Relação Diagonal

$\boxed{\Delta A}$ -> equivalência

Relação Universal

$\boxed{A^2}$ -> equivalência

Classe de Equivalência

- Num conjunto A e ρ uma relação de equivalência...

$$\boxed{[a]_\rho = \{x \in A : x \rho a\}}$$

- Propriedades:
- se $b \in [a]\rho \Rightarrow [b]\rho = [a]_\rho$
- $\bigcup_{a \in A} [a]_\rho = A$

Conjunto Quociente

-> Conjunto formado por todas as classes de equivalência de A.

$$\boxed{A/\rho = \{[a]\rho : a \in A\}}$$

- Como algumas classes de equivalência são iguais, e a repetição nos conjuntos não importa, o conjunto quociente terá apenas elementos diferentes, logo é uma partição de A.

Critérios de divisibilidade

Módulo 2

$N \equiv$ 0 se for par; 1 se for impar

Módulo 3

$\boxed{N \equiv \text{soma dos dígitos} \mod 3}$

Módulo 9

$\boxed{N \equiv \text{soma dos dígitos} \mod 9}$

Módulo 4

$\boxed{N \equiv DU \mod 4}$

Módulo 100

$\boxed{N \equiv DU \mod 100}$

Módulo 5

$\boxed{N \equiv U \mod 5}$

Módulo 10

$\boxed{N \equiv U \mod 10}$

Módulo 11

$N = abcde$

$\boxed{N \equiv e - d + c - b + a \mod 11}$

Teoria dos Conjuntos

Nota: ordem e repetição são irrelevantes

Definição

$\{1, 2, 3\}$ — extensão

$\{2a : a \in \mathbb{N}\}$ — compreensão

$\in$ — pertence (elemento)

$\subseteq$ - subconjunto ($\leq$)

$\subset$ — subconjunto próprio ($<$)

Partes de Conjunto

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos

Interseção

$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$

se $A \cap B = \emptyset$ então A e B são disjuntos

$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$

Reunião

$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$

se $A \cup B = \mathcal{U}$, então A e B são complementares

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$

Diferença

$A \setminus B$ = A exceto B

$\mathcal{U} \setminus B = \overline{B}$ complementar de B

Leis de Morgan

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

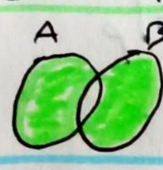
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$[n]$ é $\{1, 2, \ldots, n\}$

Diferença Simétrica -> XOR

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



Partição

Conjunto de subconjuntos A_i de A:

$A_i \neq \emptyset$

$A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$

Regra

Produto Cartesiano

$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \wedge b \in B\}$

Nota: $A \times A = A^2$

Teoria dos Números

Estudo dos inteiros ($\mathbb{Z}$)

Divisão com Resto

$0 \leq r < |d|$

$\frac{b}{a} \Rightarrow b = aq + r$

- q -> quociente
- r -> resto
- b -> dividendo
- a -> divisor

$q \equiv b \text{ div } a$

$r \equiv b \bmod a$

$D = d \times q + r$

$0 \leq r < |D|$

Nota

Quando o dividendo é negativo, a calculadora pode dar o resto negativo, mas ele é sempre (+), logo calculamos logo o r e depois calcular o quociente.

Divisibilidade

$a | b$ -> a divide b

Propriedades:

- $a | a$ se $a \neq 0$ (1 não é reflexiva)
- $1 | a$ e $a | 0$
- $a | b$ e $b | c \Rightarrow a | c$
- $a | b$ e $a | c \Rightarrow a | (b \pm c)$
- $a | b$ e $b | a \Rightarrow a = \pm b$
- $a | b$ e $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

