Matematika za telebane (fizike), delovna različica

Andraž Sitar

8. november 2025

Kazalo

Predgovor

Dokument povzema znanje matamtičnih vsebin s predmetov Matematika 1, Matematika 2, Matematika 3, Matematika 4, Matematična fizika 1, Matematična fizika 2, Verjetnost v fiziki, Dodatna poglavja z matematike, Klasična mehanika in Teorija splošne relativnosti. Predstavlja sintezo tega znanja na centraliziran način, da vsebine predstvi s koherentnim zapisom, ki se sicer od predmeta do predmeta razlikuje. Poleg tega v določene koncepte posploši, da so čim bolj univerzalno uporabni v kontekstu študija. Zaradi centralizacije so koncepti v veliki meri sklicani.

Dokument je urejen po poglavjih, ki si praviloma sledijo v logičnem sosledju, da se poglavje nanaša le na koncepte s prejšnjih poglavij. Značilen protiprimer je poglavje 2 Funkcije, kjer je zbrana velika večina funkcij, s katerimi se srečamo v sledečih poglavjih. Poglavja in podpoglavja v čim večji meri znanje podajajo na zaključen način in se na ostala poglavja in podpoglavja ne zanašajo preveč. Izjema je predpostavka predznanja, kljub tej so pogosti kratki komentarji mislenih procesov.

Zaradi logične urejenosti zahtevnost konceptov po poglavjih praviloma narašča, znotraj poglavja, še posebej pa podpoglavja, pa lahko pada. Razlog je manjšanje splošnosti in abstraktnosti, saj se pogosto koncepti pod določenimi pogoji močno poenostavijo.

Koncepti so predstavljeni na način, da bralec koncepte razume in jih zna uporabiti. Kjer je to možno, so koncepti predstavljeni, da dobro razumevanje ni predpogoj za zmožnost rabe konceptov. Za namen rabe so pogosto navedene razne mnemonike, še posebej pri raznih algoritmih. Razlage praviloma spremlja ustrezno slikovno gradivo in diagrami.

Trenutna različica je delovna, saj še ni v celoti preverjen in so možne napake. Podobno so mnoga poglavja škrbine ali pa vsaj pomanjkljiva in nedokončana. Poleg tega je dokument v veliki meri brez slikovnega gradiva in diagramov.

1 Teorija množic

Množice (naivno) razumemo kot neurejene skupke *elementov*, ki so lahko katerikoli matematični objekti. Če je a element množice A, to označimo

$$a \in A$$

Množica B je podmnožica A, čee je vsak element množice B element množice A, kar označimo

$$B \subset A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall b \in B \quad b \in A$$

Družina množic je množica (torej neurejena), katerih elementov so druge množice. Elementi družine množic A *niso* podmnožice množice A.

Naj bo J neprazna množica in naj $\forall j \in J$ obstaja množica A_j. *Indeksirana družina množic* je *urejena* družina množic, katere elemente (množice) označujejo elementi *indeksne množice* J. Indeksirano množico označimo

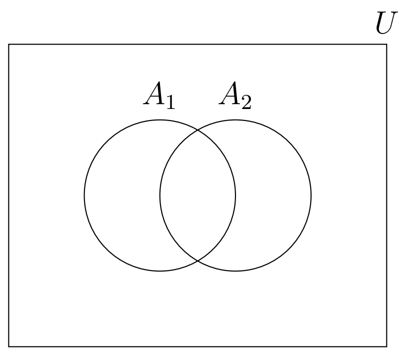
$$(A_j)_{j \in J}$$

1.1 De Morganova zakona

Naj bo $(A_j)_{j \in J}$ indeksirana družina podmnožic univerzuma U. *De Morganova zakona* trdita

$$\bigcup_{j \in J} A_j^{\mathrm{c}} = \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)^{\mathrm{c}} \qquad \bigcap_{j \in J} A_j^{\mathrm{c}} = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)^{\mathrm{c}}$$

V primeru družine z dvema množicama lahko zakon preverimo z razmislekom ob spodnji sliki.



1.2 Moč množice

Moč množice naivno razumemo kot število elementov v množici, če je ta končna. Moč množice A označimo $|A|$.

1.3 Lastnosti in relacije

1.3.1 Ekvipolenca

Naj bosta A in B množici. A in B sta *ekvipolentni*, čee obstaja bijekcija iz A v B. Ekvipolenca je ekvivalenčna relacija, označimo jo pa

$$|A| = |B|$$

1.3.2 Disjunktnost

Naj bosta A in B množici. A in B sta *disjunktni*, čee velja

$$A \cap B = \emptyset$$

2 Funkcije

Funkcija ali *preslikava* med množicama A in B je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A pripiše en element iz množice B. Množico A imenujemo *domena*, množico B pa *kodomena*. Elementu $a \in A$ funkcija f pripiše vrednost $f(a) \in B$. Tako funkcijo zapišemo kot

$$f : A \to B \qquad\qquad f : a \mapsto f(a)\,.$$

Funkcijo enolično definirata domena in kodomena (levi izraz) ter njen predpis (desni izraz).

Preslikavo množice definiramo kot množica, ki jo dobimo, če preslikamo vsak element dane množice, torej $f(C) = \{f(c); c \in C\}$.

Funkcija je *injektivna*, če za elementa $a \neq a'$ velja $f(a) \neq f(a')$. Funkcija je *surjektivna*, če vsak element kodomene $b \in B$ lahko dobimo, da preslikamo element domene $a \in A$, torej $\forall b \in B \quad \exists a \in A$, da $b = f(a)$. Funkcija je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Funkcijo si lažje predstavljamo z *grafom* to je množica dvojic, ki je podmnočica kartezičnega produkta domene in kodomene

$$\{(a, f(a)), a \in A\} \subset A \times B\,.$$

Naj bo $x \in D \subset \mathbb{R}$. Če pri realni funkciji domena D ni podana, velja $D = \mathbb{R}$. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}$, da velja $z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}$. Če pri kompleksni funkciji D ni podan, velja $D = \mathbb{C}$.

2.1 Elementarne funkcije

2.1.1 Polinomi

Za $n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ lahko definiramo x^n kot

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ faktorjev}}\,.$$

Polinom (ene spremenljivke) je vsota členov oblike x^n, kjer vsak člen smemo pomnožiti s konstanto. Polinom $p(x)$ je torej

$$p(x) = \sum_n a_n x^n\,,$$

kjer so a_n konstante. Za člen oblike $a_n x^n$, kjer velja $a_n \neq 0$, je *stopnja* člena enaka n. *Vodilni člen* je člen, ki ima v vsoti največjo stopnjo in *ni* pomnožen s številom 0. Stopnja polinoma je stopnja vodilnega člena. Polinom praviloma uredimo, da stopnje členov v vsoti padajo. Primer polinoma tretje stopnje je $2x^3 + 5x + 1$.

Naj bosta $p(x)$ polinom stopnje n in $q(x)$ polinom stopnje m. Tedaj velja, da je funkcija $p(x) \pm q(x)$ polinom stopnje $\max(n, m)$, funkcija $p(x) \cdot q(x)$ polinom stopnje $n + m$, funkciji $p(q(x))$ in $q(p(x))$ pa polinoma stopnje $n \cdot m$.

Naj bo $p(x)$ polinom stopnje n. Polinomska enačba $p(x) = 0$ ima največ n rešitev (ničel).

Polinom stopnje n lahko identificiramo z n-terico $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

2.1.2 Racionalne funkcije

Naj bosta $p(x)$ polinom stopnje n in $q(x)$ polinom stopnje m. *Racionalna funkcija* $f(x)$ je oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Opazimo, da je iz domene izključena množica ničel polinoma $q(x)$. Če $q(x)$ deli $p(x)$, je racionalna funkcija polinom, ki ni definiran na ničlah $q(x)$, čeprav običajno te vrednosti vključimo v domeno, saj imamo zanje smiseln predpis.

Vsota, razlika, produkt, kvocient ali kompozitum racionalnih funkcij je spet racionalna funkcija.

2.1.3 Eksponentna funkcija

Eksponentno funkcijo lahko definiramo s potenčno vrsto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^x}{x!} .$$

2.1.4 Logaritemska funkcija

Kompleksni logaritem definiramo kot

$$\log : \mathbb{C}/\gamma \to \mathbb{C} \qquad \log z = \log_{\mathbb{R}}$$

γ je pot, ki povezuje točko 0 in ∞, običajno izberemo kar poltrak $(-\infty, 0)$.

2.1.5 Potenčna funkcija

Kompleksni koren definiramo kot

$$\sqrt[n]{\bullet} : \mathbb{C}/(-\infty, 0) \to \mathbb{C}$$

2.1.6 Kotne funkcije

Kotne funkcije lahko definiramo geometrično, ali pa s potenčno vrsto. Definiciji *sinusa* in *kosinusa* sta

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Definiciji *tangensa* in *kotangensa* sta

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} .$$

Za kotne funkcije veljajo razne oblike Pitagorovega izreka

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x} ,$$

z njimi pa lahko dano kotno funkcijo izrazimo z ostalimi kotnimi funkcijami.

Za kotne funkcije poznamo *adicijske izreke*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot\alpha\cot\beta}{-\cot\alpha \mp \cot\beta} .$$

Kompleksne kotne in hiperbolične funkcije definiramo preko kompleksne eksponentne funkcije

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Velja

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)\\
\cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)\\
\tan(x+iy) &= \frac{\sin(2x) + i\sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}\\
\cot(x+iy) &= \frac{-\sin(2x) + i\sinh(2y)}{\cos(2x) - \cosh(2y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x+iy) &= \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)\\
\cosh(x+iy) &= \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)\\
\tanh(x+iy) &= \frac{\sinh(2x) + i\sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)}\\
\coth(x+iy) &= \frac{-\sinh(2x) + i\sin(2y)}{-\cosh(2x) + \cos(2y)}
\end{aligned}$$

2.1.7 Hiperbolične funkcije

Hiperbolične funkcije lahko definiramo s potenčno vrsto. Definiciji *hiperboličnega sinusa* in *hiperboličnega kosinusa* sta

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Definiciji *hiperboličnega tangensa* in *hiperboličnega kotangensa* sta

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\,.$$

Za hiperbolične funkcije velja hiperbolični Pitagorov izrek

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Kompleksne kotne in hiperbolične funkcije definiramo preko kompleksne eksponentne funkcije

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Kompleksne hiperbolične funkcije najdemo v poglavju 2.1.6.

2.2 Ne-elementarne funkcije: $U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Diracovo funkcijo δ najdemo v poglavju 4.3

2.2.1 Funkcija napake

Funkcijo napake je neelementarna funkcija, ki jo definiramo kot

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \,.$$

Opazimo, da je $\operatorname{erf} x$ zvezno odvedljiva in liha funkcija, torej $\operatorname{erf}(0) = 0$. Velja še $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$.

2.2.2 Eulerjeva funkcija gama Γ

Eulerjevo funckijo gama definiramo kot

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Funkcija konvergira na $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, a jo moremo z rekurzijo definirati tudi na $\Gamma : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \to \mathbb{R}$ (Weierstrassova definicija).

Lastnosti funkcije:

- je gladka $\iff \Gamma \in C^\infty$
- nima ničel

$$\begin{aligned}
z\Gamma(z) &= \Gamma(z+1) \\
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\
\prod_{n=0}^{k-1} \Gamma\left(z + \frac{n}{k}\right) &= (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{\frac{1-2k}{2}} \Gamma(kz)
\end{aligned}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)! \\
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} 2^{1-2n}
\end{aligned}$$

(Stirlingova formula) Za $x \in (0, \infty)$ in $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned}
x \to \infty \qquad & \Gamma(x) = \sqrt{2\pi\,(x-1)} \left(\frac{x-1}{e}\right)^{x-1} \\
n \to \infty \qquad & n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\
n \to \infty \qquad & \log(n!) = n \log n - n + \mathcal{O}(\log n)
\end{aligned}$$

Za binomski operator velja

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \sqrt{\frac{N}{n\,(N-n)}} \ldots$$

2.2.3 Eulerjeva funkcija beta B

Eulerjevo funckijo beta definiramo kot in moremo dokazati enakost z

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} &= \mathrm{B}\,(p,q) \\
\int_0^1 t^p(1-t)^q \;\mathrm{d}t &= \mathrm{B}\,(p+1,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \\
\int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)^q} \;\mathrm{d}x &= \mathrm{B}\,(p+1,q-p-1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q)} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^p\,(\cos\varphi)^q \;\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+q+2}{2})}
\end{aligned}
$$

Funkcija konvergira na $\quad \mathrm{B}:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.

Lastnosti funkcije:

- je gladka $\iff$ $\mathrm{B}\in C^\infty$
- je simetrična $\iff$ $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$
- nima ničel

Velja

$$
\begin{aligned}
p\in(0,1) \qquad \mathrm{B}(p,1-p) &= \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \\
p\in\mathbb{R}^+ \qquad \mathrm{B}(p,1) &= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

2.2.4 Dirichletova funkcija beta β

Dirichletovo funckijo beta definiramo za $s \in \mathbb{C}$ kot in moremo dokazati enakost z

$$
\begin{aligned}
\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \quad &= \quad = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-t}}{1+e^{-2t}} \, \mathrm{d}t = \\
= \prod_{2<p \;\in\; \text{praštevila}} \frac{1}{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{-s}} \quad &= \quad = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-s} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right) \Gamma(1-s) \beta(1-s)
\end{aligned}
$$

2.2.5 Riemannova funkcija zeta ζ

Riemannovo funckijo zeta definiramo za $s \in \mathbb{C}$ kot in moremo dokazati enakost z

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad &= \quad = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \\
= \prod_{p \;\in\; \text{praštevila}} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad &= \quad = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)
\end{aligned}
$$

Za $n \in \mathbb{N}$ velja

$$
\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2\,(2n)!}
$$

2.2.6 Integralske funkcije Si, Ci, Li, Ei

Integralski sinus Si, kosinus Ci, logaritem Li ter eksponentni integral Ei definiramo kot

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

2.2.7 Fresnelova integrala S in C

Fresnelova integrala S in C definiramo kot

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$$

Zanju velja

$$S(-x) = -S(x) \qquad C(-x) = -C(x) \qquad \lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty} C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

2.2.8 Eliptični integral in Jacobijeva amplituda

Popolna eliptična integrala definiramo kot

$$\text{I. vrste}: K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u$$
$$\text{II. vrste}: E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$$

Integral privedemo v popoln eliptični integral z uvedbo nove neznanke, da dobimo integral z ustreznima mejama.
Nepopoln eliptični integral I. vrste definiramo kot

$$F(z,k) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u$$

Kot inverz nepopolnega eliptičnega integrala definiramo *Jacobijevo amplitudo*

$$\mathrm{am}(z,k) = F^{-1}(\omega t, k)$$

S to funkcijo definiramo *sinus in kosinus amplitudinis*

$$\mathrm{sn}\,(\omega t, k) = \sin\left(\mathrm{am}\,(\omega t, k)\right)$$
$$\mathrm{cn}\,(\omega t, k) = \cos\left(\mathrm{am}\,(\omega t, k)\right)$$

Definiramo lahko tudi *Gudermannovo* funkcijo

$$\mathrm{gd}(z) = \mathrm{am}(z,1) = \arctan(\sinh(z))$$

2.2.9 Airyjeva funkcija

2.2.10 Lambertova funkcija W

Lambertovo funkcijo W definiramo implicitno kot

$$ye^y = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = W(x)$$

Lambertova transcendentna enačba ima kompleksne rešitve, med njimi dve realni, zvezni, strogo monotoni rešitvi

$$W_0 : \left[-\frac{1}{e}, \infty\right) \to \mathbb{R} \qquad \text{in} \qquad W_{-1} : \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \to \mathbb{R}$$

za kateri velja $W(-\frac{1}{e}) = -1$. Velja tudi $W_0(0) = 0$ in $\lim_{x\to 0} W_{-1}(x) \to -\infty$. Velja še

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z + e^{W(z)}}, z \neq -\frac{1}{e} \qquad \int W(x)\ \mathrm{d}x = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) + C$$

2.2.11 Besselove, Neumannove in Hanklove funkcije

Besselovo funkcijo J_ν (prve vrste) reda ν definiramo kot

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Neumannovo funckijo Y_ν (tudi Webrovo funkcijo, Besselovo funkcijo druge vrste, N_ν) definiramo kot

$$Y_\nu(z) = \begin{cases} \frac{J_\nu(z)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} & \nu \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z) - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(z)\right) & \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Za *Besselovo diferencialno enačbo*

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

velja, da sta dve obliki splošne rešitve enačbe

$$y = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}; \quad \nu \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N} \qquad\qquad y = c_1 J_\nu + c_2 Y_\nu$$

Besselove funkcije lahko dobimo z eno izmed rodovnih funkcij

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

$$e^{\mathrm{i}z\sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{\mathrm{i}n\theta}$$

ali pa z integralsko *Hansel-Besselovo* formulo, kjer $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Naj bo $y_\nu(z) = J_\nu(z)$ ali pa $y_\nu(z) = Y_\nu(z)$. Tedaj veljajo

$$(z^\nu J_\nu)' = z^\nu J_{\nu-1} \qquad\qquad \left(z^{-\nu} J_\nu\right)' = -z^{-\nu} J_{\nu+1}$$

$$y_\nu'(z) + \frac{\nu}{z}y_\nu(z) = y_{\nu-1}(z) \qquad\qquad y_{\nu-1}(z) + y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}y_\nu(z)$$

$$y_\nu'(z) - \frac{\nu}{z}y_\nu(z) = -y_{\nu+1}(z) \qquad\qquad y_{\nu-1}(z) - y_{\nu+1}(z) = 2y_\nu'(z)$$

J_n je soda ali liha, če je n soda ali liha. $J_{k+\frac{1}{2}}$ so elementarne funkcije. Naj bo $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Tedaj velja

$$J_{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n z^n \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right)$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

Naj bo $\xi_{\nu,n} \geq 0$ n-ta ničla funkcije J_ν. Tedaj veljata

$$\int_0^1 r J_\nu(\xi_n r) J_\nu(\xi_{n'} r) \,\mathrm{d}r = 0$$
$$\int_0^a r \left(J_\nu \left(\xi_{\nu,n} \frac{r}{a} \right)^2 \right) \mathrm{d}r = \frac{a^2}{2} \left(J_{\nu+1} \left(\xi_{\nu,n} \right) \right)^2$$

Za $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ veljata $|J_0(x)| \leq 1$ in $|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Za $z \gg 1$ velja (zadnji 2 morda (do konstante natančno))

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}(2\nu + 1) \right)$$
$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}(2\nu + 1) \right)$$
$$I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z$$
$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

Če za z velja i$z \in \mathbb{R}$, običajno uporabljamo *Modificirane Besselove funkcije*, za katere (morda) velja

$$I_\nu(z) = J_\nu(\mathrm{i}z) \qquad\qquad K_\nu(z) = Y_\nu(\mathrm{i}z)$$

Definiramo tudi *sferične Besselove funkcije*

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{2l+1}{2}(x)} \qquad\qquad y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\frac{2l+1}{2}(x)}$$
$$i_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{\frac{2l+1}{2}(x)} \qquad\qquad k_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{\frac{2l+1}{2}(x)}$$

2.2.12 Legendrovi polinomi

Legendrove polinome P_n definiramo kot

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left((z^2-1)^n \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} z^{n-2k}$$

So rešitev Legendrove diferencialne enačbe

$$(z^2-1)y'' + 2zy + -n(n+1)y = 0$$

Legendrove polinome lahko dobimo z rodovno funkcijo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

Prostor lahko opremimo s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

ki inducira normo $\|f\|_2$. Tedaj Legendrovi polinomi tvorijo ortogonalno bazo $L^2[-1,1]$ in velja

$$\langle P_m, P_n \rangle = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$$

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)$$
$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x$$

$$P_0(z) = 1 \qquad P_1(z) = z \qquad P_2(z) = \frac{3z^2-1}{2}$$
$$P_3(z) = \frac{5z^3-3z}{2} \qquad P_4(z) = \frac{35z^4-30z^2+3}{8} \qquad P_5(z) = \frac{63z^5-70z^3+15z}{8}$$

2.2.13 Pridružene Legendrove funkcije

Naj bo P_l Legendrov polinom in $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Tedaj definiramo *pridruženo Legendrovo funkcijo* P_l^m kot

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} P_l(z)$$

So rešitev pridružene Legendrove diferencialne enačbe

$$\left((z^2-1)y'\right)' - \left(n(n+1) + \frac{m^2}{z^2-1}\right) y = 0$$

Naj bo $w(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Prostor lahko opremimo z dvema skalarnima produktoma

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \\ \langle f, g \rangle_w &= \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Tedaj pridružene Legendrove funkcije tvorijo ortogonalno bazo $L^2[-1,1]$ za variacijo spodnjega indeksa za produkt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ter za variacijo zgornjega indeksa za produkt $\langle \bullet, \bullet \rangle_w$. Velja namreč

$$\begin{aligned} \langle P_k^m, P_l^m \rangle &= \frac{2\delta_{kl}}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \\ \langle P_l^m, P_l^n \rangle_w &= \delta_{mn} \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \end{aligned}$$

Velja, da so za $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $2m \in (\mathbb{Z} \cap [0, l])$ funkcije P_l^{2m} polinomi. Velja še

$$\begin{aligned} P_l^0 &= P_l \\ P_l^m(\pm 1) &= 0 \\ P_l^{-m}(z) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z) \\ |m| > l \implies P_l^m(z) &= 0 \end{aligned}$$

2.2.14 Hermitovi polinomi

Hermitove polinome definiramo kot

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$$

So rešitev enačbe

$$y'' - 2zy' + 2ny = 0$$

Hermitove polinome lahko dobimo z rodovno funkcijo

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n$$

Naj bo $w(x) = e^{-x^2}$. Prostor lahko opremimo s skalarnim produktom,

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} w(x) \, \mathrm{d}x$$

ki inducira normo $\|f\|_2$. Tedaj Hermitovi polinomi tvorijo ortogonalno bazo L^2_w velja

$$\langle H_m, H_n \rangle_w = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

Zanje veljajo

$$\begin{aligned}
H_n &= 2zH_{n-1} - H'_{n-1} & &= 2zH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2} \\
H'_n &= 2nH_{n-1} \\
a_{n+1,k} &= a_{n,k-1} - (k+1)a_{n,k+1} & & a_{0,0} = 1 \quad a_{1,1} = 2 \quad a_{1,0} = 0 \\
H_n(-z) &= (-1)^n H_n(z)
\end{aligned}$$

2.3 Ne-elementarne funkcije: $f^n \to g$

2.3.1 Fourierova transformacija

Fourierovo transformacijo $\widehat{\bullet}$ funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo kot

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i}x\omega)\, \mathrm{d}x$$

Če $f \in L^1(\mathbb{R})$, velja $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Če velja tudi $f \in \mathcal{C}^1$ in $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, skoraj povsod velja $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$. Če $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, velja $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$.

Za skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$$

velja, da neki neki Hilbertov prostor in velja $\langle f, g \rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle$ Naj bodo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0, 1)$. Tedaj veljajo

$$\begin{array}{rcl}
f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \\
\widehat{f(x)e^{\mathrm{i}ax}}(\omega) & = & \widehat{f}(\omega - a) \\
\widehat{f(x-a)} & = & \widehat{f}(\omega)e^{-\mathrm{i}a\omega} \\
\widehat{f(ax)}(\omega) & = & \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
f\widehat{\left(\frac{x-a}{b}\right)}(\omega) & = & be^{-\mathrm{i}a\omega}\widehat{f}(b\omega) \\
x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}^n \widehat{f}}{\mathrm{d}x^n}(\omega) = (-\mathrm{i})^n \widehat{(x^n f)}(\omega) \\
\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \in L^1(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \widehat{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^n \widehat{f}(\omega) \\
\widehat{f(x)g(x)} & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\widehat{f} * \widehat{g}\right)(\omega)
\end{array}$$

Tabela Fourierovih transformacij nekaj funkcij, kjer označimo $\mathrm{tri}(x) = \max(1 - |x|, 0)$, $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$, $T_n(x)$ n-ti polinom Čebiševa.

$$\widehat{1} = \sqrt{2\pi}\delta(\omega) \qquad \widehat{\delta(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\widehat{\chi_{[-b,b]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(b\omega)}{\omega} \qquad \widehat{\mathrm{sinc}\,(bx)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\chi_{[-b,b]}(\omega)}{b}$$

$$\widehat{\mathrm{sgn}(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i\omega} \qquad \widehat{\mathrm{tri}(bx)} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2b}\right)$$

$$\widehat{e^{-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \qquad \widehat{e^{-b|x|}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b}{b^2+\omega^2}$$

$$\widehat{\frac{b}{b^2+x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-b|\omega|} \qquad \widehat{e^{-bx}\chi_{[0,\infty]}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{b+i\omega}$$

$$\widehat{\sin(bx)} = \sqrt{2\pi}\frac{\delta(\omega-b)-\delta(\omega+b)}{2i} \qquad \widehat{\cos(bx)} = \sqrt{2\pi}\frac{\delta(\omega-b)+\delta(\omega+b)}{2}$$

$$\widehat{\mathrm{sinc}^2(bx)} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2b}\right) \qquad \widehat{\mathrm{sech}(bx)} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2b}\omega\right)$$

$$\widehat{\frac{1}{x^n}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{sgn}(\omega) \qquad \widehat{|x|^{\alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\Gamma(\alpha+1)}{|\omega|^{\alpha+1}}$$

$$\widehat{J_n(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-i)^n T_n(\omega)}{\sqrt{1-\omega^2}} \qquad \widehat{\log|x|} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{|\omega|} + 2\gamma\delta(x)\right)$$

Plancherelov izrek

2.3.2 Laplaceeva transformacija

Laplaceevo transformacijo $\mathcal{L}(\bullet)$ funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo kot

$$\mathcal{L}(f) : \{s \in \mathbb{C}; \Re(s) > 0\} \to \mathbb{C} \qquad \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-ts)\, \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^n) &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\mathcal{L}\left(e^{at}\right) &= \frac{1}{s-a} \\
\mathcal{L}\left(f(t)e^{at}\right) &= \mathcal{L}(f)(s-a) \\
\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right) &= s^n \mathcal{L}(f(t)) \\
\mathcal{L}(\delta(t)) &= 1 \\
\mathcal{L}(\sin \omega t) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(\cos \omega t) &= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

2.3.3 Konvolucijski integral

Konvolucijo oziroma *konvolucijski integral* zveznih funkcij f, g, od katerih ima ena kompakten nosilec, definiramo kot

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Veljajo:

$$f * g = g * f \qquad f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \qquad \int_{-\infty}^{t} (f * g)(\tau)\ \mathrm{d}\tau = (F * g)(t) = (f * G)(t)$$

Tabelo konvolucij najdemo v poglavju (19.11).

Konvolucijo lahko posredno izračunamo s Fourierovo transformacijo, kar je praviloma hitreje analitično ter numerično, saj za $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ velja enačba

$$\widehat{f * g} = (\sqrt{2\pi})^n \widehat{f}\widehat{g}$$

2.4 Pravila računanja z limito, odvodom, vrsto in integralom

2.5 Risanje grafov funkcij

Stacionarne in druge značilne točke najdemo po postopku, opisanem v poglavju **??**.

3 Topologija

3.1 Lastnosti in relacije

3.1.1 Topologija in topološki prostor

Naj bo A množica in $\mathcal{P}(A)$ potenčna množica množice A. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(A)$ je *topologija* na množici A, čee velja

1. $\emptyset, A \in \mathcal{T}$
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \quad \implies \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$
3. $\forall i \in I \quad A_i \in \mathcal{T} \quad \implies \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

S topologijo definiramo *odprte* množice, namreč elementom topologije $\mathcal{T}$ rečemo odprte množice.

Množico A s topologijo na njej $\mathcal{P}(A)$ imenujemo *topološki prostor*, torej prostor, za katerega je definirana *odprtost* množic.

V nadaljnjem s $\mathcal{T}_\bullet$ označimo topologijo na množici $\bullet$.

3.1.2 Notranja, zunanja, mejna in gosta točka

Obravnavajmo topološki prostor $(\mathcal{T}_A, A)$.

Točka a je *notranja točka* podmnožice $\widetilde{A} \subset A$, čee obstaja (odprta) množica $U \in \mathcal{T}_A$, da velja $a \in U$ ter $U \subset \widetilde{A}$.

Točka a je *zunanja točka* podmnožice $\widetilde{A} \subset A$, čee je točka a notranja točka podmnožice $\widetilde{A}^c$.

Točka a je *mejna točka* podmnožice $\widetilde{A} \subset A$, čee ni niti notranja, niti zunanja točka podmnožice $\widetilde{A}$.

Podmnožica $\widetilde{A} \subset A$ je v točki $a \in \widetilde{A}$ *gosta*, čee $\forall U \in \mathcal{T}_A$ s pogojem $a \in U$ velja $U \backslash \{a\} \neq \emptyset$.

3.1.3 Okolica

Podmnožica $U \subset A$ je *okolica* točke a, čee je a notranja točka U.

3.1.4 Odprtost in zaprtost

Podmnožica $\widetilde{A} \subset A$ je *odprta* v A, čee $A \in \mathcal{T}_A$. Ekvivalenten pogoj je, čee $\forall a \in \widetilde{A}$ velja, da je a notranja točka $\widetilde{A}$.

Podmnožica $\widetilde{A} \subset A$ je *zaprta*, čee je A^c odprt.

Množica A je lahko samo odprta, samo zaprta, oboje (čee je $A = \emptyset$ ali $\widetilde{A} \subset A$) ali pa niti odprta niti zaprta (npr. netrivialen presek odprte in zaprte množice).

3.1.5 Zveznost (po točkah)

Funkcija $f : A \to B$ je *zvezna*, čee za odprto podmnožico $\widetilde{B}$ velja, da je praslika $f^{-1}(\widetilde{B})$ odprta.

3.1.6 Kontraktibilnost $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$

Naj bo $x \in \mathbb{S}^n$. Tedaj je $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$ kontraktibilna.

3.1.7 Borsuk-Ulamov izrek

Za zvezno $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja $x \in \mathbb{S}^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.

3.1.8 Van Kampenov izrek

Naj bosta A in B odprti podmnožici ter A, B in $A \cap B$ s potmi povezane množice. Naj $x_0 \in A \cap B$ ter $X = A \cup B$. Tedaj je fundamentalna grupa $\pi_1(X, x_0)$ *prosti produkt* (poglavje **??**) fundamentalnih grup $\pi_1(A)$ in $\pi_1(B)$.

3.2 Homeomorfizem

Funkcija $f : A \to B$ je *Homeomorfizem*, čee je bijektivna in sta f ter f^{-1} zvezna. Topološka razreda sta *homeomorfna*, če med njima obstaja homeomorfizem. Pri vedi topologiji skušamo uvesti ekvivalenčne razrede z relacijo homeomorfizmom.

3.3 Homotopna preslikava

Naj bo $f_t : A \to B$ zvezna preslikava med topološkima prostoroma. Tedaj je funkcija $F : A \times [0, 1] \to B$, katera $(a, t) \mapsto f_t(a)$ *homotopna* oziroma *homotopija*, čee je F zvezna.

Homotopija je torej zvezna interpolacija dveh topoloških prostorov.

Če med prostoroma A in B obstaja homotopija, sta prostora *homotopna*, kar označimo kot $A \simeq B$. Če sta prostora homeomorfna, sta tudi homotopna.

Homotopija je *relativna* glede na podmnožico $\widetilde{A} \subset A$, čee za homotopijo F velja $\forall t \in [0, 1] \quad F\big|_{\widetilde{A}}(a, t) = f(a)$. Drugače rečeno, pri interpolaciji so funkcijske vrednosti na $\widetilde{A}$ konstantne.

Krivulji sta *krivuljno homotopni*, čee sta homotopni relativno na krajišči. Drugače rečeno, krivuljno homotopni krivulji sta homotopni krivulji z istima krajiščema.

4 Teorija mere

4.1 Metrični prostori

Naj bo $\mathcal{M}$ množica. Preslikava $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ je *metrika*, čee za $x, y, z \in \mathcal{M}$ veljajo trditve

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
3. $d(x, y) \geq 0$
4. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Metrični prostor je množica $\mathcal{M}$ z metriko $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

$\mathcal{U}$ in $\overline{\mathcal{U}}$ sta *odprta krogla* in *zaprta krogla* s središčem v točki a in polmerom r, čee

$$\mathcal{U} = \mathcal{K}(a, r) = \{x \in \mathcal{M}; d(x, a) < r\}$$

$$\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{K}}(a, r) = \{x \in \mathcal{M}; d(x, a) \leq r\}$$

Primer: L^p je metrični prostor vseh funkcij, za katere velja $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$.

4.2 Lastnosti in relacije

Naj bosta $\mathcal{M}_A$ in $\mathcal{M}_B$ metrična prostora z metrikami d_A in d_B. Za podmnožice metričnih prostorov je univerzum metrični prostor, katerega podmnožice so.

4.2.1 Notranja, zunanja in mejna točka

Točka a je *notranja točka* podmnožice $A \subset \mathcal{M}_A$, čee obstaja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da odprta krogla $\mathcal{K}(a, \varepsilon) \subset A$.

Točka a je *zunanja točka* podmnožice $A \subset \mathcal{M}_A$, čee je točka a notranja točka podmnožice A^c.

Točka a je *mejna točka* podmnožice $A \subset \mathcal{M}_A$, čee ni niti notranja, niti zunanja točka podmnožice A.

4.2.2 Okolica

Podmnožica $A \subset \mathcal{M}_A$ je *okolica* točke a, čee je a notranja točka A.

4.2.3 Odprtost in zaprtost

Podmnožica $A \subset \mathcal{M}_A$ je *odprta* v $\mathcal{M}_A$, čee $\forall a \in A$ velja, da je a notranja točka A.

Podmnožica $A \subset \mathcal{M}_A$ je *zaprta*, čee je A^c odprt.

Množica A je lahko samo odprta, samo zaprta, oboje (čee je $A = \emptyset$ ali $A = \mathcal{M}_A$) ali pa niti odprta niti zaprta (npr. presek odprte in zaprte množice).

4.2.4 Relativna odprtost in zaprtost

Naj bosta podmnožici $A \subset \mathcal{M}_A$ in $A' \subset \mathcal{M}_A$. A je *relativno odprta* v A', čee obstaja odprta podmnožica $\widetilde{A} \subset \mathcal{M}_A$, da velja

$$A = \widetilde{A} \cap A'$$

A je *relativno zaprta* v A', čee je relativno odprta v A'^{c}.

Množica je odprta, čee je relativno odprta v univerzumu ter zaprta, čee je relativno zaprta v univerzumu.

Primer: Naj bodo $\mathbb{R}$ univerzum in intervala $A' = [0, 2]$ in $A = [0, 1)$. A ni odprta (v $\mathbb{R}$), a je relativno odprta v A', saj $A = [0, 1) = [0, 2] \cap (-1, 1)$.

4.2.5 Zveznost v točki

Funkcija $f : D \subset \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ je *zvezna v točki* $a \in D$, čee velja

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \ni: \quad \forall x \in A, d_A(x, a) < \delta \quad d_B(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Drugače rečeno, funkcija je zvezna, čee ima "povezan"graf.

4.2.6 Zveznost (po točkah)

Funkcija $f : D \subset \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ je *zvezna (po točkah)*, čee je zvezna za $\forall a \in D$.

4.2.7 Enakomerna zveznost

Funkcija $f : D \subset \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ je *enakomerno zvezna*, čee velja

$$\exists \delta > 0 \quad \ni: \quad \forall x_1, x_2 \in D, \text{ da } d_A(x_1, x_2) < \delta \quad d_B(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Če je f enakomerno zvezna, je zvezna.

4.2.8 Lipschitzova lastnost

Funkcija $f : D \subset \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ je *Lipschitzova* (Lipschitzovo zvezna), čee

$$\exists \gamma > 0 \quad \ni: \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq \gamma |x_2 - x_1|$$

Za $f \in C^1$ se ekvivalenca poenostavi na $\quad \exists \max\left(\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|\right)$. f je Lipschitzovo zvezna, čee v vsaki točki na grafu obstaja isti (z istim naklonom γ) dvojni stožec, centriran v taki točki, da celoten graf leži v njem.

Če je f Lipschitzovo zvezna, je enakomerno zvezna.

4.2.9 Schwartzova lastnost

Funkcija $f : D \subset \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ je *Schwartzova*, čee je funkcija

$$x \mapsto f^{(m)}(x) x^n$$

omejena za $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$, kjer oklepaj v eksponentnu označuje odvod. Očiten potreben pogoj je $f \in C^\infty$. Da je funkcija f Schwartzova označimo kot $f \in \mathcal{S}$.

Naj velja $f, g \in \mathcal{S}$ ter p polinom. Tedaj so Schwartzove tudi

$$f(x - \alpha) \qquad f(\alpha x) \qquad f^{(n)} \qquad f \cdot p \qquad f * g$$

4.2.10 Konveksnost

TODO

Če je A konveksna, je zvezdasta.

4.2.11 Zvezdastost

TODO

Če je A zvezdasta, je kontraktibilna.

4.2.12 Kontraktibilnost

TODO

4.2.13 Povezanost

Podmnožica $A \subset \mathcal{M}_A$ je *povezana* čee je *ne* moremo zapisati kot unije disjuntnih odprtih množic.

4.2.14 Povezanost s potmi

Če je A povezana s potmi, je povezana. Če je A odprta in povezana, je povezana z (zvezno odvedljivimi) potmi (če je odprta velja ekvivalenca).

4.2.15 Enostavna povezanost

TODO

4.2.16 Območje

Podmnožica $A \subset \mathcal{M}_A$ je *območje* čee je neprazna, odprta in povezana.

4.3 Diracova δ

Diracova delta, *Diracova funkcija delta*, ali bolj natančno, *Diracova mera delta* je definirana z integralsko enačbo

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Za $f \in C^0$ in $\varepsilon, \alpha > 0$ veljajo

$$\delta(\varepsilon) = \delta(-\varepsilon) = 0 \qquad \delta(kx) = \frac{1}{k}\delta(x)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\delta(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) \qquad =$$

Za funkcijo $g \in C^0$, množico ničel A, $\forall a \in A$, $g(a) = 0$ velja

$$\delta(g(x)) = \sum_{a_i \in A} \frac{\delta(x - a_i)}{\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(a_i)\right|}$$

4.3.1 Integral po množici z mero 0

Za množice z mero 0 lahko uporabimo delto, da dobimo neničeln integral po taki množici. Naj bodo $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ množice, da $V_n(A) = 0$ in $V_n(\Omega) \neq 0$. Naj bo χ_A karakteristična funkcija množice A. Velja

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\delta(\chi(x))\,\mathrm{d}x$$

Integral delte je *Heavisideova stopnica*

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,\mathrm{d}x = H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

4.3.2 Odvajanje funkcij, ki so odvedljive povsod, razen v negosti množici z mero 0

Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$, $f \in C^0$ ter $\forall x' \in D_O \subset D$ obstaja $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x')$. Naj velja $V_n(D/D_O) = 0$ in naj bo $a \in D/D_O$. Označimo spodnjo in zgornjo limito kot

$$L_1 = \lim_{x \uparrow a} f(x) \qquad \text{ter} \qquad L_2 = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

Tako v okolici točke a velja

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) & x \neq a \\ (L_2 - L_1)\,\delta(x-a) & x = a \end{cases}$$

saj tako velja $\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)$.

Velja

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n\delta}{\mathrm{d}x^n}(x) = (-1)^n \delta(x)$$

5 Algebrske strukture

Grupe so v 6, uvod.

