \sum_X \left(x - \overline{X}\right)^p f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X \left(x - \overline{X}\right)^p f_X(x)\,\mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$

$M_0' = 1 \qquad M_1' = \overline{X} \qquad M_0 = 1 \qquad M_1 = 0$

Varianca: $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = M_2(X)$

Kovarianca: $\mathrm{Cov}(X) = \sigma_{XY} = \overline{XY} - \overline{Y}\cdot\overline{X}$
$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

Poševnost: $= \frac{M_3}{\sigma_X^3} \qquad$ Presež. splošč..: $\epsilon = \frac{M_4}{\sigma_X^4} - 3$
Lin. kor. koef.: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \in [-1,1]$
Če X,Y neodvisni, $\rho_{XY} = 0$

Mediana:
$x_M = \mathrm{med}(X) \iff \left(P(X < x_m) \leq \frac{1}{2} \quad P(X > x_m) \leq \frac{1}{2}\right)$
Če je $x_{M_i} = \mathrm{med}(X)$ več, velja $\mathrm{med}(X) = \overline{\{x_{M_i}\}}$
Medianski odklon: $\mathrm{MAD}(X) = \mathrm{med}(|X - \mathrm{med}(X)|)$

Konvolucija

X, Y neodv., zvezni, $Z = X + Y \implies f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$
X, Y neodv., diskretni, $P(Z = n) = \sum_i P(X = i)P(Y = n - i)$

$N(\mu_1,\sigma_1) + N(\mu_2,\sigma_2) \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
$\mathrm{Cauchy}(\mu_1,\gamma_1) + \mathrm{Cauchy}(\mu_2,\gamma_2) \sim \mathrm{Cauchy}(\mu_1 + \mu_2, \gamma_1 + \gamma_2)$
$\sum_{i=1}^{\nu}(N(0,1))^2 \sim \chi^2(\nu) \qquad \chi^2(\nu_1) + \chi^2(\nu_2) \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$

$B(N_1,p) + B(N_2,p) \sim B(N_1 + N_2, p)$
$\mathrm{Pois}(\lambda_1) + \mathrm{Pois}(\lambda_2) \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Centralni limitni izrek

Izrojena porazdelitev je podprta skoraj nikjer. Za *neizrojeno* f_X (vse omenjene porazdelitve), *stabilno* porazdelitev g_X (Gaussova ali Cauchyjeva) velja $\qquad f_X * f_X * \cdots * f_X = g_X$

Statistika

S populacija (μ,σ) moči N, S_n vzorec moči n, $\forall X_i \in S_n \subset S$
Stat. in cenilka: $\theta = T(S) \qquad \theta_n = T(S_n)$
$n \to \infty \qquad T(S_n) = T(S) \qquad \mathrm{Var}(S_n) = 0 \qquad$ (doslednost)
$\forall n \qquad E(S_n) = S \qquad$ (nepristranskost)

Vzorčno povprečje (cenilka): $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
$E\left(\overline{X}\right) = \mu \qquad \mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n} \to \frac{\sigma^2}{n}$ (z nadom. / $N \gg 1$)
Vzorčna varianca (cenilka): $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$
$E\left(S_X^2\right) = \sigma^2 \qquad \mathrm{Var}\left(S_X^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n}$

Za cenilki X_1 iz populacije z μ_1,σ_1 in X_2 iz populacije z μ_2,σ_2 ter $Z = X_1 \pm X_2$ velja $\qquad E\left(\overline{Z}\right) = \mu_1 \pm \mu_2$
$\mathrm{Var}\left(\overline{Z}\right) = \mathrm{Var}(\overline{X_1}) + \mathrm{Var}(\overline{X_2}) \qquad \overline{Z} \sim N\left(E\left(\overline{Z}\right), \sqrt{\mathrm{Var}\left(\overline{Z}\right)}\right)$

Matematičen dodatek

Binomski koeficient ter formula
$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \qquad (x+y)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k}$

Funkcija napake: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$

Totalni odvod: $\mathbf{f}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \implies \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{ij}$

Stirlingova formula: $n \to \infty (> 8) \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Konvolucijski integral: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$