MDC e MMC

m.d.c(a,b) — maior de $c|a$ e $c|b$

m.m.c(a,b) — menor de $a|c$ e $b|c$

$mdc(a,b) \times mmc(a,b) = |ab|$

Propriedades

$mdc(a,b) = mdc(|a|,|b|)$

$mdc(1,a) = 1$

$mdc(a,0) = |a| \quad a \neq 0$

$a|b \Rightarrow mdc(a,b) = |a|$

$mdc = d \Rightarrow mdc(ka, kb) = |k| d$

$c|a, c|b \Rightarrow c \mid mdc(a,b)$

$mmc(a,b) = mmc(|a|,|b|)$

$mmc(1,a) = a$

$mmc(a,0) = 0$

$a|b \Rightarrow mmc(a,b) = |b|$

$mmc = d \Rightarrow mmc(ka,kb) = |k| d$

$a|c, b|c \Rightarrow mmc(a,b) | c$

Se $r \equiv b \bmod a$

$mdc(a,b) = mdc(a,r)$

Algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} b & a \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} a & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ \hline r_3 & q_3 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{r|l} r_{n-1} & \boxed{r_n} \\ \hline 0 & q_{n+1} \end{array} \to \text{mdc}$$

$$\text{mdc}(b,a) = \text{mdc}(a, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \dots = \text{mdc}(r_n, 0) = \boxed{r_n}$$

Coeficientes de Bézout

$$\boxed{\text{mdc}(a,b) = \overbrace{ax_0 + by_0}^{\text{combinação linear}}}$$

1º Desenvolver Euclides e calcular mdc

2º Calcular coeficientes de Bézout

$\text{mdc}(a,b) = d$

$\boxed{ax + by = \text{mdc}(a,b)}$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \quad *}$$

Eq. Diofantina Linear

$\boxed{ax + by = c}$

tem solução inteira se

$\boxed{\text{mdc}(a,b) \mid c}$

Exercício:

$20x + 12y = 28$ tem S. em $\mathbb{Z}$?

$\text{mdc}(20,12) = 4 \quad 4 \mid 28$

$4 = 24 - 20 = 20 \times (-1) + 12 \times 2$

Com $28 = 7 \times 4$

$28 = 20(-7) + 12 \times 14$

substituir como + *

Números Coprimos → Primos

Primos entre si se

$\boxed{\text{mdc}(a,b) = 1}$

→ $1 = ax + by$

→ se são coprimos, então $ax + by = c$ é possível em $\mathbb{Z}$, $\forall c \in \mathbb{Z}$

→ Se $d = \text{mdc}(a,b)$, então a/d e b/d são coprimos

Lema de Euclides

Se a e b são coprimos e $a \mid bc$ ent. $a \mid c$

Corolário

a e b coprimos. se $a \mid c$ e $b \mid c$, ent. $ab \mid c$

Teoria dos Números 2

Teste de Primalidade

Verificar se todos os primos até $\sqrt{p}$ não são divisores de p

p é primo. Se $\boxed{p|ab}$, então

$\boxed{p|a \text{ ou } p|b}$ ↲ GDU Fator

Teorema Fundamental da Aritmética

Para qualquer $a \in \mathbb{N}$, existe...

$$\boxed{a = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}}$$

mdc(a,b) = primos comuns de menor expoente

mmc(a,b) = primos comuns de maior expoente + primos não comuns

Importante

$\boxed{a \text{ tem } (k_1+1) \times \dots \times (k_n+1) \text{ divisores}}$

Congruência Módulo n → Relação de equivalência

Para cada $n \in \mathbb{N}$...

$$\boxed{\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : n | a-b\}}$$

$$\boxed{a \equiv b \mod n}$$

Nota: o conjunto dos primos é infinito

Classe de congruência

... de a, é ... ↳ n classes de módulo n

$$\boxed{[a] = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \mod n\}}$$

≡mod n

ex: $n=4$ ...

classe de 0 = {0, 4, -4, 8, ...} ○

" " 1 = {1, 5, -3, ...} △

" " 2 = {2, 6, -2, ...} □

" " 3 = {3, 7, -1, ...} ▽

... ○ △ □ ▽ ○ △ □ ▽ ○ ...

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ...

Aritmética Modular

Se $a \equiv b \mod n$ e $c \equiv d \mod n$, então...

$$\boxed{a+c \equiv b+d \mod n}$$

e

$$\boxed{ac \equiv bd \mod n}$$

Propriedades:

0 é neutro da adição em mod n

1 é neutro da multi. em mod n

0 é absorvente da multi. em mod n

Se r for resto de $\frac{a}{n}$, então $\boxed{a \equiv r \mod n}$.