5.1 Ekvivalenčni razred

Za množico X je relacija R *ekvivalenčna*, čee $\forall a, b, c \in X$ velja

- refleksivnost: aRa
- simetričnost: $aRb \implies bRa$
- tranzitivnost: aRb in $bRc \implies aRc$.

Najpogostejša primera ekvivalenčnih relacij sta ekvivalenca ($\iff$) in enakost (=).

Podmnožico elementov, ki so ekvivalentni elementu x imenujemo *ekvivalenčni razred* za relacijo R in ga definiramo kot

$$[x]_R = \{y; xRy\} \subset X \; .$$

Ekvivalenčni razredi so disjunktne podmnožice, zato tvorijo *dekompozicijo* množice X (X lahko razdelimo na ekvivalenčne razrede), ki jo označimo kot

$$X/R = \{[x]_R \, ; x \in X\} \; .$$

Množico X/R imenujemo *kvocientna množica*, njena definicija pa porodi *kvocientno projekcijo* Π_R, ki elementu pripiše ekvivalenčni razred

$$\Pi_R : X \to X/R \qquad\qquad \Pi_R : x \mapsto [x]_R \; .$$

5.2 Permutacije končnih n-teric

Naj bo $X' = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ končna urejena n-terica. *Permutacijo* si lahko predstavljamo kot preureditev n-terice X. Ko elemente preuredimo, so vsi v n-terici še vedno zastopani natanko enkrat, zato je permutacija bijekcija. Permutacijo končnih n-teric σ lahko torej definiramo kot

$$\sigma : X' \to X' \qquad\qquad \sigma : x \overset{\text{bij.}}{\mapsto} \sigma(x) \; .$$

Namesto, da bi elemente n-terice X' takoj permutirali s σ, lahko elemente (bijektivno) označimo drugače, da dobimo X, jih permutiramo, nato pa označimo na prvoten način in dobimo enak rezultat. V diagramu σ in σ' iste elemente permutirata na enak način, kljub njihovimi "imeni" (zato imata drug predpis).

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\text{bijek.}"] & X' \arrow[d, "\text{bijek.}"] \\
X \arrow[r, "\sigma"] & X
\end{tikzcd}$$

Naravno preimenovanje (bijekcija) $X' \to X$ je, da namesto elementov uporabimo njihove indekse, torej $x_i \mapsto i$. Permutacijo je najbolj prikladno pisati za to n-terico $X = (1, 2, \ldots, n)$ in sicer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \, , \end{pmatrix}$$

torej v prvo vrstico zapišemo elemete od 1 do n, v drugo pa kam se ti preslikajo oziroma na katero mesto jih permutacija premesti.

Permutacije iste n-terice so zaprte za kompozicijo in tvorijo končno simetrično grupo s poglavja 6.2.2, njihov kompozitum $\sigma_2 \circ \sigma_1$ pa najlažje računamo, da vsak element od 1 do n najprej preslikamo s prvo (desno) permutacijo σ_1, nato pa rezultat preslikamo še z drugo (levo) σ_2.

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov, TODO. Ti komutirajo. Zato permutacije lahko pišemo tudi na ta način, cikel dolžine n zapišemo v obliki

$$\left(a \; \sigma(a) \; \sigma^2(a) \; \ldots \; \sigma^{n-1}(a)\right) \, .$$

V tej notaciji cikel element preslika v naslednji element. Včasih izpustimo cikle dolžine 1, a s tem lahko zgrešimo elemente permutacije. Kompozitum $\sigma_2 \circ \sigma_1$ najlažje računamo, da najprej s prvo (σ_1) preslikamo najnižji element, ki ga še ne nastopa v ciklu, (sprva 1) in ga zapišemo za njim. Nato preslikamo ta element in ga zapišemo za tem. Proces ponavljamo, dokler ne izračunamo celotnega cikla. Ko cikel izračunamo, spet preslikamo najnižji element, ki ne nastopa v nobenem ciklu in proces ponavljamo, dokler ne izračunamo vseh elementov.

Cikel dolžine n lahko zapišemo kot $n-1$ ciklov dolžine 2. Te dobimo s formulo (v zapisu s cikli)

$$(a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_n) = (a_1 \; a_2)\,(a_2 \; a_3) \ldots (a_{n-1} \; a_n) \, .$$

Število vseh permutacij n-terice X je

$$\#\left(\{\sigma; \sigma : X \to X \text{ permutacija}\}\right) = \#\left(X\right)!$$

5.3 Obseg in polje

Obseg je množica z dvema binarnima operacijama $\oplus$ in $\odot$, da za elemente obsega (skalarje) $a, b, c \in \mathbb{F}$ velja

1. Asociativnost obeh operacij $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ in $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
2. Obstoj enot za obe operaciji $0 \oplus a = a$ in $1 \odot a = a$
3. Obstoj inverzov za obe operaciji $\ominus a \oplus a = 0$ in $a^{-1} \odot a = 1$
4. Distributivnost $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$

Primeri obsegov so razni komutativni obsegi (polja), kvaternioni

Polje $\mathbb{F}$ je množica z dvema binarnima operacijama $\oplus$ in $\odot$, da za elemente polja (skalarje) $a, b, c \in \mathbb{F}$ velja

1. Asociativnost obeh operacij $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ in $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
2. Komutativnost obeh operacij $a \oplus b = b \oplus a$ in $a \odot b = b \odot a$
3. Obstoj enot za obe operaciji $0 \oplus a = a$ in $1 \odot a = a$

4. Obstoj inverzov za obe operaciji $\ominus a \oplus a = 0$ in $a^{-1} \odot a = 1$

5. Distributivnost $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$

Polje je torej komutativen obseg. Primeri polj so množice racionalnih $\mathbb{Q}$, realnih $\mathbb{R}$ in kompleksnih $\mathbb{C}$ števil za operaciji $\odot = \cdot$ in $\oplus = +$.

5.3.1 Realna števila $\mathbb{R}$

<u>**Racionalizacija ulomka**</u> Ulomek, katerega imenovalec je vsota celih števil in kvadratnih korenov, lahko enačimo z ulomkom z racionalnim imenovalcem s pomočjo enačbe $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\,.$$

5.3.2 Kompleksna števila $\mathbb{C}$

<u>**Realizacija ulomka**</u> Ulomek, katerega imenovalec ni realen, lahko enačimo z ulomkom z realnim imenovalcem s pomočjo enačbe $z \cdot \overline{z} = |z|^2$:

$$\frac{w}{z} = \frac{w}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

5.3.3 Kvaternioni $\mathbb{H}$

Kvaternion q je urejena četverka $q = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, pogosto jo zapišemo kot $q = (t, (x, y, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Množica kvaternionov je opremljena z operacijo seštevanja po komponentah ($\mathbb{H}$ je zato vektorski prostor) in produkta

$$(s, \mathbf{u}) \cdot (t, \mathbf{v}) = (st - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,, s\mathbf{v} + t\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v})\,.$$

Standardno bazo kvaternionov zapišemo lahko algebrajsko

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathrm{i} &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathrm{j} &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathrm{k} &= (0, 0, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

Za produkte baznih kvaternionov velja

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^2 &= \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \\ \mathrm{ij} &= -\mathrm{ji} = \mathrm{k} \\ \mathrm{jk} &= -\mathrm{kj} = \mathrm{i} \\ \mathrm{ki} &= -\mathrm{ik} = \mathrm{j}\,, \end{aligned}$$

bazni kvaternion 1 pa komutira z ostalimi tremi in $1^2 = 1$.

S kvaternioni lahko konstruiramo kompleksna števila, saj velja $1^2 = 1$, $1\mathrm{i} = \mathrm{i}1 = \mathrm{i}$ in $\mathrm{i}^2 = -1$. Zato lahko zapišemo

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} .$$

Zaradi asimetrije lahko kvaternion ločimo na *skalarni del*, torej prvo komponento in *vektorski del*, ki pa predstavlja ostale tri komponente. Pogosto skalarne kvaternione enačimo s skalarji, vektorske pa z vektorji, torej

$$(t, 0, 0, 0) = t \qquad\qquad (0, x, y, z) = (x, y, z) .$$

Skalarni kvaternioni se po kvaternionskem produktu množijo kot skalarji, za vektorske pa velja enačba

$$\mathbf{uv} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{u} \times \mathbf{v} .$$

Kvaternion lahko zapišemo v obliki

$$q = t + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} = (t + x\mathrm{i}) + (y + z\mathrm{i})\,\mathrm{j} = \alpha + \beta\mathrm{j} ,$$

kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Konjugiran kvaternion tedaj zapišemo kot

$$\overline{q} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}\mathrm{j}$$

in velja $\overline{q}q = |q|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Pravila kvaternionskega produkta upoštevamo, če ga zamenjamo s produktom matrik, kvaternione pa zapišemo s kompleksno matriko

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} .$$

V tem zapisu bazni kvaternioni zavzamejo obliko

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathrm{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} .$$

Konjugiranje tedaj predstavlja hermitiranje matrike $\overline{q} = q^{\mathrm{h}}$, kvadrat absolutne vrednosti pa determinanto $|q|^2 = q^{\mathrm{h}}q = \det q$.

V matrični reprezentaciji lahko definiramo *enotske kvaternione* s predpisom $\det q = 1$. Množico teh s produktom prepoznamo kot reprezentacijo posebne unitarne grupe

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \alpha \end{bmatrix} ; q^{\mathrm{h}}q = \det q = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} .$$

Normalizacijo lahko namesto s kompleksnimi zapišemo z realnimi komponentami $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, kar prepoznamo kot enotsko hipersfero $\mathbb{S}^3$.

Za vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lahko s kvaternionom $\underline{q}$ definiramo rotacijsko matriko $\pi(\underline{q})$, katere množenje z vektorjem $\mathbf{v}$ prevedemo na obojestransko množenje vektorskega kvaterniona $\underline{v}$ s predpisom

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \qquad\qquad \pi(\underline{q})\mathbf{v} = \underline{q}\underline{v}\overline{\underline{q}} .$$

Ortogonalna matrika $\pi(\underline{q})$ predstavlja rotacijo za kot φ okrog vektorja $\mathbf{w}$ za kvaternion

$$\underline{q} = \cos\frac{\varphi}{2} + \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{w} .$$

Ker velja $\pi(-\underline{q}) = \pi(q)$, dobimo izomorfizem

$$\mathrm{SU}(2)/\{I, -I\} \cong \mathrm{SO}(3)$$

5.4 Vektorski prostor

Vektorski prostor nad poljem $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ definiramo z

1. neprazno množico V
2. $\oplus : \mathsf{V} \times \mathsf{V} \mapsto \mathsf{V}$, da je $(\mathsf{V}, \oplus)$ Abelova grupa
3. $\odot : \mathbb{F} \times \mathsf{V} \mapsto \mathsf{V}$, da za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathsf{V}$ velja
   (a) $\alpha \odot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) + (\alpha \odot \mathbf{v})$
   (b) $(\alpha \oplus \beta) \odot \mathbf{v} = (\alpha \odot \mathbf{v}) \oplus (\beta \odot \mathbf{v})$
   (c) $(\alpha \odot \beta) \odot \mathbf{v} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{v})$
   (d) $1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Drugače rečeno, na množici vektorjev V definiramo seštevanje in množenje s skalarjem.

Naj bodo $\mathbf{v}_i \in \mathsf{V}$. *Linearna kombinacija* teh vektorjev je njihova utežena vsota, torej je za $\alpha_i \in \mathbb{F}$ linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_i$ oblike

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots \alpha_n \mathbf{v}_n \in \mathsf{V} \, .$$

Linearna ogrinjača množice $\{\mathbf{v}_i\}$ je množica vseh vektorjev, ki jih dobimo z linearnimi kombinacijami vektorjev iz $\{\mathbf{v}_i\}$, torej

$$\mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n\} = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots \alpha_n \mathbf{v}_n \in \mathsf{V}; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{F}\} \subset \mathsf{V} \, .$$

Vsaka linearna ogrinjača je podprostor prostora V. Če velja $\mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_i\} = \mathsf{V}$, pravimo da množica vektorjev $\{\mathbf{v}_i\}$ *razpenja* vektorski prostor V. Za tako množico velja, da vsak vektor iz V lahko na vsaj en način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{v}_i$.

Vektorji $\mathbf{v}_i$ so *linearno neodvisni*, če je edina njihova linearna kombinacija, katere rezulat je 0, kar trivialna, torej če velja

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots \alpha_n \mathbf{v}_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \, .$$

Za linearno neodvisne vektorje velja, da nobenega izmed njih ne moremo zapisati kot linearne kombinacije ostalih vektorjev. Velja še, da so za vsako linearno kombinacijo teh vektorjev skalarji α_i enolično določeni.

Vektorji $\mathbf{v}_i$ sestavljajo *bazo* prostora V, čee so linearno odvisni in razpenjajo V. To zapišemo kot

$$\mathcal{B} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n] \ ,$$

elemente baze pa imenujemo *bazni vektorji.* Vsak vektor $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$ lahko *razvijemo po bazi $\mathcal{B}$*, da ga zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots \alpha_n \mathbf{v}_n \, .$$

n-terica skalarnih komponent $(\alpha_i)_i$, ki jih dobimo pri razvoju, je vektor, imenujemo ga pa *koordinatni vektor* in ga označimo kot

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in \mathbb{F}^n \, .$$

Za bazo velja, da je razvoj vsakega vektorja iz V po bazi (po baznih vektorjih) $\mathbf{v}_i \in \mathcal{B}$ *enolično določen* torej razvoj po bazi predstavlja bijekcijo med V in $\mathbb{F}^n$. Bijekcija je izomorfizem, ki ga določi izbira baze, imenujemo ga *bazni izomorfizem*

$$[\bullet]_{\mathcal{B}} : \mathsf{V} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathbb{F}^n \qquad\qquad [\bullet]_{\mathcal{B}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \ .$$

Obratno, če poznamo izomorfizem $T : \mathbb{F}^n \to \mathsf{V}$, to določi bazo

$$\mathcal{B}_T = [T\hat{\mathbf{e}}_1, T\hat{\mathbf{e}}_2, \ldots, T\hat{\mathbf{e}}_n] \ ,$$

kjer so $\hat{\mathbf{e}}_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (enica na i-tem mestu) standardni bazni vektorji prostora $\mathbb{F}^n$ (lahko izberemo tudi drugo bazo, a je ta baza naravna izbira). Tedaj velja še $T^{-1} = [\bullet]_{\mathcal{B}}$.

Ker so izomorfizi, izbira baze enolično določi preslikavo $\mathbb{F}^n \to \mathsf{V}$ (in seveda njen inverz), izbira te preslikave pa določa bazo. V primeru, ko $\mathsf{V} = \mathbb{F}^n$, preslikavo T predstavlja matrika, njeni stolpci pa tvorijo bazne vektorje.

V *indeksni notaciji* iz poglavja 14.4 razvoj vektorja po bazi zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \alpha^i \mathbf{v}_i \ ,$$

kjer so $\mathbf{v}_i \in \mathcal{B}$ bazni vektorji, α^i pa komponente, ki tvorijo koordinatni vektor (izbira simbolov je drugačna kot v poglavju 14.4, da je konsistentna s tem poglavjem).

5.4.1 Skalarni produkt in adjunirana preslikava

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikava

$$\mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathbb{F} \qquad\qquad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

je skalarni produkt na V, čee $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathsf{V}$ in $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ veljajo

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (zasledimo tudi $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$)
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$
5. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = 0$.

Če zadnja dva aksioma ne veljata, je preslikava *psevdo-skalarni produkt*

5.4.2 Norma

Naj bo V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $v, w \in \mathsf{V}$ ter $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavi $\|\bullet\|$ rečemo *vektorska norma*, čee velja

1. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
3. $\|v\| \geq 0$
4. $\|v\| = 0 \iff v = 0$

Normiran vektorski prostor je vektorski prostor z vektorsko normo. Vektorska norma je metrika, zato je normiran vektorski prostor tudi metrični prostor.

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Tedaj skalarni produkt inducira $2-$normo

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

(polarizacijska identiteta) Naj bo V normiran vektorski prostor z $2-$normo. Tedaj $2-$norma inducira skalarni produkt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 + i\|\mathbf{v}+i\mathbf{w}\|^2 - i\|\mathbf{v}-i\mathbf{w}\|^2\right)$$

Komentar: Skalarni produkt lahko inducira samo $2-$norma.

Primeri norm:

p-normo $\|\bullet\|_p$ lahko definiramo za standardni vektorski prostor ali pa funkcijski prostor kot

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Poseben primer p-norme je ∞-norma ali *supremum norma*, ki jo definiramo kot

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \sup_i |v_i| \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

6 Teorija grup

6.1 Trditve in izreki

6.1.1 Grupa

Grupa G je množica z notranjo binarno operacijo $\oplus$

$$\bullet \oplus \bullet : G \times G \,,$$

za katero za $\forall g, h, k \in G$ veljajo

1. Zaprtost za $\oplus$, torej velja $g \oplus h \in G$.
2. Operacija $\oplus$ je *asociativna*, torej velja $g \oplus (h \oplus k) = (g \oplus h) \oplus k$.
3. Obstaja *nevtralni element* oz. *enota* e_G, da velja $g \oplus e_G = e_G \oplus g = g$.
4. Za vsak element g obstaja *inverzni element* $g^{-1} \in G$, da $g \oplus g^{-1} = g^{-1} \oplus g = e_G$.

Če za elemente grupe G velja komutativnost, torej da

$$g \oplus h = h \oplus g \,,$$

rečemo, da je grupa G *Abelova.*

V sledečem simbol $\oplus$ izpustimo. Dobimo lastnosti

1. Vsaka grupa ima natanko eno enoto e
2. Vsak element g ima natanko en inverz g^{-1}
3. $gh = gk \implies h = k$, torej so operacije grupe bijektivne in jih lahko krajšamo
4. $hg = kg \implies h = k$, torej so operacije grupe bijektivne in jih lahko krajšamo
5. $(g^{-1})^{-1} = g$
6. $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

6.1.2 Podgrupa in generator

Podgrupa H grupe G je podmnožica $H \subset G$, da

$$e_G \in H \qquad \forall g, h \in H, gh \in H \qquad \forall g \in H, g^{-1} \in H \,,$$

torej da je H tudi grupa. Da je H podgrupa G, običajno označimo kot

$$H < G \,.$$

Presek podrup je tudi podgrupa. Za podmnožico $X \subset G$ lahko najdemo najmanjšo podgrupo, ki vsebuje X in jo označimo kot

$$\langle X \rangle_G = \bigcap \{H; X \subset H < G\}$$

ter imenujemo *podgrupa, generirana s podmnožico* X. Lahko tudi zapišemo

$$\langle X \rangle_G = \left\{x_n^{k_n}; n \in \mathbb{N}; k_n \in \mathbb{Z}; x_n \in X\right\}$$

Grupa G je *generirana* z X, če velja $\langle X \rangle = G$. Tedaj je X množica *generatorjev* grupe G. *Red* generatorja $g \in G$ definiramo kot število elementov v podgrupi $\langle g \rangle$.

6.1.3 Homomorfizem

Binarna operacija $\varphi : H \to G$ je *homomorfizem grup*, če $\forall h, k \in H$ velja

$$\varphi(hk) = \varphi(h)\varphi(k) \, .$$

- φ je *monomorfizem*, čee je φ injektiven, kar je ekvivalentno $\ker(\varphi) = \{e\}$.
- φ je *epimorfizem*, čee je φ surjektiven, kar je ekvivalentno $\mathrm{Im}(\varphi) = G$.
- φ je *izomorfizem*, čee je homomorfizem in epimorfizem.
- φ je *endomorfizem*, čee $\varphi : G \to G$.
- φ je *avtomorfizem*, čee je endomorfizem in izomorfizem.

Če med grupama G in H obstaja izomorfizem, sta *izomorfni*, kar označimo kot $G \cong H$. Izomorfni grupi imata enako strukturo.

6.1.4 Center in produkt grup

$Z(G)$ je *center* grupe G, čee velja

$$Z(G) = \ker\left(g \mapsto C_g\right) \, .$$

Center $Z(G)$ je abelova podgrupa G.

Produkt grup G in H je grupa

$$G \times H = \{(g, h)\, ; g \in G, h \in H\} \, .$$

Za produkt grup poznamo homomorfizma *projekcijo*

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 &: G \times H \to G & \qquad (g, h) &\mapsto g \\ \mathrm{pr}_2 &: G \times H \to H & \qquad (g, h) &\mapsto h \end{aligned}$$

in *vložitev*

$$\begin{aligned} \mathrm{inc}_1 &: G \to G \times H & \qquad g &\mapsto (g, e_H) \\ \mathrm{inc}_2 &: H \to G \times H & \qquad h &\mapsto (e_G, h) \, . \end{aligned}$$

Velja

$$Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H) \, .$$

Za končne grupe lahko tvorimo *tabelo grupe*, kjer v robne stolpce in vrstice zapišemo vse elemente (v enakem vrstem redu), kjer se pa sekajo, zapišemo njihov produkt z ustrezne strani (v splošnem ne komutirajo). Tabela spominja na tabelo poštevanke z izjemo zaprtosti, ki je (končna) poštevanka nima. Če element pomnožimo z drugim, neznanim elementom in dobimo znani element, je zaradi bijektivnosti drugi element enolično določen. Zato se v tabeli elementi v stolpcih in vrsticah ne morejo ponavljati, podobno kot v sudoku.

6.1.5 Odseki

Za grupo G in podgrupo $K < G$ lahko definiramo *levi* in *desni odsek* skozi $g \in G$

$$gK = \{gk; k \in K\} \subset G \qquad Kg = \{kg; k \in K\} \subset G\,.$$

Odsek predstavlja translacijo podrupe (ki ni nujno podgrupa). Ker $\forall g, h \in G$ velja

$$\begin{aligned} g^{-1}h \in K &\implies gK = hK & hg^{-1} \in K &\implies Kg = Kh \\ g^{-1}h \notin K &\implies gK \cap hK = \emptyset & hg^{-1} \notin K &\implies Kg \cap Kh = \emptyset\,, \end{aligned}$$

je element grupe h tudi element odseka skozi g, čee sta odseka skozi h in g enaka. Zato odseki tvorijo dekompozicijo grupe G (posebej za leve / desne odseke)

$$G/K = \{gK; g \in G\} \qquad G\backslash K = \{Kg; g \in G\}$$

s kvocientno projekcijo Π_K

$$\begin{aligned} \Pi_K &: G \to G/K & \Pi_K &: G \to G\backslash K \\ \Pi_K &: g \mapsto gK & \Pi_K &: g \mapsto Kg\,. \end{aligned}$$

Involucija (bijekcija) med množicama je G/K in $G\backslash K$ je *inverz*.

Število elementov v kvocientni grupi G/K imenujemo *indeks* in ga definiramo

$$[G : K] = \#\,(G/K) = \#\,(K\backslash G)\;.$$

Kvocient v kontekstu velikosti množic lahko razumemo kot deljenje naravnih števil, saj velja

$$\#\,(G) = \#\,(K) \cdot [G : K]\;.$$

Posledično red vsakega elementa $\langle g\rangle$ deli moč grupe $\#\,(G)$.

6.1.6 Grupa edinka in kvocientna grupa

Podgrupa $N < G$ je *edinka* v G ali *normalna podgrupa* grupe G, če velja

$$G/N = G\backslash N \qquad \iff \qquad \forall g \in G \quad gN = Ng$$

kar označimo kot $N \lhd G$. Ekvivalenten zapis grupe edinke je, da $\forall g \in G$

$$N = gNg^{-1}\,.$$

Podmnožica odsekov G/K je pa tedaj podgrupa v G, ki jo imenujemo *kvocientna grupa*, ki je oblike in velja

$$G/N = \{gN; g \in G\} \qquad (gN)\,(g'N) = (gg')\,N\,.$$

Vse podgrupe Abelovih grup in jeder homomorfizmov so grupe edinke. Za grupo edinko $N \lhd G$ obe kvocientni projekciji projicirata v isto grupo $\Pi_N : G \to G/N = G\backslash N$ in sta homomorfizma.

Za homomorfizem $\varphi : G \to H$ in grupo edinko $N \lhd G$, da $N < \ker\varphi$ obstaja natanko en homomorfizem

$$\widetilde{\varphi} : G/N \to H\,,$$

za katerega $\widetilde{\varphi} \circ \Pi_N = \varphi$.

- $\widetilde{\varphi}$ je monomorfizem, čee $N = \ker\varphi$
- $\widetilde{\varphi}$ je epimorfizem, čee φ epimorfizem
- $\widetilde{\varphi}$ je izomorfizem, čee $N = \ker\varphi$ in je φ epimorfizem

6.1.7 Izreki o izomorfizmu

1. Homomorfizem $\varphi : G \to H$ inducira izomorfizem
$$G/\ker\varphi \cong \mathrm{im}\varphi\,.$$

2. Za podgrupo $K < G$ in edinko $N \lhd G$ velja $N \cup K \lhd K$, $NK < G$, $N \lhd NK$ in
$$K/\left(N \cup K\right) \cong \left(NK\right)/N\,.$$

3. Za $K < N$ in $N \lhd G$ velja $K \lhd G$ in
$$\left(G/K\right)/\left(N/K\right) \cong G/N\,.$$

6.1.8 Poldirektni produkt

Za grupo G in $N \lhd G$, $K < G$ je G *poldirektni produkt* podgrup N in K, če velja
$$G = NK \qquad\qquad N \cap K = \{e\}\,.$$

Tedaj pišemo $G = N \rtimes K$. Temu so ekvivalentne trditve

1. Obstaja natanko en $(n, k) \in N \times K$, da $g = nk$ oz. da $g = kn$.
2. Obstaja homomorfizem $\psi : G \to K$, za katerega $\ker\psi = N$ in $\psi\big|_K = \mathrm{id}_K$.
3. Kompozicija vložitve in kvocientne projekcije $K \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/N$ je izomorfizem.

Za $nk, n'k' \in G$ lahko zapišemo
$$\left(nk\right)\left(n'k'\right) = n\left(kn'k^{-1}\right)kk' = nc_k(n')kk'\,,$$
kjer je c_k konjugiranje s k (velja še $c_k \in \mathrm{Aut}(N)$). Izraz posplošimo, da c nadomestimo s homomorfizmom $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(N)$. S tem definiramo *poldirektni produkt glede na* φ, ki ga označimo kot
$$N \rtimes_\varphi K\,.$$
Ta grupa je podmnožica $N \times K$, produkt definiramo s predpisom
$$\left(n, k\right)\left(n', k'\right) = \left(n\varphi_k(n'), kk'\right)\,.$$

Povezavo dobimo z enačbo in izomorfizoma
$$\begin{aligned} N \rtimes_\varphi K &= \left(N \times \{e\}\right) \rtimes \left(\{e\} \times K\right) \\ N &\cong N \times \{e\} \lhd N \rtimes_\varphi K \\ K &\cong \{e\} \times K < N \rtimes_\varphi K\,. \end{aligned}$$

Poldirektni produkt dobimo s poldirektnim produktom glede na c_k. Ker je izraz $g = nk$ enolično določen, imamo naravni izomorfizem $N \rtimes_c K \cong N \rtimes K$.

6.1.9 Kratko eksaktno zaporedje (KEZ)

Za grupe N, K, G je zaporedje homomorfizmov

$$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow \{e\}$$

kratko eksaktno zaporedje grup, če je slika vsakega homomorfizma enaka jedru naslednjega homomorfizma. Velja torej

$$\ker\alpha = \mathrm{im}\,(e \mapsto e) = \{e\} \qquad \mathrm{im}\beta = \ker\,(K \mapsto e) = K \qquad \mathrm{im}\alpha = \ker\beta\,,$$

torej je α monomorfizem in β epimorfizem ter $\ker\beta = \alpha(N)$.

Zaporedje je *razcepno*, če obstaja desni inverz $\overline{\beta} : K \to G$, da $\beta \circ \overline{\beta} = \mathrm{id}_K$.

6.1.10 Delovanja grup, orbite

Levo delovanje grupe G na množici X je funkcija

$$\lambda : G \times X \to X \qquad \lambda : (g, x) \mapsto g \cdot x\,.$$

da $\forall x \in X$ in $\forall g, h \in G$ velja

$$e_G \cdot x = x \qquad (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)\,.$$

Za vsako delovanje λ lahko (bijektivno) najdemo homomorfizem $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} : G \to \mathrm{Sym}\,(X) \qquad \bar{\lambda} : g \mapsto (\lambda_g : X \to X)$$

s formulo $\lambda(g, x) = \big(\bar{\lambda}(g)\big)\,(x)$, ki vsakemu elementu grupe G z določenim predpisom (tipično obstaja naravna izbira) pripiše bijekcijo $X \to X$. Za delovanje velja

$$\lambda_e = \mathrm{id} \qquad \lambda_g \circ \lambda_{g'} = \lambda_{gg'} \qquad \lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}\,.$$

Desno delovanje definiramo podobno

$$\lambda : G \times X \to X \qquad \lambda : (x, g) \mapsto x \cdot g\,.$$

da $\forall x \in X$ in $\forall g, h \in G$ velja

$$x \cdot e_G = x \qquad x \cdot (g \cdot h) = (x \cdot g) \cdot h\,,$$

lastnosti so podobne, kot pri levem delovanju

Za levo delovanje grupe G na množico X lahko definiramo *orbito delovanja* v točki $x \in X$ s predpisom

$$\mathcal{O}_x = G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}\,,$$

ki predstavlja množico vseh delovanj, ovrednotenih v točki x. Definiramo še *podgrupo izotropije* v točki x s predpisom

$$G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}\,,$$

ki predstavlja podrupo, v kateri je točka x za vse elemente fiksna. Zato jo imenujemo tudi *stabilizator* delovanja v točki x.

Stabilizator glede na delovanje konjugiranja z elementi podgrupe $H < G$ v točki grupe $g \in G$ imenujemo *centralizator*

$$C_H(g) = H_g = \left\{h \in H; hgh^{-1} = g\right\} = \{h \in H; hg = gh\} \ ,$$

ki predstavlja največji center grupe G.

Stabilizator glede na delovanje konjugiranja z elementi podgrupe $H < G$ v podgrupi $K < G$ imenujemo *normalizator*

$$N_H(K) = H_K = \left\{h \in H; hKh^{-1} = K\right\} = \{h \in H; hK = Kh\} \ ,$$

ki predstavlja največjo normalno grupo grupe G (grupo edinko). Velja $K \triangleleft N_H(K)$.

Orbite predstaljajo ekvivalenčne razrede (poglavje 5.1) v X z ekvivalenčno relacijo, da sta elementa v isti orbiti. Za razrede (orbite) lahko zapišemo kvocientno množico (množico razredov − orbit)

$$G/X = \{\mathcal{O}_x; x \in X\} = \{G \cdot x; x \in X\} \ .$$

Surjektivna preslikava $f : G \to \mathcal{O}_x = G \cdot x$ inducira bijekcijo

$$\widetilde{f} : G/G_x \to G \cdot x \qquad\qquad \widetilde{f} : gG_x \mapsto g \cdot x \ .$$

Ta predstavlja bijekcijo med "nestabilnim delom" grupe G glede na x in orbito $\mathcal{O}_x$.

Delovanje je

- *Tranzitivno*, če $\exists x \in X$, da $G \cdot x = X$ (sledi $\forall x \in X$).
- *Prosto*, če $\forall x \in X$ velja $G_x = \{e\}$ (če $\exists x$, da $g \cdot x = x$, tedaj $g = e$).
- *Zvesto*, če je $\bar{\lambda} : G \to \mathrm{Sym}(X)$ injektiven (če $\forall x$ velja $g \cdot x = x$, tedaj $g = e$).

Množico negibnih točk glede na $g \in G$ označimo kot

$$X^g = \{x \in X; g \cdot x = x\} \ .$$

Velja $x \in X^g \iff g \in G_x$.

Burnsideov lema Število orbit delovanja končne grupe G na končni množici X je enako

$$\#\left(G/X\right) = \frac{1}{\#\left(G\right)} \sum_{g \in G} \#\left(X^g\right) \ .$$

Za narest, vsaka končna grupa je izomorfna grupi bijekcij $\#(G)$ elementov, torej $G \cong \mathrm{Sym}\,(G)$.

6.1.11 Prosti produkt grup

Za narest.

6.1.12 Prosta grupa

Prosta grupa na množici X je grupa, ki jo dobimo z elementi množice X, in jo označimo kot $F(X)$. Elemente grupe imenujemo *besede*, te so pa sestavljene iz elementov množice $x_i \in X$, ki jih imenujemo *členi*. Produkt besed imenujemo *stik*, za grupo pa veljajo

1. Prazna beseda $\emptyset$ (včasih tudi 1) je nevtralni element grupe.
2. Element tipično označimo $x = x^1$.
3. Inverz elementa x^1 označimo z x^{-1}, velja $x^1 x^{-1} = x^{-1} x^1 = 1$.
4. Stik n enakih elementov pa x^n, stik m inverznih elementov pa x^{-m}.
5. Za potence velja pravilo $x^n x^m = x^{n+m}$, $\forall x$ velja $x^0 = 1$.

Zaradi lastnosti 5 lahko vse neprazne besede zapišemo v obliki

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \,,$$

kjer velja $x_n \neq x_{n\pm 1}$. Taka beseda je *reducirana*. Prosto grupo $F(X)$ sestavlja množica *reduciranih* besed s členi iz množice X skupaj s produktom − stikom.

Prosto grupo na množici X ekvivalentno definiramo kot grupo $F(X)$ s funkcijo $f_X : X \to F(X)$, za katero velja (univerzalna) lastnost, da za vsako grupo G in vsako funkcijo $\omega : X \to G$ obstaja natanko en homomorfizem $\varphi : F(X) \to G$, da velja $\varphi(f_X) = \omega$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_X"] \arrow[dr, "\omega"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Z operacijo stikom množica X *generira* prosto grupo, zato to označimo še kot $\langle X \rangle = F(X)$.

Vsako grupo lahko zapišemo kot kvocient neke proste grupe. Definiramo jo lahko z množico generatorjev X in podmnožico relacij $B \subset \langle X \rangle$ s predpisom

$$\langle X | B \rangle = \langle X \rangle / N(B) \,,$$

kjer je $N(B)$ najmanjša (presek vseh) grupa edinka v $\langle X \rangle$, ki vsebuje vse elemente množice B ($B \subset N(B)$). Inkluzija ω inducira homomorfizem $\varphi : \langle X \rangle \to G$ in velja $G \cong \langle X \rangle / \ker \varphi$. Edinka $N(B)$ igra vlogo jedra $\ker \varphi$, zato na elemente množice $b \in B$ (relacije) lahko gledamo kot leve dele enačb $b = 0$.

6.2 Primeri grup

6.2.1 Ciklična grupa

Grupa G je *ciklična*, če jo generira samo en element

$$G = \langle g \rangle = \left\{ g^k ; k \in \mathbb{Z} \right\} \ .$$

Grupa je Abelova. Če so vsi elementi različni, dobimo *neskončno ciklično grupo* $\mathbb{Z}$, ki je izomorfna grupi celih števil za seštevanje.

Če so nekateri elementi enaki, lahko najdemo različne elemente $e, g, g^1, \ldots, g^{n-1}$, da velja $g^n = e$. Tedaj velja $G = \{e, g, g^2, \ldots g^{n-1}\}$ in dobimo *ciklično grupo* $\mathbb{Z}_n$. Grupa je izomorfna grupi prvih n naravnih števil (kot prvo štejemo število 0) za seštevanje po modulu n.

Za končno grupo G, za katero je $\#(G)$ *praštevilo* velja

$$G \cong \mathbb{Z}_{\#(G)} \ ,$$

saj so vsi odseki zaradi števila elementov in pogoja deljivosti trivialni.

6.2.2 Simetrična grupa Sym(n)

Simetrična grupa množice X je množica bijekcij σ

$$\mathrm{Sym}(X) = \{\sigma : X \to X \text{ bijekcija}\}$$

in je grupa za kompozicijo. Običajno simetrično grupo definiramo preko števila elementov, torej

$$\mathrm{Sym}(X) \cong \mathrm{Sym}\left(\#\left(X\right)\right)$$

Če je množica X končna ($\#(X) < \infty$), njena simetrična grupa predstavlja *množico permutacij*, torej velja $\#(\mathrm{Sym}(X)) = \#(X)!$

Značilen homomorfizem končne simetrične grupe je *predznak preslikave*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn} : \mathrm{Sym}(X) \to (\{-1, 1\}, \cdot) \cong \mathbb{Z}_2 \\
&\mathrm{sgn} : \sigma \mapsto \frac{1}{(n-1)!(n-2)! \ldots 2!1!} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i)) \ .
\end{aligned}$$

Predznak je epimorfizem, ni pa monomorfizem.

6.2.3 Splošna linearna grupa GL$(n, \mathbb{F})$

Splošna linearna grupa je grupa za množenje in je definirana kot

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) ; \det A \neq 0\} \ ,$$

kar je množica kvadratnih obrnljivih ($\det A \neq 0$) matrik. Splošna linearna grupa je Abelova (komutativna), čee $n = 1$. Tedaj označimo $\mathrm{GL}(1, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times$, kar je množica skalarjev $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ z operacijo množenja.

Značilen homomorfizem splošne linearne grupe je *determinanta* s poglavja 12.6

$$\begin{aligned}
&\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times \\
&\det : A \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \ldots A_{n,\sigma(n)} \ .
\end{aligned}$$

Determinanta je epimorfizem, ni pa monomorfizem.

6.2.4 Posebna linearna grupa SL $(n, \mathbb{F})$

Posebna linearna grupa je grupa za množenje in je definirana kot

$$\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}\,(n \times n, \mathbb{F})\,; \det A = 1\} \ ,$$

kar je množica matrik z determinanto 1. Posebna linearna grupa je grupa edinka splošne linearne grupe.

6.2.5 Unitarna grupa $\mathrm{U}(n)$

Unitarna grupa je grupa

$$\mathrm{U}(n) = \left\{Q \in \mathrm{Mat}\,(n \times n, \mathbb{C})\,; U^{\mathrm{h}}U = I\right\} \ .$$

Elementi $U \in \mathrm{U}(n)$ ohranjajo skalarni produkt, namreč za $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\langle U\mathbf{v}, U\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \ .$$

Po konstrukciji to pomeni, da stolpci matrike U predstavljajo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{C}^n$. Velja še

$$U \in \mathrm{U}(n) \qquad \Longrightarrow \qquad \det U \in \mathbb{C}, \qquad |\det U| = 1 \ ,$$

kar je ekvivalentno definiciji grupe $U(n)$.

6.2.6 Posebna unitarna grupa $\mathrm{SO}(n)$

Posebna unitarna grupa je grupa

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n); \det U = 1\} \ .$$

Ortogonalno grupo, ki ima determinanto enako 1 imenujemo *posebna unitarna grupa* in jo označimo kot

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n); \det U = 1\} \ .$$

Posebna unitarna grupa $\mathrm{SU}(n)$ je podgrupa unitarne grupe $\mathrm{U}(n)$, hkrati pa posebne linearne grupe $\mathrm{SL}(n)$.

6.2.7 Ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n)$

Ortogonalna grupa je grupa

$$\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathrm{Mat}\,(n \times n, \mathbb{R})\,; Q^{\mathrm{t}}Q = I\} \ .$$

Elementi $Q \in \mathrm{O}(n)$ ohranjajo skalarni produkt, namreč za $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ velja

$$\langle Q\mathbf{v}, Q\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \ .$$

Po konstrukciji to pomeni, da stolpci matrike Q predstavljajo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^n$. Velja še

$$Q \in \mathrm{O}(n) \qquad \Longrightarrow \qquad \det Q \in \mathbb{R}, \qquad |\det Q| = 1 \ ,$$

kar je ekvivalentno definiciji grupe $O(n)$. Ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n)$ predstavlja rotacije in zrcaljenja v $\mathbb{R}^n$.

6.2.8 Posebna ortogonalna grupa $\mathrm{SO}(n)$

Posebna ortogonalna grupa je grupa

$$\mathrm{SO}(n) = \{Q \in \mathrm{O}(n); \det Q = 1\} \ .$$

kar je ortogonalna grupa matrik, ki predstavlja prave rotacije (brez zrcaljenj, saj imajo ta determinanto enako -1).

Ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n)$ je realna podgrupa unitarne grupe $\mathrm{U}(n)$, posebna ortogonalna grupa $\mathrm{SO}(n)$ pa podgrupa ortogonalne grupe $\mathrm{O}(n)$ in hkrati realna podgrupa posebne unitarne grupe $\mathrm{SU}(n)$.

6.2.9 Lorentzova grupa

7 Zaporedje, stekališče in limita zaporedja in funkcije

7.1 Trditve in izreki

Naj bo $\mathcal{M}$ množica. *Zaporedje* je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{M}$, $n \mapsto a_n$ in ga zapišemo kot

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_n = (a_n)$$

Pri definiciji $\mathbb{N} \to \mathcal{M}$ lahko namesto $\mathbb{N}$ uporabimo tudi drugo števno in urejeno množico. Če $\mathcal{M}$ lahko *uredimo* (npr. $\mathcal{M} = \mathbb{R}$), lahko obravnavamo omejenost.

Zaporedje a_n je *navzgor omejeno*, čee je slika zaporedja a_n navzor omejena množica. Tedaj obstaja zgornja meja zaporedja a_n

$$\exists \sup(a_n) \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < \sup(a_n)\ ,$$

ki ji rečemo *supremum* zaporedja.

Zaporedje a_n je *navzdol omejeno*, čee je slika zaporedja a_n navzdol omejena množica. Tedaj obstaja spodnja meja zaporedja a_n

$$\exists \inf(a_n) \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < \inf(a_n)\ ,$$

ki ji rečemo *infimum* zaporedja.

Zaporedje je *omejeno*, če je omejeno navzor in navzdol. Če je $\mathcal{M}$ metričen prostor z metriko d, je zaporedje a_n omejeno, čee

$$\exists C \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad d(a_0, a_n) < C\ .$$

Zaporedje je *(strogo) naraščajoče*, čee $\forall n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} \text{naraščajoče} &\iff a_{n+1} \geq a_n \\ \text{strogo naraščajoče} &\iff a_{n+1} > a_n\ . \end{aligned}$$

Zaporedje je *(strogo) padajoče*, čee $\forall n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} \text{padajoče} &\iff a_{n+1} \leq a_n \\ \text{strogo padajoče} &\iff a_{n+1} < a_n\ . \end{aligned}$$

Zaporedje je (strogo) monotono, če je (strogo) naraščajoče ali (strogo) padajoče.

Točka a je *stekališče* zaporedja (a_n), čee v vsaki okolici točke a leži neskončno členov (a_n).

Točka a je *limita* zaporedja (a_n), čee v vsaki okolici točke a ležijo vsi členi (a_n), razen končno mnogo členov. Limita obstaja, čee je edino stekališče. Limito a zaporedja (a_n) označimo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

zaporedje a_n je pa *konvergentno*, čee zanj obstaja limita a. Zaporedje je *divergentno*

Naj bo zaporedje $(a_n) \in \mathbb{R}$. Točka a je *limes superior* zaporedja (a_n), čee je največje stekališče. Tedaj a označimo

$$a = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Točka a je *limes inferior* zaporedja (a_n), čee je najmanjše stekališče. Tedaj a označimo

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Za zaporedje (a_n) velja

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$$

7.1.1 Pravila računanja z limitami

Naj bo $C \in \mathbb{C}$ in naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Tedaj velja, da je

- zaporedje $(a_n + b_n)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n) .$$

- zaporedje $(a_n \cdot b_n)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n) .$$

- za $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} .$$

- za zvezno $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zaporedje $(f(a_n))$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) .$$

- zaporedje $(C + a_n)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} (C + a_n) = C + \lim_{n\to\infty} a_n .$$

- zaporedje $(C \cdot a_n)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} a_n .$$

- zaporedje $(\overline{a_n})$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{a_n}) = \overline{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)} .$$

- zaporedje $(|a_n|)$ konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| .$$

7.2 Rekurzivna zaporedja

Namesto eksplicitnega predpisa za zaporedje $a_n : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$, ga lahko definiramo implicitno, da v definiciji člena a_n uporabimo prejšnje člene. Implicitno zaporedje torej definiramo s predpisom

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$$

in z eksplicitno definicijo ustrezno mnogo začetnih členov a_0, a_1, ..., namreč z izbiro teh dobimo različna zaporedja.

7.2.1 Navadna iteracija

Navadna iteracija funkcije ene spremenljivke Ko računamo limito rekurzivnega zaporedja števil, predpostavimo, da obstaja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ter limitiramo rekurzivno definicijo in dobimo enačbo

$$a = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots) = f(a, a, \dots) = f(a) .$$

V enačbi smo predpostavili, da je f zvezna funkcija in jo definirali kot funkcijo eno spremenljivke, ker vsi parametri zavzemajo isto vrednost. Značilno ima ta enačba več rešitev, zato smo tako dobili le kandidate za limito. Med kandidate spadata tudi divergentni vrednosti limite $+\infty$ in $-\infty$. Če so začetne vrednosti enake kandidatom, smo tako ovrednotili vrednost limite.

Obravnavajmo rekurzivno zaporedje oblike $a_{n+1} = f(a_n)$ s podanim a_0. V tem primeru rekurzijo lahko predstavimo grafično.

Na grafu sta prikazani funkciji $a_{n+1} = a_n$ in $a_{n+1} = f(a_n)$. Kandidati za limite so točke, v katerih se grafa sekata. Ker velja $a_{n+1} = f(a_n)$, vrednost a_{n+1} dobimo, da najprej s točke (a_n, a_n) narišemo navpično črto do grafa f, torej do točke $(a_n, f(a_n)) = (a_n, a_{n+1})$. Nato s te točke narišemo vodoravno črto do točke (a_{n+1}, a_{n+1}). Proces lahko rekurzivno ponavljamo. Izberimo interval I okrog kandidata za limito a, da ta ne vsebuje ostalih kandidatov. Izkaže se, da ima zaporedje z začetno točko $a_0 \in I$ limito v točki a, če velja

$$|f(x) - f(a)| < |x - a|$$

na ustreznem podintervalu intervala I. Za funkcijo, za katero na I velja

$$f(x) \begin{cases} > f(a), & x > a \\ < f(a), & x < a \,, \end{cases}$$

(splošnejši pogoj od naraščajoče funkcije) mora pogoj za konvergenco veljati na intervalu od točke a_0 do točke a, torej na (a_0, a) oziroma (a, a_0). Sicer mora pa pogoj veljati na "obeh straneh" točke a, torej na intervalu $(a - |a_0 - a|, a + |a_0 - a|)$.

Če pogoj za konvergenco k kandidatu a ne velja, se zaporedje od točke a oddaljuje in konvergira k drugemu kandidatu.

Z navadno iteracijo računamo enačbo $f(x) = 0$, da jo preoblikujemo v enačbo $g(x) = x$, za katero računamo približke x_r s pomočjo iteracije $x_{r+1} = g(x_r)$.

Če je g na intervalu $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ Lipschitzova, torej

$$|g(x) - g(y)| \le m|x - y|$$

(če je g skrčitev) velja, da je α negibna točka za g ter veljata

$$|x_r - \alpha| \le m^r |x_0 - \alpha| \qquad |x_{r+1} - \alpha| \le \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|$$

Za odvedljivo g Lipschitzov pogoj lahko zapišemo kot $g(x)' \leq m$.

Če je izraz $|x_{r+1} - \alpha|$ za spremenljivko r ekvivalenten izrazu $|x_r - \alpha|^p$, torej $|x_{r+1} - \alpha| \sim |x_r - \alpha|^p$, pravimo, da je *red konvergence* funkcije g enak p.

Za p-krat zvezno odvedljivo g, za katero velja $g^{(i)}(x) = \delta_{ip}$, je v okolici negibne točke α red konvergence enak p.

Ker je iteracijskih funkcij g več, lahko izberemo tako, ki ima čim večji prvi neničelni odvod, posledično čim večji red konvergence.

Navadna iteracija funkcije več spremenljivk Z navadno iteracijo računamo enačbo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, da jo preoblikujemo v enačbo $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, za katero računamo približke $\mathbf{x}^{(r)}$ s pomočjo iteracije $\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(r)})$.

Če za domeno D velja $\mathbf{G}(D) \subset D$ ter, če za spektralni radij Jacobijeve matrike funkcije $\mathbf{G}$ za $\forall \mathbf{X} \in D$ velja

$$\rho\left(J_{\mathbf{G}}\right) \leq q < 1$$

(če je $\mathbf{G}$ skrčitev) velja, da je $\mathbf{a}$ negibna točka za $\mathbf{G}$ ter veljata

$$\|\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{a}\| \leq m^r \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{a}\| \qquad \|\mathbf{x}^{(r+1)} - \mathbf{a}\| \leq \frac{m}{1-m} \|\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{x}^{(r-1)}\|$$

Zadosten pogoj, da je $\mathbf{G}$ skrčitev, je tudi

$$\|J_{\mathbf{G}}\|_{\infty} = \max_j \left(\sum_i |(J_{\mathbf{G}})_{ij}| \right) \leq q < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_i |(J_{\mathbf{G}})_{ij}| \leq q < 1$$

7.2.2 Newtonova metoda

Naj bo f odvedljiva funkcija z ničlami. Tedaj lahko ničle iščemo iterativno z iteracijsko funkcijo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Zaporedje konvergira k ničli,

- če je f tudi konveksna in monotona
- če v okolici ničle velja $|f'(x)| < 1$

Če metoda konvergira, je v okolici enostavnih ničel red enak vsaj 2, v okolici večkratnih pa največ 1.

7.2.3 Sekantna metoda

Sekantna metoda je približek Newtonove, saj namesto odvoda uporabimo naklonski količnik. Zato je iteracijska funkcija funkcija prejšnjih dveh približkov.

$$g(x_r, x_{r-1}) = x_r - f(x_r) \frac{x_r - x_{r-1}}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

Red konvergence te metode je superlinearen in enak $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1,62$.

7.2.4 Fibonaccijevo zaporedje $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$

Fibonaccijevo zaporedje je zaporedje oblike

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

ter podanima a_0 in a_1. Zaporedje ovrednotimo z nastavkom

$$a_n = q^n$$

in dobimo kvadratno enačbo

$$q^n \left(q^2 - Aq - B\right) = 0$$

z dvema rešitvama q_1 in q_2. Zaporedje je tedaj oblike

$$a_n = \begin{cases} C_1 q_1^n + C_2 q_2^n\,, & q_1 \neq q_2 \\ (C_1 + C_2 n)\, q^n\,, & q_1 = q_2 = q\,, \end{cases}$$

vrednosti C_1 in C_2 pa dobimo z začetnih dveh členov.

7.3 Funkcijska zaporedja

7.3.1 Trditve in izreki

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $f_n : D \to \mathbb{R}$. *Funkcijsko zaporedje* (f_n) je zaporedje funkcij

$$(f_n) : \mathbb{N} \to (D \to \mathbb{R}) \ .$$

Alternativno na funkcijsko zaporedje lahko gledamo kot funkcijo dveh spremenljivk

$$(f_n) : \mathbb{N} \times D \to \mathbb{R} \, .$$

Praviloma nas zanima limita $n \to \infty$, zato definiramo sledeče pojme

Konvergenca v točki
(f_n) je *konvergentno v točki* x, če je $(f_n(x))$ konvergentno.

Konvergenca po točkah
(f_n) je *konvergentno po točkah*, če je konvergentno v vsaki točki iz domene. Tedaj lahko obravnavamo limito

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, .$$

Enakomerna konvergenca
(f_n) je *enakomerno konvergentno*, če konvergira po točkah, za razliko med členom zaporedja in limitno funkcijo pa velja

$$\varepsilon_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \, .$$

Naj bo $f_n(x)$ zaporedje zveznih funkcij, ki enakomerno konvergira k $f(x)$. Tedaj je funkcija $f(x)$ zvezna.

Naj bo $f_n(x)$ zaporedje integrabilnih funkcij, ki enakomerno konvergira k $f(x)$. Tedaj je funkcija $f(x)$ integrabilna in velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

Naj bo $f_n(x)$ zaporedje odvedljivih funkcij, ki enakomerno konvergira k $f(x)$ in naj zaporedje odvodov $f_n'(x)$ enakomerno konvergira. Tedaj je funkcija $f(x)$ odvedljiva in velja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \, .$$

Enakomerno konvergenco vrst obravnavamo v poglavju 8.3.

7.4 Limita funkcije

Za metrični prostor $\mathcal{M}$ z metriko d in funkcijo $f : D \to \mathcal{M}$, $f : x \mapsto f(x)$ računamo limito funkije

$$\lim_{x \to a} f(x) \, .$$

Pri definiciji limite uporabimo definicijo limite zaporedja, da obravnavamo zaporedje (x_n), za katerega velja

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \, .$$

Limito funkcije f s tem zaporedjem definiramo

$$L = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \, ,$$

kjer mora biti L neodvisen od izbire zaporedja x_n. S to definicijo zares s števno neskončno množico (vrednosti zaporedja x_n) vzorčimo (praviloma) neštevno neskončno množico okoli točke $a \in \mathcal{M}$. Ker je L neodvisna od izbire točk vzorčenja v okolici a, s to definicijo ne izgubimo splošnosti.

7.5 Tabela limit zaporedij

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \infty & \text{sicer} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 0 \\ 1 & q = 1 \\ \nexists & |q| = 1, q \neq 1 \\ \infty & |q| > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

7.6 Tabela limit funkcij

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + g(x))^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x\to 0} g(x)h(x)\right), \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h(x)} = 0$$

7.7 Asimptotska notacija

Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D \to \mathbb{R}^+$ in $x \in D$ ter limitna točka $a \in D \cup \partial D$. Označimo

$$f(x) \in \mathcal{O}(g(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \limsup_{x \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$$

Naj bosta $f_{1,2} : D \to \mathbb{C}$, $g_{1,2} : D \to \mathbb{R}^+$, da veljata

$$f_1 \in \mathcal{O}\left(g_1\right) \qquad f_2 \in \mathcal{O}\left(g_2\right)$$

Naj velja še $f_{1,2} \neq 0$ in $\alpha \in \mathbb{C}/\{0\}$. Tedaj velja

$$f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}\left(g_1 \cdot g_2\right) \qquad f_1 + f_2 \in \mathcal{O}\left(\max_{x \to \infty}(g_1, g_2)\right)$$

$$\alpha \cdot f_1 \in \mathcal{O}\left(g_1\right) \qquad \alpha + f_1 \in \mathcal{O}\left(g_1\right)$$

8 Vrsta

8.1 Trditve in izreki

Za metrični prostor $\mathcal{M}$ z metriko d lahko velja, da je zanj definirana binarna in asociativna operacija, ki jo lahko imenujemo *seštevanje*. Tedaj v zaporedju $\mathbb{N} \to \mathcal{M}$, $n \mapsto a_n$ lahko seštevamo člene. Od tu naprej predpostavimo, da je seštevanje tudi komutativno, čeprav ta predpostavka pri številnih izrekih ni nujna.

Ko člene zaporedja (a_n) seštevamo, dobimo *vrsto*, ki jo označimo kot

$$\sum (a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum (a_n) \, .$$

Pri vrsti nas zanima njena vrednost, tedaj moramo definirati, kako člene seštevamo. Kljub komutativnosti namreč lahko vrstni red seštevanja vpliva na vrednost vrste. Najpogosteje člene seštevamo "po vrsti", torej prvemu členu prištejemo drugega itd. Pri tem definiramo zaporedje (S_k) s predpisom

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k \, ,$$

ki ga imenujemo *zaporedje delnih vsot.* Če vrsto seštevamo na ta način, je vrsta *konvergentna*, čee je konvergentno zaporedje delnih vsot. Vrednost konvergentne vrste definiramo z limito

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \, .$$

Vrsta $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, čee je konvergentna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$. Absolutno konvergentna vrsta je tudi konvergentna. Vrsta S je pogojno konvergentna, čee je konvergentna in ne absolutno konvergentna.

Obravavajmo metrični prostor $\mathcal{M}$, ki je še vektorski (npr. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}^n$). Tedaj za skalar α veljajo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergentna} \implies \text{konvergentna} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konvergentni} \implies \text{konvergentna} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

8.1.1 Pravila računanja z vrstami

Ker vrste definiramo kot limite delnih vsot, ki so zaporedja, pravila računanja z vrstami dobimo s pravil seštevanja končnih vsot in pravil računanja z limitami s poglavja 7.1.1.

Osnovna pravila

Naj bo $C \in \mathbb{C}$ in naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$ in $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n)$ konvergentni vrsti v metričnem prostoru $\mathcal{M}$. Tedaj velja, da je

- vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergentna in
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=0}^{\infty}(b_n) .$$
- vrsta $(C \cdot a_n)$ konvergentna in
$$\sum_{n=0}^{\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$
- vrsta $(\overline{a_n})$ konvergentna in
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{a_n}) = \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)} .$$
- za metrični prostor $\mathcal{M}$, ki je normiran vektorski prostor, vrsta $(\|a_n\|)$ konvergentna in
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \geq \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\| .$$

Preurejanje členov

Pri končni vsoti zaradi komutativnosti seštevanja člene lahko preuredimo, za neskočno pa to vedno ne velja. Velja namreč, da člene lahko preuredimo in s tem ohranimo vrednost vrste, čee je vrsta *absolutno konvergenta*. To zapišemo z absolutno konvergentno vrsto $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in bijekcijo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$
Za pogojno konvergentno vrsto pa lahko s preureditvijo členov vrednost vrste spremenimo na poljubno, torej velja, da $\forall C\ \exists \sigma$, da
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = C .$$

8.2 Konvergenčni testi

Konvergenco vrst lahko določimo z raznimi konvergenčnimi testi. Označimo kompleksno zaporedje $(a_n) \in \mathbb{C}$ in vrsto $S = \sum (a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Primerjalni test: Če obstaja konvergentna vrsta nenegativnih realnih števil (konvergentna majoranta) $\sum (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n \geq 0$ ter $N \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq N$ velja

$$|a_n| \leq b_n$$

je vrsta S absolutno konvergentna.

Če obstaja divergentna vrsta nenegativnih realnih števil (divergentna minoranta) $\sum (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n \geq 0$ ter $N \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq N$ velja

$$|a_n| \geq b_n$$

je vrsta S divergentna.

Kvocientni test: Za limito (obstaja tudi, če $L = \infty$)

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

vrsta S absolutno konvergira, če $L < 1$ in divergira, če $L > 1$. Test ne deluje v primeru $L = 1$. Test je ustrezen v primeru členov oblike $(Cn)!$, $(C)^n$ in n^n ter za ostale nepotencirane $(\bullet^1)$ produkte.

Korenski test: Za limito (obstaja tudi, če $L = \infty$)

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

vrsta S absolutno konvergira, če $L < 1$ in divergira, če $L > 1$. Test ne deluje v primeru $L = 1$. Test je ustrezen v primeru, ko obravnavamo produkt ali kvocient potenciranih členov $\bullet^{f(n)}$ (tudi če je $f(n)$ konstantna). Test običajno ni koristen pri členih oblike $\bullet!$.

Raabejev test: Če obstaja limita (obstaja tudi, če $L = \infty$)

$$L = \lim_{n \to \infty} n \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right)$$

Vrsta S absolutno konvergira, če $L > 1$ in divergira, če $L < 1$ (pogoja sta ravno nasprotna pogojema v korenskem in kvocientnem testu). Test ne deluje v primeru $L = 1$.

Leibnitzov test: Redefinirajmo (a_n) kot realno, nenegativno zaporedje, konstanta $\varphi \in \mathbb{R}/\{0\}$ in $S = \sum e^{i\varphi}(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vrsta S konvergira, čee

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \text{in} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Integralski kriterij: Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ padajoča, zvezna in nenegativna. Naj bo $a_n = f(n)$. Tedaj vrsta $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, čee konvergira

$$\int_1^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

8.3 Funkcijska vrsta

Funkcijska vrsta $S(x)$ je vrsta funkcijskega zaporedja $f_n(x)$ (poglavje 7.3), torej

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \; .$$

Konvergenca in absolutna konvergenca

Funkcijska vrsta $S(x)$ *(absolutno) konvergira v točki* $x \in D$, če (absolutno) konvergira številska vrsta $S(x)$. Funkcijska vrsta $S(x)$ *(absolutno) konvergira*, če številska vrsta $S(x)$ (absolutno) konvergira v vsaki točki $\forall x \in D$.

Te oblike konvergence funkcijskih vrst obravnavamo enako kot konvergenco številskih vrst, torej s konvergenčnimi kriteriji, le, da je pri funkcijskih vrstah konvergenca lahko pogojena z vrednostjo x.

Enakomerna konvergenca

Funkcijska vrsta $S(x)$ *konvergira enakomerno*, če enakomerno konvergira zaporedje delnih vsot

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) \; .$$

Za vrste lahko uporabimo pogoj za enakomerno konvergenco, ki pravi, da tedaj $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, da

$$\left| \sum_{N}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon \; .$$

(Weierstrassov kriterij) Naj bo f_n zaporedje funkcij $f_n : D \to \mathbb{C}$. Če $\forall n$ obstaja c_n, da $\forall x \in I$ velja

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq c_n$$

in če vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

konvergira, vrsta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

na D konvergira enakomerno.

Naj bo $f_n(x)$ zaporedje zveznih funkcij, katerega zaporedje delnih vsot $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ enakomerno konvergira k vrsti $S(x)$. Tedaj je funkcija $S(x)$ zvezna.

Naj bo $D = [a, b]$ in $f_n(x)$ zaporedje integrabilnih funkcij, katerega zaporedje delnih vsot $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ enakomerno konvergira k vrsti $S(x)$. Tedaj je funkcija $S(x)$ integrabilna in velja

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Naj bo $D = [a, b]$ in $f_n(x)$ zaporedje odvedljivih funkcij, katerega zaporedje delnih vsot $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ enakomerno konvergira k vrsti $S(x)$, zaporedje odvodov delnih vsot $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ pa enakomerno konvergira. Tedaj je funkcija $S(x)$ odvedljiva in velja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x) \; .$$

8.4 Potenčna vrsta

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike $f_n = a_n x^n$ oziroma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, .$$

Vsako gladko funkcijo f lahko na *konvergenčnem polmeru* R okrog *točke razvoja* α enačimo s potenčno vrsto

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n}$$

Za *konvergenčni polmer* R in $r \in [0, R)$ potenčna vrsta

$$\begin{aligned} \text{absolutno konvergira} \quad & \forall z \in \mathcal{K}(\alpha, R) \\ \text{enakomerno konvergira} \quad & \forall z \in \overline{\mathcal{K}}(\alpha, r) \\ \text{divergira} \quad & \forall z \notin \mathcal{K}(\alpha, R) \end{aligned}$$

Če vrsta konvergira na robu, je tan funkcija zvezna.

Dobimo ga s konvergenčnimi testi vrst v drugačni obliki, torej s *Cauchy-Hadamardavo formulo* ali pa s *kvocientnim testom*

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

V primeru vrste $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{f(n)}$ formulo uporabimo za podzaporedje $(a_{f(n)})_n$, ki mora imeti isto največje stekališče kot $(a_n)_n$. V formulah zato lahko zamenjamo $n \mapsto f(n)$.

Večrazsežna Taylorjeva formula okrog $\mathbf{a}$ je

$$f(\mathbf{r}) = \left(\left(e^{a^i \partial_j} f \right) (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \right)$$

$e^{a^i \partial_j}$ je posplošen Hessian (tenzor mešanih odvodov) v točki $\mathbf{a}$

8.4.1 Pravila računanja s potenčnimi vrstami

Ker so potenčne vrste vrste, zanje veljajo enaka pravila, kot za vrste.

Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergentni v x in vsaj ena izmed njiju absolutno konvergentna. Tedaj je produkt vrst absolutno konvergenten in velja

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \qquad c_n = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \, .$$

Za konvergenčni polmer produkta vrst $R_{a,b}$ pa velja, da je enak ali večji od obeh polmerov, torej $R_{a,b} \geq \min(R_a, R_b)$. Formula za koeficiente produktne vrste c_n je diskretna konvolucija zaporedij a_n in b_n.

8.4.2 Izračun po definiciji

Naj bo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $U \subset \mathbb{R}$ odprt interval, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}$, $x, a \in U$, $\widetilde{x} \in [x, a]$. Tedaj velja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(a) \right) \frac{(x-a)^k}{k!} + \left(\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\widetilde{x}) \right) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = T_n(x) + R_n(x)$$

Napako razvoja na intervalu $x \in [a-\delta, a+\delta]$ lahko ocenimo

$$|R_n(x)| = \left| \left(\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\widetilde{x}) \right) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \left| \max_{[a-\delta, a+\delta]} \left(\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\widetilde{x}) \right) \right| .$$

Zapišemo jo lahko tudi s *translacijskim operatorjem*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}_0)$$

Vrsto izračunamo po definiciji, ko lahko višje odvode enostavno izračunamo.

8.4.3 Iterativen račun

Za funkcijo končno mnogo členov lahko izračunamo *iterativno*, običajno na več načinov. Na začetku izračuna določimo koliko členov hočemo izračunati, torej izberemo najvišjo potenco, katero še obdržimo. Naj bo to x^n. Višje člene označimo z $\mathcal{O}(x^{n+1})$. Tako dobimo vrsto oblike

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathcal{O}\left(x^{n+1}\right) .$$

Ko pri izračunu dobimo člene s potenco, večjo od n, take člene lahko zanemarimo, saj jih obravavamo s členom $\mathcal{O}(x^{n+1})$.

8.4.4 Iterativen račun preko produkta

Naj bosta $f_1(x)$ in $f_2(x)$ funkciji, za kateri poznamo potenčna razvoja vsaj do reda $\mathcal{O}(x^n)$. Potenčno vrsto za $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ izračunamo po pravilih produkta multinomov, da upoštevamo, da nam členov reda $\mathcal{O}(x^{n+1})$ ali več ni treba računati.

8.4.5 Iterativen račun preko kvocienta

Naj bosta $f_1(x)$ in $f_2(x)$ funkciji, za kateri poznamo potenčna razvoja vsaj do reda $\mathcal{O}(x^n)$. Potenčno vrsto za $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ izračunamo, da najprej izračunamo vrsto za $1/f_2(x)$ do reda $\mathcal{O}(x^n)$. S potenčne vrste za f_2 izpostavimo vodilni člen ter nekonstantne člene v vsoti poimenujemo y . Nato upoštevamo formulo za geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots ,$$

katero izračunamo s pravili za produkt. Pri vrsti oblike $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ lahko dobimo tudi člene oblike $1/x^m$, kjer je eksponent razlika med eksponentoma vodilnih členov f_1 in f_2, torej $m = m_2 - m_1$ za $f_\bullet(x) = x^{m_\bullet} + \mathcal{O}(x^{m_\bullet + 1})$.

8.4.6 Iterativen račun preko inverza

Vrsto za $y = f(x)$ lahko izračunamo iterativno, če poznamo vrsto inverza $x = f^{-1}(y)$. V primeru linearne odvisnosti v prvem redu, torej

$$x = y + \widetilde{f}(y) \qquad\qquad \widetilde{f}(y) \in \mathcal{O}\left(y^2\right)$$

enačbo preuredimo v obliko

$$y = x - \widetilde{f}(y)\ ,$$

kar spominja na eksplicitni izraz $y(x)$. Da tega dobimo, v argument funkcije $\widetilde{f}$ vstavljamo celotno desno stran enačbe. Pri računanju obdržimo le člene z eksponenti, manjšimi od ostanka.

Primer: $y = \tan x$

$$x = \arctan y = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y (-1)^n t^{2n}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \qquad y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$$

Odločimo se za razvoj do devete potence ter to upoštevamo pri iteracijah, torej zapišemo le člene (v x ali v y), ki bodo proizvedli potence x, manjše od reda ostanka.

$$y = x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \mathcal{O}\left(y^9\right)$$

$$y = x + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \mathcal{O}\left(y^7\right)\right)^3 - \frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{3}y^3 + \mathcal{O}\left(y^5\right)\right)^5 + \frac{1}{7}\left(x + \mathcal{O}\left(y^3\right)\right)^7 + \mathcal{O}\left(y^9\right)$$

8.4.7 Račun preko odvoda oziroma integrala

Potenčno vrsto za funkcijo $f(x)$ lahko izračunamo, da izračunamo vrsto za n-ti odvod ali integral funkcije f, če je ta izračun enostavnejši. Vrsto nato trivialno integriramo oziroma odvajamo po pravilu za polinome. Če računamo vrsto preko n-tega odvoda, s tem pri vrsti izgubimo prvih n členov, katere lahko izračunamo z iterativnimi metodami za izračun končno mnogo členov.

8.5 Laurentova vrsta

Vsako gladko funkcijo f lahko na *konvergenčnem kolobarju* $A(\alpha, r, R)$ okrog *točke razvoja* α enačimo s potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

Za *konvergenčni kolobar* $A(\alpha, r, R)$ in $r < \widetilde{r} \leq \widetilde{R} < R$ Laurentova vrsta

$$\begin{aligned}
\text{absolutno konvergira} \quad & \forall z \ni : |z-\alpha| \in (r, R) \\
\text{enakomerno konvergira} \quad & \forall z \ni : |z-\alpha| \in \left[\widetilde{r}, \widetilde{R}\right] \\
\text{divergira} \quad & \forall z \ni : |z-\alpha| \notin (r, R)
\end{aligned}$$

8.6 Asimptotska vrsta

Asimptotske vrste so vrste, za katere zahtevamo, da velja limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{\widetilde{f}(x)} = 1$$

kjer je f funkcija, ki jo lahko razvijemo, $\widetilde{f}$ pa asimptotska vrsta.

Pri asimptotskih vrstah se skušamo znebiti parametra v meji integrala, da uvedemo novo neznanko. Težava nastopi, saj seštevanec v vrsti pogosto asimptotsko narašča, s polom v točki razvoja. Zato lahko z vsoto preveč členov vrste natančnost približka za majhne x zmanjšamo. Drugače povedano z rabo več členov, je neuporaben vedno večji interval okrog točke razvoja. Z izračunom asimptotske vrste se zato najbolje približamo funkciji, če prištevamo člene, dokler ti ne začnejo po absolutni vrednosti naraščati.

Primer:

$$1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-2ux}\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2ux} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-u^2)^n}{n!}\ \mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!(-1)^n}{(2x)^{2n+1} n!}$$

Nekatere asimptotske vrste so

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right) - \frac{\sin x}{x} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right)$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\frac{\sin x}{x} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right) + \frac{\cos x}{x} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right)$$

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \frac{e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{x^n}$$

$$1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!(-1)^n}{(2x)^{2n+1} n!}$$

8.7 Fourierova vrsta

Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da za $k \in \mathbb{Z}$ velja $f(kP + x) = f(x)$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{P}\int_P f(x)\ \mathrm{d}x \\ A_n &= \frac{2}{P}\int_P f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{P}x\right)\ \mathrm{d}x, \qquad n \geq 1 \\ B_n &= \frac{2}{P}\int_P f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{P}x\right)\ \mathrm{d}x, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Koeficiente lahko tudi izračunamo v kompleksni obliki

$$C_n = \frac{1}{P}\int_P f(x)\exp\left(-i\frac{2\pi n}{P}x\right)\ \mathrm{d}x$$

$$A_0 = C_0 \qquad A_n = C_n + C_{-n} \qquad B_n = i(C_n - C_{-n})$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2\pi n}{P}x\right) + \left(B_n\sin\frac{2\pi n}{P}x\right)$$

Komentar: Ko računamo koeficiente, imamo izbiro med tremi realnimi integrali ali enim kompleksnim (še vedno integriramo po realni osi, a je integrand kompleksen). V splošnem lažje integiramo en integral namesto treh ter eksponentno funkcijo namesto kotnih. Če pa je f simetrična ali antisimetrična na robnih točkah periode, so pa nekateri izmed integralov s kotnimi funkcijami enaki 0. Tedaj do členov razvoja hitreje pridemo če direktno izračunamo A_0 in A_n, če je funkcija soda in B_n, če je funkcija liha.

8.8 Picardove iteracije

Pri Picardovih iteracijah moramo za funkcijo $y(x)$ sestaviti diferencialno enačbo

$$y' = f(x, y(x))$$

f mora biti definirana na zaprti množici, zvezna ter enakomerno Lipschitzova v y. Integriramo obe strani enačbe in dobimo

$$y = \int f(x, y(x))\ \mathrm{d}x\ ,$$

torej implicitni izraz za y. y pod integralom nato lahko določimo in tako dobimo eksplicitni izraz za y izven oklepaja. Izraz lahko ponavljamo za večjo natančnost.

Pri izračunu najprej določimo ustrezno $y_0(x)$ ter iterativno dobimo boljši približek rešitve z enačbo

$$y_{n+1} = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\ \mathrm{d}t$$

končno mnogo členov polinoma y_n konvergira k y pri *končnem* ali *neskončnem* n. Pri končnem konvergira, čee $\exists\frac{f(x,y_k(x))}{x^k}$, drugače povedano, če $f(x, y_k(x))$ nima najnižjega neničelnega člena Laurentovega razvoja manjšega od x^k.

8.9 Tabela vsot in vrst

$$\sum_{n=0}^{\infty} q = \frac{1}{1-q} \text{ konvergira za } |q| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \zeta(\alpha) \text{ konvergira za } \Re(\alpha) > 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) = a_N - a_0$$

Potenčne vrste lahko izračunamo na več načinov.

8.10 Tabela potenčnih vrst

Potenčno vrsto lahko preberemo s tabele, $\gamma \approx 0,57721566$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\
\frac{1}{(1-x)^\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+n-1}{n} x^n &&= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha+1}{2}x^2 + \binom{\alpha+2}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \mathcal{O}\left(x^{11}\right) \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}\left(x^{10}\right) \\
\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \mathcal{O}\left(x^{11}\right) \\
\cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} &&= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}\left(x^{10}\right) \\
\tan(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2\left(2^{2n-1}-1\right) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} &&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}\left(x^9\right) \\
\tanh(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(2^{2n-1}-1\right) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} &&= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}\left(x^9\right) \\
\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &&= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \\
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &&= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9 + \mathcal{O}\left(x^{11}\right)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Si}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{9!} + \mathcal{O}\left(x^{11}\right)$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\gamma - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!} = -\gamma - \log x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^6}{6\cdot 6!} - \frac{x^8}{8\cdot 8!} + \mathcal{O}\left(x^{10}\right)$$

$$-\mathrm{Ei}(-x) = -\gamma - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n\cdot n!} = -\gamma - \log x + \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{84} + \frac{x^9}{1296}\right) + \mathcal{O}\left(x^{11}\right)$$

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} - \frac{x^{15}}{75600} + \frac{x^{19}}{6894720} + \mathcal{O}\left(x^{23}\right)$$

$$\mathrm{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} = x - \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{4!}\frac{x^9}{9} - \frac{1}{6!}\frac{x^{13}}{13} + \frac{1}{8!}\frac{x^{17}}{17} + \mathcal{O}\left(x^{21}\right)$$

$$\mathrm{K}(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^{2n} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 x^4 + \left(\frac{15}{48}\right)^2 x^6 + \mathcal{O}\left(x^8\right)\right)$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{x^{2n}}{1-2n} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{x^2}{1} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{x^4}{3} - \left(\frac{15}{48}\right)^2 \frac{x^6}{5} + \mathcal{O}\left(x^8\right)\right)$$

$$W(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

8.11 Vsote divergentnih vrst

Za $n \in \mathbb{N}$ veljajo vsote

$$
\begin{array}{lll}
\sum(+1)^n = -\dfrac{1}{2} & \sum(+2)^n = -1 & \sum(+1)^n \cdot n = -\dfrac{1}{12} \\
\sum(-1)^n = +\dfrac{1}{2} & \sum(-2)^n = +\dfrac{1}{3} & \sum(-1)^n \cdot n = +\dfrac{1}{4}
\end{array}
$$

9 Odvod

Odvod definiramo z limito diferenčnega kvocienta

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Funkcija f je odvedljiva v točki a, če tam obstaja njen odvod. Funkcija je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega območja.

Naj bo $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ totalno odvedljiva. V indeksni notaciji totalni odvod zapišemo

$$(Df)_i{}^j(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Za odvedljivi funkciji f in g veljajo

- $f+g$ je odvedljiva in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.
- $f\cdot g$ je odvedljiva in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot g) = g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.
- (verižno pravilo) $f\circ g$ je odvedljiva in $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(f\circ g)} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.
- $\frac{f}{g}$ je odvedljiva, kjer $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \neq 0$ in velja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\cdot\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)$.
- f^{-1} odvedljiva, kjer $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \neq 0$ in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$.

9.1 Trditve in izreki

(Lagrangeev izrek) Za realni števili a in b, pri katerih $a < b$ in funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, odvedljivo na (a, b) velja

$$\exists c \in (a, b) \quad \ni: \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagrangeev izrek je pogost v dokazih z odvodi.

Lagrangeev izrek za telebane (fizike):

$$\Delta y \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Delta x$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Za $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, notranjo točko a U in $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ definiramo *totalni odvod* kot matriko

$$((\mathrm{D}\mathbf{f})(a))_{ij} = ((\mathrm{J}\mathbf{f})(a))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Če definiramo gradientni operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{j \in [1,n] \cap \mathbb{N}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

lahko s tem definiramo *totalni odvod* vektorske funkcije $\mathbf{f}$

$$(\mathrm{D}\mathbf{f})(a) = (\mathrm{J}\mathbf{f})(a) = \mathbf{f}\nabla^\top(a)$$

Za skalarno funkcijo $f = g$, če $m = 1$, se izraz poenostavi v

$$(\mathrm{D}g)(a) = (\mathrm{J}g)(a) = g\nabla^\top = \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}\right] = \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)^\top$$

Ker je totalni odvod skalarne funkcije to transponiran gradient, velja

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = ((\mathrm{D}g)(a))^\top = \left(g\nabla^\top\right)^\top = \nabla g^\top$$

Verižno pravilo trdi (pogoji)

$$\mathrm{D}(f \circ g)(a) = (\mathrm{D}f)(g(a))(\mathrm{D}g)(a)$$

V primeru, da je f skalarna funkcija, se verižno pravilo poenostavi

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_j} = ((\nabla f)(g(a)))^\top \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$

9.2 Analitične metode odvajanja

9.2.1 Logaritmiranje in odvajanje

V fiziki pogosto obravnavamo majhne spremembe količin, ki jih lahko obravavamo kot *diferencialno* majhne. Če nas zanima *relativna* sprememba odvisne količine, oziroma če *zadošča*, da poznamo relativno spremembo, je koristno obe strani enačbe logaritmirati in nato odvajati. Pogosto je logaritmiranje in odvajanje hitrejše od direktnega odvoda.