$a \equiv a \mod n$, logo (a,a) → Reflexiva

$a \equiv b \mod n \iff b \equiv a \mod n$ (a,b) e (b,a) → Simétrica

$a \equiv b \mod n$ e $b \equiv c \mod n$, então $\boxed{a \equiv c \mod n}$ → transitiva

Aritmética Modular 2 $\mathbb{Z}_n$

Adição -> b é simétrico de a mod n se $\boxed{a+b \equiv 0 \bmod n}$ } -> $\boxed{a \bmod n \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } a=0 \\ n-a & \text{se } a \neq 0 \end{cases}}$

Multiplicação -> b é inverso de a mod n se

$\boxed{ab \equiv 1 \bmod n}$

Múltiplos em $\mathbb{Z}_p$

Seja p primo e $a \in [p-1]$, cada elemento de

$\{a, 2a, \dots (p-1)a\}$ é congruente com só 1 elemento (não nulo)

de $\mathbb{Z}_p$ e tem-se $\boxed{\{a, 2a, \dots (p-1)a\} = \{1, 2, \dots (p-1)\} = [p-1]}$

Pequeno Teorema de Fermat

Se p é primo e a inteiro tal que $\boxed{p \nmid a}$ ...

$\boxed{a^{p-1} = 1 \pmod p}$

ex: em $\mathbb{Z}_5$

a	a^2	a^3	a^4
1			1
2			1
3			1
4			1

ex: 243^{12} md 13

$243 = 13 \times 18 + 9 \bmod 13$

$\equiv 9 \bmod 13 \Rightarrow 243^{12} \equiv$

$\equiv 1 \bmod 13$

Teste de Primalidade

se $\boxed{a^n \not\equiv a \pmod n}$ e $\boxed{n \nmid a}$,

então n não é primo

Módulo 11 - soma alternada

$24781 \equiv 1-8+7-4+2 \bmod 11 \equiv \dots$

Módulo 5 $n \equiv U$

$24781 \equiv 1 \bmod 5$ e $24786 \equiv 6 \bmod 5$

Divisibilidade Módulo 9 e 3

O nº e a soma dos seus algarismos têm o mesmo resto de divisão por 9

ex: $24781 \equiv 2+4+7+8+1 \bmod 9$

$\equiv 4 \bmod 9$

Módulo 4 $n \equiv DU$

Resumindo...

M2	zero e pares
M3	soma dos algarismos
M4	$n \equiv DU$
M5	$n \equiv U$
M9	soma dos algarismos
M10	$n \equiv U$
M11	subtração alternada

Recorrência

Sucessão

Uma sucessão em $\mathbb{R}$ é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$ e o contradomínio $\mathbb{R}$

Termo - elemento do D'

Termo geral - expressão analítica

Notação

Sendo u uma sucessão...

u_1 1º termo ... u_n termo geral

$\{u_n\}$ conjunto dos termos (D')

(u_n) a sucessão

Definir sucessão

Termo geral

Definida através de uma fórmula/expressão.

ex.:

$$u_n = \frac{2n}{4n+1}$$

Compreensão

Definida através de uma ou mais propriedades.

ex.: a sucessão dos nºs primos

Recorrência

Quando temos algum dos termos e é possível calcular a partir desse.

ex.: $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = (n+1)a_n$

Números Perfeitos

Números que são a soma de todos os seus divisores exceto o próprio.

ex: $6 = 1+2+3$

$28 = 1+2+4+7+14$

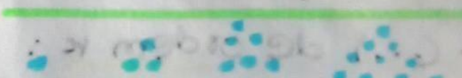
Sucessão de Fibonacci

A mais conhecida das sucessões de recorrência.