V primeru eksplicitne enačbe

$$y = f(x)$$

lahko obe strani logaritmiramo in nato odvajamo. Tako dobimo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)} \,,$$

ki jo formalno lahko zapišemo kot

$$x = x_0 + \delta x \qquad\qquad \frac{\delta y}{y} \approx \frac{f'(x_0)\delta x}{f(x_0)}$$

Poseben primer je enačba $y = Cx^\alpha$, kjer dobimo

$$\frac{\delta y}{y} \approx \alpha \frac{\delta x}{x} \,.$$

9.3 Dualna števila

Dualno število definiramo z dvojico realnih števil ter *dualno enoto* ε

$$z = a + \varepsilon b$$

kjer za ε velja

$$\varepsilon^2 = 0$$

Za *analitično* funkcijo f velja

$$f(x + \varepsilon \Delta x) = f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \varepsilon \Delta x$$

9.4 Optimizacija

Naj bo $\mathcal{M}$ metrični prostor z metriko d in $D \subset \mathcal{M}$ množica. Za točko $a \in D$ in funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ velja, da

- ima f v točki a *lokalni maksimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in \mathcal{K}(a, \delta)$ velja $f(a) \geq f(x)$, torej, da v okolici točke a funkcija f zavzame največjo vrednost v točki a.
- ima f v točki a *lokalni minimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in \mathcal{K}(a, \delta)$ velja $f(a) \leq f(x)$, torej, da v okolici točke a funkcija f zavzame najmanjšo vrednost v točki a.
- ima f v točki a *lokalni ekstrem*, če ima lokalni maksimum ali lokalni minimum.
- ima f v točki a *strogi lokalni maksimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in \mathcal{K}(a, \delta) \setminus \{a\}$ velja $f(a) > f(x)$, torej, da v okolici točke a funkcija f zavzame največjo vrednost *samo* v točki a.
- ima f v točki a *strogi lokalni minimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in \mathcal{K}(a, \delta) \setminus \{a\}$ velja $f(a) < f(x)$, torej, da v okolici točke a funkcija f zavzame najmanjšo vrednost *samo* v točki a.
- ima f v točki a *strogi lokalni ekstrem*, če ima strogi lokalni maksimum ali strogi lokalni minimum.
- ima f v točki a *globalni maksimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in D$ velja $f(a) \geq f(x)$, torej, da na celotni domeni D funkcija f zavzame največjo vrednost v točki a.
- ima f v točki a *globalni minimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in D$ velja $f(a) \leq f(x)$, torej, da na celotni domeni D funkcija f zavzame najmanjšo vrednost v točki a.
- ima f v točki a *globalni ekstrem*, če ima globalni maksimum ali globalni minimum.
- ima f v točki a *strogi globalni maksimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in D \setminus \{a\}$ velja $f(a) > f(x)$, torej, da na celotni domeni D funkcija f zavzame največjo vrednost *samo* v točki a.
- ima f v točki a *strogi globalni minimum*, če $\exists \delta > 0$, da $\forall x \in D \setminus \{a\}$ velja $f(a) < f(x)$, torej, da na celotni domeni D funkcija f zavzame najmanjšo vrednost *samo* v točki a.
- ima f v točki a *strogi globalni ekstrem*, če ima strogi globalni maksimum ali strogi globalni minimum.

Potrebni pogoj za globalni ekstrem je ustrezen lokalni ekstrem.

Vseh ekstremov je poljubno mnogo, strogi globalni maksimum in strogi globalni minimum pa sta vsak največ en.

9.4.1 Optimizacija funkcij ene spremenljivke

Naj bo $I \subset R$ interval, $a \in I$ in $f : I \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto f(x)$ zvezno odvedljiva funkcija. Točka a je *stacionarna točka* funkcije f, če zanjo velja

$$f'(a) = 0 \,.$$

Naj bo $f(x)$ vsaj $n-$krat zvezno odvedljiva in točka a stacionarna. Če

$$\forall m \in \mathbb{N} \cup [1, n-1] \qquad f^{(m)}(a)\,(a) = 0 \qquad f^{(n)}(a)\,(a) \neq 0 \,,$$

ima funkcija v točki a

- lokalni ekstrem, če je n soda (tipično velja $n = 2$),
- prevoj, če je n liha (v prevoju funkcija nima lokalnega ekstrema).

Če ima funkcija v točki a lokalni ekstrem, ima

- lokalni maksimum, če $f^{(n)}(a)\,(a) < 0$,
- lokalni minimum, če $f^{(n)}(a)\,(a) > 0$.

Funkcija ene spremenljivke lokalni ekstrem lahko doseže samo na stacionarnih in robnih točkah. Da najdemo lokalne ekstreme moramo torej izračunati prvi odvod funkcije, v stacionarnih točkah pa ustrezno visoke odvode, da so vrednosti teh neničelne. V robnih točkah lokalni ekstrem tipično najdemo, moramo pa paziti, da pripadajo domeni I.

Lahko naletimo na funkcijo, ki ni odvedljiva na celotni domeni. Take točke obravnavamo kot robne točke domene.

9.4.2 Optimizacija funkcij več spremenljivk

Naj bo $D \subset R^n$ množica, $a \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots x_n)$ zvezno odvedljiva funkcija. Točka $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ je *stacionarna točka* funkcije f, če zanjo velja

$$\partial_1 f = \partial_2 f = \dots = \partial_n f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla f = 0 \,.$$

V primeru dveh spremenljivk ($n = 2$) $x_1 = x$ in $x_2 = y$ dobimo pogoj za stacionarno točko $\partial_x f = \partial_y f = 0$.

Vrsto stacionarne točke določimo s Hessejevo matriko

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_x \partial_y f & \partial_y^2 f \end{bmatrix} \,.$$

Če v stacionarni točki $\mathbf{a}$ velja

$$\det H = \left(\partial_x^2 f\right)\left(\partial_y^2 f\right) - \left(\partial_x \partial_y f\right)^2 > 0 \,,$$

ima funkcija lokalni ekstrem, natančneje

- lokalni maksimum, če $\partial_x^2 f\,(\mathbf{a}) < 0$,
- lokalni minimum, če $\partial_y^2 f\,(\mathbf{a}) > 0$.

Če tam nima ekstrema, ima sedlo.

9.5 Lastnosti in relacije

9.5.1 Odvedljivost

Odvedljivost v točki: Funkcija $f \in C^0$, $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je *odvedljiva* v točki $x_0 \in D$, čee obstaja $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, kjer

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

9.6 Tabela odvodov

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[n]{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

10 Integral

10.1 Trditve in izreki

10.1.1 Izlimitirani integral

Integral, ki ni *izlimitirani*, je integral omejene funkcije na končnem intervalu.

Integral na *neskončnem intervalu* definiramo z limito

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Naj velja $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, torej ima funkcija v tej točki pol. Integral neomejene funkcije na končnem intervalu definiramo z limito

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V primeru integrala neomejene funkcije na neskončnem intervalu lahko izračunamo obe limiti ali pa integral razdelimo na vsoto integrala omejene funkcije na neskončnem intervalu in integrala neomejene funkcije na končnem intervalu.

10.1.2 Integral s parametrom

Trditev Za $a < b$, $c < d$, $P = [a,b] \times [c,d]$, *zvezno* funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$ in funkcijo $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x$$

velja, da je F *zvezna* na $[c,d]$.

Trditev Za $a < \infty$, $c < d$, $P = [a,\infty) \times [c,d]$, *zvezno* funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$ in *enakomerno konvergentno* funkcijo $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}x$$

velja, da je F *zvezna* na $[c,d]$.

Trditev Za $a < b$, $c < d$, $P = [a, b] \times [c, d]$, funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$, ki je *zvezno parcialno odvedljiva* za $t \in (c, d)$, in funkcijo $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

velja, da je F *zvezno odvedljiva* ter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

Trditev Za $a < \infty$, $c < d$, $P = [a, b] \times [c, d]$, funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$, ki je *zvezno parcialno odvedljiva* za $t \in (c, d)$, funkcijo $F : [c, d] \to \mathbb{R}$, ki je *konvergentna* za $\forall t \in [c, d]$ s predpisom

$$F(t) = \int_a^\infty f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

in funkcijo $F' : [c, d] \to \mathbb{R}$, ki je *enakomerno konvergentna* za $\forall t \in [c, d]$ s predpisom

$$F'(t) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

velja, da je F *zvezno odvedljiva* ter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

Izrek (Fubini) Za $a < b$, $c < d$, $P = [a, b] \times [c, d]$ in *zvezno* funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$ velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

Izrek (Fubini) Za $a < \infty$, $c < d$, $P = [a, \infty) \times [c, d]$, *zvezno* funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$ in *enakomerno konvergentno* $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ $\quad F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}x$ velja, da je F *integrabilna* na $[c, d]$ in

$$\int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

Izrek (Fubini-Tonelli) Za $a, b, c, d \in [-\infty, \infty]$, $P = [a, b] \times [c, d]$, *zvezno* funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$ in $\int_a^b \left(\int_c^d ||f(x,t)||\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$, ki konvergira za $(x, t) \in P$, velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

Izrek (Fubini-Tonelli) Za $a, b, c, d \in ???$, $P = [a, b] \times [c, d]$, *integrabilni* funkciji $f : P \to \mathbb{R}$ na P in $f(x, \bullet) : [c, d] \to$ na $[c, d]$

$$\iint_P f(x,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

Izrek Za interval $I = [a, b]$, *zvezni* funkciji $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$, tako da $\forall x \in I$ velja $\alpha \leq \beta$ in množico $A \in \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y), x \in I, y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$ in *zvezno* $f : A \to \mathbb{R}$ velja

$$\iint_A f(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

Trditev Za $a < b$, $c < d$, $P = [a,b] \times [c,d]$ in funkcijo $f : P \to \mathbb{R}$, ki je *zvezno odvedljiva* na notranjih točkah P, funkcijama, *odvedljivima* na notranjih točkah domene

$$\alpha : [c,d] \to [a,b]$$

$$\beta : [c,d] \to [a,b]$$

ter funkcijo $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\ \mathrm{d}x$$

velja, da je F odvedljiva ter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\ \mathrm{d}x \ + \ f(\beta(t),t) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} \ - \ f(\alpha(t),t) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

10.2 Konvergenčni kriteriji

Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ (torej omejena). Tedaj konvergira (obstaja) integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(x) > 0$. Tedaj

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(a-x)^s}\,\mathrm{d}x$$

konvergira za $s < 1$ in divergira za $s \geq 1$ in $g(a) \neq 0$.

Naj bo f zvezna funkcija na $[a, \infty)$ in $f(x) > \varepsilon > 0$. Tedaj

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

konvergira za $s > 1$ in divergira za $s \leq 1$ in $|g(x)| > m > 0$.

10.3 Analitične integracijske metode

10.3.1 Znan integral

Integral lahko prepoznamo kot primitivno funkcijo znanega kompozituma elementarnih funkcij. Funkcija $C(x)$ je lokalno konstantna funkcija, torej $\forall x \in D\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C(x) = 0$.

$$\int e^x \ \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int x^r \ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{a+bx} \ \mathrm{d}x = \frac{\log|a+bx|}{b} + C$$

$$\int \log(x) \ \mathrm{d}x = x\left(\log(x) - 1\right) + C$$

$$\int \sin x \ \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x \ \mathrm{d}x = -\log|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \ \mathrm{d}x = \log|\sin x| + C$$

$$\int \sinh x \ \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \ \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x \ \mathrm{d}x = \log|\cosh x| + C$$

$$\int \coth x \ \mathrm{d}x = \log|\sinh x| + C$$

$$\int f(ax) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(x) \ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{\cot ax}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C, \quad |x| < |a|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C, \quad |x| > |a|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right| + C; \quad p,q \neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \arcsin\left(\frac{2x-p}{\sqrt{p^2+4q}}\right) + C; \quad p,q \neq 0$$

Integral lahko prepoznamo kot znano integralsko funkcijo iz poglavja 2.2.

$$\int_0^x \exp\left(-t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x)$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(p+1, q+1\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)^q}\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(p+1, q-p-1\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^p\,(\cos\varphi)^q\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \beta(s)\Gamma(s)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \zeta(s)\Gamma(s)$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Si}(x)$$

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Ci}(x)$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Ei}(x)$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \mathrm{Li}(x)$$

$$\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{S}(x)$$

$$\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{C}(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u = K(k)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = E(k)$$

$$\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \pi J_n(x)$$

10.3.2 Integral racionalne funkcije

Primitivna funkcija vsake racionalne funkcije je elementarna. Pri integralu racionalne funkcije oblike

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x$$

najprej ustrezno zapišemo integrand. Predpostavimo, da je stopnja polinoma v števcu $R(x)$ manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, računamo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad m = \mathrm{st}\,(p) < n = \mathrm{st}\,(q)\ .$$

Če to ne velja, označimo razliko stopenj polinomov v števcu in imenovalcu $\mathrm{st}(p) - \mathrm{st}(q) = k \geq 0$ in funkcijo zapišemo s polinomi p, q in r v obliki

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} + r(x) \qquad \mathrm{st}\,(p) = m \qquad \mathrm{st}\,(q) = n \qquad \mathrm{st}\,(r) = k\ .$$

Polinom $r(x)$ integriramo po pravilu za integracijo polinoma in obravnavamo samo integral racionalne funkcije s stopnjo števca, manjšo od stopnje imenovalca.

Imenovalec $q(x)$ razcepimo na produkt

$$q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_n)^{\alpha_n} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m}\ ,$$

Če sta stopnji p in q nizki, običajno funkcijo razcepimo na parcialne ulomke in jih integriramo po pravilih s poglavja 10.3.1. Sicer definiramo polinom

$$\widetilde{q}(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - x_n)^{\alpha_n - 1} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m - 1}\ ,$$

ki je enak q, le, da je pri vsakem faktorju potenca za eno nižja, torej je stopnja $\widetilde{q}$ $\mathrm{st}(\widetilde{q}) = s = (\alpha - 1) + (\alpha_n - 1) + 2\,(\beta_1 - 1) + \cdots + 2\,(\beta_m - 1)$. Definiramo še racionalno funkcijo

$$\widetilde{R} = \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}} = \frac{A_{s-1} x^{s-1} + A_{s-2} x^{s-2} + \cdots + A_1 x + A_0}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - x_n)^{\alpha_n - 1} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m - 1}}\ ,$$

in integral izračunamo z nastavkom

$$\begin{gathered}
\int \frac{p(x)}{\widetilde{q}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\widetilde{p}(x)}{q(x)} + \\
+ B_1 \ln|x - x_1| + \cdots + B_n \ln|x - x_n| + \\
+ U_1 \ln\left(x^2 + b_1 x + c_1\right) + \cdots + U_m \ln\left(x^2 + b_m x + c_m\right) + \\
+ V_1 \arctan\left(\frac{2x + b_1}{\sqrt{4c_1 - b_1^2}}\right) + \cdots + V_m \arctan\left(\frac{2x + b_m}{\sqrt{4c_m - b_m^2}}\right) + C\ .
\end{gathered}$$

Ko tega odvajamo, dobimo enačbo

$$\begin{gathered}
p(x) = \widetilde{R}'(x) q(x) + \\
+ B_1 \frac{q(x)}{x - x_1} + \ldots B_n \frac{q(x)}{x - x_n} + \\
+ U_1\,(2x + b_1)\,\frac{q(x)}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + U_m\,(2x + b_m)\,\frac{q(x)}{x^2 + b_m x + c_m} + \\
+ V_1 \sqrt{c_1 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}\,\frac{q(x)}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + V_m \sqrt{c_m - \left(\frac{b_m}{2}\right)^2}\,\frac{q(x)}{x^2 + b_m x + c_m}\ .
\end{gathered}$$

Tipično člen $\widetilde{R}'(x)q(x)$ najhitreje dobimo, da direktno izračunamo odvod in ga zmnožimo s q. Velja pa

$$\widetilde{R}'(x)q(x) = \widetilde{p}'(x)h(x) - \widetilde{p}(x)\widetilde{h}(x) ,$$

kjer sta h in $\widetilde{h}$ polinoma $\mathrm{st}(h) = n - s$ in $\mathrm{st}(\widetilde{h}) = n - s - 1$, definirana kot

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{q}{\widetilde{q}}(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)(x^2 + b_1x + c_1)\ldots(x^2 + b_mx + c_m) \\ \widetilde{h}(x) &= \frac{\widetilde{q}'q}{\widetilde{q}^2}(x) = h(x)\left(\frac{\alpha_1 - 1}{x - x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n - 1}{x - x_n} + \frac{(\beta_1 - 1)(2x + b_1)}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{(\beta_m - 1)(2x + b_m)}{x^2 + b_mx + c_m}\right) . \end{aligned}$$

Opazimo, da $h(x)$ v formuli vedno nastopa, $\widetilde{h}(x)$ je pa neničeln le, če ima faktor v razcepu $q(q)$ stopnjo vsaj 2.

10.3.3 Integral iracionalne funkcije

Naj bo $p(x)$ polinom stopnje n. Integral iracionalne funkcije oblike

$$I(x) = \int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$

je v primeru konstantnega polinoma $p(x)$ znana funkcija s poglavja 10.3.1. Sicer pa uporabimo nastavek

$$I(x) = \int \frac{p(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + C\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} ,$$

kjer je $q(x)$ polinom stopnje največ $n - 1$. Ko ta nastavek odvajamo dobimo enačbo

$$p(x) = q'(x)\left(ax^2 + bx + c\right) + q(x)\left(ax + \frac{b}{2}\right) + C ,$$

s katerega določimo konstante rezultata $I(x)$. Na koncu ne pozabimo prišteti lokalno konstantne funkcije.

10.3.4 Po delih (per partes)

Metodo *per partes* uporabimo, ko je integrand produkt funkcije, ki jo znamo odvajati (u) in funkcije, ki jo znamo integrirati(v), tako, da dobimo enostavnejši integral.

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u + C$$

$$\Updownarrow$$

$$\int uv\ \mathrm{d}x = u\int v\ \mathrm{d}x - \int\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\int v\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C$$

To metodo pogosto uporabimo, da odvajamo zmnožek funkcij, od katerih znamo eno odvajati, drugo pa integrirati, npr. polinom (tudi konstanta 1), eksponentna in kotne funkcije.

10.3.5 Uvedba nove spremenljivke

Metodo *uvedbo nove spremenljivke* uporabimo, ko v integrandu prepoznamo produkt kompozituma dveh funkcij ter odvoda notranje funkcije

$$\int_a^b (f \circ g)\, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\ \mathrm{d}g$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = g(h(x)) \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{h(a)}^{h(b)} g(h(x))\mathrm{d}h = \Big|_{x=h(a)}^{h(b)} G(x)$$

10.3.6 Odvajanje integranda po vpeljanem parametru

Metodo *odvajanje integranda po vpeljanem parametru*, tudi imenovano *Feynmanovo metodo* uporabimo pri integralu s parametrom ali pa integralu, pri katerem lahko vpeljemo funkcijo parametra (npr. določene konstante zamenjamo s parametrom).
Uporabimo jo, če je parcialni odvod integranda po parametru t.i. enostavnejši za integriranje in integral s parametrom izpolnjuje pogoje za t.i. premik odvoda v integral:

$$\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

10.3.7 Uporaba 2. temeljnega izreka analize pri prepoznanem integralu po vpeljanem parametru

Metodo *Uporaba 2. temeljnega izreka analize pri prepoznanem integralu po vpeljanem parametru* uporabimo, ko v integrandu prepoznamo drug ovrednoten določeni integral. Če lahko, integrala zamenjamo in ju ovrednotimo.

$$\int_a^b f(x)(G(d) - G(c))\ \mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x)g(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x)g(t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

Primer:

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\ \mathrm{d}x \qquad \frac{x^t - x^0}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} x^\tau\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t x^\tau\ \mathrm{d}\tau$$

$$F(t) = \int_0^1 \int_0^t x^\tau\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}x = \int_0^t \int_0^1 x^\tau\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{1}{\tau+1}\ \mathrm{d}\tau = \ln(t+1)$$

Ta metoda je privzet način za ovrednotenje netrivialnega integrala z že vpeljanim parametrom.

10.3.8 Trigonometrična substitucija

Metodo *trigonometrično substitucijo* uporabimo pri integriranju kotnih funkcij ter pri integralih s členi, ki spominjajo na pitagorov izrek. Za substitucijo lahko uporabimo

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

za kvadrate kotnih funkcij je pa bolj koristna

$$t = \tan(x) \qquad \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

a v primeru, da ne zamenjamo kvadratov sinusa in kosinusa, substitucija sinusa in kosinusa velja samo za kote $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in ima periodo π.
Realen integral lahko tudi prevedemo na kompleksnega po krožni poti (če $\varphi \in [0, 2\pi]$)

$$z = e^{i\varphi} \qquad \sin(\varphi) = \frac{z^2-1}{2iz} \qquad \cos(\varphi) = \frac{z^2+1}{2z} \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

10.3.9 Prevod na kompleksen integral po zanki

Realne integrale prevedemo na kompleksne, če integriramo funkcijo f, za katero lahko najdemo kompleksno holomorfno funkcijo g, da velja $\mathrm{pr}(g(z)\big|_{\mathbb{R}}) = f(z)$, kjer je pr projekcija, običajno $\Re$ ali $\Im$.

Integral nato spremenimo v integral po zaključeni zanki γ, da je del zanke pot po realnih številih. *Primer*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}\ \mathrm{d}z, \quad \Gamma = [-R, R]\ldots$$

10.3.10 Prevod na vrsto preko potenčne vrste

V integral lahko vpeljemo potenčno vrsto, če v integrandu prepoznamo funkcijo, ki jo lahko razvijemo v potenčno vrsto, če lahko po tem integral lažje ovrednotimo. Da zamenjamo operator za vsoto in integral mora biti integral enakomerno konvergenten.

10.3.11 Simetrija integrala

Pri integriranju je pogosto koristno upoštevati *simetrijo* problema. To lahko storimo, ko imamo *sodo*, *liho* ali *periodično* funkcijo.
Za *sodo integrabilno* funckijo $s : A_s \to B_s$, *liho integrabilno* funkcijo $l : A_l \to B_l$ in $(\xi - a, \xi + a) \subset A_s \cap A_l$ velja

$$\int_{\xi-a}^{\xi+a} s(x-\xi) + l(x-\xi)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a s(x)\ \mathrm{d}x$$

Primer:

$$\int_0^\pi \cos x + \sin x\ \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin t + \cos t\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ \mathrm{d}t = 2$$

10.3.12 Poenostavitev integrala po simetričnem intervalu

Za *sodo integrabilno* funckijo $s : A_s \to B_s$, *liho integrabilno* funkcijo $l : A_l \to B_l$, $(-a, a) \subset A_s \cap A_l$, $C \in \mathbb{C}$ in integral naslednje oblike velja enakost

$$\int_{-a}^{a} \frac{s(x)}{1+C^{l(x)}}\ \mathrm{d}x = \int_0^a s(x)\ \mathrm{d}x$$

Primer:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = 1$$

10.3.13 Kingova lastnost

Za *integrabilno* funkcijo f velja

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\ \mathrm{d}x$$

To metodo lahko razumemo kot integriranje po istem intervalu z druge strani.

10.3.14 Metoda stacionarne faze

Metodo stacionarne faze uporabimo, ko imamo integral oblike

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\varphi(t)} \mathrm{d}t$$

Predpostavimo $\dot{\varphi}(t_0) = 0$. Za okolico t_0 velja

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(t_0)(t-t_0)^2 = \varphi_0 + \frac{K}{2}(t-t_0)^2$$

ter posledično

$$I = \frac{g(t_0)}{\sqrt{-iK}} e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi i}{K}} e^{i\varphi_0} g(t_0)$$

10.4 Uporaba integrala

Delovna različica, večina manjka.

10.4.1 Dolžina

Dolžino parametrične krivulje $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ za $t \in [t_1, t_2]$ dobimo s formulo

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}\, \mathrm{d}t\, .$$

Ko je krivulja graf funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, torej $y = f(x)$, dolžino dobimo s formulo

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, .$$

Ko je krivulja graf funkcije $r : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, torej $r(\varphi)$, kjer sta r polarni polmer in φ polarni kot, dolžino dobimo s formulo

$$\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, \mathrm{d}\varphi\, .$$

10.4.2 Površina

Površino lika, ki ga opišejo zveznice med izhodiščem in parametrično krivuljo $(x(t), y(t))$ za $t \in [t_1, t_2]$, izračunamo s formulo

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\ \mathrm{d}t\, ,$$

pri kateri predpostavimo, da zveznice vse točke v liku pokrijejo *točno enkrat*. Če z večanjem parametra t krivulja izhodišče ovije v pozitivni orientaciji, ploščino štejemo pozitivno, če pa ovije v negativni orienaciji, pa negativno. Če vmes obrne smer, integral razdelimo na vsoto integralov in ustrezno predznačene prispevke ploščine seštejemo.

Za sklenjeno krivuljo dodatno velja formula

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\, \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\, \mathrm{d}t\, .$$

Površino lika, ki jo v polarnem koordinatnem sistemu s koordinatami (r, φ) omejuje krivulja $r = R(\varphi) \geq 0$, dobimo s formulo

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R(\varphi))^2\ \mathrm{d}\varphi\, .$$

Površino vrtenine, ki jo za $t \in [t_1, t_2]$ opiše parametrična krivulja $(x(t), y(t))$, ko jo vrtimo okrog abcisne osi, izračunamo s formulo

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}t\, .$$

Ko je krivulja graf funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, torej $y = f(x)$, površino dobimo s formulo

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

Ko je krivulja graf funkcije $r : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, torej $r(\varphi)$, kjer sta r polarni polmer in φ polarni kot, ki je na abcisi enak $\varphi = 0$, površino dobimo s formulo

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}\, \mathrm{d}\varphi\ .$$

Če poznamo središče te krivulje $\mathbf{r}^*$ ter njegovo dolžino ℓ, lahko površino izračunamo z *Guldingovim pravilom*

$$S = s\ell = 2\pi y^* \ell\ ,$$

kjer je abcisa x, ordinatnata y, s pa pot, ki jo okrog telesa opravi središče krivulje (pri vretenini je to obseg $s = 2\pi y^*$).

10.4.3 Volumen

Volumen vrtenine, ki ga za $t \in [t_1, t_2]$ opiše lik med parametrično krivuljo $(x(t), y(t))$ in absicno osjo, ko ga vrtimo okrog abcisne osi, izračunamo s formulo

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x}\, \mathrm{d}t\ .$$

Ko je krivulja graf funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, volumen dobimo s formulo

$$V = \pi \int_a^b f^2\, \mathrm{d}x\ .$$

Če poznamo središče tega lika $\mathbf{r}^*$ ter njegovo ploščino S, lahko volumen izračunamo z *Guldingovim pravilom*

$$V = 2\pi y^* S\ ,$$

kjer je $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*)$, abcisa x, ordinatnata pa y.

11 Račun končnih diferenc

11.1 Padajoča potenca

Izraz x na *padajočo potenco* n definiramo kot

$$x^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} x^i = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1)) = \frac{x!}{(x-n)!}$$

11.2 Končna diferenca

Končno diferenco oziroma *diskretni odvod* funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiramo kot

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Naj bosta funkciji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ter C konstantna funkcija $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Tedaj veljajo

$$\begin{aligned} \Delta(f(x) + g(x)) &= \Delta(f(x)) + \Delta(g(x)) \\ \Delta(Cf(x)) &= C\Delta f(x) \\ \Delta C &= 0 \end{aligned}$$

11.3 Nedoločena in določena vsota

Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ je *Nedoločena vsota* funkcije $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, čee velja $f(x) = \Delta g(x)$. Tedaj zapišemo nedoločeno vsoto kot

$$\sum g(x)\delta x = f(x) + C \qquad C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \text{ konstantna funkcija}$$

11.4 Interpolacija

11.4.1 Deljena diferenca

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se ujema s funkcijo f v $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Ker točke x_i niso nujno paroma različne, definiramo posplošeno deljeno diferenco.

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \begin{cases} f(x_0) & , k = 0 \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & , x_0 = \cdots = x_k \\ \frac{[x_1, \ldots, x_k]f - [x_0, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0} & , \text{sicer} \end{cases}$$

Deljeno diferenco računamo rekurzivno, s tabelo. V stolpec s trivialno diferenco ($[\bullet]f$) običajno iz praktičnih razlogov vpisujemo odvode (od 0-tega naprej), a beremo, kot da se tam nahajajo $[\bullet]f = f(x_i)$ (v stolpec lahko tudi pišemo obe vrednosti).

Ko rekurzivno računamo $[\bullet, \ldots, \bullet]f$, diferenčno shemo računamo z elementoma v prejšnjem stolpcu, in sicer element na isti 'višini' ter enega pod njim. Pri zgornjemu preberemo najmanjši x v shemi (leži na isti 'višini'), pri spodnjemu pa največjega (leži na diagonali). Nato izračunamo diferenčni kvocient, če dobimo $\frac{0}{0}$, pa vpišemo ustrezni odvod.

x_i	$[\bullet]f$	$[\bullet, \bullet]f$	$[\bullet, \bullet, \bullet]f$	$\ldots$	$[\bullet, \ldots, \bullet]f$	$[\bullet, \ldots, \bullet]f$
x_0	$\frac{1}{0!}f(x_0)$	$[x_0, x_0]f$	$[x_0, x_0, x_0]f$	$\ldots$	$[x_0, \ldots, x_{k-1}]f$	$[x_0, \ldots, x_n]f$
x_0	$\frac{1}{1!}f'(x_0)$	$[x_0, x_0]f$	$[x_0, x_0, x_0]f$	$\ldots$	$[x_0, \ldots, x_n]f$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
x_0	$\frac{1}{(m_0-1)!}f^{(m_0-1)}(x_0)$	$[x_0, x_0]f$	$[x_1, x_0, x_0]f$	$\ldots$		
x_0	$\frac{1}{m_0!}f^{(m_0)}(x_0)$	$[x_1, x_0]f$	$[x_1, x_1, x_0]f$	$\ldots$		
x_1	$\frac{1}{0!}f(x_1)$	$[x_1, x_1]f$	$[x_1, x_1, x_1]f$	$\ldots$		
x_1	$\frac{1}{1!}f'(x_1)$	$[x_1, x_1]f$	$[x_1, x_1, x_1]f$	$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
x_{k-1}	$\frac{1}{m_{k-1}!}f^{(m_{k-1})}(x_{k-1})$	$[x_k, x_{k-1}]f$	$[x_k, x_k, x_{k-1}]f$	$\ldots$		
x_k	$\frac{1}{0!}f(x_k)$	$[x_k, x_k]f$	$[x_k, x_k, x_k]f$	$\ldots$		
x_k	$\frac{1}{1!}f'(x_k)$	$[x_k, x_k]f$	$[x_k, x_k, x_k]f$	$\ldots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
x_k	$\frac{1}{(m_k-1)!}f^{(m_k-1)}(x_k)$	$[x_k, x_k]f$				
x_k	$\frac{1}{m_k!}f^{(m_k)}(x_k)$					

Diference v prvi vrstici tvorijo interpolacijski polinom, pri katerem moramo upoštevati kratnost vrednosti (po izračunu shem x-vrednosti obravnavamo, kot da so različne).

$$p_n(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$$

11.4.2 Metoda nedoločenih koeficientov

Pri *metodi nedoločenih koeficientov* poznamo vrednost funkcije v točkah $x_i, i = 0, 1, \ldots n$, kjer $x_i \in I = [x_{\min}, x_{\max}]$, računamo pa približek za odvode funkcije $f \in C^n$ v točki iz intervala I.

Funkcijo f lahko zapišemo z neskončno vrsto (običajno Taylorjevo), a da dobimo določen sistem, za približek vzamemo končno vsoto

$$f(x) \approx \widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i g_i(x)$$

Odvod je utežena vsota funkcijskih vrednosti $f(x_i)$.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Uteži α_i dobimo, da izračunamo sistem enačb

$$\forall i = 0, 1, \ldots, n \qquad g_i^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Najlažje rešujemo z ekvidistančnimi točkami, tedaj dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f''(x) &\approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \approx & \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \end{aligned}$$

12 Matrike in linearne preslikave

12.1 Osnove matrik

Za $m, n \in \mathbb{N}$ je *matrika* velikosti $m \times n$ urejena mn-terica števil, indeksirana s pari $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, ki jo zapišemo v obliki urejene pravokotne tabele. i je indeks vrstice, j pa indeks stolpca.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ldots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \ldots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & A_{m,3} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

ali pa v *indeksni notaciji* s poglavja 14.4

$$A^i{}_j \cong A_i{}^j \cong [A_{ij}] \ .$$

Komentar: koristno se je privaditi na ta zapis, saj so številne definicije in dokazi lažje berljivi.

Matrika je definirana *nad skalarji* $\mathbb{F}$, čee je množica, kateri pripadajo elementi matrike, $\mathbb{F}$. Naknadno označimo, katero množico *skalarjev* ta predstavlja – $\mathbb{C}$ za *kompleksne* matrike, $\mathbb{R}$ za *realne* matrike, $\mathbb{Q}$ za *racionalne* matrike.

Množico skalarjev $\mathbb{F}$ razumemo kot polje s poglavja **??**, a pri obravnavi matrik običjano ne potrebujemo lastnosti komutativnosti skalarjev, zato tega ne predpostavimo.

Množico matrik velikosti $m \times n$ zapišemo kot

$$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{m \times n}$$

Matriko $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ lahko zmnožimo s skalarjem $\alpha \in \mathbb{F}$, da vsak element v matriki pomnožimo s tem skalarjem, torej

$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha(A_{i,j}) \ .$$

Množenje matrik s skalarjem je asociativno in komutativno. Matriki $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ in $B \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ lahko med seboj *seštejemo*, da seštejemo komponente, torej

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \ .$$

Seštevanje matrik je asociativno in komutativno. Matriki $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ in $B \in \mathrm{Mat}(n \times p)$ lahko med seboj *zmnožimo* s formulo

$$(AB)_{i,k} = \sum_j A_{i,j} B_{j,k} = \underbrace{A_{i,j} B_{j,k}}_{\text{indeksna notacija}} \ .$$

Množenje matrik je asociativno. Enačba se poenostavi za $p = 1$, torej za stolpec (ekvivalent vektorja) $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(n \times 1)$. Dobimo

$$(A\mathbf{v})_{i,1} = \sum_j A_{i,j} \mathbf{v}_{j,1} = \underbrace{A_{i,j} \mathbf{v}_{j,1}}_{\text{indeksna notacija}} \ .$$

Če formulo razpišemo v matrični obliki, si jo lahko predstavljamo kot, da stolpec obrnemo in z elementi stolpca pomnožimo elemente matrike, ki se nahajajo pod njimi.

$$
\begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\
A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\
A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n}
\end{bmatrix}
\end{array}
\longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
A_{1,1}v_1 & + & A_{1,2}v_2 & + & \dots & + & A_{1,n}v_n \\
A_{2,1}v_1 & + & A_{2,2}v_2 & + & \dots & + & A_{2,n}v_n \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
A_{m,1}v_1 & + & A_{m,2}v_2 & + & \dots & + & A_{m,n}v_n
\end{bmatrix}.
$$

Opazimo pa lahko, da je splošna formula $(AB)_{i,k} = \sum_j A_{i,j}B_{j,k}$ enaka fomuli za množenje matrike s stolpcem, le da množenje opravimo za vsak stolpec matrike B. Drugače rečeno, matriki lahko množimo, da s prvo matriko A posebej pomnožimo vsak stolpec druge matrike B in rezultate zapisujemo kot stoplce.

Ker je množenje matrik asociativno si pri zaporednem množenju več matrik vrstni red množenja lahko izberemo, da je najeonstavnejše. Če matrike niso kvadratne, najprej zmnožimo najmanjše pare, saj zahtevajo najmanj računanja (npr. produkt več matrik in stolpca). Če bi par matrik lažje zmnožili v obratnem vrstnem redu, si lahko pomagamo s formulo $(AB)^\mathtt{t} = B^\mathtt{t}A^\mathtt{t}$. To je koristno, če matriko B prepoznamo kot elementarno operacijo.

Iz tega ter iz definicije množenja matrik sledi, da pri zmnožku AB lahko na matriko A gledamo kot vrstična operacija, ki deluje na B, obenem pa na B lahko gledamo kot stolpično operacijo, ki deluje na A.

12.2 Elementarne vrstične operacije, elementarne matrike in Gaussova eliminacija.

Definiramo tri *elementarne vrstične operacije.*

1. Množenje i-te vrstice matrike z $\alpha \neq 0$, kar zapišemo kot $(\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha \mathcal{V}_i)$. Če poljubno matriko pomnožimo z leve, to operacijo izvedemo s kvadratno matriko

$$[\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha \mathcal{V}_i] = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \alpha &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

2. Prištetje β-kratnika j-te vrstice i-ti vrstici $(i \neq j)$, kar zapišemo kot $(\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i + \beta \mathcal{V}_j)$. Če poljubno matriko pomnožimo z leve, to operacijo izvedemo s kvadratno matriko

$$[\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i + \beta \mathcal{V}_j] = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \beta && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

3. Zamenjava i-te in j-te vrstice $(i \neq j)$, kar zapišemo kot $(\mathcal{V}_i \leftrightarrow \mathcal{V}_j)$ Če poljubno matriko pomnožimo z leve, to operacijo izvedemo s kvadratno matriko

$$[\mathcal{V}_i \leftrightarrow \mathcal{V}_j] = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 && \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

Zanje velja

1. $[\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha \mathcal{V}_i]^{-1} = \left[\mathcal{V}_i \leftarrow \frac{1}{\alpha}\mathcal{V}_i\right]$
2. $[\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i + \beta \mathcal{V}_j]^{-1} = [\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i - \beta \mathcal{V}_j]$
3. $[\mathcal{V}_i \leftrightarrow \mathcal{V}_j]^{-1} = [\mathcal{V}_i \leftrightarrow \mathcal{V}_j]$
4. $\det [\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha \mathcal{V}_i] = \alpha$
5. $\det [\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i + \beta \mathcal{V}_j] = 1$
6. $\det [\mathcal{V}_i \leftrightarrow \mathcal{V}_j] = -1$

Elementarne vrstične operacije pogosto zasledimo pri množenju matrik. Če nastopajo v zmnožku, nam elementarne in druge matrike ni treba zmnožiti, saj poznamo rezultat elementarne vrstične operacije. Pogosto zasledimo tudi kompozitume elementarnih vrstičnih operacij, ki jih lahko razdelimo na zmnožek elementarnih operacij, s katerimi posamezno delujemo na matriko.

Matrika B je *vrstično ekvivalentna* A, če obstajajo elementarne matrike $E^{(k)}$, da velja

$$B = E^{(p)}E^{(p-1)}\ldots E^{(2)}E^{(1)}A = EA\,.$$

Vrstična ekvivalenca je ekvivalenčna relacija, ekvivalenčne razrede s poglavja 5.1 pa predstavljajo matrike v *vrstični kanonični formi.* Za tako matriko definiramo *pivote.* To so komponente matrike, za katere velja, da

- imajo vrednost 1,
- v vsaki vrstici je največ eden,
- v nižje ležečih vrsticah pivoti ležijo strogo bolj desno od pivotov v višjih vrsticah,
- v vsaki vrstici so vse komponente do pivota enake 0 (tudi če pivota v vrstici ni).

Položaji pivotov enolično določijo pripadajoči ekvivalenčni razred. Naj $*$ predstavlja poljubno število. Primer matrike v vrstični kanonični formi je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobno lahko definiramo *reducirano vrstično kanonično formo*, pri kateri dodatno velja, da so v stolpcih s pivoti vse vrednosti nad pivoti enake 0. Primer matrike v reducirani vrstični kanonični formi je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V vsakem ekvivalenčnem razredu je natanko ena matrika v reducirani vrstično kanonični formi.

12.2.1 Gaussova in Gauss-Jordanova eliminacija

Do vrstične kanonične forme s splošne matrike pridemo z *Gaussovo eliminacijo*, do reducirane vrstične kanonične forme pa z *Gauss-Jordanovo eliminacijo.* Pri tem algoritmu "pridelamo" pivote od zgoraj navzdol. Zato najprej obravnavamo prvo vrstico. Postopek eliminacije se za vsak pivot ponovi, podrobneje ga opišemo spodaj.

1. V obravnavani i-ti vrstici najdemo skrajno levi neničelni element, ki ga indeksiramo A_{ij}. Ta element bo postal pivot. Večkratnike vrstice prištevamo vrsticam pod njo, da v stolpcu s pivotom dobimo ničelne elemente (operacija $\mathcal{V}_k \leftarrow \mathcal{V}_k + \beta\mathcal{V}_i$ za $k > i$, da velja $A_{ik} = 0$).

2. Vrstico delimo z vrednostjo polja, ki bo postalo pivot, torej z A_{ij} (operacija $\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha\mathcal{V}_i$).

3. Če izvajamo Gauss-Jordanovo eliminacijo, večkratnike vrstice prištevamo vrsticam nad njo, da v stolpcu s pivotom dobimo ničelne elemente (operacija $\mathcal{V}_k \leftarrow \mathcal{V}_k + \beta\mathcal{V}_i$ za $k < i$, da velja $A_{ik} = 0$).

Ko postopek za i-ti pivot končamo, imajo elementi matrike, levo od pivota (v vseh vrsticah), že končno vrednost. V primeru Gaussove eliminacije elementi matrike, desno od pivotov, prav tako zavzemajo končno vrednost.

Postopek končamo, ko dobimo matriko v (reducirani) vrstični kanonični formi.

Gaussovo eliminacijo lahko uporabimo za računanje inverza, reševanje linearnih sistemov enačb in računanje determinant.

12.2.2 Računanje inverza z Gauss-Jordanovo eliminacijo

Za matriko $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ računamo inverz A^{-1}. Definirajmo razširjeno matriko

$$B = [A|I] \in \mathrm{Mat}(n \times 2n) ,$$

katere bloka sta izvorna matrika A ter identiteta $I \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. Med blokoma običajno pišemo navpično črto, da bloka lažje ločimo. Razširjeno matriko B z Gauss-Jordanovo eliminacijo prevedemo v reducirano vrstično kanonično formo. A je obrnljiva matrika, torej je vrstično ekvivalentna edini obrnljivi matriki v reducirani vrstični kanonični formi, identiteti. Zato bo levi blok matrike B enak identiteti. Dobimo

$$E\,[A|I] = [EA|EI] = [I|E] \ .$$

Ker velja $EA = I$, velja $E = A^{-1}$, torej z uporabo Gauss-Jordanove eliminacije na pomožni matriki dobimo

$$[A|I] \xrightarrow{\text{G.J. elim.}} [I|A^{-1}] \, .$$

Če z eliminacijo v levem bloku ne dobimo identitete, matrika A ni obrnljiva.

12.2.3 Reševanje sistema linearnih enačb z Gaussovo eliminacije

Rešujemo sistem m linearnih enačb za n neznank x_i (sistem $m \times n$)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & A_{m3}x_3 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & = & b_1
\end{array} .$$

Tak sistem lahko zapišemo z matrično enačbo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer velja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Na strani enačbe lahko z leve pomnožimo z obrnljivo matriko (v našem primeru elementarno), ne da bi spremenili rešitev enačbe, torej $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff E(A\mathbf{x}) = E\mathbf{b}$. Definirajmo razširjeno matriko $B = [A|\mathbf{b}]$. Ker velja $EB = [EA|E\mathbf{b}]$, Gaussova eliminacija v vsakem koraku ohrani rešitev, če matriki A in $\mathbf{b}$ zamenjamo z EA in $E\mathbf{b}$. Po končani eliminaciji dobimo razširjeno matriko $\widetilde{B} = \left[\widetilde{A}|\widetilde{\mathbf{b}}\right]$, s katero zapišemo in rešimo zgornje trikotni sistem enačb $\widetilde{A}\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{b}}$, da postopoma računamo x_n, x_{n-1}, $\dots x_1$, kjer izračunane vrednosti x_i vstavljamo nazaj v enačbo.

Alternativno lahko sistem rešimo z Gauss-Jordanovo eliminacijo, tedaj vrednosti x_i izračunamo trivialno, proces je pa bolj zamuden.

12.2.4 Računanje determinante z Gaussovo eliminacijo

Računamo determinanto matrike $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. Pri izračunu si pomagamo z enačbo $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Za matriko v vrstični kanonični formi $\widetilde{A} = E^{(p)}E^{(p-1)} \dots E^{(2)}E^{(1)}A = EA$ velja formula

$$\det A = \frac{\det \widetilde{A}}{\prod_{i=1}^{p} \det E^{(i)}} \ .$$

V praksi determinante elementarnih matrik primnožimo sproti. Pri Gaussovi eliminaciji uporabimo elementarni operaciji prištetja ter množenja vrstice. Determinanta elementarne matrike je torej

$$\det E^{(k)} = \begin{cases} 1, & E^{(k)} = [\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_i + \beta \mathcal{V}_j] \\ \alpha, & E^{(k)} = [\mathcal{V}_i \leftarrow \alpha \mathcal{V}_i] \ . \end{cases}$$

Determinanta ima torej po prištetju vrstice enako vrednost, pri deljenju vrstice z vrednostjo na pivotu, pa moramo to vrednost deliti – vrednost na pivotu primnožimo vrednosti determinante. Po končani Gaussovi eliminaciji dobimo determinanto matrike v vrstični kanonični formi $\widetilde{A}$. Ta matrika je zgornje trikotna, zato je determinanta enaka produktu diagonalnih elementov.

Determinanta $\det \widetilde{A}$ je posledično neničelna le, če je matrika A vrstično ekvivalentna identiteti, sicer je enaka 0. Eliminacijo zato lahko v primeru, ko pivot nastopi nad diagonalo, prekinemo, saj tedaj velja $\det A = 0$.

Izračun determinante lahko pospešimo, da pri eliminaciji izpustimo množenje vrstic. Tedaj nam determinanti ni treba primnožiti vrednosti pivotov, po končani eliminaciji pa dobimo zgornje trikotno matriko, katere determinanta je enaka produktu diagonalnih elementov. Ta determinanta je enaka $\det A$.

12.3 Transponiranje, konjugiranje in hermitiranje

Za $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F})$ je *transponirana matrika* matrike A

$$A^{\mathtt{t}}_{ij} = A_{ji}\,,$$

torej transponiranje predstavlja zamenjavo indeksov, kar pa predstavlja zamenjavo domene in kodomene linearne preslikave. Posledično velja

$$A^{\mathtt{t}} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{F})$$

Za $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F})$ je *konjugirana matrika* matrike A definirana *po komponentah*, torej

$$\overline{A}_{ij} = \overline{A_{ij}}$$

Leva stran enačaja predstavlja konjugirano matriko, desna pa konjugirane komponente.

Za $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F})$ je *hermitirana matrika* matrike A definirana kot *kompozicija* transponiranja in konjugiranja, torej

$$A^{\mathtt{h}}_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

Za transponiranje, konjugiranje in hermitiranje za matriki A in B ter skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ velja

1. $\overline{(\overline{A})} = A$
2. $(A^{\mathtt{t}})^{\mathtt{t}} = A$
3. $(A^{\mathtt{h}})^{\mathtt{h}} = A$
4. $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$
5. $(\alpha A)^{\mathtt{t}} = \alpha A^{\mathtt{t}}$
6. $(\alpha A)^{\mathtt{h}} = \overline{\alpha} A^{\mathtt{h}}$
7. $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$
8. $(AB)^{\mathtt{t}} = B^{\mathtt{t}} A^{\mathtt{t}}$
9. $(AB)^{\mathtt{h}} = B^{\mathtt{h}} A^{\mathtt{h}}$
10. $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$
11. $(A^{\mathtt{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathtt{t}}$
12. $(A^{\mathtt{h}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathtt{h}}$

12.4 Posebne matrike

12.4.1 Kvadratna matrika

Kvadratna matrika je matrika $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$.

12.4.2 Diagonalna matrika

Diagonalna matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $i \neq j \implies A_{ij} = 0$.

12.4.3 n-diagonalna matrika

n-diagonalna matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $|i - j| > \frac{n-1}{2} \implies A_{ij} = 0$, torej ima n diagonal.

12.4.4 Zgornje trikotna matrika

Zgornje trikotna matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $i > j \implies A_{ij} = 0$, torej je neničelna samo na zgornjem desnem trikotniku matrike.

12.4.5 Spodnje trikotna matrika

Spodnje trikotna matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $i < j \implies A_{ij} = 0$, torej je neničelna samo na spodnjem levem trikotniku matrike.

12.4.6 Hessenbergova matrika

Hessenbergova matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $i > j + 1 \implies A_{ij} = 0$.

12.4.7 Simetrična matrika

Simetrična matrika je matrika A_{ij}, za katero velja $A^{\mathtt{t}} = A$.

Če je simetrična matrika Hessenbergova, je tridiagonalna.

12.4.8 Ortogonalne in unitarne matrike

Unitarne matrike U so vse kompleksne matrike, za katere velja

$$U^h = U^{-1}$$

Unitarne matrike so *hermitske*, stolpci in vrstice pa posebej sestavljajo *ortonormirano* bazo Veljajo tudi

$$\det(U) = e^{i\varphi} \qquad UU^{-1} = U^{-1}U = I$$

Množica unitarnih matrik velikosti $n \times n$ je *unitarna grupa* s poglavja 6.2.5 za množenje matrik

$$\mathrm{U}(n)$$

Množica unitarnih matrik velikosti $n \times n$ s pogojem $\det(U) = 1$ je *posebna unitarna grupa* s poglavja 6.2.6 za množenje matrik

$$\mathrm{SU}(n)$$

Ortogonalne matrike so *realne* unitarne matrike. Realni podgrupi $\mathrm{U}(n)$ in $\mathrm{SU}(n)$ sta $\mathrm{O}(n)$ in $\mathrm{SO}(n)$.

12.5 Diagonalizabilnost in Jordanova forma

Za $n \in \mathbb{N}$ ter $n > 1$ definiramo matriko $N \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ kot

$$N_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j - 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Za $m \in \mathbb{N}$ velja

$$N^m = \begin{cases} \begin{cases} 1, & i = j - m \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, & m < n \\ 0, & m \geq n \end{cases}$$

torej je N *nilpotentna* matrika stopnje n.

Jordanova forma Vsaki kvadratni matriki A lahko pripišemo *Jordanovo formo*

$$A = PJP^{-1}$$

kjer je J bločno diagonalna matrika, sestavljena iz *Jordanskih kletk*, ki so oblike

$$J = \lambda I + N = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & & \\ & \lambda & \dots & & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

12.6 Determinanta in rang

Naj $\alpha \in \mathbb{F}$ in $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. Za determinanto veljajo

1. $\det A^{\mathtt{t}} = \det A$
2. $\det A^{\mathtt{h}} = \overline{(\det A)}$
3. $\det(\mathrm{diag}(\lambda_i)) = \prod_i \lambda_i$
4. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
5. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
6. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Če za matriko A poznamo vrstično kanonično formo, torej $A' = E^{(p)} \dots E^{(2)} E^{(1)} A$, lahko determinanto izračunamo s formulo

$$\det A = \frac{\det A'}{\prod_i \det E^{(i)}} \,.$$

Rezultat dobimo z Gaussovo eliminacijo, da sproti računamo produkt $\prod_i \det E^{(i)}$, kjer upoštevamo vrednosti determinante elementarnih vrstičnih operacij s poglavja 12.2. Proces je podrobno opisan v tem istem poglavju.

12.6.1 Vandermondova matrika in determinanta

Vandermondovo matriko $V \in \mathrm{R}^{n \times n}$ definiramo kot

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Velja $\det V = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$, zato je za paroma različne x_i determinanta neničelna.

12.6.2 Rang

Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiramo kot velikost največje kvadratne podmatrike A z neničelno determinanto. Zato velja $\operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$, v primeru enakosti, pa rečemo, da je matrika *A polnega ranga*. Po definiciji lahko rang razumemo kot število linearno neodvisnih vrstic in stolpcev.

12.7 Inverz matrike

Inverz matrike A je taka matrika B, da velja $AB = BA = I$. Inverz A označimo kot A^{-1}. Matrika A je *obrnljiva*, čee obstaja inverz matrike A. Trivialen potreben pogoj, da je matrika velikosti $m \times n$ obrnljiva, je $m = n$.

Množica obrnljivih matrik velikosti $n \times n$ je grupa za množenje matrik, ki jo imenujemo *splošna linearna grupa* stopnje n s poglavja 6.2.4, in jo označimo kot

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) .$$

Matrika je obrnljiva če xyz

Za obrnljivo matriko $A \in \mathrm{GL}\left(n, \mathbb{F}\right)$ velja *Cramerjevo pravilo*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{co}\left(A\right)\right)^{t}$$

12.8 Lastne vrednosti

Naj $\mathbf{v} \in D$ in $A : D \to D$ linearni operator. λ je *lastna vrednost* in $\mathbf{v}$ *lastni vektor* preslikave A, čee zanje velja

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

12.8.1 Potenčno zaporedje, Hotelingova redukcija in inverzna iteracija

Naj bo A linearna preslikava z enostavnimi lastnimi podprostori. *Rayleighov koeficient* definiramo kot

$$\rho(\mathbf{x}, A) = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{h}} A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{h}}\mathbf{x}}$$

Rekurzivno definiramo zaporedje

$$\mathbf{x}_k = \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{\|A\mathbf{x}_{k-1}\|}$$

Označimo $\rho_k = \rho(\mathbf{x}_k, A)$. Tedaj velja, da $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$, da $\forall k \geq M$

$$|\lambda - \rho_k| < \varepsilon \qquad\qquad \|Ax_k - \rho_k x_k\| < \varepsilon$$

torej zaporedje $\mathbf{x}_k$ konvergira v lastni podprostor z največjo lastno vrednostjo po absolutni vrednosti.

Hotelingova redukcija Če označimo $A = A^{(0)}$ ter $\mathbf{v}_k$ in λ_k kot lastni par, katerega lastna vrednost je po absolutni vrednosti največja, lahko s tem procesom iščemo lastne vrednosti matrike A, da proces ponovimo za matriko $A^{(k)} = A^{(k-1)} - \lambda_k \mathbf{v}_k{}^{\mathsf{t}} v_k$. S tem postopkom postopoma izničujemo lastne vrednosti izvorne matrike, od največje proti najmanjši.

Inverzna iteracija Z inverzno iteracijo iščemo lastne vrednosti A od najmanjše proti največji. Teoretično iteriramo s potenčno metodo, torej obravnavamo zaporedje

$$\mathbf{x}_k = \frac{A^{-1}\mathbf{x}_{k-1}}{\|A^{-1}\mathbf{x}_{k-1}\|}$$

Ker je računanje inveza zahtevno, rešujemo sistem $A\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ in nato $\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}}{\|\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}\|}$, da na začetku celotnega procesa enkrat izračunamo LU razcep.

Če je σ približek za lastno vrednost λ, invezna iteracija za matriko $B = A - \sigma I$ po absolutni vrednosti konvergira k lastni vrednosti $|\sigma - \lambda|$ ter pripadajočem lastnem vektorju.

12.8.2 Sturmovo zaporedje

Naj bo T irreducibilna ($b_i \neq 0$) tridiagonalna simetrična matrika.

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Naj bo T_k vodilna $k \times k$ podmatrika matrike T in

$$f_k(\lambda) = \det(T_k - \lambda I)$$

Tedaj velja

$$f_k(\lambda) = \begin{cases} (a_k - \lambda) f_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}^2 f_{k-2}(\lambda), & k \geq 2 \\ a_1 - \lambda, & k = 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Za polinome f_k tedaj velja

1. $\forall \lambda$ velja $f_0(\lambda) \neq 0$
2. Če $k < n$ in $f_k(\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{k-1}(\lambda) f_{k+1}(\lambda) < 0$
3. Če $f_n(\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{n-1}(\lambda) f_n'(\lambda) < 0$

S Sturmovim zaporedjem lahko določimo število lastnih vrednosti, ki so večje (ali enake) mejni vrednosti λ_0. Najprej (običajno za določen λ) izračunamo vrednosti $f_{1,2,\ldots,n}$. Nato v prvo vrstico tabele zapišemo njihove vrednosti, v drugo pa predznake vrednosti. Če za nek $k \in [1, n]$ velja $f_k = 0$, v tabelo za pogoj $\lambda > \lambda_0$ zapišemo predznak desnega soseda, za pogoj $\lambda \geq \lambda_0$ pa predznak levega soseda. Sosednji vrednosti f_i in f_{i+1} se *ujemata*, če imata enaka predznaka. Število ujemanj označimo z $u(\lambda_0)$.

Velja, da je število lastnih vrednosti λ, ki ustrezajo pogoju $\lambda > \lambda_0$ (ali $\lambda \geq \lambda_0$) enako številu ujemanj $u(\lambda_0)$.

12.9 Razcepi matrik

12.9.1 Simetrično–antisimetrični razcep

Matriko $T \in \mathrm{R}^{n\times n}$ lahko razcepimo na vsoto simetrične in antisimetrične matrike. $T = S + A \qquad S = \frac{1}{2}(T + T^{\mathrm{t}}) \qquad A = \frac{1}{2}(T - T^{\mathrm{t}})$

12.9.2 Razcep LU

Za vsako obrnljivo matriko $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ lahko najdemo permutacijsko matriko $P \in \mathrm{R}^{n\times n}$, da PA enolično razcepimo na produkt spodnje (**L**ower) trikotne matrike z enicami na diagonali $L \in \mathrm{R}^{n\times n}$ in zgornje (**U**pper) trikotne obrnljive matrike $U \in \mathrm{R}^{n\times n}$, da velja $PA = LU$. Razcep lahko obstaja za razne izbire matrike P, lahko tudi za $P = I$. Tedaj razcep lahko računamo brez pivotiranja. Tak razcep obstaja, čee so vse vodilne podmatrike A obrnljive.

Algoritem razcepa LU Pri razcepu v isti matriki hkrati računamo ter zapisujemo matriko L (vrednosti pod diagonalo) in matriko U (vrednosti na in nad diagonalo), lahko ju tudi ločimo z lomljeno črto.

(brez pivotiranja:) Najprej izvedemo Gaussovo eliminacijo za prvi stolpec. Namesto ničel pod diagonalo pišemo izvorna števila, deljena z diagonalnim elementom nad sabo. Prva vrstica nove matrike je prva vrstica matrike U, prvi stolpec je pa prvi stolpec matrike L, le da diagonalni element postavimo na 1. Razcep ponovimo na podmatriki brez prvega stolpca in vrstice.

Označimo matriko po koncu k-tega koraka kot $A^{(k)}$ in začetno kot $A = A^{(0)}$. Dokončno izračunane elemente matrike A označimo z $\widetilde{a}_{i,j}$. Tedaj velja

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{1,1} & \widetilde{a}_{1,2} & \cdots & \widetilde{a}_{1,k} & \widetilde{a}_{1,k+1} & \cdots & \widetilde{a}_{1,n} \\ \widetilde{a}_{2,1} & \widetilde{a}_{2,2} & \cdots & \widetilde{a}_{2,k} & \widetilde{a}_{2,k+1} & \cdots & \widetilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{k,1} & \widetilde{a}_{k,2} & \cdots & \widetilde{a}_{k,k} & \widetilde{a}_{k,k+1} & \cdots & \widetilde{a}_{k,n} \\ \widetilde{a}_{k+1,1} & \widetilde{a}_{k+1,2} & \cdots & \widetilde{a}_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,1} & \widetilde{a}_{n,2} & \cdots & \widetilde{a}_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ko razcep končamo dobimo matriko $A^{(n)}$, za katero velja

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{1,1} & \widetilde{a}_{1,2} & \cdots & \widetilde{a}_{1,n-1} & \widetilde{a}_{1,n} \\ \widetilde{a}_{2,1} & \widetilde{a}_{2,2} & \cdots & \widetilde{a}_{2,n-1} & \widetilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n-1,1} & \widetilde{a}_{n-1,2} & \cdots & \widetilde{a}_{n-1,n-1} & \widetilde{a}_{n-1,n} \\ \widetilde{a}_{n,1} & \widetilde{a}_{n,2} & \cdots & \widetilde{a}_{n,n-1} & \widetilde{a}_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ l_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{n,n} \end{bmatrix} = U + (L - I)$$

(s pivotiranjem:) Če razcep računamo s pivotiranjem, na začetku definiramo permutacijski vektor $p = (1, 2, \ldots, n)$. Preden v k-tem koraku izvedemo Gaussovo eliminacijo, primerjamo diagonalni element ter elemente pod njim ($a_{j,k}$, $j = k, k+1, \ldots, n$) po absolutni vrednosti. Naj bo m indeks, da velja, da je izmed teh elementov eden izmed največjih $a_{m,k}$ Če je diagonalni element $a_{k,k} < a_{m,k}$, zamenjamo k-to in m-to vrstico. Zamenjamo tudi k-ti in m-ti element vektorja p. Nato nadaljujemo korak po zgoraj opisanem algoritmu brez pivotiranja.

Ko končamo razcep, moramo najti še permutacijsko matriko P. Za k-ti stolpec matrike P velja

$$P_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = p_k \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} = \delta_{i,p_k}$$

Če je A diagonalno semi-dominantna po stolpcih ($|a_{ii}| \geq \sum_{j,j\neq i} |a_{ji}|$) in diagonalno dominantna po stolpcih ($|a_{ii}| > \sum_{i,i\neq j} |a_{ji}|$) v vsaj, zanjo obstaja LU razcep brez pivotiranja.

Elemente dobimo z enačbama

$$v_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij}^2} \qquad\qquad v_{ij} = \frac{1}{v_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik}v_{jk}\right)$$

12.9.3 Razcep QR (Householderjeva zrcaljenja)

Naj bo $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ matrika, za katero obstajata matrika $Q \in \mathrm{R}^{m\times n}$ z ortonormiranimi stolpci in zgornje trikotna matrika $R \in \mathrm{R}^{n\times n}$, da velja $A = QR$. Temu rečemo *osnovni razcep QR* matrike A.

Naj bo še $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^m$ ter $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^n$. Tedaj lahko s QR razcepom normalni sistem enačb $A^{\mathsf{t}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{t}}\mathbf{b}$ preoblikujemo na sistem $R\mathbf{x} = Q^{\mathsf{t}}\mathbf{b}$, kar je numerično stabilnejše od razcepa Choleskega za matriko $A^{\mathsf{t}}A$.

Householderjeva zrcaljenja Householderjeva zrcaljenja so ortogonalne transformacije z eno lastno vrednostjo -1, ostalimi pa 1, torej je zrcaljenje čez hiperravnino. Zato veljajo $P^{\mathsf{t}} = P^{-}1$ in $P^2 = I$, torej $P = P^{\mathsf{t}} = P^{-1}$.

Z Householderjevim algoritmom skušamo najti P, da za vektor $\mathbf{x}$ velja $P\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1$, kjer je e_1 prvi bazni vektor standardne baze.

Začnemo z matriko $A^{(1)} = A$. Postopek računamo rekurzivno, koraki se med seboj razlikujejo le po indeksu.

Stolpce matrike $A^{(k)}$ označimo z $\mathbf{a}_i^{(k)}$. Izračunamo normo prvega stolpca $\|\mathbf{a}_1^{(k)}\|$ in pogledamo predznak prvega elementa stolpca $s^{(k)} = \mathrm{sgn}(\mathbf{a}_1^{(k)})$.

Izračunamo $\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{a}_1^{(k)} + s^{(k)}(\|\mathbf{a}_1^{(k)}\|, 0, \ldots, 0)$ ter $\|\mathbf{w}^{(k)}\|^2$.

Za $P^{(k)} = I - \frac{2}{\|\mathbf{w}^{(k)}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathsf{t}}$ izračunamo $\forall i \quad P^{(k)}\mathbf{a}_i^{(k)}$, kjer najprej izračunamo $\mathbf{w}^{\mathsf{t}}\mathbf{a}_i^{(k)}$, za 1. stolpec pa vrednost že poznamo $P^{(k)}\mathbf{a}_1^{(k)} = -s^{(k)}(\|\mathbf{a}_1^{(k)}\|, 0, \ldots, 0)$. Podobno izračunamo tudi $P^{(k)}\mathbf{b}^{(k)}$.

Tako dobimo matriko $A^{(k+1)}$ in vektor $\mathbf{b}^{(k+1)}$, s katerima proces ponavljamo za $A^{(k+1)}$ brez prvega stolpca in vrstice ter za $\mathbf{b}^{(k+1)}$ brez prvega elementa. Pri zadnjem koraku algoritem ni potreben. Dobimo zgornje trikoten sistem enačb $U\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$.

Če na koncu potrebujemo tudi QR razcep, je ta enak $R = A^{(n)}$, $Q = (\widetilde{P}^{(k)} \cdots \widetilde{P}^{(1)})=^{\mathsf{t}}\widetilde{P}^{(1)} \cdots \widetilde{P}^{(k)}$, kjer so $\widetilde{P}^{(k)}$ identične razširitve matrik $P^{(k)}$, torej $\widetilde{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} I^{k\times k} & 0 \\ 0 & P^{(k)} \end{bmatrix}$.

12.9.4 Singularni razcep

Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ obstaja *singularni razcep*

$$A = U \Sigma V^{\mathtt{t}}$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki, matrika $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pa kvazidiagonalna, torej za $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ velja

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i, & i = j \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

12.9.5 Schurov razcep

Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obstaja unitarna matrika $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in zgornje trikotna matrika $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da velja

$$U A^{\mathtt{h}} U = T$$

12.9.6 Diagonalizacija

xyz

12.10 Matrične enačbe

12.10.1 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je

- *določen*, če $m = n$
- *predoločen*, če $m > n$
- *poddoločen*, če $m < n$

Če matrika A ni polnega ranga (poglavje 12.6.2), lahko računamo ekvivalenten sistem za podmatriko polnega ranga. *Občutljivost* matrike A definiramo kot $\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$. Naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in $(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$. Če velja $\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$, velja

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

12.10.2 Trikotni sistem

Naj bosta $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ spodnje- in $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zgornje trikotna matrika, za kateri rešujemo enačbi $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Enačbo rešimo z *direktnim* ali *obratnim* vstavljanjem (oboje $\mathcal{O}(n^2)$).

direktno (L)	obratno (U)
$x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}$	$x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}x_j}{u_{ii}}$

12.10.3 Določen sistem

Določen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ekonomično računamo, da matriko A razcepimo. Primer tega je LU razcep (poglavje 12.9.2). Tedaj dobimo enačbo $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Najprej rešimo $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, nato pa $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

12.10.4 Simetričen sistem

Naj bo A pozitivno definitna matrika. Razcepimo jo lahko z razcepom Choleskega (poglavje **??**) in rešujemo podobno, kot pri LU razcepu.

12.10.5 Predoločen sistem in metoda najmanjših kvadratov

Predoločen sistem v splošnem nima rešitve. Lahko pa minimiziramo napako, torej namesto $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ iščemo

$$\min \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$$

Če vzamemo drugo normo $\|\bullet\|_2$, pravimo rezultatu *rešitev po metodi najmanjših kvadratov*. Če A ni polnega ranga, rešitev ni enolična.

Rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov je ekvivalentna rešitvi *normalnega* sistema

$$A^{\mathsf{t}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{t}}\mathbf{b}$$

Zaradi polnega ranga je matrika $A^{\mathsf{t}}A$ pozitivno definitna, zato lahko enačbo rešimo z razcepom Choleskega (poglavje **??**).

Naj bo Q ortogonalna matrika in $\mathbf{x}$ rešitev enačbe $\min \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$. Ker je Q v $\|\bullet\|_2$ izometrija, je $\mathbf{x}$ tedaj enolična rešitev tudi enačbe

$$\min \|QA\mathbf{x} - Q\mathbf{b}\|$$

Zato lahko na matriki opravimo QR razcep in dobimo rešitev po metodi najmanjših kvadratov. Normalni sistem se tedaj preobrazi v obliko

$$R\mathbf{x} = Q^{\mathsf{t}}\mathbf{b}$$

Reševanje normalnega sistema pri predoločenem sistemu ter vstavljanje z LU razcepom pri določenem sistemu sta oba hitrejša od QR razcepa s Householderjevimi rotacijami (vse reda $\mathcal{O}(mn^2)$), a je ta zaradi ortogonalnih transformacij numerično stabilnejši.

13 Vektorski račun

Vektor $\mathbf{A}$ je matematični objekt v točki prostora, ki pripada vektorskemu prostoru V nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ s poglavja 5.4. Vsak vektor $\mathbf{A}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev (kontravariantne) baze $[\hat{\mathbf{e}}_i]$

$$\mathbf{A} = A^i \hat{\mathbf{e}}_i \in \mathsf{V} \,,$$

kjer upoštevamo kontrahacijo v skladu z indeksno notacijo s poglavja 14.4. Za vektor mora veljati še, da se ob spremembi baze *ne* spremeni (vektor je *invarianten* za transformacije – izbire baze). Za vsaki bazi $[\hat{\mathbf{e}}_i]$ in $[\hat{\mathbf{e}}_{i'}]$ mora torej veljati

$$A^i \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{A} = \mathbf{A}' = A^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \,,$$

kjer običajni indeks i predstavlja vrednosti v bazi $[\hat{\mathbf{e}}_i]$, črtani indeks i' pa vrednosti v bazi $[\hat{\mathbf{e}}_{i'}]$.

Kovektor, *dualni vektor*, 1-*forma*, *linearni funkcional*, tudi *adjungirani* vektor je element *dualnega vektorskega prostora* V^*, ki je tudi vektorski prostor. Dualni vektorski prostor lahko definiramo kot *linearno* preslikavo $\mathsf{V}^* : \mathsf{V} \to \mathbb{F}$. Vsak kovektor $\mathbf{B}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev dualne (kovariantne) baze $[\hat{\mathbf{e}}_i]$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}^i B_i \in \mathsf{V}^*$$

in velja

$$\hat{\mathbf{e}}^i B_i = \mathbf{B} = \mathbf{B}' = \hat{\mathbf{e}}^{i'} B_{i'} \,.$$

Vsaki (kontravariantni) bazi $[\hat{\mathbf{e}}_i]$ lahko priredimo (kovariantno) *dualno*, *recipročno** bazo, tudi *kobazo* $[\hat{\mathbf{e}}^j]$, ki je baza V^*. Naravno jo definiramo z enačbo

$$\hat{\mathbf{e}}^i \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}^i \eta_{jk} \hat{\mathbf{e}}^k = \hat{\mathbf{e}}_k \eta^{ki} \hat{\mathbf{e}}_j = \delta^i{}_j \,,$$

kjer je $\underline{\underline{\eta}}$ psevdo-metrični tenzor. Velja namreč

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \eta_{ij} \hat{\mathbf{e}}^j \qquad \hat{\mathbf{e}}^i = \eta^{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \qquad \eta_{ij}\eta^{jk} = \eta^{ij}\eta_{jk} = \delta_i{}^k \,,$$

torej z metričnim tenzorjem lahko *višamo* oziroma *nižamo* indekse (naravni izomorfizem med V in V^*).

Baza $[\hat{\mathbf{e}}_{i'}]$ je linearna kombinacija baze $[\hat{\mathbf{e}}_i]$, zato lahko transformacijo med njima opišemo z linearnim endomorfizmom, ki mu pravimo *prehodna matrika* P s predpisom

$$\hat{\mathbf{e}}_{i'} = P_{i'}{}^i \hat{\mathbf{e}}_i \,.$$

Iz definicije P in invariantnosti tenzorja δ sledi

$$\hat{\mathbf{e}}^{i'} = \hat{\mathbf{e}}^i \left(P^{-1}\right)_i{}^{i'} \,,$$

torej se dualna baza transformira obratno kot baza. Ker sta vektor $\mathbf{A}$ in kovektor $\mathbf{B}$ invariantna za P, velja

$$A^{i'} = A^i \left(P^{-1}\right)_i{}^{i'} \qquad\qquad B_{i'} = P_{i'}{}^i B_i \,.$$

Glede na njihov način transformiranja rečemo, da so

C^i kontravar. komponenta	$\hat{\mathbf{e}}_i$ kontravar. bazni vektor
C_i kovar. komponenta	$\hat{\mathbf{e}}^i$ kovar. bazni vektor .

Kljub drugačnem poimenovanju opazimo, da se komponente vektorja in bazni vektorji, ki so indeksirani na istem kraju (zgoraj ali spodaj) enako transformirajo, torej transformacijsko pravilo dobimo z lege indeksa.

13.1 Psevdo-skalarni produkt

Če na vektor delujemo s kovektorjem, dobimo skalarni produkt vektorjev s poglavja 5.4.1, kjer je eden izmed njih adjungiran kovektor

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\right) = B_i \hat{\mathbf{e}}^i A^j \hat{\mathbf{e}}_j = B_i A^i = B^j \eta_{ji} A^i \ ,$$

torej metrični tenzor $\underline{\underline{\eta}}$ inducira psevdo-skalarni produkt, ki inducira psevdo-metriko. Produkt je skalarni produkt, če je $\underline{\underline{\eta}}$ pozitivno definiten teznor.

13.2 Vektorski produkt

Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^3$ z ortonormirano bazo $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}]$. *Vektorski produkt* $\bullet \times \bullet$ definiramo kot $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}\right)$$

Tedaj veljajo cikli

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathbf{x}} & \times & \hat{\mathbf{y}} & = & \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{y}} & \times & \hat{\mathbf{z}} & = & \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{z}} & \times & \hat{\mathbf{x}} & = & \hat{\mathbf{y}} \end{array}$$

Če za vektor $\mathbf{r} = r^i \hat{\mathbf{e}}_i$ velja, da so nekateri r^i enaki 0, je vektorski produkt med dvema takima vektorjema lažje računati algebrajsko.

Pri vsakem vektorskem produktu lahko vektorja razvijemo po taki bazi, da za en vektor velja, da ima dve komponenti ničelni.

Vektorski produkt za $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ lahko zapišemo tudi kot produkt antisimetrične matrike in vektorja

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b}$$

Za $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ veljajo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a} \times \mathbf{b} & = & -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} & = & 0 \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) & = & (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) & = & \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) & = & \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - a^2 \mathbf{b} \\ \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 & = & \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \end{array}$$

"Vektor", ki ga dobimo z vektorskim produktom, *ni* invarianten na transformacije, saj ga definiramo z bijekcijo (Hodgeov dual) bivektorja s poglavja **??**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \star(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \ ,$$

ki *je* invarianten na transformacije. Bijekcija deluje, saj je v trorazsežnem prostoru število baznih bivektorjev ustrezno ($= 3$). Da je vektorski produkt zares bivektor lahko ugotovimo tudi preko dimenzijske analize.

Ker je vektorski produkt zares bivektor, v fiziki ne smemo seštevati vektorjev in bivektorjev.

13.3 Krivočrtni koordinatni sistemi

Če (skoraj povsod) bijektivno parametriziramo (evklidski) prostor, to inducira bazo $\hat{\mathbf{i}} = H_i \partial_i \mathbf{r}$, kjer za normirano bazo velja $H_i = \|\partial_i \mathbf{r}\|^{-1}$.

Za ortonormirano bazo velja še $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \delta_{ij}$ ter $g_{ij} = \delta_{ij}$ in zato $\nabla x^i = \partial_i x^i$

13.3.1 Kartezični sistem

Bazo kartezičnega sistema tvorijo $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Vsak vektor lahko zapišemo kot $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ z ustreznimi x, y, z. Veljajo odvodi

$$\partial_x \mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} \qquad \partial_y \mathbf{r} = \hat{\mathbf{y}} \qquad \partial_z \mathbf{r} = \hat{\mathbf{z}}$$

Baza je ortonormirana in velja $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ ter drugi ciklični permutaciji. Kartezični sistem je edini *linearni* koordinati sistem, torej edini s translacijsko simetrijo.

13.3.2 Cilindrični sistem

Bazo *cilindričnega* koordinatnega sistema tvorijo

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \hat{\mathbf{x}} \cos\varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin\varphi \\
\hat{\varphi} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin\varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos\varphi \\
\hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Vsak vektor lahko zapišemo kot $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$ z ustreznimi ρ, φ, z. Veljajo odvodi

$$\partial_\rho \mathbf{r} = \hat{\rho} \qquad \partial_\varphi \mathbf{r} = \rho\hat{\varphi} \qquad \partial_z \mathbf{r} = \hat{\mathbf{z}}$$

Baza je ortonormirana in velja $\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{\mathbf{z}}$ ter drugi ciklični permutaciji.

13.3.3 Sferični sistem

Bazo *sferičnega* koordinatnega sistema tvorijo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \sin\vartheta \cos\varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin\vartheta \sin\varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos\vartheta \\
\hat{\vartheta} &= \hat{\mathbf{x}} \cos\vartheta \cos\varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos\vartheta \sin\varphi - \hat{\mathbf{z}} \sin\vartheta \\
\hat{\varphi} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin\varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos\varphi
\end{aligned}$$

Vsak vektor lahko zapišemo kot $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ z ustreznimi r, φ, ϑ. Veljajo odvodi

$$\partial_r \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} \qquad \partial_\vartheta \mathbf{r} = r\hat{\vartheta} \qquad \partial_\varphi \mathbf{r} = (r \sin\vartheta)\hat{\varphi}$$

Baza je ortonormirana in velja $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\vartheta} = \hat{\varphi}$ ter drugi ciklični permutaciji.

13.4 Diferencialni operatorji

Diferencialni operator ∇ definiramo kot

$$\nabla_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i \in \mathbb{N} \cap [1, D]$$

Z njim definiramo:

$$\begin{array}{ccccc} \text{gradient} & = & \nabla f & = & \partial_i f \\ \text{divergenca} & = & \nabla \cdot \mathbf{f} & = & \partial^i f_i \\ \text{rotor} & = & \nabla \times \mathbf{f} & = & \varepsilon_i{}^j{}_k \partial_j f^k \\ \text{Laplaceov operator} & = & \nabla \cdot \nabla f & = & \partial_i \partial^i f \\ \text{smerni odvod} & = & (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{f} & = & u^j \partial_j f_i \end{array}$$

Naj bodo

$$\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{i}} \qquad r = \|\mathbf{r}\| \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{K} \text{ konstantni vektor}$$

Tedaj v evklidskem prostoru veljajo (izrazi z vektorskim produktom ali rotorjem za $D = 3$)

$$\begin{aligned} &\text{Gradient :} \\ \nabla(\psi + \phi) &= \nabla\psi + \nabla\phi \\ \nabla(\psi\phi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\ \nabla(\psi\mathbf{A}) &= \nabla\psi \otimes \mathbf{A} + \psi\nabla\mathbf{A} \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla(\psi \circ \phi) &= (\partial\psi \circ \phi)\nabla\phi \\ \nabla(\psi \circ \mathbf{A}) &= (\nabla\mathbf{A}) \cdot (\nabla\psi \circ \mathbf{A}) \\ \nabla\mathbf{r} &= \mathrm{id} \\ \nabla r^n &= n r^{n-1}\hat{\mathbf{r}} = n r^{n-2}\mathbf{r} \\ \nabla(\mathbf{K} \cdot r^n\hat{\mathbf{r}}) &= r^{n-1}\left(\mathbf{K} + (n-1)\left(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}}\right) \\ \nabla(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{K} \\ \nabla(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{r}\left(\mathbf{K} - \left(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}}\right) \\ \nabla\|\mathbf{K} \times \mathbf{r}\|^2 &= 2\big(K^2\mathbf{r} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{K}\big) = -2\mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Divergenca :

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0\\
\nabla\cdot(\mathbf{K}\times\mathbf{r}) &= 0\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}\\
\nabla\cdot(\psi\mathbf{A}) &= \psi\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\psi\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\circ\phi) &= (\partial\mathbf{A}\circ\phi)\cdot\nabla\phi\\
\nabla\cdot(r^n\hat{\mathbf{r}}) &= (n-1+D)r^{n-1}\quad (n\neq 1-D)\\
\nabla\cdot r^{1-D}\hat{\mathbf{r}} &= \begin{cases} 4\pi\delta(\mathbf{r}) & D=3\\ 2\pi\delta(\mathbf{r}) & D=2\\ 2\delta(x) & D=1\end{cases}\\
\nabla\cdot\mathbf{r} &= D\\
\nabla\cdot\hat{\mathbf{r}} &= \frac{D-1}{r}\qquad (D\neq 1)\\
\nabla\cdot(\mathbf{K}\times(\mathbf{K}\times\mathbf{r})) &= 2K^2
\end{aligned}
$$

Rotor :

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\psi) &= \mathbf{0}\\
\nabla\times(\phi\circ r)\hat{\mathbf{r}} &= \nabla\times r^n\hat{\mathbf{r}}=\nabla\times\mathbf{r}=\nabla\times\hat{\mathbf{r}}=0\\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(\psi\mathbf{A}) &= \psi(\nabla\times\mathbf{A})-(\mathbf{A}\times\nabla)\psi=\psi(\nabla\times\mathbf{A})+(\nabla\psi)\times\mathbf{A}\\
\nabla\times(\psi\nabla\phi) &= \nabla\psi\times\nabla\phi\\
\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}\,(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}\\
\nabla\times(\mathbf{A}\circ\phi) &= \nabla\phi\times(\partial\mathbf{A}\circ\phi)\\
\nabla\times(\psi\mathbf{r}) &= -(\mathbf{r}\times\nabla)\psi=(\nabla\psi)\times\mathbf{r}\\
\nabla\times(\mathbf{K}\times\mathbf{r}) &= 2\mathbf{K}
\end{aligned}
$$

Smerni odvod :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} &= \frac{1}{2}\Big(\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) - \\
&\quad - \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})\Big) \\
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\left(r^n\hat{\mathbf{r}}\right) &= r^{n-1}\left((n-1)\left(\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\right) \\
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{r} &= \nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}\right) = \mathbf{A} \\
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{2}\Big(\nabla(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \nabla\times(\mathbf{A}\times\hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) - \\
&\quad - \mathbf{A}\times(\nabla\times\hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\hat{\mathbf{r}})\Big) \\
(\mathbf{r}\cdot\nabla)\phi &= x_i\partial_i(\phi) = r\partial_r\phi \qquad (za\ \phi(\mathbf{r}) = \phi(r)) \\
(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} &= x_i\partial_i(A_j) = r\partial_r\mathbf{A} \qquad (za\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(r))
\end{aligned}$$

Drugi odvodi :

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\psi) &= \nabla^2\psi = \Delta\psi \\
\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) &= \nabla^2\mathbf{A} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) &= \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi \\
\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi &= \nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \\
\nabla^2(\phi\psi) &= \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \left(\nabla^2\phi\right)\psi \\
\nabla^2(\psi\mathbf{A}) &= \mathbf{A}\nabla^2\psi + 2(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{A} + \psi\nabla^2\mathbf{A} \\
\nabla^2(\varphi(\psi)) &= \varphi''(\psi)\|\nabla\psi\|^2 + \varphi'(\psi)\nabla^2\psi \\
\nabla^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot\nabla^2\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\nabla^2\mathbf{A} + 2\nabla\cdot((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})) \\
\nabla^2 r^n &= n(n-2+D)r^{n-2} \quad (n\neq 2-D) \\
\nabla^2 r^{2-D} &= \begin{cases} -4\pi\delta(\mathbf{r}) & D=3 \\ 0 & D=2 \\ 2\delta(\mathbf{r}) = 2\delta(x) & D=1 \end{cases} \\
\nabla^2\log\frac{r}{r_0} &= 2\pi\delta(\mathbf{r}) \qquad (D=2) \\
\nabla^2\mathbf{A} &= \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla^2\|\mathbf{K}\times\mathbf{r}\|^2 &= 2\left(D-1\right)K^2
\end{aligned}$$

13.5 Stokesov izrek

Naj bo ω diferencialna forma, D domena, ∂D pa rob domene. Tedaj velja

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

Za trorazsežen volumen V, dvorazsežno ploskev S in enorazsežno krivuljo l veljajo posebni primeri

Per partes (1D)	$\displaystyle\int_l \mathrm{d}f = f\big\rvert_{\partial l}$
Greenova formula (2D)	$\displaystyle\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial S} (g\mathrm{d}x + f\mathrm{d}y)$
Integral gradienta (3D)	$\displaystyle\iiint_V \nabla f \ \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} f \ \mathrm{d}\mathbf{S}$
Stokesov izrek (3D)	$\displaystyle\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \ \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$
Gaussov izrek (3D)	$\displaystyle\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \ \mathrm{d}\mathbf{V} = \oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

14 Tenzorski račun

14.1 Osnove tenzorjev

Tenzor lahko definiramo kot element tenzorskega produkta s poglavja 14.2 vektorskih prostorov

$$T \in \mathsf{V} \otimes \mathsf{W} \otimes \ldots \otimes \mathsf{U}\,,$$

kjer so vektorski prostori kovariantni in nerazcepni ter dualni (kontravariantni) vektorski prostori. Tenzor je torej multilinearna preslikava. Bolj nazorno tenzor zapišemo

$$T \in \underbrace{\mathsf{V} \otimes \mathsf{W} \otimes \ldots \otimes \mathsf{U}}_{k} \otimes \underbrace{\mathsf{Q}^* \otimes \mathsf{R}^* \otimes \ldots \otimes \mathsf{S}^*}_{l}\,,$$

a upoštevamo, da je vrstni red tenzorskih produktov v splošnem tenzorju lahko drugačen (ne velja, da najprej nastopajo kontravariantni prostori, nato pa kovariantni).

Tip (včasih tudi rang) tenzorja predstavljata števili ko- in kotravariantnih nerazcepnih prostorov, zgornji tenzor T je element prostora tipa (k, l).

Za tenzor poznamo dve elementarni operaciji – tenzorski produkt (14.2) in kontrahacijo (14.3). Z njima par prostorov zmnožimo in ju s tem ohranimo, ali pa ju kontrahiramo in tako "uničimo". Zaradi te svobode izbire operacij, na vsak tenzor lahko gledamo na več načinov – s produktom in kontrahacijo lahko naravno definiramo veliko različnih preslikav.

Najpogosteje se srečamo s sledečimi tenzorji, vsak tenzor razumemo kot preslikavo, navedene so najbolj tipične.

- skalarji iz $\mathbb{F}$, ki predstavljajo preslikave $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ oz. $\mathsf{V} \to \mathsf{V}$.
- vektorji iz V, ki predstavljajo preslikave $\mathbb{F} \to \mathsf{V}$ oz. $\mathsf{V}^* \to \mathbb{F}$
- kovektorji iz V^*, ki predstavljajo preslikave $\mathbb{F} \to \mathsf{V}^*$ oz. $\mathsf{V} \to \mathbb{F}$
- preslikavami vektorjev iz $\mathsf{W} \otimes \mathsf{V}^*$, ki predstavljajo preslikave $\mathsf{V} \to \mathsf{W}$
- preslikavami kovektorjev iz $\mathsf{W}^* \otimes \mathsf{V}$, ki predstavljajo preslikave $\mathsf{V}^* \to \mathsf{W}^*$
- psevdo-skalarni produkti iz $\mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V}$, ki predstavljajo bilinearne* (konjugirano linearne v enem členu) preslikave $\mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathbb{F}$
- zunanji produkti iz $\mathsf{W} \otimes \mathsf{V}$, ki predstavljajo preslikave $\mathbb{F} \to \mathsf{W} \otimes \mathsf{V}$

Tenzor lahko razvijemo po bazi, ki je zaradi multilinearnosti tenzorskega produkta tenzorski produkt različnih (v splošnem, lahko so enake) baz in kobaz, katere bazne vektorje predstavljajo tenzorski produkti baznih vektorjev in kovektorjev. Dimenzija baze (tenzorskega prostora) je torej produkt dimenzij baz vektorskih prostorov. Dobimo razvoj

$$T = T^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} \hat{\mathbf{e}}_{j_1} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{j_k} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_1} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_l}\,.$$

Ta zapis ni zares pravilen, saj tenzorski produkt v splošnem *ni* komutativen, zato je vrsti red produktov baznih vektorjev odvisen od tenzorja (ni omejitve, ki prepoveduje mešanje baznih vektorjev in kovektorjev v vrstnem redu), prav tako morajo biti komponente tenzorja $T^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l}$ v splošnem urejene. Ker je tenzor *invarianten na transformacije*, morajo biti indeksi v komponenti nasprotiležeči indeksom v baznem vektorju (eden zgoraj, eden spodaj).

14.1.1 Transformacijska pravila tenzorjev

Komponente tenzorja so enolično definirane z izbiro baze, zato izbira baze inducira koordinatni izomorfizem med tenzorjem in njegovimi komponentami. Komponente lahko zato obravnavamo kot tenzor v prostoru $\mathbb{F}^D$, kjer je dimenzija produkt dimenzij vektorskih prostorov $D = \prod_{i=1}^{k+l} D_i$. Ta tenzor imenujemo *koordinatni tenzor*. Invarianten je na izbiro baze $\mathbb{F}^D$, ne pa na izbiro baze vektorskega prostora tenzorja, saj se morajo komponente tenzorja ustrezno transformirati, da je "pravi" tenzor invarianten.

Tenzor ni odvisen od izbire koordinatnega sistema, zato se morajo komponente transformirati obratno kot baza. Bazo tenzorja tipa (k, l) predstavlja produkt $k + l$ vektorskih baz. Naj bo $\mathcal{B}$ ena od takih vektorskih baz. Bazo $\mathcal{B}'$ lahko zapišemo z linearno kombinacijo baze $\mathcal{B}$, ki jo podamo s prehodno matriko P. Bazo $\mathcal{B}$ indeksiramo z indeksom i, bazo $\mathcal{B}'$ pa z indeksom i', bazne vektorje tako ločimo (v smislu kateri bazi pripadajo) po indeksih, sta pa še vedno bazi istega prostora. Za ko- in kontravariantno vektorsko bazo ter komponente vektorjev tako velja

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{i'} &= P_{i'}{}^{i}\hat{\mathbf{e}}_i & \hat{\mathbf{e}}^{i'} &= \hat{\mathbf{e}}^{i}\left(P^{-1}\right)_i^{\ i'} \\
v_{i'} &= P_{i'}{}^{i} v_i & v^{i'} &= v^{i}\left(P^{-1}\right)_i^{\ i'} \ .
\end{aligned}$$

Pri tenzorju bazo predstavlja produkt vektorskih baz, zato se pri spremenbi baze transformirajo vse vektorske baze. Za vsako od teh trasformacij definiramo prehodno matriko in dobimo

$$\begin{aligned}
T &= T^{j'_1 j'_2 \ldots j'_l}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}\left(\hat{\mathbf{e}}_{j'_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j'_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j'_l}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_k}\right) = \\
&= T^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(\hat{\mathbf{e}}_{j_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j_l}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right) = \\
&= T^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\Big(\left(P_1^{-1}\right)_{j_1}^{\ j'_1}\hat{\mathbf{e}}_{j'_1}\otimes\left(P_2^{-1}\right)_{j_2}^{\ j'_2}\hat{\mathbf{e}}_{j'_2}\otimes\ldots\otimes\left(P_k^{-1}\right)_{j_k}^{\ j'_k}\hat{\mathbf{e}}_{j'_k}\otimes \\
&\qquad \otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_1}\left(Q_1\right)_{i'_1}^{\ i_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_2}\left(Q_2\right)_{i'_2}^{\ i_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_l}\left(Q_l\right)_{i'_l}^{\ i_l}\Big) = \\
&= \left(Q_1\right)_{i'_1}^{\ i_1}\left(Q_2\right)_{i'_2}^{\ i_2}\ldots\left(Q_l\right)_{i'_l}^{\ i_l} T^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(P_1^{-1}\right)_{j_1}^{\ j'_1}\left(P_2^{-1}\right)_{j_2}^{\ j'_2}\ldots\left(P_k^{-1}\right)_{j_k}^{\ j'_k} \\
&\qquad \left(\hat{\mathbf{e}}_{j'_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j'_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}_{j'_l}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_2}\otimes\ldots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{i'_k}\right)
\end{aligned}$$

Tako dobimo, da pri transformaciji komponent tenzorja za vsak indeks dobimo svojo prehodno matriko, saj velja

$$T^{j'_1 j'_2 \ldots j'_k}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_l} = \left(Q_1\right)_{i'_1}^{\ i_1}\left(Q_2\right)_{i'_2}^{\ i_2}\ldots\left(Q_l\right)_{i'_l}^{\ i_l} T^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l}\left(P_1^{-1}\right)_{j_1}^{\ j'_1}\left(P_2^{-1}\right)_{j_2}^{\ j'_2}\ldots\left(P_k^{-1}\right)_{j_k}^{\ j'_k} \ .$$

Izraz se poenostavi v primeru tenzorja tipa $(1, 1)$, saj dobimo matrični produkt

$$T_{i'}{}^{j'} = Q_{i'}{}^{i} T_i{}^{j}\left(P^{-1}\right)_j^{\ j'} = \left(QTP^{-1}\right)_{i'}^{\ j'} \ .$$

14.1.2 Tenzorji, sestavljeni iz enakih prostorov

V fiziki imamo praviloma opravka s tenzorji oblike $\mathsf{V}\otimes\mathsf{V}\otimes\ldots\otimes\mathsf{V}^*\otimes\mathsf{V}^*\otimes\ldots\mathsf{V}^*$, kjer vektorski prostor V predstavlja prostor, v katerem živimo. Da so vsi vektorski prostori tenzorja enaki, implicitno upoštevamo pri izbiri baze, saj praviloma definiramo samo bazo (enega) vektorskega prostora. To upoštevamo še pri definiciji kontrahacije v indeksni notaciji. Tam indeksa (prostora) kontrahiramo, če sta enako označena, a morata za kontrahacijo vektorska prostora biti dualna (prostor in dualni prostori *istega* prostora).

V tem primeru se poenostavi tudi transformacijsko pravilo za komponente tenzorja. Ker imajo vsi prostori enake (ali dualne) baze, so vse prehodne matrike enake in dobimo izraz

$$T^{j_1'j_2'\ldots j_k'}_{i_1'i_2'\ldots i_l'} = P_{i_1'}{}^{i_1}P_{i_2'}{}^{i_2}\ldots P_{i_l'}{}^{i_l}T^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_l}\left(P^{-1}\right)_{j_1}{}^{j_1'}\left(P^{-1}\right)_{j_2}{}^{j_2'}\ldots\left(P^{-1}\right)_{j_k}{}^{j_k'} .$$

Ker so vektorski prostori enaki, nam transformacijski predpis enolično določi tip tenzorja. V primeru tenzorja tipa $(1,1)$ (torej endomorfizma) se izraz dodatno poenostavi

$$T_{i'}{}^{j'} = P_{i'}{}^{i}T_i{}^{j}\left(P^{-1}\right)_j{}^{j'} = \left(PTP^{-1}\right)_{i'}{}^{j'} .$$

V evklidskem prostoru indekse tenzorja lahko v dani bazi prosto višamo in nižamo. Pri tem moramo upoštevati, da se tip tenzorja spremeni, saj z višanjem ali nižanjem izvedemo naravno preslikavo

$$\text{tenzor tipa } (k,l) \to \text{tenzor tipa } (k\pm 1, l\mp 1) .$$

Pri tem moramo upoštevati, da se tenzorja tipa (k,l) in tipa $(k\pm1, l\mp1)$ drugače transformirata, zato indekse lahko poljubno višamo samo v primeru konstantne baze (je ne transformiramo). Alternativno bi indekse lahko poljubno višali in si zapomnili izvoren tip tenzorja (to pogosto storimo v primerih tenzorjev tipa $(1,1)$).

Primer fizikalnega prostora, ki ni prostor, v katerem živimo, je prostor spinorjev. Tenzorskega produkta "običajnega" in spinskega prostora zato ne moremo obravnavati s tem formalizmom.

14.1.3 Grafična upodobitev tenzorjev

Tenzorji tipa $(1,1)$, ki predstavljajo endomorfizme, imajo v evklidskem prostoru $\mathbb{F}^n$ do n lastnih vektorjev. Če ima vseh n lastnih vektorjev (je diagonalizabilen), lahko tenzor upodobimo, da narišemo vse lastne osi. Da ne izgubimo podatka o lastni vrednosti posamezne lastne osi, namesto celotnih osi narišemo daljice, ki segajo do lastne vrednosti. Ker ima lastni vektor $-\mathbf{v}$ enako lastno vrednosti kot lastni vektor $\mathbf{v}$, je pravilno, da daljica sega od $-\lambda\hat{\mathbf{n}}$ do $\lambda\hat{\mathbf{n}}$, kjer sta λ lastna vrednost in $\hat{\mathbf{n}}$ normirani lastni vektor. Pri taki upodobitvi tenzorja obdržimo vse informacije z izjemo predznakov lastnih vrednosti.

Tak tenzor tipa $(1,1)$ predstavlja endomorfizem, pri katerem vektor najprej projiciramo na lastne osi andjungiranega tenzorja, nato pa projekcije premaknemo na lastne osi tenzorja in jih reskaliramo z lastnimi vrednostmi. V splošnem s to metodo s tenzorjem težko grafično preslikamo vektor, saj bi morali narisati še adjungiran tenzor.

Če je tenzor tipa $(1,1)$, ki predstavlja endomorfizem v evklidskem prostoru, sebi-adjungiran, je ortogonalno diagonalizabilen, torej ima vse lastne vrednosti, lastne osi so pa pravokotne. Ker je sebi-adjungiran, vektor grafično preslikamo, da ga projiciramo na vse lastne osi, projekcije reskaliramo z lastnimi vrednostmi prostorov ter reskalirane projekcije seštejemo.

14.2 Tenzorski produkt

Tenzorski produkt $\bullet \otimes \bullet$ vektorskih prostorov U in V definiramo kot *bilinearno* preslikavo

$$\bullet \otimes \bullet : \mathsf{U} \times \mathsf{V} \to \mathsf{U} \otimes \mathsf{V} \qquad\qquad \bullet \otimes \bullet : (u, v) \mapsto u \otimes v\,,$$

torej da je preslikava linearna v obeh argumentih. Tenzorski produkt vektorskih prostorov sestavlja vektorski prostor, zato je tenzorski produkt več vektorskih prostorov definiran. Večkratni tenzorski produkt je *multilinearen* (linearen v vseh komponentah) in *asociativen*, v splošnem pa *ni* komutativen (vendar komutira do izomorfizma (permutacije faktorjev) natančno). Vektorske prostore, ki jih lahko zapišemo s tenzorskim produktom vektorskih prostorov, imenujemo *razcepni*, če pa to ni možno, pa *nerazcepni.*

V fiziki namesto izraza *vektor* pogosto uporabljamo izraz *tenzor*. Tenzorski produkt tako razumemo kot preslikavo iz dveh tenzorskih prostorov v nov tenzorski prostor.

V primerjavi z ostalimi produkti (skalarni, vektorski, ...) si tenzorski produkt lahko predstavljamo kot kartezični produkt z dodano lastnostjo multilinearnosti. Zato (podobno kot kartezični) tenzorski produkt s faktorjema "ne stori ničesar".

Pri tenzorskem produktu se tipi seštevajo po komponentah, torej

$$\text{tenzor tipa } (k, l) \otimes \text{tenzor tipa } (k', l') = \text{tenzor tipa } (k + k', l + l')\,.$$

14.3 Kontrahacija

Kontrahacijo C (standardne oznake ni, saj jo v indeksni notaciji zapišemo "implicitno") definiramo kot preslikavo iz vektorskega prostora in njegovega duala nad poljem $\mathbb{F}$ v isto polje

$$C : \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V} \to \mathbb{F} \qquad\qquad C : v^* \otimes w \mapsto v^*(w)\,.$$

Naj bo V nerazcepen. Kontrahacijo lahko razumemo kot preslikavo dveh vektorjev iz dualnim prostorov, torej tenzor tipa $(1, 0)$ in tenzor tipa $(0, 1)$, kontrahacija tedaj predstavlja psevdoskalarni produkt teh dveh vektorjev. Če preslikavo obravnavamo kot preslikavo enega tenzorja iz prostora $\mathsf{V}^*\otimes\mathsf{V}$, torej tenzorja tipa $(1, 1)$ (izomorfen nekemu endomorfizmu v V), pa kontrahacija predstavlja sled tega tenzorja.

Kontrahacijo lahko posplošimo v preslikavo

$$C : \mathsf{U} \otimes \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V} \to \mathbb{F} \qquad\qquad C : u \otimes v^* \otimes w \mapsto u \otimes v^*(w)\,,$$

ki jo lahko razumemo kot preslikavo tenzorja, katerega komponenti iz V in V^* kontrahiramo v skalar, u pa predstavlja ostale komponente. Pri tem izgubimo eno kovariantno in eno kontravariantno komponento, zato kontrahacija preslika

$$C : \text{tenzor tipa } (k, l) \to \text{tenzor tipa } (k - 1, l - 1)\,.$$

Za tako kontrahacijo velja, da drug drugemu dualna vektorska prostora ne nastopata nujno drug za drugim. Tipično tako kontrahacijo srečamo v notaciji, kjer vrstni red produktov ni pomemben, sicer pa kontrahacijo izvedemo samo na zaporednih prostorih.

14.4 Indeksna notacija

Indeksna notacija sledi iz invariantnosti tenzorjev in naravnih operacij med vektorski prostori in njihovimi dualnimi prostori.

Pri indeksni notaciji namesto s "pravimi" tenzorji računamo s koordinatami tenzorji, torej s (skalarnimi) komponentami. Tenzor A v indeksni notaciji zapišemo kot indeksiranega zgoraj in spodaj z $i_1 i_2 \dots i_l$ in $j_1 j_2 \dots j_k$ v obliki

$$A^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_l} .$$

Indeks se nahaja spodaj, čee je komponenta *kovariantna* ter zgoraj, čee je *kontravariantna.*

Če so indeksi medsebojno zamaknjeni, to označuje njihovo urejenost od leve proti desni. V primeru tenzorja tipa $(1, 1)$ je koordinatni tenzor *koordinatna matrika*, katere prvi indeks predstavlja prvi indeks tenzorja, drugi pa drugega.

Pri razvoju tenzorja po bazi seštejemo po vseh indeksih, ki vedno nastopijo dvakrat – v komponenti in v baznem vektorju. Če imata tenzorja enako bazo (in bazne vektorje indeksirane z enakimi indeksi), lahko bazne vektorje izpostavimo in seštevamo komponente. V indeksni notaciji je torej smiselno seštevati samo tenzorje z enako imenovanimi indeksi. Če imata v bazi tenzorja dva bazna vektorja (enake vektorske baze) enak indeks, bi to vodilo v nesmiselno vsoto. Zato v tem primeru par dualnih baznih vektorjev skalarno zmnožimo, namesto da bi ju zmnožili tenzorsko. Po definiciji dualnih vektorjev je rezultat 1, v vsoti pa ostaneta še pripadajoči komponenti dualnih vektorjev, ki sta prav tako dualni. Vsota teh komponent tedaj predstavlja skalarni produkt koordinatnih vektorjev v $\mathbb{F}^n$. Ker je skalar, ta produkt ni odvisen od izbire baze. V indeksni notaciji to pomeni, da po ponovljenjem indeksu seštevamo. Če imajo v bazi tenzorja enake indekse trije tenzorji ali več, to vodi v nesmiselno vsoto, ki je ne moremo "popraviti", kot smo to storili v primeru dveh. Tako dobimo pravila za seštevanje in množenje.

- V vsoti tenzorjev morajo vsi tenzorji imeti enako množico indeksov (lahko so v drugačnem vrstnem redu). Če preimenujemo indekse, jih moramo zato preimenovati vsem tenzorjem v vsoti.
- *Produkt* tenzorjev razumemo kot nov tenzor z indeksi vseh pripadajočih tenzorjev.
- Pri tenzorju lahko posamesni indeks najdemo večkrat:
  - Enkrat – indeks služi kot indeks produktnega tenzorja.
  - Dvakrat – po ponovljenem indeksu seštevamo (indeksa *kontrahiramo*), npr. za tenzor z dvema indeksoma velja

    $$A_i{}^k B_k^j \iff \sum_k A_i{}^k B_k^j .$$

    V paru indeksov mora eden izmed njiju nastopati *zgoraj*, eden pa *spodaj.* Indeks, po katerem seštevamo, v rezultatu ne nastopa, zato ga lahko preimenujemo.
  - Trikrat ali več – zapis je napačen. Na to moramo paziti, če preimenujemo indeks v vsoti.

14.5 Posebni tenzorji

Metrični tenzor obravnavamo v poglavju z vektorji (morda bi bilo bolje tu).

14.5.1 Kroneckerjev delta tenzor

Kroneckerjev delta tenzor definiramo kot indentični endomorfizem

$$\delta : \mathsf{V} \to \mathsf{V} \qquad\qquad \delta : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\,.$$

V indeksni notaciji dobimo

$$\delta_i^{\ j} = \delta^j_{\ i} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Velja $T_{i_1 i_2 \ldots i_n j}\delta^j_k = T_{i_1 i_2 \ldots i_n k}$, torej δ^j_i lahko razumemo kot istoimenovanje indeksov i in j. Naj bo dimenzija prostora $D = \dim \mathsf{V}$. Velja

$$\delta^i_i = D$$

14.5.2 Levi-Civitajev tenzor

Levi-Civitajev psevdotenzor definiramo kot

$$\widetilde{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma) & \sigma \text{ je permutacija} \\ 0 & \sigma \text{ ni permutacija} \end{cases} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

V evklidskem prostoru je Levi-Civitajev psevdotenzor tenzor. Je *antisimetričen*, zato lahko z njim lahko zapišemo vektorski produkt z ortonormirano bazo evklidskega $\mathbb{R}^3$ v indeksni notaciji

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon^i_{\ jk} u^j v^k \hat{\mathbf{e}}_i\,.$$

Za komponente torej velja $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i = \varepsilon^i_{\ jk} u^j v^k$. Ker imamo ortonormirano bazo, indekse poljubno višamo in nižamo. Velja

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \qquad\qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \qquad\qquad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$$

14.5.3 Rotacijski tenzor

Rotacijski tenzor Q v evklidskem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^N$ za rotacijo okrog vektorja $\mathbf{n}$ (je endomorfizem) lahko zapišemo kot

$$Q_i^{\ j}(\phi) = (\exp(\phi\Omega))_i^{\ j} \qquad \Omega_i^{\ k} = \varepsilon_i^{\ jk} n_j$$

Ali pa z *Rodriguesovo formulo*

$$Q_i^{\ j}(\phi) = (1 - \cos\phi) n_i n^j + (\cos\phi)\,\delta_i^{\ j} + (\sin\phi)\,\varepsilon_i^{\ jk} n_k$$

14.6 Simterični tenzor tipa 2 v ortonormirani bazi

V fiziki se pogosto srečamo s simetričnimi tenzorji v evkliskem $\mathbb{R}^3$. Ti so ortogonalno diagonalizabilni, torej so lastni vektorji z različnimi lastnimi vrednosti pravokotni. Naj bo $\underline{\underline{A}}$ simetričen tenzor tipa $(1,1)$, ki ga obravnavamo kot endomorfizem. Koordinatni tenzor takega tenzorja je koordinatna matrika, ki jo določa izbira baze prostora.

a) Pogosto se srečamo s tenzorjem, pri katerem en bazni vektor leži v eni izmed lastnih osi. Tedaj drugi dve lastni osi ležita v ravnini, ki jo razpenjata ostala dva bazna vektorja. Zato se problem poenostavi na dvorazsežnega in trivialnega enorazsežnega.

Naj bo $\mathcal{E}$ standardna baza $\mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B}$ za kot φ zavrtena *lastna* baza za A. Tedaj velja

$$\begin{aligned}
[A]_\mathcal{B} &= \begin{bmatrix} A_\parallel & \\ & A_\perp \end{bmatrix} & [A]_\mathcal{E} &= \begin{bmatrix} A_\parallel \cos^2\varphi + A_\perp \sin^2\varphi & (A_\parallel - A_\perp)\sin\varphi\cos\varphi \\ (A_\parallel - A_\perp)\sin\varphi\cos\varphi & A_\parallel \sin^2\varphi + A_\perp\cos^2\varphi \end{bmatrix} \\
\left[A^{-1}\right]_\mathcal{B} &= \begin{bmatrix} A_\parallel^{-1} & \\ & A_\perp^{-1} \end{bmatrix} & \left[A^{-1}\right]_\mathcal{E} &= \frac{1}{A_\parallel A_\perp}\begin{bmatrix} A_\parallel \sin^2\varphi + A_\perp \cos^2\varphi & (A_\perp - A_\parallel)\sin\varphi\cos\varphi \\ (A_\perp - A_\parallel)\sin\varphi\cos\varphi & A_\parallel \cos^2\varphi + A_\perp\sin^2\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) Predpostavimo, da je A enoosni tenzor, torej, da ima dve različni lastni vrednosti, ki ju označimo

$$A_\parallel(1-\text{kratna}) \qquad \text{in} \qquad A_\perp(2-\text{kratna})$$

Včasih nobena izmed lastnih osi ne leži v ravnini, ki jo razpenjata bazna vektorja. Označimo enotski lastni vektor $\hat{\mathbf{n}}$, ki leži v lastni osi z lastno vrednostjo $A_\parallel$. Tedaj tenzor lahko zapišemo kot vsoto izotropnega in enoosnega tenzorja z eno neničelno lastno vrednostjo

$$\underline{\underline{A}} = A_\perp + (A_\parallel - A_\perp)\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$$

Naj bo $\mathbf{a}$ vektor. Tedaj velja $(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}})\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a})$. Zaradi simetrij prostor običajno parametriziramo s sferičnimi koordinatami.

15 Diferencialna geometrija

Vektorsko polje leži v prostoru, v katerem je vsaki točki p pripisan vektor. Definiramo ga kot preslikavo iz prostora v *tangentni prostor*

$$\mathsf{V} : D \to T_D \qquad\qquad p \mapsto T_p \, .$$

Z vektorskim poljem V lahko definiramo *kovektorsko polje* V^*, ki je preslikava iz prostora v *kotangentni prostor*

$$\mathsf{V}^* : D \to {T^*}_D \qquad\qquad p \mapsto {T^*}_p \, .$$

Vektor s tangentnega prostora $\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i \in T_p$ leži v enorazsežnem tangentnem podprostoru − krivulji. Naj ta krivulja leži v prostoru, lokalno parametriziranim z x^i in bo parametrizirana s skalarjem λ, torej je krivulja $x^i(\lambda)$. Tedaj velja

$$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \, .$$

Mnogoterost je topološki prostor, ki je lokalno homeomorfen $\mathbb{R}^n$. Predstavljamo si jih lahko kot *hipertelesa*, ki nimajo ostrih robov.

Množici A in B sta *difeomorfni*, čee obstaja gladka bijektivna preslikava med njima.

Koordinatni sistem $\mathcal{U}$ je odprta podmnožica mnogoterosti $\mathcal{M}$ z bijekcijo

$$\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

da je množica $\phi(\mathcal{U})$ odprta v $\mathbb{R}^n$.

C^∞ *atlas* je indeksirana množica koordinatnih sistemov $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$, za katero velja

1. $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}$ (je pokritje)
2. Če velja $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq 0$, preslikava $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ preslika $\phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ v odprto množico $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$

16 Diferencialne enačbe

16.1 Posebni primeri

<u>**Besselova diferencialna enačba**</u> *Besselovo diferencialno enačbo* definiramo kot

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

Rešitve Besselove diferencialne enačbe so Besselove funkcije v poglavju (**??**).

<u>**Legendrova diferencialna enačba**</u>

$$\big((z^2 - 1)y'\big)' - \nu(\nu + 1)y = (z^2 - 1)y'' + 2zy' - \nu(\nu + 1)y = 0$$

Rešitve Legendrove diferencialne enačbe so Legendrovi polinomi v poglavju (2.2.12).

<u>**Pridružena Legendrova diferencialna enačba**</u>

$$\big((z^2 - 1)y'\big)' - \left(n(n + 1) + \frac{m^2}{z^2 - 1}\right) y = 0$$

Rešitve pridružene Legendrove diferencialne enačbe so pridružene Legendrove funkcije v poglavju (**??**).

<u>**Hermiteeva diferencialna enačba**</u>

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0$$

Za $\nu \in \mathbb{N}$ so rešitve Hermiteeve diferencialne enačbe Hermiteevi polinomi v poglavju (**??**).

<u>**Airyjeva diferencialna enačba**</u>

$$y'' = xy$$

Rešitev Airyjeve diferencialne enačbe je Airyjeva funkcija v poglavju (**??**)d.

<u>**Valovna enačba**</u>

$$u_{tt} = c^2u_{xx}$$

Rešitve valovne enačbe obravnavamo v poglavju (**??**).

<u>**Difuzijska enačba**</u>

$$u_t = Du_{xx}$$

Rešitve difuzijske enačbe obravnavamo v poglavju (**??**).

16.2 Linearna diferencialna enačba 1. reda

Linearna diferencialna enačba 1. reda je enačba oblike

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Najprej najdemo homogeno funkcijo y_H, ki reši enačbo za $q(x) = 0$.

$$y_H = Ce^{-P(x)}$$

Nato *variiramo konstanto* − obravnavamo jo kot funkcijo $C \to C(x)$, torej uporabimo nastavek $y = C(x)e^{-P(x)}$ in dobimo

$$C'(x) = qe^{P(x)}$$

ter s tem rešitev

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x$$

kjer smo označili $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$

16.3 Linearna diferencialna enačba 2. reda

Linearna diferencialna enačba 2. reda je enačba oblike

$$y'' + py' + qy = 0$$

kjer so y, p, q funkcije ene kompleksne spremenljivke. BIS lahko predpostavimo, da rešitev iščemo v okolici točke $z = 0$. Točka 0 je *regularna*, čee sta p in q holomorfni na okolici 0, drugače je *singularna*. Točka 0 je *pravilna singularnost*, čee sta zp in z^2q holomorfni na okolici 0.

Regularna točka Če je točka 0 regularna, vse funkcije razvijemo v potenčne vrste,

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \qquad y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

katere v splošnem zmnožimo po enačbi trditve (**??**). V vrstah po potrebi vpeljemo novo spremenljivko, da se ujemajo eksponenti z^n. Tedaj nekaterih izmed vrst ne začnemo seštevati pri vrednosti 0, zato pri reševanju enačb za določeno vrednost n pazimo, če vrsta nastopa v njej. Z enačbami koeficiente a_n izračunamo rekurzivno.

Pravilna singularna točka Če je točka 0 pravilna singularna, enačbo pomnožimo z z^2 in definiramo potenčne vrste na drugačen način.

$$zp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad z^2 q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \qquad y(z) = z^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

S ponovitvijo zgornjega postopka dobimo določilno zvezo za karakteristični eksponent μ

$$\mu\left(\mu - 1 + p_0\right) + q_0 = 0$$

kjer iz definicij p_n in q_n sledi

$$p_0 = \lim_{z \to 0} zp(z) \qquad q_0 = \lim_{z \to 0} z^2 q(z)$$

Vrednosti uredimo $\Re(\mu_1) \geq \Re(\mu_2)$ in izračunamo razliko $\mu_1 - \mu_2$, ki nam določa dva podprimera.

$\underline{\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}}$ Če velja $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$, dobimo dve linearno neodvisni rešitvi.

$$y_1(z) = z_1^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad\qquad y_2(z) = z_2^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$\underline{\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}}$ Če velja $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$, morda dobimo dve linearno neodvisni rešitvi (1). Sicer pozamo obliko za drugo rešitev (2), kjer velja $b_0 \neq 0$.

$$y_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y_2(z) = z^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

$$y_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y_2(z) = y_1 \log z + z^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{2}$$

Linearno odvisni rešitvi (domnevno) dobimo pogosteje, če izračunamo y_2.

16.4 Bernoullijeva diferencialna enačba

Bernoullijeva diferencialna enačba je enačba oblike

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \notin \{0, 1\}$$

Za $\alpha \in \{0, 1\}$ dobimo *linearno diferencialno enačbo* s poglavja 16.2

Vpeljemo novo spremenljivko z, za katero velja

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Rešimo *linearno diferencialno enačbo* s poglavja 16.2 v spremenljivki z

$$z' + (1-\alpha)\, p(x) z = (1-\alpha)\, q(x)$$

16.5 Homogena diferencialna enačba

Homogena diferencialna enačba je enačba oblike

$$y' = f\left(x, y\right), \qquad f \text{ homogena funkcija reda } 0$$

Ker je f homogena, lahko za $x \neq 0$ izpostavimo x in dobimo

$$f\left(x, y\right) = f\left(1, \frac{x}{y}\right) = (1, z)$$

Drugače povedano, preoblikujemo enačbo, da vsi pari x, y v funkciji nastopajo v obliki $\frac{y}{x}$.

Rešitev dobimo z enačbe

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(1,z) - z} = \ln|x|$$

16.6 Riccatijeva diferencialna enačba ($y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$)

Riccatijeva diferencialna enačba je enačba oblike

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Za $a = 0$ dobimo *linearno diferencialno enačbo* s poglavja 16.2,
za $c = 0$ dobimo *Bernoullijevo diferencialno enačbo* s poglavja 16.4.

Če poznamo eno rešitev y_1, vpeljemo $y = y_1 + \frac{1}{z}$, ter rešimo *Bernoullijevo diferencialno enačbo* s poglavja 16.4

$$z' + (b(x) + 2a(x)y_1)\, z = -a(x)$$

16.7 Eulerjeva diferencialna enačba ($x^n y^{(n)}$)

Eulerjeva diferencialna enačba je enačba s členi oblike $x^n y^{(n)}$. S substitucijo $t = \log x$ lahko preobrazimo $x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \to \frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}t^m}$.

16.8 Prvi integral in eksaktna diferencialna enačba

Prvi integral diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ je funkcija $u(a, b)$, za katero velja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x, y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u(x, y) = C$$

Nivojnice u vsebujejo rešitve $F = 0$. Zato je gradient funkcije $\nabla u = (u_a, u_b) = (p, q)$ pravokoten na nivojnico in rešitve. Za rešitve y velja

$$(p, q) \cdot (1, y') = 0$$

Ker je $\nabla u = (p, q)$ neposredno iz definicije vektorsko polje, ekvivalenčno velja $\nabla \times (p, q) = 0$, kar se prevede na $p_y = q_x$.

Diferencialna enačba oblike

$$p(x)\ \mathrm{d}x + q(x)\ \mathrm{d}y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) + q(x)y' = 0$$

je *eksaktna*, čee $p_y = q_x$.

Implicitno rešitev dobimo z integracijo, torej

$$\int p\ \mathrm{d}x + \int q\ \mathrm{d}y = 0$$

$$P(x, y) + C_1(y) + Q(x, y) + C_2(x) = 0$$

Namesto konstante dobimo funkciji $C_1(y)$ in $C_2(x)$, ker veljata

$$p = \frac{\partial}{\partial x}(P) = \frac{\partial}{\partial x}(P + C_1(y))$$

$$q = \frac{\partial}{\partial y}(Q) = \frac{\partial}{\partial y}(Q + C_2(x))$$

Če pogoj $p_y = q_x$ ni izpolnjen, lahko najdemo funkcijo *integrirajoči množitelj* μ, s katerim pomnožimo oba člena, da velja $(p\mu)_y = (q\mu)_x$. V tem primeru dobimo parcialno diferencialno enačbo

$$(p_y - q_x)\mu = p\mu_y + q\mu_x$$

Če najdemo tak μ, opravimo zamenjavo $p\mu \to p$ in $q\mu \to q$, da tedaj p in q ustrezata prvotnemu pogoju $p_y = q_x$.

16.9 Implicitne diferencialne enačbe oblik $F(x, y') = 0$ in $F(y, y') = 0$

Implicitne diferencialne enačbe oblik

$$F(x, y') = 0 \qquad \text{in} \qquad F(y, y') = 0$$

rešimo s parametrizacijo, saj velja

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Za $F(x, y') = 0$ vpeljemo $x = \alpha(t)$ in $y' = \beta(t)$, torej velja $\dot{y} = \dot{x}y'$ ter

$$y(t) = \int \dot{\alpha}\beta \; \mathrm{d}t, \qquad x(t) = \alpha(t)$$

Za $F(y, y') = 0$ vpeljemo $y = \alpha(t)$ in $y' = \beta(t)$, torej velja $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{y'}$ ter

$$y(t) = \alpha(t), \qquad x(t) = \int \frac{\dot{\alpha}}{\beta} \; \mathrm{d}t$$

Funkciji $\alpha(t)$ in $\beta(t)$ izberemo tako, da integral enostavno ovrednotimo. Rešitev v parametrični obliki v splošnem ne moremo zapisati eksplicitno.

16.10 Singularna rešitev diferencialne enačbe

Če ima diferencialna enačba 1. reda množico rešitev $\{y\}$, je *singularna* rešitev y_s diferencialne enačbe rešitev, ki seka vsako izmed drugih rešitev iz $\{y\}$. Ker je y_s rešitev, ima v točki (x, y) enak y' kot rešitev, ki jo seka, torej je graf y_s tangenten na vsak graf iz $\{y\}$.

Če ima za funkcijo $f(a, b)$ splošna rešitev obliko $y = f(x, C)$, C konstanta, mora biti $y_s = f(x, C(x))$. S pogojev $y_s(x_0) = y(x_0)$ ter $y_s'(x_0) = y'(x_0)$ dobimo implicitno enačbo za funkcijo $C(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial b} \cdot C'(x) = 0$$

16.11 Clairautova diferencialna enačba ($y = xy' + f(y')$)

Clairautova diferencialna enačba je enačba oblike

$$y = xy' + f(y')$$

za $f \in C^0(J)$. Splošna rešitev enačbe je

$$y = Cx + f(C), \qquad C \in J$$

Singularna rešitev enačbe za $f \in C^1(J)$ je

$$x = -f'(t) \qquad y = -f'(t) + f(t)$$

16.12 Sistem linearnih diferencialnih enačb $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$

Naj bo $x \in \mathbb{F}$, $\mathbf{y}(x), \mathbf{b}(x) \in \mathbb{F}^N$ in $A(x) \in \mathbb{F}^{N\times N}$. Sistem linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti je oblike

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$$

Rešitev lahko iščemo kot vsoto *homogenega* $\mathbf{y}_{\mathrm{hom}}$ in *partikularnega* dela $\mathbf{y}_{\mathrm{par}}$. Homogeni del rešitve, torej rešitev enačbe za $\mathbf{b} = 0$, dobimo z integralom matrike

$$Y = \exp\left(\int A(x)\,\mathrm{d}x\right) \qquad\qquad \mathbf{y}_{\mathrm{hom}} = Y\mathbf{y}_0\,,$$

kjer z vektorjem $\mathbf{y}_0$ izberemo linearno kombinacijo rešitev (homogeni del rešitve tvori vektorski prostor), ki jo predstavljajo stolpci matrike Y (običajno, da zadosti začetnim pogojem).

Partikularni del rešitve dobimo z variacijo konstante

$$\mathbf{y}_{\mathrm{par}} = Y \int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x\,.$$

Splošna rešitev je tako

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\mathrm{hom}} + \mathbf{y}_{\mathrm{par}}\,.$$

Sistem s konstantno A Če je matrika A konstantna, velja

$$Y = e^{Ax} \qquad\qquad \mathbf{y}_{\mathrm{hom}} = Y\mathbf{y}_0\,.$$

Če je A diagonalizabilna, lahko zanjo najdemo lastne pare $(\mathbf{v}_i, \lambda_i)$ in dobimo vektorski prostor rešitev

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i\,.$$

Partikularno rešitev lahko dobimo z enakim postopkom, pogosto jo pa lažje uganemo.

16.13 Cauchyjev problem ($y' = f(x,y)$)

Za narest, rešitev obstaja, če obstaja γ, da $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \gamma$.

16.14 Parcialne diferencialne enačbe

Robne pogoje oblike $U(\bullet, t) = C$ prevedemo na $U(\bullet, t) = 0$, da rešitvi za ničelne robne pogoje prištejemo polinom stopnje, enaki največji stopnji parcialnega odvoda, ki ustreza neničelnim robnim pogojem.

Metode so metoda karakteristik, seperabilen nastavek, razvoj po lastnih stanjih (Sturm-Liouvillov izrek), transformacije (Fourierova, Laplaceeva), Greenove funkcije.

16.15 Metoda karakteristik

Z metodo karakteristik rešujemo enačbe oblik

$$a(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, z)\,.$$

Pri metodi karakteristik vpeljemo novo spremenljivko s, s katero izrazimo neodvisne spremenljivke, npr. $x(s), y(s)$ in izračunamo totalni odvod

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

16.16 Strum-Liouvillov problem

Naj bosta $p, q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $w : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in $\mathcal{L}$ operator

$$\mathcal{L}u = \partial\left(p\partial u\right) - qu$$

Strum-Liouvillov problem je tedaj problem lastnih vrednosti v obliki

$$\mathcal{L}u + \lambda wu = 0$$

$\mathcal{L}$ je simetričen, če velja

$$\left(p\left(\overline{u}v' - \overline{u}'v\right)\right)\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0$$

$\mathcal{L}$ je sebi adjungiran, če velja

$$\alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) = 0$$
$$\alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) = 0$$

Za $\alpha = 1$ in $\beta = 0$ dobimo Dirichletov robni pogoj, za $\alpha = 0$ in $\beta = 1$ pa Neumannov. Sebi-adjungiran operator ima realen spekter, lastne funkcije pa so indeksirane s številom ničel in tvorijo KONS za skalarni produkt

$$\langle u|v\rangle_w = \int_{\mathcal{D}} \overline{u}wv\mathrm{d}x$$

Zato za $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ velja

$$f(x) = \sum_n \langle n|f\rangle_w |n\rangle$$

16.17 Helmholtzova enačba $\nabla^2 U = \lambda U$

Helmholtzova enačba se glasi $\nabla^2 U = \lambda U$.

Naj bo $\mathcal{D}$ domena funkcije U. V ortogonalnih koordinatnih sistemih rešitev dobimo s *seperacijo spremenljivk*, torej s produktnim nastavkom. Naj bo koordinaten sistem ortogonalen in trirazsežen s koordinatami x, y, z. Produktni nastavek je tedaj

$$U(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

V primeru končnih robnih pogojev rešitev dobimo z vsoto

$$U(x,y,z) = \sum_{n,l,m} U_{n,l,m}(x,y,z) = \sum_{n,l,m} A_{n,m,l} X_n(x) Y_m(y) Z_l(z)$$

Predpostavimo, da so funkcije lastne funkcije Laplaciana, torej

$$\nabla^2 X_n = \lambda_n X_n \qquad \nabla^2 Y_m = \lambda_m Y_m \qquad \nabla^2 Z_l = \lambda_l Z_l$$

Označimo $\lambda_{n,m,l} = \lambda_n + \lambda_m + \lambda_l$. Ker so funkcije X, Y, Z lastne, velja

$$\nabla^2 U(x,y,z) = \sum_{n,l,m} A_{n,m,l} \lambda_{n,m,l} X_n(x) Y_m(y) Z_l(z)$$

V splošnem nas konstanta, s katero je funkcija pomnožena ne zanima, saj vsaj člen vsote pomnožimo s konstanto $A_{n,m,l}$.

Homogene robne pogoje $U(\partial\mathcal{D}) = 0$ praviloma zadostimo z definicijo produktnih členov U, torej upoštevamo robne pogoje in rešimo navadne diferencialne enačbe

$$X_n'' = \lambda_n X_n \qquad Y_m'' = \lambda_m Y_m \qquad Z_l'' = \lambda_l Z_l$$

za funkcije, za katere imamo homogene robne pogoje. Funkcije, za katere imamo oba homogena robna pogoja, običajno želimo razviti po oscilatorni bazi, zato izberemo $\lambda_\bullet = -k_\bullet^2$. Izbira baze nam inducira skalarni produkt, za katerega so lastne funkcije ortogonalne.

Naj bo f linearni operator in g funkcija kraja. Končne nehomogene robne pogoje

$$(fU)(\partial\mathcal{D}) + g(\partial\mathcal{D}) = 0$$

zadostimo, da U zapišemo s produktnim nastavkom, nato pa na obeh straneh izvedemo ustrezni skalarni produkt, s katerim dobimo koeficiente $A_{n,m,l}$. Nehomogene robne pogoje pogosto lahko prevedemo na homogene, da U zapišemo kot vsoto spremenljivk, da vsaka izpolni en (homogen ali nehomogen) robni pogoj.

16.17.1 Kartezični sistem

V kartezičnem koordinatnem sistemu x, y, z je Laplacian oblike

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

uporabimo nastavek

$$U(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

16.17.2 Valjni sistem

V valjnem koordinatnem sistemu x, y, z je Laplacian oblike

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2$$

uporabimo nastavek

$$U(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

Če izraz vstavimo v Helmholtzovo enačbo in pri vsakem izmed treh primerov delimo z dvema izmed R, Φ in Z, dobimo enačbo, ki se razklopi na tri

$$0 = Z_{zz} - \lambda_z Z \qquad\qquad 0 = \Phi_{\varphi\varphi} - \lambda_\varphi \Phi$$
$$0 = rR_{rr} + rR' + \big(\lambda_\varphi + r^2\left(\lambda_z - \lambda\right)\big) R$$

Označimo $\lambda_z = \pm\beta^2$ in $\lambda_\varphi = -m^2$. Tedaj dobimo rešitvi funkcij Z in Φ

$$Z = \begin{cases} A\sinh(\beta z) + B\cosh(\beta z) & \lambda_z = +\beta^2 \\ A\sin(\beta z) + B\cos(\beta z) & \lambda_z = -\beta^2 \\ A + Bz & \lambda_z = 0 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{\pm \mathrm{i}m\varphi} & \lambda_\varphi = -m^2 \neq 0 \\ A + B\varphi & \lambda_\varphi = -m^2 = 0 \end{cases}$$

Če ima Φ periodični robni pogoj, je v primeru $m \neq 0$ dvakrat degenerirana, zato tedaj kompletno rešitev predstavlja samo en predznak. Tretja enačba je pa Besselova enačba oblike

$$r^2 R_{rr} + rR_r + \big(-m^2 + r^2\left(-\lambda \pm \beta^2\right)\big) R = 0$$

katere rešitve so Besselove funkcije s poglavja **??**

$$R = \begin{cases} AJ_m\left(k_n r\right) + BY_m\left(k_n r\right); & -k^2 = \lambda \pm \beta^2 < 0 \\ AI_m\left(k_n r\right) + BK_m\left(k_n r\right); & k^2 = \lambda \pm \beta^2 > 0 \\ Ar^m + Br^{-m}; & k^2 = \lambda \pm \beta^2 = 0; \qquad m \neq 0 \\ A + B\log(r); & k^2 = \lambda \pm \beta^2 = 0; \qquad m = 0 \end{cases}$$

16.17.3 Krogelni sistem

V krogelnem koordinatnem sistemu x, y, z je Laplacian oblike

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) - \frac{L^2}{r^2} \qquad\qquad L^2 = -\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2$$

uporabimo nastavek

$$U(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

Opazimo, da je Laplacian sestavljen iz radialnega in kotnega dela. Najprej iščemo lastno funkcijo za kotni del $(\sin(\vartheta)L)^2$. Operiramo na $\Phi(\varphi)$, zato se izraz poenostavi na $(\sin(\vartheta)L)^2\Phi = \partial_\varphi^2\Phi = -m^2\Phi$ in dobimo

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} e^{\mathrm{i}m\varphi} & m^2 \neq 0 \\ A + B\varphi & m^2 = 0\,. \end{cases}$$

Enačbo za lastne funkcije Θ lahko izrazimo v spremenljivki $\cos\vartheta$.

$$\left(\partial_{\cos\vartheta}\left(\left(1-\cos^2\vartheta\right)\partial_{\cos\vartheta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-\cos^2\vartheta}\right)\right)\Theta$$

To je pridružena Legendrova diferencialna enačba, katere rešitve so pridružene Legendrove funkcije prve in druge vrste $\Theta(\vartheta) = AP_l^m(\cos\vartheta) + BQ_l^m(\cos\vartheta)$. Tako kot lastne funkcije dobimo sferične harmonike

$$Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\left(AP_l^m(\cos\vartheta)+BQ_l^m(\cos\vartheta)\right)e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

Če nastavek $RY_{l,m}$ vstavimo v Helmholtzovo enačbo, dobimo

$$\left(\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}-\lambda\right)R=0$$

Če uvededmo novo spremenljivko $Z=\sqrt{r}R$, dobimo Besselovo diferencialno enačbo

$$r^2Z''+rZ'-\left(\lambda r^2+\left(\frac{2l+1}{2}\right)^2\right)Z=0\,,$$

katere rešitve so sferične Besselove funkcije s poglavja 2.2.11.

$$R=\begin{cases}Aj_l(k_nr)+By_l(k_nr)\,; & -k^2=\lambda<0\\ Ai_l(k_nr)+Bk_l(k_nr)\,; & k^2=\lambda>0\\ Ar^l+Br^{-(l+1)}; & k^2=\lambda=0\end{cases}$$

16.18 Laplaceeva enačba $\nabla^2U=0$

Laplaceeva enačba se glasi $\nabla^2U=0$. Je poseben primer Helmholtzove enačbe, kjer velja $\lambda=0$.

Postopek reševanja je enak kot pri Helmholtzovi enačbi, torej s produktnim nastavkom. Postopek pri Laplaceevi enačbi se od postopka pri Helmholtzovi razlikuje, da za vsak indeks velja $\nabla^2U_{n,m,l}=0$. Ker je $U_{n,m,l}$ lastna funkcija Laplaciana, dobimo enačbo

$$\lambda_n+\lambda_m+\lambda_l=0$$

S tem pogojem v vsoti izgubimo en indeks, brez izgube splošnosti predpostavimo, da indeks l.

16.18.1 Multipolni razvoj

Sferični harmoniki $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$.

$$(Y_{l,m})^*=(-1)^mY_{l,-m}$$

TODO: EMP površinska gostota naboja

TODO: Clebsch-Gordanovi koeficienti

16.19 Greenove funkcije

Naj bo $\mathcal{D}$ odprta množica, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L} : (\mathcal{D} \to \mathbb{R}) \to (\mathcal{D} \to \mathbb{R})$ pa linearni operator s homogenimi robnimi pogoji. Tedaj je *Greenova funkcija* G za operator $\mathcal{L}$ rešitev enačbe

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) .$$

Ko $\mathcal{D} \neq \mathbb{R}^n$ in imamo podano $G\big|_{\mathbf{r}\in\partial D}$, lahko Greenovo funkcijo dobimo z *zrcaljenjem*. Tedaj je (za ustrezne robne pogoje) Greenova funkcija

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \pm KG_\infty(\mathbf{r}, \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{0}) ,$$

kjer je G_∞ Greenova funkcija za neskončno območje $\mathbb{R}^n$ ter velja

$$\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{0} \notin \mathcal{D} ,$$

vektor $\widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ je pa ustrezna funkcija vektorja $\mathbf{r}_0$, torej $\widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{0}(\mathbf{r}_0)$. Ta funkcija je posplošeno zrcaljenje čez $\partial\mathcal{D}$. Označimo

$$\widetilde{G}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = KG_\infty(\mathbf{r}, \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{0})$$

in dobimo

$$\widetilde{G}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 - 2(\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}) \qquad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ polprostor}$$

$$\widetilde{G}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_\infty\left(\frac{r_0}{a}\mathbf{r}, \frac{a}{r_0}\mathbf{r}_0\right) \qquad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ krogla}$$

Za robni pogoj $U\big|_{\mathbf{r}\in\partial\mathcal{D}}$ vzamemo liho vsoto Greenovih funkcij $(G_\infty - \widetilde{G}_\infty)$, za robni pogoj $\partial_{\hat{\mathbf{n}}}U\big|_{\mathbf{r}\in\partial\mathcal{D}}$ pa sodo $(G_\infty + \widetilde{G}_\infty)$.

Če z enim zrcaljenjem ne zadostimo robnim pogojem, novo Greenovo funkcijo spet zrcalimo, lahko tudi neskončnokrat.

Za Greenove funkcije G_∞, ki smo jih zrcalili enkrat, velja, da je vsota $G = G_\infty \pm \widetilde{G}_\infty$ po definiciji Greenova funkcija za območje $\mathcal{D}$, za območje $\mathcal{D}^c$ pa $\pm G$.

Rešitev linearne enačbe

$$\mathcal{L}u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) ,$$

pri kateri poznamo robni pogoj $u(\mathbf{r})\big|_{\partial\mathcal{D}}$, je zaradi linearnosti konvolucija f in rešitve za δ (Greenove funkcije G), torej

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}_0 + \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_{\hat{\mathbf{n}},\mathbf{r}_0} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)u(\mathbf{r}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}_0$$

Naj bo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}{=}^{*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)$$

Tedaj velja

$$\int_a^b \overline{v}\mathcal{L}u - u\overline{(\mathcal{L}v^*)}\ \mathrm{d}x = Q\left(u,\overline{v}\right)\Big|_{x=a}^{b}$$

$$Q = p\left(vu' - uv'\right)$$

Za operator $\mathcal{L} = \nabla^2$, dobimo še *Greenovo indentiteto*

$$\int_{\mathcal{D}} u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\ \mathrm{d}\mathcal{D} = \int_{\partial\mathcal{D}} u\partial_{\hat{\mathbf{n}}}v - v\partial_{\hat{\mathbf{n}}}u\ \mathrm{d}\mathcal{D}$$

16.19.1 Helmholtzova enačba $\nabla^2 U = \lambda U$

Greenova funkcija, ki reši Helmholtzovo enačbo

$$\left(\nabla^2_{\mathbf{r}} - \lambda\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

se za območje $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ glasi

$$G(x,x_0) = \frac{|x-x_0|}{2} ,$$

za $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| & \lambda = 0 \\ \frac{1}{4}Y_0\left(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right) & \lambda = -k^2 \\ -\frac{1}{4}K_0\left(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right) & \lambda = k^2 \end{cases} ,$$

za $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ pa

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(\pm\sqrt{-\lambda}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} .$$

16.19.2 Perturbacijski izračun z Greenovimi funkcijami

Rešujemo enačbo oblike

$$\mathcal{L}u(\mathbf{r}) = \varepsilon g(\mathbf{r}) \, ,$$

za katero poznamo rešitev $\widetilde{u}$ za $\varepsilon = 0$ in Greenovo funkcijo G za enačbo $\mathcal{L}u = 0$. Rešitev simbolično dobimo z implicitno enačbo

$$u = \widetilde{u} + \varepsilon \mathcal{L}^{-1} u \, ,$$

kjer velja $\mathcal{L}^{-1}(\bullet) = \int_{\mathcal{D}} \bullet(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}_0) \, \mathrm{d}\mathbf{r}_0$, tako dobimo *Fredholmovo enačbo*

$$u(\mathbf{r}) = \widetilde{u}(\mathbf{r}) + \varepsilon \int_{\mathcal{D}} u(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}_0) \, \mathrm{d}\mathbf{r}_0 \, .$$

Dobili smo impicitno enačbo, ki jo za dovolj majhne ε lahko računamo rekurzivno s formulo $u^{(n+1)} = \widetilde{u} + \varepsilon \mathcal{L}^{-1} u^{(n)}$, ki jo integralsko zapišemo kot

$$u^{(0)}(\mathbf{r}) = \widetilde{u}(\mathbf{r}) \qquad\qquad u^{(n+1)}(\mathbf{r}) = \widetilde{u}(\mathbf{r}) + \varepsilon \int_{D} u^{(n)}(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}_0) \, \mathrm{d}\mathbf{r}_0$$

16.20 Variacijska fomulacija diferencialnih enačb

Obravnavamo sebi-adjungiran operator $\mathcal{L}$ v enačbi

$$\mathcal{L}u = f \, .$$

PDE lahko lahko zapišemo kot ekstremalni problem

$$S = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u | u \rangle - \langle f | u \rangle \, ,$$

saj velja

$$\delta S = \frac{1}{2} \left(\langle \mathcal{L}\delta u | u \rangle + \langle \mathcal{L}u | \delta u \rangle \right) - \langle f | \delta u \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \delta u | \mathcal{L}u \rangle + \langle \mathcal{L}u | \delta u \rangle \right) - \langle f | \delta u \rangle = \langle \mathcal{L} - f | \delta u \rangle = 0$$

Laplaceeva enačba $\mathcal{L} = -\nabla^2$, $f = 0$
Dobimo ekstremalo

$$S = -\frac{1}{2}\int u\nabla^2 u \, \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int \nabla\cdot(u\nabla u) - (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int_{\partial V} u\nabla u\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V\right) = \frac{1}{2}\int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V \, ,$$

ki igra vlogo integrala energijske gostote polja.

Poissonova enačba $\mathcal{L} = -\nabla^2$
Ena komponenta ekstremale je enaka kot pri Laplaceevi enačbi, celotna se pa glasi

$$S = \frac{1}{2}\int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V - \int f u \, \mathrm{d}V \, ,$$

v kateri drugi člen igra vlogo potencialne energije zaradi gostote sil zunanjega polja.

Helmholtzova enačba $\mathcal{L} = -\nabla^2$, $f = k^2 u$
Ekstremalo lahko zapišemo kot ekstremalo Poissonove enačbe

$$\widetilde{S} = \frac{1}{2}\int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V - k^2 \int u \, \mathrm{d}V \, .$$

V enačbi prepoznamo Lagrangeev multiplikator k^2, zato ekstremalo in vez zapišemo kot

$$S = \int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V \qquad\qquad 1 = \int u^2 \, \mathrm{d}V \, ,$$

kjer brez izgube splošnosti vez enačimo z 1 in pri S zanemarimo člen $\frac{1}{2}$. Pri minimizaciji lastno vrednosti dobimo z *Rayleigh-Ritzovo* formulo

$$k^2 = \min\left(\frac{\int (\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V}{\int u^2 \, \mathrm{d}V}\right) \, ,$$

kjer integral v imenovalcu upošteva vez oziroma normalizacijo.

16.21 Kontinuitetna enačba

Kontinuitetna enačba opisuje pretok. Naj bo ρ gostota in j gostota pretoka. Tedaj velja enačba

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Izraz $\dot{\rho} = q$ imenujemo gostota izvorov.

16.22 Valovna enačba

Naj bo funkcija $U(x,t) \in C^2$ ter $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U = \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2 \frac{\partial}{\partial x} U\right) + F(x,t)$$

Naj bosta $F = 0$ in c konstanta ter $f, g \in C^2$. Zato enačbo lahko tudi zapišemo kot

$$\left(c\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) U = 0$$

Tedaj je rešitev

$$U(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Če imamo začetna pogoja $U(x,0) = F(x)$, $U_t(x,0) = G(x)$, rešitev dobimo z *D'Lambertovo formulo.*

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x-ct) + F(x+c) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right)$$

Opazimo, da se pri statičnem začetnem pogoju $U(x,0) = f(x)$, $U_t(x,0) = 0$ v vsako smer premika začetna oblika $f(x)$ s polovično amplitudo.

Lastne funkcije iščemo z nastavkom

$$U(x,t) = X(x)T(t) = X(x)e^{-i\omega t}$$

16.22.1 Klein-Gordonova enačba

Klein-Gordonova enačba je enačba oblike

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U - \omega_0^2 U$$

Rešitev za polneskončen medij z robnim pogojem $U(0,t) = \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ je

$$U(x,t) = \begin{cases} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \cdot \exp(\pm \kappa t), & \kappa = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{c} \quad \omega^2 < \omega_0^2 \\ \exp(-\mathrm{i}\omega t) \cdot Ax + B & \quad \omega^2 = \omega_0^2 \\ \exp(-\mathrm{i}\omega t) \cdot \exp(\pm \mathrm{i}kt), & k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c} \quad \omega^2 > \omega_0^2 \end{cases}$$

16.23 Difuzijska enačba

Naj bo funkcija $U(t, \mathbf{r}) \in C^2$. *Difuzijska enačba* je enačba oblike

$$D\nabla^2 U - \dot{U} = -q$$

Za območje

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^n \qquad t, t_0 \in \mathbb{R}$$

se Greenova funkcija glasi

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \left(4\pi D\left(t - t_0\right)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right)^2}{4D\left(t - t_0\right)}\right) \vartheta(t - t_0) \ ,$$

za domeno $\mathcal{D}$ in polneskončen čas pa dobimo rešitev

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, t) = &\int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) q(\mathbf{r}_0, t_0) \ \mathrm{d}^n\mathbf{r}_0 \ \mathrm{d}t_0 + \\ &+ \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, 0) U(\mathbf{r}_0, 0) \ \mathrm{d}^n\mathbf{r}_0 - \\ &- \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_{\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) U(\mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) \partial_{\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_0} U(\mathbf{r}_0, t_0) \ \mathrm{d}^{n-1}\mathbf{r}_0 \ \mathrm{d}t_0 \ . \end{aligned}$$

16.24 Sipalna enačba

Pri sipalnih problemih običajno obravnavamo sipanje vpadajočega ravnega vala na nehomogenem delu območja. Praviloma nas zanima limitni cikel, torej limita $t \to \infty$. Rešitev $U = \widetilde{U} + U_{\text{vpad}}$ je vsota vpadnega vala U_{vpad} in sipanega $\widetilde{U}$. Ker vpadnega poznamo, iščemo samo U_{vpad}. Ravni val je rešitev valovne in Schrödingerjeve enačbe, zato je sipanje posebni primer reševanja takih enačb.

Vpadajoč ravni val naj ima časovno odvisnost $e^{-i\omega t}$. Ker nas zanima limitni cikel, ima sipano valovanje $\widetilde{U}$ tudi tako odvisnost, torej v diferencialni enačbi lahko zamenjamo

$$\partial_t \bullet \mapsto -i\omega \bullet \ .$$

Pri obeh vrstah diferencialnih enačb tako dobimo Helmholtzovo enačbo $\mathcal{L}\widetilde{U} = \lambda \widetilde{U}$, katere Greenove funkcije dobimo v poglavju 16.19.1, kjer pri Besslovnih funkcijah za neskončno domeno $\mathcal{D}$ vzamemo drugačno linearno kombinacijo (Hanklove funkcije)

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}(J_m, Y_m) &\mapsto \mathrm{Span}(H_m^{(1)}, H_m^{(2)}) && \text{za } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{Span}(j_m, y_m) &\mapsto \mathrm{Span}(h_m^{(1)}, h_m^{(2)}) && \text{za } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \ . \end{aligned}$$

Glede na vrednost λ in limitne vrednosti sipanega vala $\widetilde{U}$ ločimo 4 primere

$$\widetilde{U}_m = Y_l^m \begin{cases} \begin{cases} h_m^{(1)}(k_n r) & \text{valovanje, ki potuje navzven} \\ h_m^{(2)}(k_n r) & \text{valovanje, ki potuje navznoter} \end{cases} & \lambda = -k^2 \\ \begin{cases} k_m(k_n r) & \text{valovanje, ki tunelira navzven} \\ i_m(k_n r) & \text{valovanje, ki tunelira navznoter} \end{cases} & \lambda = k^2 \end{cases}$$

za $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$. Za $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ velja podobno.

Pri sipanju nas utegne zanimati še *diferencialni sipalni presek*

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$

16.25 Metode vrednotenja diferencialnih enačb

Če so rešljive, diferencialne enačbe običajno najlažje ovrednotimo, da prepoznamo, kateri družini iz prejšnjih poglavij pripadajo.

16.25.1 Pretvorba spremenljivk v algebro in združevanje enačb

V sistemu enačb lahko neodvisne spremenljivke izomorfno preslikamo v večrazsežno algebro, nato pa enačbe združimo in ovrednotimo. Spremenljivke dobimo z algebrsko rešitvijo preko inverznega izomorfizma. *Primer:*

$$\ddot{x} + 2A\dot{x} + Bx = 0$$
$$\ddot{y} - 2A\dot{y} + By = 0$$

17 Variacijski račun

Pri variacijskem računu za

$$x \in J = [a, b] \subset \mathbb{R} \qquad\qquad y : J \to \mathbb{R}, \quad y \in X \subset C^1$$

$$L : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad L \in C^1$$

(L imenujemo *Lagrangeevo jedro* ali *Lagrangian*) iščemo *ekstremale* funkcionala

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y') \; \mathrm{d}x$$

torej tak y, da $I(y)$ lokalno doseže ekstremno vrednost. Parcialne odvode po prvem, drugem in tretjem argumentu Lagrangiana označimo kot L_x, L_y in $L_{y'}$.

17.1 Euler-Lagrangeeva enačba

Označimo $C_0^1(J) = \{\eta \in C^1; \eta(a) = \eta(b) = 0\}$. Če upoštevamo *variacijski lemo*

$$\forall \eta \in C_0^1(J) \quad \int_J \eta(x) y(x) \; \mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 0$$

dobimo *Euler-Lagrangeevo enačbo* za ekstremalo y, torej rešitev variacijskega računa. Robne pogoje obravnavamo kasneje.

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x, y, y') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial}{\partial y'} L(x, y, y') \right)$$

Opazimo, da mora veljati $L \in C^2$, a moremo dokazati $L \in C^1 \implies L \in C^2$.

17.1.1 Lagrangian $L(x, y')$

Euler-Lagrangeeva enačba se v primeru $L_y = 0$ poenostavi na

$$L_{y'}(x, y') = C$$

17.1.2 Lagrangian $L(y, y')$ (Beltramijeva identiteta)

Euler-Lagrangeeva enačba se v primeru $L_x = 0$ poenostavi na

$$L(y, y') - y' L_{y'}(y, y') = C$$

17.2 Problem s fiksnimi krajišči

Če imamo pogoj $y(a) = \alpha$ in $y(b) = \beta$, velja

$$X = \{y \in C^1; y(a) = \alpha; y(b) = \beta\}$$

ter Euler-Lagrangeeva enačba

17.3 Problem z gibljivimi krajišči

Če sta obe krajišči gibljivi, obstaja rešitev, čee L ni odvisen od y (ampak le od x in y').

Če imamo *eno* gibljivo krajišče (nedoločen $y(a)$ ali $y(b)$), mora še veljati

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\left(a, y(a), y'(a)\right) = \frac{\partial L}{\partial y'}\left(b, y(b), y'(b)\right) = 0$$

17.4 Problem z vezjo

Za Lagrangeevo jedro $\mathcal{L}(x, y, y')$ iz iste družine, kot $L(x, y, y')$, funkcionala

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b \mathcal{L}(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

$$\widetilde{I}(y, \lambda) = \int_a^b \left(L + \lambda\mathcal{L}\right)(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

vez $\mathcal{I}(y) = C$ ter funkcijo y, ki *ni* ekstremala za $\mathcal{I}$, torej

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varepsilon}(y + \varepsilon\eta) \neq 0$$

velja, da obstaja λ, da je y ekstremala za $\widetilde{I}(y, \lambda)$, torej

$$\frac{\partial \widetilde{I}}{\partial \varepsilon}(y + \varepsilon\eta, \lambda) = 0$$

S to parametrizirano rešitvijo $y(\lambda)$ dobimo rešitev s pogojem $\mathcal{I}(y(\lambda)) = C$

18 Kompleksna analiza

Kompleksne funkcije najdemo v poglavju **??**.

18.1 Trditve in izreki

Označimo

$$
\begin{array}{rcc}
\text{odprta } U \subset \mathbb{C} & x, y \in \mathbb{R} \text{ taka, da velja} & z = x + iy \in U \\
f : U \to \mathbb{C} & f(z) = u(x,y) + iv(x,y) &
\end{array}
$$

18.1.1 Holomorfne funkcije in Cauchy-Riemannov sistem

Funkcija f je *holomorfna*, čee obstaja limita

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

Funkcija je holomorfna tudi, čee sta u in v totalno odvedljivi in zanju veljata *Cauchy-Riemannovi enačbi.*

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

Holomorfne funkcije so vse realno odvedljive elementarne funkcije z zamenjavo $x \mapsto z$ (polinomi, e^z, kotne funkcije, kompleksni logaritem, kompleksni koreni), ter $z\overline{z}$ ($\overline{z}$ *ni* holomorfna).

18.1.2 Kompleksni integral

Integral za kompleksna števila predevemo na integral vektorske funkcije po krivulji. Naj bo $t \in [t_0, t_1]$ pot $\gamma : t \to U$. *Določeni integral* tedaj definiramo

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\ \mathrm{d}t$$

18.1.3 Casorati-Weierstrassov izrek

Naj bo a bistvena singularnost za holomorfno funkcijo f. Tedaj za $\forall w \in \mathbb{C}$, za $\forall \varepsilon > 0$ in $\forall \delta > 0$ obstaja $z \in D'(a, \delta)$, da velja $|f(z) - w| < \varepsilon$. To pomeni, da je slika okolice a gosta v $\mathbb{C}$.

18.1.4 Načelo identitete

Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorfni in $A \subset D$ množica s stekališčem. Velja

$$f\big|_A = g\big|_A \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

18.1.5 Liouvillev izrek

Naj bo f *cela* in $|f|$ *omejena.* Tedaj velja, da je f *lokalno konstantna funckija.*

18.1.6 Princip maksima in minima

Naj bo $f : U \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Tedaj $|f|$ doseže maksimalno vrednost nekje na ∂U (če je tam definiran), minimum pa na ∂U (če je tam definiran) ali v ničlah.

18.1.7 Izrek o povprečni vrednosti

Naj bo $\overline{D}(a, r) \subset U$ in $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ harmonična. Tedaj velja

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi$$

18.1.8 Povzetek izrekov

Za holomorfno f velja, da je neomejena, če je neničelna in $U = \mathbb{C}$; da je enolično določena z vrednostmi v množici s stekališčem, bijektivna, kjer $f' \neq 0$.

18.2 Operatorja parcialnega odvoda

Operatorja parcialnega odvoda (Wirtingerjeva odvoda) sta

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Operator $\frac{\partial}{\partial z}$ odvaja $\overline{z}$ kot, da je konstanta ter obratno. Enačba $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$ je ekvivalentna Cauchy-Riemannovem sistemu, zato tedaj velja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f = \frac{\partial}{\partial z} f$ (nasprotno velja za *antiholomorfno funkcijo*). Za operatorja velja linarnost

$$\frac{\partial}{\partial z}(a\alpha + b\beta) = a\frac{\partial \alpha}{\partial z} + b\frac{\partial \beta}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(a\alpha + b\beta) = a\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} + b\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} \,,$$

pravilo za odvajanje produkta

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha\beta) = \alpha\frac{\partial \beta}{\partial z} + \beta\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha\beta) = \alpha\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} + \beta\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} \,,$$

verižno pravilo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}(\alpha(\beta))\right) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}(\beta)\right)\frac{\partial \beta}{\partial z} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}}(\beta)\right)\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial z}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha(\beta))\right) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}(\beta)\right)\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}}(\beta)\right)\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial \overline{z}}$$

in pravilo za konjugacijo

$$\overline{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial \overline{z}}$$
$$\overline{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}}\right)} = \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial z} \,.$$

18.3 Ovojno število

Naj bo $\gamma : [a, b] \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ sklenjena pot. Ovojno število poti γ glede na z definiramo kot

$$\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\gamma(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t$$

Funkcija je lokalno konstantna in ima celoštevilsko vrednost. Zunanjosti tirov imajo ovojno število 0. Ovojno število predstavlja število obhodov, ki ga sklenjena pot opravi okrog točke z, pri čemer upoštevamo smeri obhodov.

18.4 Residuum

Naj ima f v točki a singularnost največ n-te stopnje (če je manjše, dobimo pravilen rezultat, le izračun je bolj zapleten). *Residuum* definiramo kot

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)$$

Če napačno predpostavimo stopnjo pola, residuum ne obstaja.

Naj bo $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ Laurentova vrsta za f, konvergentna v okolici a. Tedaj velja

$$\mathrm{Res}(f, a) = c_{-1}$$

Residuum funkcije v točki zato lahko razumemo kot člen c_{-1} Laurentovega razvoja funkcije okrog te točke.

18.5 Kompleksna integracija

Kompleksni integral definiramo

18.5.1 Cauchyjeve integralske formule

Naj bo $f : (U \cup \partial U) \to \mathbb{C}$ holomorfna na U ter $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naj bo sklenjena pot γ, da velja $\Gamma \subset U/\{z_0\}$. Tedaj velja

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!}\cdot \mathrm{ind}_\gamma(z_0)\cdot \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}(z_0)$$

Naj bo f še zvezna na poz. orientiranim ∂U. Tedaj za zgornjo formulo velja $\gamma = \partial U$ in $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 1$.

18.5.2 Integracija s residui

Naj bo U območje, $U_s \subset U$ in $f : U/U_s \to \mathbb{C}$ holomorfna. Če $U_s \neq U$, velja $V(U_s) = 0$ (običajno ima tudi končno elementov). Označimo $\{z_j\} = U_s$. Tedaj velja

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\sum_j \mathrm{Res}(f, z_j)\cdot \mathrm{ind}_\gamma(z_j)\right)$$

Naj bo f še zvezna na poz. orientiranim ∂U. Tedaj za zgornjo formulo velja $\gamma = \partial U$ in $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 1$.

Koristno je najprej preveriti, če integral reši Cauchyeva formula.

18.6 Konformnost preslikav in biholomorfne preslikave

Preslikava je *konformna*, če v kompleksni ravnini ohranja kot med dvema sekajočima krivuljama. Vsaka holomorfna preslikava f je konformna v točkah, kjer $f' \neq 0$.

Naj bosta U_1 in U_2 območji v $\mathbb{C}$. Funkcija $f : U_1 \to U_2$ je *biholomorfna*, čee sta f in f^{-1} holomorfni.

Ko slikamo območja U, vedno preverimo oziroma definiramo preslikavo v točkah z ∂U, a moramo paziti na orientacijo ∂U.

U običajno preslikamo z Möbiusovimi transformacijami.

Če hočemo spremeniti kot v točki na ∂U, to točko z Möbiusovo transformacijo preslikamo v 0, nato pa U preslikamo s funkcijo z^α, ki je konformna na $\mathbb{C}/\{0\}$, torej spremenimo kot le v točki 0.

18.6.1 Stereografska projekcija

Stereografska projekcija je projekcija iz enotske sfere na ravnino. Pri projekciji sfero razpolovimo z ravnino. Nato točko na sferi s premico povežemo s severnim polom. Presečišče te premice ter ravnine je točka, kamor projeciramo točko na sferi. Dodatno definiramo, da se severni pol preslika v točko ∞.

Naj bodo x, y, z kartezične koordinate točke na sferi ter X in Y kartezični koordinati ravnine. Tedaj velja

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \, , \\ (x, y, z) &= \left(\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2}\right) \, .\end{aligned}$$

Naj bo $\varphi \in [0, 2\pi]$ azimutalni sferični kot, $\vartheta_{\text{zen}} \in [0, \pi]$ zenitni polarni kot (kot do severnega pola) in $\vartheta_{\text{ekv}} \in [-\pi/2, \pi/2]$ ekvatorialni polarni kot (kot do ekvatorialne ravnine). Naj bosta R in Φ polarni koordinati ravnine. Tedaj velja $\vartheta_{\text{zen}} + \vartheta_{\text{ekv}} = \pi/2$ ter

$$(R, \Phi) = \left(\cot\frac{\vartheta_{\text{zen}}}{2}, \varphi\right) = \left(\tan\frac{\frac{\pi}{2} + \vartheta_{\text{ekv}}}{2}, \varphi\right)$$

Če je ravnina, na katero projeciramo sfero, kompleksna ravnina $\mathbb{C}$, sfero imenujemo *Riemannova sfera*. Naj bo $\hat{\mathbf{n}}$ enotski vektor na Riemannovi sferi, katerega projeciramo na točko $z \in \mathbb{C}$. Tedaj lahko preslikave vektorja $\hat{\mathbf{n}}$ zapišemo s preslikavami projekcije z.

zrc. čez ekv. ravnino	$\varphi \mapsto \varphi$	$\vartheta_{\text{ekv}} \mapsto -\vartheta_{\text{ekv}}$	$z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$
zrc. skozi središče	$\varphi \mapsto \varphi + \pi$	$\vartheta_{\text{ekv}} \mapsto -\vartheta_{\text{ekv}}$	$z \mapsto -\dfrac{1}{\bar{z}}$

18.6.2 Möbiusove transformacije

Möbiusove transformacije $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiramo kot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Definirajmo posplošene krožnice kot unijo krožnic in premic. Veljajo trditve

- f je holomorfna in konformna.
- Posplošene krožnice slika v posplošene krožnice.
- Je enolično definirana s sliko treh točk.

Ker posplošene krožnice slika v posplošene krožnice, Möbiusove transformacije uporabimo za preslikave med območji, ki jih omejujejo posplošene krožnice torej **slika med diski in polravninami**.

Primer:

$$f(z) = \frac{z-i}{-z-i} \quad \text{slika} \quad \{\Im(z) > 0\} \to \{|z| < 1\}$$

Naj bo k element krožnice in p element premice. Möbiusova transf. slika

- krožnico v premico, čee $\exists k \ni$: $f(k) = \infty$
- premico v krožnico, čee $\forall p \ni$: $f(p) < \infty$

Naj bo U območje, ki ga hočemo preslikati. Ker je enolično definirana s sliko treh točk, izberemo tri točke z ∂U, običajno oglišča, ki si jih delijo krivulje, ki sestavljajo rob (če imamo premico ali poltrak, kot oglišče obravnavamo tudi ∞).

Möbiusove transformacije so kompozitum inverzne stereografske projekcije, rotacije, skaliranja ali translacije Riemannove sfere ter stereografske projekcije, torej kompleksno ravnino projeciramo na sfero, jo zavrtimo ter projeciramo nazaj na kompleksno ravnino.

Möbiusove transformacije, ki so ortogonalne transformacije Riemmanove sfere (rotacije in zrcaljenja), so oblike

$$m(z) = \frac{uz - \overline{v}}{vz + \overline{u}}\,, \qquad |u|^2 + |v|^2 = 1\,.$$

18.7 Lastnosti in relacije

Označimo

$$\begin{array}{rcl} \text{odprta } D \subset \mathbb{C} & x, y \in \mathbb{R} \text{ taka, da velja} & z = x + iy \in D \\ f : D \to \mathbb{C} & f(z) = u(x,y) + iv(x,y) & \end{array}$$

18.7.1 Holomorfnost

Naslednje trditve so ekvivalentne.

1. Funkcija f je *holomorfna.*
2. Funkcija f je *analitična* (TODO: tole ni res, nekaj podobnega pa je).
3. Za h, da $z + h \in D$ obstaja odvod
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$
4. u in v sta totalno odvedljivi in velja *Cauchy-Riemmanov sistem* (CRS) $u_x = v_y$ ter $u_y = -v_x$.
5. $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

Funkcija je cela, čee je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in f holomorfna.

18.7.2 Harmoničnost v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

Funkcija $h : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je *harmonična*, čee $\Delta h = 0$. Veljajo implikacije

$$\begin{aligned} A \text{ enostavno povezana}, \quad u \text{ harmon.} &\implies f \text{ holomorfna} \\ A \text{ enostavno povezana}, \quad v \text{ harmon.} &\implies f \text{ holomorfna} \\ f \text{ holomorfna} &\implies u \text{ in } v \text{ harmon.} \end{aligned}$$

19 Verjetnost

19.1 Uvedba novih slučajnih spremenljivk

Za $\mathbf{X}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$ in injektivno $h : \mathbf{X} \to \mathbf{U}$ velja

$$f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = f_{\mathbf{X}}\left(h^{-1}(\mathbf{U})\right)\left|\det \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{U}}\right| = f_{\mathbf{X}}\left(h^{-1}(\mathbf{U})\right)\left|\det\left(J\left(h^{-1}(\mathbf{U})\right)\right)\right|$$

19.2 Bayesov izrek in neodvisne spremenljivke

Za dogodka A in B velja, da je verjetnost, da se zgodi dogodek A, če se zgodi dogodek B enaka

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Pri zvezni porazdelitvni s slučajnima spremenljivkama X in Y velja podobno. Če levo stran odvajamo in na desni integriramo po diferencialnem intervalu dobimo

$$f_{X,Y}(x, y) = f_y(y)\, f_{X|Y}(x|y)$$

Dogodka A in B sta neodvisna, čee

$$\begin{array}{ccc} P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B}) & \iff & P(B) = P(B|A) = P(B|\overline{A}) \\ & \Updownarrow & \\ f_X(x) = f_{X|Y}(X|Y) = f_{X|Y}(X|\overline{Y}) & \iff & f_Y(y) = f_{Y|X}(Y|X) = f_{Y|X}(Y|\overline{X}) \end{array}$$

Zato za neodvisne spremenljivke velja

$$P(A, B) = P(A)P(B) \qquad f_{X,Y}(X, Y) = f_X(X)\, f_Y(Y)$$

19.3 Posebne zvezne porazdelitve

Porazdelitev slučajne spremenljivke X po porazdelitvi označimo kot
$X \sim$ porazdelitev

19.3.1 Enakomerna porazdelitev ($X \sim U(a,b)$)

Enakomerno porazdelitev slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in velja

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b) \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Velja

$$\overline{X} = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

19.3.2 Gaussova porazdelitev ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Za $\sigma > 0$ *Gaussovo porazdelitev* slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

in velja

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

kjer je erf *funkcija napake* v poglavju **??**.

Za Gaussovo porazdelitev je pomembna vrednost *FWHM (full width at half maximum)*. Definirana je kot razlika med vrednostmi elementoma praslike polovične vrednosti vrha. Velja

$$\text{WFHM} = 2\sqrt{2\log 2}\sigma$$

Namesto $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ zasledimo tudi definicijo $X \sim N(\mu, \sigma)$. Definiciji ločimo z dimenzijsko analizo.

19.3.3 Maxwellova porazdelitev

Maxwellovo porazdelitev srečamo, ko obravnavamo porazdelitve 3 neodvisnih in neomejenih količin q_i, ki jih zapišemo v vektor $\mathbf{q}$. Veljati mora $\langle \mathbf{q} \rangle = 0$. Tako za $q = |\mathbf{q}| \in \mathbb{R}^+$ dobimo

$$f_Q(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q^2}{a^3} \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2}\right)$$

ter

$$F_Q(q) = \operatorname{erf}\left(\frac{q}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{a} \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2}\right)$$

Posebej v termodinamiki dobi obliko

$$f_V(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Velja še

$$\overline{Q} = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad \sigma_Q^2 = \frac{a^2\,(3\pi - 8)}{\pi}$$

19.3.4 Eksponentna porazdelitev

Eksponentno porazdelitev srečamo pri dogodkih, ki se zgodijo s stalno verjetnostno gostoto. Interval med dogodkoma je porazdeljen eksponentno. Za $t \geq 0$ velja

$$f_T(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

ter

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

19.3.5 Cauchyjeva porazdelitev ($X \sim \mathrm{Cauchy}(\mu, \gamma)$)

Cauchyjevo porazdelitev srečamo pri ???. Definirana je kot in velja

$$f_X\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{(x-\mu)}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

Za to porazdelitev *ne obstaja* niti en moment oblike $\langle x^\alpha \rangle$, $|\alpha| \geq 1$.

Cauchyjeva porazdelitev je *stabilna* porazdelitev

19.3.6 Studentova porazdelitev T

Studentovo porazdelitev T srečamo pri vzorčni porazdelitvi povprečij. Definirana je kot in velja

$$f_T(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}B(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Velja

$$\langle T\rangle = 0,\ \nu > 1 \qquad \sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2},\ \nu > 2$$

$$\lim_{\nu\to\infty(30)} f_T(t,\nu) = N(0,1) \qquad \text{(Gaussova porazdelitev)}$$

19.3.7 Porazdelitev χ^2 ($X \sim \chi^2(\nu) = X \sim \chi^2_\nu$)

Porazdelitev χ^2 slučajne spremenljivke X srečamo pri vzorčni porazdelitvi varianc. Definirana je kot in velja

$$f_X(x,\nu) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}x^{\frac{\nu}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right); \qquad x>0$$

$$\overline{X} = \nu \qquad \sigma_X^2 = 2\nu$$

19.3.8 Porazdelitev F

Porazdelitev F srečamo pri vzorčni porazdelitvi varianc. Definirana je kot in velja

$$f_F(x;\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$$

$$\overline{X} = \frac{\nu_2}{\nu_2-2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{2\nu_2^2\left(\nu_1+\nu_2-2\right)}{\nu_1\left(\nu_2-2\right)^2\left(\nu_2-4\right)}$$

19.4 Posebne diskretne porazdelitve

19.4.1 Bernoullijeva porazdelitev ($X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$)

Bernoullijevo porazdelitev srečamo, ko obravnavamo *Bernoullijeve poskuse*, kar so dogodki z 2 možnima izidoma. Definirana je kot

$$P(X = x, p) = p^x \left(1-p\right)^{1-x} = px + \left(1-p\right)\left(1-x\right) \qquad x \in \{0, 1\}$$

Bernoullijeva porazdelitev je poseben primer binomske.

19.4.2 Binomska porazdelitev ($X \sim B\,(N, p)$)

Binomsko porazdelitev slučajne spremenljivke X srečamo, ko obravnavamo N zaporednih in neodvisnih *Bernoullijevih poskusov*, pri katerih štejemo poskuse z izidom 1. Definirana je kot

$$P(X = n, N, p) = \binom{N}{n} p^n \left(1-p\right)^{N-n}$$

Velja

$$\overline{X} = Np \qquad \text{in} \qquad \sigma_X^2 = Np\left(1-p\right)$$

Kumulativno funkcijo lahko izračunamo z vsoto, ali pa s približkom Gaussove porazdelitve

$$\lim_{N\to\infty} P\left(a \leq \frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

V praksi približek dobro velja že za $Np > 5$ in $N\left(1-p\right) > 5$.

19.4.3 Poissonova porazdelitev ($X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$)

Poissonovo porazdelitev slučajne spremenljivke X srečamo, ko štejemo dogodke, ki se na *zveznem* intervalu dogajajo s stalno verjetnostno gostoto. Je limita binomske porazdelitve, ko

$$N \to \infty \quad \ni: \quad \overline{X} = Np = \lambda$$

Porazdelitev pove verjetnost, da se na intervalu zgodi x dogodkov, če pričakujemo, da se jih zgodi λ. Veljata (drugo za velike x):

$$P(X = x; \overline{X}) = \frac{\overline{X}^x}{x!} \exp\left(-\overline{X}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(\frac{\overline{X}e}{x}\right)^x \exp\left(-\overline{X}\right)$$

Če vpeljemo drugo, nenormirano porazdelitev $f_T(t) = \rho$ za $t \geq 0$, lahko zapišemo $\lambda = \rho t$ ter velja enačba za verjetnost, da se v intervalu $t \in (0, t)$ zgodi x dogodkov.

$$P(x; \rho t) = \frac{(\rho t)^x}{x!} e^{-\rho t}$$

"Časovno"verjetnostno gostoto ρ dobimo z enačbo $\overline{X} = \lambda = \rho t$ ter definicijo verjetnosti

$$\rho = \lim_{t \to \infty} \frac{N_{\text{dogodkov}}}{t}$$

Standardni odklon binomske konvergira za $N \to \infty$, zato

$$\sigma_X^2 = \overline{X}$$

Velikost intervala med dogodkoma je pa porazdeljen po *eksponentni* porazdelitvi v poglavju (19.3.4)

19.5 Momenti

Surovi (algebrajski) moment definiramo:

$$M'_p = \begin{cases} \sum_X x^p f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X x^p f_X(x) \mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$$

centralni moment pa

$$M_p = \begin{cases} \sum_X \left(x - \overline{X}\right)^p f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X \left(x - \overline{X}\right)^p f_X(x) \mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$$

Vidimo, da velja

$$M'_0 = 1 \qquad M'_1 = \overline{X} \qquad M_0 = 1 \qquad M_1 = 0 \qquad M_2 = \sigma_X^2$$

19.6 Povprečna vrednost

Povprečno vrednost definiramo

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \overline{X} = {}^{\mu}X =$$

$$= \begin{cases} \sum_X x f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X x f_X(x) \mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$$

19.7 Varianca, kovarianca in standardni odklon

Varianco definiramo

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}\left[X\right])^2\right] = \overline{\left(X - \overline{X}\right)^2} =$$

$$= \begin{cases} \sum_X \left(x - \overline{X}\right)^2 f_X(x) & X \text{ diskretna} \\ \int_X \left(x - \overline{X}\right)^2 f_X(x) \mathrm{d}x & X \text{ zvezna} \end{cases}$$

Kovarianco

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = \sigma_{XY} = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle$$

Standardni odklon pa

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]}$$

19.8 Kovariančna matrika

Kovariančno matriko slučajno porazdeljenega vektorja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ definiramo kot

$$M_{ij} = \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle \ .$$

Kovariančna matrika je *simetrična*, torej $M_{ij} = M_{ji}$.

19.9 Linearno korelacijski koeficient

Linearno korelacijski koeficient ρ definiramo kot

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Velja $\rho \in [-1, 1]$. $|\rho|$ odraža *linearno* koreliranost spremenljivk X in Y. Za neodvisni spremenljivki X in Y velja $\rho = 0$.

19.10 Mediana in medianski odklon

Mediano slučajne zvezne spremenljivke X definiramo

$$m_M = \mathrm{med}\,[X] \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_X^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \{x_M\}$$

čee je moč praslike $\left|F_X^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}\right| = 1$.

Mediano slučajne diskretne spremenljivke X definiramo

$$m_M = \mathrm{med}\,[X] \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(X < x_m) \leq \frac{1}{2} \quad P(X > x_m) \leq \frac{1}{2}$$

Pri določenih porazdelitvah x_M ni enolično določena, tedaj dobimo množico $\{x_{Mi}\}_i$. Po dogovoru jo tedaj definiramo kot

$$x_M = \overline{\{x_{Mi}\}_i}$$

Medianski odklon slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$\mathrm{MAD}\,[X] = \mathrm{med}\,[|X - \mathrm{med}\,[X]|]$$

19.11 Konvolucija v verjetnosti

Za neodvisni slučajni spremenljivki X in Y ter $Z = X + Y$ velja

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) = (f_X(x) * f_Y(y))\,(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\ \mathrm{d}t && \text{(zvezna)} \\
P(Z=n) = (P(X=x) * P(Y=y))\,(z) &= \sum_i P(X=i)P(Y=n-i) && \text{(diskretna)}
\end{aligned}
$$

19.11.1 Zvezne porazdelitve

$$\sum_i N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) \sim N\left(\sum_i \mu_i\,, \sum_i \sigma_i^2\right)$$

$$\sum_i \mathrm{Cauchy}\left(\mu_i, \gamma_i\right) \sim \mathrm{Cauchy}\left(\sum_i \mu_i\,, \sum_i \gamma_i\right)$$

$$\sum_i \mathrm{Levy}\left(\mu_i, c_i\right) \sim \mathrm{Levy}\left(\sum_i \mu_i\,, \left(\sum_i \sqrt{c_i}\right)^2\right)$$

$$\sum_i \chi^2\left(\nu_i\right) \sim \chi^2\left(\sum_i \nu_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left(N\left(0,1\right)\right)^2 \sim \chi^2\left(\nu\right)$$

19.11.2 Diskretne porazdelitve

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Bernoulli}\left(p\right) = B\left(N, p\right)$$

$$\sum_i B\left(N_i, p\right) = B\left(\sum_i N_i, p\right)$$

$$\sum_i \mathrm{Pois}\left(\lambda_i\right) = \mathrm{Pois}\left(\sum_i \lambda_i\right)$$

20 Statistika

Populacija je množica elementov z lastnostmi.

Vzorec je slučajno izbrana podmnožica populacije. Dobimo ga, ko slučajno izbiramo elemente populacije. Če izberemo *z nadomeščanjem*, vsakič izberemo element populacije, če pa izberemo *brez nadomeščanja*, pa vsakič izberemo element populacije brez že izbranih elementov. Za neskončno populacijo sta izraza ekvivalentna.

20.1 Cenilka in statistika

Cenilka je skalarna funkcija, ki slika iz prostora lastnosti populacije. Naj ima populacija oziroma vzorec n elementov. Tedaj je cenilka preslikava

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, .$$

Če s cenilko preslikamo lastnosti *vsakega* elementa populacije S, dobimo *statistiko* populacije

$$\theta = T(S) \, ,$$

ki *ni* slučajna količina. Pri vzorčenju elemente populacije izbirano *slučajno*, zato lastnosti posameznih elementov lahko obravnavamo kot *slučajne* količine, porazdeljene enako, kot je vrednost lastnosti porazdeljena po populaciji. Ekvivalentno si za slučajno spremenljivko X izmerke X_i lahko predstavljamo kot lastnosti elementov neskončne populacije, katero vzorčimo.

Naj bo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ vektor izmerkov v vzorcu moči n. Ker je $\mathbf{X}$ slučajen, je cenilka lastnosti vzorca prav tako slučajna količina, ki jo označimo kot

$$\hat{\theta}_n = T(\mathbf{X}) \, ,$$

imenujemo jo pa *vzorčna statistika*. Indeksiramo jo z močjo vzorca. Vzorčno statistiko dobimo s tako cenilko, da zanjo velja *doslednost*, torej

$$\lim_{n \to |S|} \theta_n = \theta \qquad \text{in} \qquad \lim_{n \to |S|} \mathrm{Var}\,(\theta_n) = 0 \, ,$$

kar pomeni, da s preslikavo vseh elementov dobimo vse podatke o populaciji. Pogosto obravnavamo neskončno populacijo, kjer velja $|S| = \infty$.

Za cenilko oziroma statistiko mora veljati še *nepristranskost*

$$\left\langle \hat{\theta}_n \right\rangle = \theta$$

20.1.1 Primeri cenilk

Vzorčno povprečje je cenilka, definirana kot

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Pogosto zasledimo tudi oznako $\hat{X}_n = \hat{\mu}_n$. Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja $\hat{\mu}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Vzorčna varianca je cenilka, definirana kot

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu}_n)^2 \, .$$

Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja $\hat{\sigma}_n^2 \sim N\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}\right)$, torej v približku $n \gg 1$ velja $\hat{\sigma}_n \sim N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n}\right)$.

Cenilka T je cenilka, definirana kot

$$\hat{T} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}}$$

Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja

$$\hat{T}(X) \sim f_T(\nu = N - 1) \, ,$$

kjer je f_T Studentova porazdelitev T s poglavja 19.3.6. Cenilka $\hat{T}$ tedaj poda verjetnostno gostoto, da z vzorcem velikosti N vzorčno povprečje zavzame vrednost, za σt večjo od pravega. (?)

Cenilka χ^2 je cenilka, definirana kot

$$\hat{\chi}^2 = (N-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ velja

$$\hat{\chi}^2(X) \sim \chi^2(N-1) \, ,$$

kjer porazdelitev χ^2 najdemo v poglavju 19.3.7. Cenilka $\hat{\chi}^2$ tedaj poda verjetnostno gostoto, da z vzorcem velikosti N vzorčna varianca zavzame vrednost, za χ^2-krat večjo od prave. (?)

20.2 Statistični testi

Pri statističnih testih obravnavamo verjetnost hipoteze, kjer za statistiko $\hat{\theta}$ podamo *interval zaupanja* $[\theta_-, \theta_+]$, znotraj katerega mora ležati statistika, da hipoteza drži z verjetnostjo vsaj $1-\alpha$. Vrednosti α rečemo *nivo zaupanja* (?).

20.2.1 Test T

kjer je F_T kumulativna verjetnostna gostota za Studentovo porazdelitev T s poglavja 19.3.6.

TODO: porazdelitev simetrična, lahko preverimo le en rep.

20.2.2 Test χ^2

Pri *testu* χ^2 za slučajno spremenljivko $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, vzorčeno N-krat, obravnavamo verjetnost hipoteze $\sigma = \sigma_0$. Za vrednost $\sigma = \sigma_0$ izračunamo vzorčno statistiko

$$\chi_0^2 = (N-1)\,\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \overset{?}{\sim} \chi^2(\nu = N-1)\,,$$

ki je porazdeljena po porazdelitvi χ^2, če. Za nivo zaupanja α nato najdemo vrednosti χ_-^2 in χ_+^2, da velja

$$P(\chi^2 < \chi_-^2) = F_{\chi^2}(\chi_-^2) = \frac{\alpha}{2} \qquad P(\chi^2 < \chi_+^2) = F_{\chi^2}(\chi_+^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,,$$

kjer je F_{χ^2} kumulativna verjetnostna gostota za porazdelitev χ^2 s poglavja 19.3.7, s številom prostostnih stopenj $\nu = N-1$. Če $\chi^2 \notin \left[\chi_-^2, \chi_+^2\right]$, z verjetnostjo α trdimo $\sigma \neq \sigma_0$.

TODO: Če že v enem repu presega, ni treba računati drugega.

20.3 Optimalno združevanje neodvisnih spremenljivk

Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in izmerki neodvisni. Izmerimo vzorca, s katerima s cenilko dobimo vzorčni povprečji

$$\hat{X}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{X}_A \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\hat{X}_B = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_j \qquad \hat{X}_B \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right) .$$

Z istimi podatki obeh vzorcev lahko dobimo statistiko

$$\hat{X}_{AB} = \frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m} X_k \qquad \hat{X}_{AB} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n+m}\right) .$$

Statistiko lahko zapišemo kot

$$\hat{X}_{AB} = \frac{1}{n+m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) + \left(\sum_{j=n}^{n+m} X_j\right)\right) = \frac{n\hat{X}_A + m\hat{X}_B}{n+m} .$$

Definirajmo statistiko $\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Ta spremenljivka *ni* vzorčna varianca, zanjo pa velja $\mathrm{Var}\left(\hat{X}_A\right) = \hat{\sigma}_A^2$ ter podobno za $\hat{X}_B$ in $\hat{X}_{AB}$. Zato

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{AB}^2} = \frac{n+m}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{m}{\sigma^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}_A^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_B^2}$$

in dobimo

$$\hat{X}_{AB} = \frac{\hat{\sigma}_B}{\hat{\sigma}_{AB}}\hat{X}_A + \frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_{AB}}\hat{X}_B .$$

Enačbo lahko zapišemo v obliki

$$\hat{X}_{AB} = \hat{X}_A + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_{AB}}}_{\text{utež}}\underbrace{\left(\hat{X}_B - \hat{X}_A\right)}_{\text{inovacija}} ,$$

ki jo lahko razumemo kot rekurzivno formulo, pri kateri statistiko $\hat{X}_A$ posodobimo z izmerki v vzorcu B. Tedaj ustrezno označen člen imenujemo *inovacija*, ki jo z utežjo prištejemo vzorčni statistiki. Tako posodabljanje statistike imenujemo *Kalmanov algoritem.*

Izkaže se, da je tudi za spremenljivko, ki ni porazdeljena po Gaussovi porazdelitvi, linearno združevanje statistik (torej oblike $\hat{X}_{AB} = \alpha\hat{X}_A + \beta\hat{X}_B$) s Kalmanovim algoritmom *optimalno.* Za Gaussov šum je pa združevanje izmerkov s Kalmanovim algoritmom še *optimalno* združevanje statistik (boljše od vseh drugih − tudi nelinearnih).

20.4 Korelacija in optimalno združevanje koreliranih spremenljivk

Izkaže se, da za optimalno združevanje linearno koreliranih vzorcev A in B velja podobna enačba

$$\hat{X}_{AB} = \hat{X}_A + \frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_{AB}}\left(\hat{X}_B - \hat{X}_A\right) \qquad \frac{1}{\hat{\sigma}_{AB}^2} = \frac{1}{1-\hat{\rho}_{AB}^2}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_A^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_B^2} - \frac{2\hat{\rho}_{AB}}{\sigma_A\sigma_B}\right)$$

Ker je vsak šum na dovolj majhni skali zvezna funkcija, je pri pregostem vzorčenju vsak šum avtokoreliran. S pregostim vzorčenjem ne izvemo (veliko) koristnih podatkov (podatkov o nezašumljenem signalu je končno).

21 Posebni problemi

21.0.1 Elektromagnetizem

V elektromagnetizmu definiramo gostoto naboja ρ, gostoto električnega pretoka $\mathbf{j}$, skalarni (električni) potencial V in vektorski (magnetni potencial) $\mathbf{A}$. Z njimi definiramo četverec toka $J_\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ in četverec potenciala $A_\mu = (\frac{1}{c}V, \mathbf{A})$, za katera velja *Maxwellova enačba*

$$\Box A_\mu = \mu_0 J_\mu$$

iz katere izpeljemo Maxwellove enačbe v integralski in diferencialni obliki

$$\begin{aligned}
&\oiint \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = e && \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho \\
&\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = I + \frac{\mathrm{d}\phi_e}{\mathrm{d}t} && \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
&\oiint \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 && \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \\
&\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} && \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Enačbe dopolnita *konstitutivni relaciji* $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ in $\mathbf{D}(\mathbf{E})$. Relaciji sta snovni lastnosti, a pogosto obravnavamo linearni relaciji

$$\mathbf{B} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}\mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\mathbf{E}\,.$$

Za vakuum velja $\underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{\mu}} = 1$ ter $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. Polarizacija in magnetizacija take snovi je

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_e}{\mathrm{d}V} = \underline{\underline{\chi}}_e\mathbf{D} = \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - 1\right)\varepsilon_0\mathbf{E} \\
\mathbf{M} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_m}{\mathrm{d}V} = \underline{\underline{\chi}}_m\mathbf{H} = \left(1 - \underline{\underline{\mu}}^{-1}\right)\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\,.
\end{aligned}$$

Naj bo e električni naboj, $\mathbf{p}_e$ in $\mathbf{p}_m$ pa električni in magnetni dipol. Tedaj sta sila in navor v zunanjih E in B

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= e\mathbf{E} + (\mathbf{p}_e\cdot\nabla)\,\mathbf{E} && \mathbf{T} = \mathbf{p}_e\times\mathbf{E} \\
\mathbf{F} &= (\mathbf{p}_m\cdot\nabla)\,\mathbf{B} && \mathbf{T} = \mathbf{p}_m\times\mathbf{B}\,.
\end{aligned}$$

Energijska kontinutitetna enačba se glasi

$$\partial_t w + \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{P}} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = 0\,,$$

kjer je $w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}$ energijska gostota, $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ pa *Poytingov vektor.*

Točkast naboj: Naj bo e naboj, r razdalja od naboja. Tedaj velja

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Nabita premica: Naj bo smerni vektor premice $\hat{\mathbf{z}}$, $\mu = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}z}$ dolžinska gostota naboja, ρ razdalja od premice, r_0 poljuben polmer (določi ničlo V). Tedaj velja

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\log\frac{r}{r_0} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$$

Ravni tokovni vodnik: Naj bo smerni vektor premice $\hat{\mathbf{z}}$, $I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ električni tok, ρ razdalja od premice. Tedaj velja

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}$$

Krožna tokovna zanka: Naj krožnica polmera R leži v ravnini z normalo $\hat{\mathbf{z}}$, naj bo $I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ električni tok, z pa razdalja od omenjene ravnine. Tedaj velja

$$\mathbf{A}(z\hat{\mathbf{z}}) = \qquad \mathbf{B}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$$

21.0.2 Toplotna enačba

Toplotna enačba je *difuzijska enačba*, za katero v trdni snovi velja $\mathbf{j} = -\underline{\underline{\lambda}}\nabla T$ ter kontinutitetna enačba

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = q - \rho c \partial_t T\ ,$$

kjer je $q = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ gostota toplotnih izvorov / ponorov, ρ gostota, c specifična toplota. V primeru premičnih tekočin v enačbah zamenjamo $\partial_t T \mapsto \partial_t T + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,T$.

21.0.3 Hidrodinamika

V hidrodinamiki poznamo Navier-Stokesovo enačbo

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p+\rho g h) + \eta\nabla^2\mathbf{v}$$

21.0.4 Rotacijska kinematika

Obravnavamo togo telo, ki se vrti s kotno hitrostjo okrog $\boldsymbol{\omega}$. Tedaj ima to telo vrtilno količino $\mathbf{L} = \underline{\underline{J}}\boldsymbol{\omega}$, kjer je (simetični) tenzor vztrajnostnega momenta

$$\underline{\underline{J}} = \int \rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}V \ .$$

Za bolj zapletena telesa tenzor vztrajnostnega momenta lahko sestavimo iz tenzorjev za dele tega telesa. Pri tem ne smemo pozabiti, da v tenzorjih za dele telesa nastopa masa posameznega dela.

Steinerjev izrek: Če poznamo $\underline{\underline{J}}'$ za rotacijo togega telesa mase m z osjo $\boldsymbol{\omega}$ skozi točko $\mathbf{r}'$, se vztrajnostni moment $\underline{\underline{J}}$ z enako osjo $\boldsymbol{\omega}$ skozi točko $\mathbf{r}$ glasi

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}' + m\left(d^2 - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}\right)$$

kjer je $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ vektor premika.

Vztrajnostni momenti teles:
Izmaknjena točkasta masa: $J = mr^2$

Tanka sfera: $J = \frac{2}{3}mr^2$ Debela sfera (votla krogla): $J = \frac{2}{5}m\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$

Tanek plašč valja: $J_z = mr^2$, $J_{xy} = \frac{1}{12}m\left(3r^2 + h^2\right)$

Debel plašč valja: $J_z = \frac{m}{2}\left(R^2 + r^2\right)$, $J_{xy} = \frac{m}{12}\left(3(R^2 + r^2) + h^2\right)$

Stožec: $J_z = \frac{3m}{10}r^2$, $J_{xy,\text{konica}} = \frac{m}{20}\left(3r^2 + 12h^2\right)$ $J_{xy,\text{ploskev}} = \frac{m}{20}\left(3r^2 + 2h^2\right)$
$J_{xy,\text{težišče}} = \frac{m}{20}\left(3r^2 + \frac{3}{4}h^2\right)$

Elipsoid: $J_x = \frac{m}{5}\left(r_y^2 + r_z^2\right)$, podobno za J_x in J_y

Kvader skozi normalo ploskve: $J_z = \frac{m}{12}\left(a_x^2 + a_y^2\right)$

Kvader skozi telesno diagonalo: $J = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Kvader, zavrten okrog osi $\hat{\mathbf{y}}$ za kot ϑ: $J_z = \frac{m}{12}\left(a_x^2 \cos^2\vartheta + a_y^2 + a_z^2 \sin^2\vartheta\right)$

21.1 Nihajna enačba

V primeru majhnih nihanj dobimo sinusno nihanje. Zato uporabimo kompleksen nastavek $u(t) = ue^{\mathrm{i}\omega t+\delta}$, odvodi odmika se tedaj prevedejo na

$$(\partial_t)^n = (\mathrm{i}\omega)^n \, .$$

Tako namesto diferencialne rešujemo algebrajsko enačbo. Končno rešitev dobimo kot realni del kompleksne.

Matematično nihalo Matematično nihalo z odmiki okrog ravnovesne lege modeliramo z diferencialno enačbo

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

Za majhne odmike okrog ravnovesne lege ($|\theta| \ll \pi$, torej majhne skrajne lege) velja $\sin\theta = \theta$, zato dobimo rešitev

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Za majhne odmike okrog labilne lege ($|\theta \pm \pi| \ll \pi$, torej velike skrajne lege) dobimo robne pogoje $\theta(0) = 0$ in $\theta(\pm\infty) = \pm\pi$ in dobimo rešitev

$$\theta(t) = 4\arctan\left(\frac{e^{\omega t} - 1}{e^{\omega t} + 1}\right) = 4\arctan\left(\tanh\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$$

Splošno rešitev dobimo z Jacobijevo amplitudo s poglavja (**??**).

$$\theta(t) = \pm 2 \ \mathrm{am}\left(\frac{\sqrt{(c_1+2)(t+c_2)^2}}{2}, \frac{4}{c_1+2}\right)$$

Sinusno vzbujanje harmoničnega nihala z linearnim uporom Sinusno vzbujanje harmoničnega nihala z linearnim uporom modeliramo z diferencialno enačbo

$$\ddot{x} - 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = Ae^{i\omega t}$$

Predpostavimo, da začetni pogoj ustreza stanju sistema v limiti $t \to \infty$. Tedaj je rešitev

$$\delta = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad \Omega^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \beta^2\omega^2$$

$$x \in \mathbb{C} \implies \qquad x(t) = \frac{A}{\Omega} e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$x \in \mathbb{R} \implies \qquad x(t) = \frac{A}{\Omega^2}\big((\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega t) + \beta\omega\sin(\omega t)\big)$$

Vzbujanje prostega telesa z linearnim uporom Vzbujanje prostega telesa z linearnim uporom modeliramo z diferencialno enačbo

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_0}{\tau} e^{i\omega t}$$

Predpostavimo, da začetni pogoj ustreza stanju sistema v limiti $t \to \infty$. Tedaj je rešitev

$$\begin{aligned}
&\delta = \arctan(\omega\tau) \\
&v \in \mathbb{C} \implies && v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{i(\omega\tau - \delta)} \\
&v \in \mathbb{R} \implies && v(t) = \frac{v_0}{1 + (\omega\tau)^2} \left(\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t\right)
\end{aligned}$$

V primeru nesinusnega vzbujanja enačbo rešimo s Fourierjevo transformacijo v poglavju (**??**).

Anharmonski potencial Obravnavajmo *anharmonski potencial* $V(x) = \frac{1}{2} k x^n$, za katerega ne obstaja netrivialna rešitev $u(t)$. Za sod n dobimo nesinusno nihanje, za katerega lahko izračunamo odvisnost nihajnega časa od amplitude $t_0(u_0)$. Dobimo

$$t_0 = \frac{4}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{m}{k}} u_0^{1-\frac{n}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} \sqrt{\frac{m}{k}} u_0^{1-\frac{n}{2}} .$$

Račun velja tudi za lih n, a tedaj telo opravi največ pol nihaja (če $\dot{u}(0) > 0$).

Majhna nihanja Fizikalne sisteme opišemo s spremenljivkami q_i in njihovimi časovnimi odvodi $\dot{q}_i$. Te količine uredimo v vektorja $\mathbf{q}$ in $\dot{\mathbf{q}}$. Pogosto nas zanima nihanje v stacionarnih točkah. Te najdemo z enačbo

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = 0 \,, \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

V stacionarnih točkah $\mathbf{q}_{\text{stac}}$ lahko V razvijemo do kvadratnega reda in dobimo

$$V = V_0 + \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot \underline{\underline{V}}\mathbf{q} \qquad\qquad V = V_0 + \frac{1}{2} q_j V_{jk} q_k$$

ter lahko brez izgube splošnosti umerimo $V_0 = 0$. Kvadratni tenzor potenciala $\underline{\underline{V}}$ je *Hessejev tenzor* potenciala

$$\underline{\underline{V}} = \nabla\nabla V \qquad\qquad V_{jk} = \partial_j \partial_k V \,,$$

ki je zaradi ohranitve energije sebi-adjungiran (koordinatna matrika simetrična). Pri kvadratni formi $\mathbf{q} \cdot \underline{\underline{V}}\mathbf{q}$ pazimo, da v so v tenzorju $\underline{\underline{V}}$ izvendiagonalni elementi polovično zastopani, saj v formi nastopajo dvakrat. S kvadratno formo zapišemo še kinetično energijo

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot \underline{\underline{T}}\dot{\mathbf{q}} \,.$$

Kotne hitrosti nihanja dobimo s posplošeno enačbo za lastne vrednosti

$$\det\left(\underline{\underline{V}} - \omega^2 \underline{\underline{T}}\right) = 0 \,.$$

Za vsako lastno vrednost ω^2, najdemo lastni vektor nihanja $\mathbf{q}_{\text{last}}$, ki pripada določenemu ω^2, z enačbo

$$\left(\underline{\underline{V}} - \omega^2 \underline{\underline{T}}\right) \mathbf{q}_{\text{last}} = 0$$

Če so vsi ω^2 pozitivni, imamo stabilno lego. Če so vsi neničelni, a ne vsi pozitivni, imamo labilno lego in približek majhnih nihajev velja le za kratek čas, saj se fazni vektor $\mathbf{q}$ izmakne iz stacionarne lege. Če so nekateri ω^2 enaki 0, pa približek verjetno ne odraža fizikalne realnosti.

Rešitve gibalne enačbe so oblike $\mathbf{q}_{\text{stac}} + A\mathbf{q}_{\text{last}} e^{i\omega t}$, običajno pa rešitev podamo v stacionarni točki in zato tedaj velja $\mathbf{q}_{\text{stac}} = 0$, rešitve so pa posledično *linearne*. Posamezne rešitve za določen ω^2 so oblike

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{last}} e^{i\omega t} &= \mathbf{q}_{\text{last}} \left(A \cos\omega t + B \sin\omega t\right) && \omega^2 > 0 \\ \mathbf{q}_{\text{last}} e^{i\omega t} &= \mathbf{q}_{\text{last}} \left(A \cosh\omega t + B \sinh\omega t\right) && \omega^2 < 0 \end{aligned}$$

splošna rešitev je pa linearna kombinacija rešitev. Konstante ugotovimo iz začetnih pogojev.

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{\text{stac}} \in \text{Span}\left\{\mathbf{q}_{\text{last}} e^{i\omega t}\right\}$$

Če ima kinetični tenzor $\underline{\underline{T}}$ vse lastne vrednosti enake ($\underline{\underline{T}} = T$), rešujemo pravi problem lastnih vrednosti. Sled $\underline{\underline{V}}$ je neodvisna od izbire baze, zato velja

$$V_{ii} = \partial_i \partial_i V = T \sum_i \omega_i^2 \qquad\qquad \operatorname{tr} \underline{\underline{V}} = \nabla^2 V = T \sum_i \omega_i^2 \,.$$

Rezultat je koristen, ko obravnavamo sistem, za katerega zaradi simetrij vemo, da bosta vsaj dve lastni frekvenci enaki, ter potencial, za katerega poznamo Laplacian (običajno $\nabla^2 V = 0$).

21.2 Razpadna enačba

Razpadna enačba opisuje razpad (prehode) delcev. Naj bo N število delcev (v nekem stanju) in τ značilni čas. Tedaj velja

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{N}{\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Naj bo več možnih prehodov z značilnimi časi τ_i in P_i pogojna verjetnost prehoda iz izvornega stanja v i-to stanje, če se je zgodil prehod. Tedaj velja

$$\frac{1}{\tau} = \sum \frac{1}{\tau_i} \qquad P_i = \frac{\tau_i}{\tau}$$