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

Números triangulares

$(t_n): t_1 = 1 \wedge t_{n+1} = t_n + n + 1, \ n \in \mathbb{N}$



1 ... 3 ... 6 ... 10 ... ex:

Progressão Aritmética

$(u_n): u_1 = c \wedge u_{n+1} = u_n + r$

com $n \in \mathbb{N}$ e $c, r \in \mathbb{R}$

r (razão) $= u_{n+1} - u_n$

Progressão Geométrica

$(u_n): u_1 = c \wedge u_{n+1} = u_n \times r$

com $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$

$r = u_{n+1}/u_n$

Princípio da Indução Matemática

Seja $A = \{n \in \mathbb{R} : n \geq a \wedge a \in \mathbb{R}\}$
e seja $P(n)$ uma condição em A.

Se:

- $P(n)$ é verdadeira para $n = a$

e

- A condição é hereditária, isto é:

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Então $P(n)$ é universal em A.

Solução de uma relação recorrência

- Chama-se solução a qualquer sucessão que verifique a relação:

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

Relação de recorrência linear

- Chama-se (...) de ordem k:

$u_n = a_1(n)u_{n-1} + \dots a_k(n)u_{n-k} + F(n)$

Se $\begin{cases} F(n) = 0 & \text{homogénea} \\ F(n) \neq 0 & \text{completa/não homogénea} \end{cases}$

Nota: Os coeficientes $a_1(n)$, $a_k(n)$ podem ser constantes

Classificação

É linear ou não?

↓ sim

Homogénea ou Completa?

↓

Coeficientes constantes ou variáveis?
De que ordem?

Equação característica

Dada a relação de ordem k:

$u_n - a_1 u_{n-1} - \dots a_k u_{n-k} = 0$

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_{k-1} x - a_k = 0$

Homogénea de coeficientes constantes

Com o polinómio, se:

- A raiz real simples, $s = r$, a solução é $u_n = c r^n$
- A raiz real múltipla p, $s = r$,

$u_n^{(1)} = c_1 r^n, u_n^{(2)} = c_2 n r^n, u_n^{(3)} = c_3 n^2 r^n$

onde r é a raiz.

Recorrência 2

Caso não Homogéneo

- São relações do tipo:

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k} + F(n)}$$

Com $F(n) \neq 0$ (*)

Provar que é solução

Como nas equações, substitui-se na fórmula

Solução da Relação Completa

Com uma relação do tipo (*)

Se:

- $\boxed{u_n^h = c_1 u_n + c_2 u_n + \ldots + c_k u_n}$ é solução geral da relação homogénea associada:

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k}}$$

- $\boxed{u_n^p}$ é solução particular da relação completa

Então,

$$\boxed{u_n = u_n^h + u_n^p}$$

é solução geral da relação completa

Nota: Agora podemos usar esse método por passos

Método de Solução

1. Determinar a solução geral da relação homogénea associada
2. Determinar uma solução particular da equação completa
3. Somar as duas soluções obtidas

Determinar Solução Particular

Se $F(n)$ é da forma:

$$\boxed{F(n) = (b_0 + b_1 n + \ldots + b_t n^t) r^n}$$

então a solução particular é da forma:

$$\boxed{u_n^p = (d_0 + \ldots + d_t n^t) r^n n^m}$$

se r
- é raiz da relação homogénea associada, m é a sua multiplicidade
- não é raiz, $\boxed{m = 0}$

Substituir na relação completa e achar o d.

Relações e Matrizes 2

Relações de Ordem

Maximal - topo do diagrama (linha | nele) ↳ apenas tem 1 quando está relacionado com ele mesmo

Minimal - base do diagrama (coluna | nele) ↳ apenas tem 1 quando está relacionado com ele mesmo

Majorante - tds maiores e relacionados

Supremo - menor majorante

Máximo - supremo ∈ conjunto

O mesmo para minorantes / ínfimo / mínimo

Congruências 2

Calcular inverso

$\boxed{ax \equiv 1 \bmod n}$ <=>

<=> $\boxed{ax + ny = 1}$

*Só tem soluções em $\mathbb{Z}$ se $mdc(a,n) = 1$

Basta usar o Euclides e determinar a equação diofantina do x...

Equação Linear

$\boxed{ax + b \equiv c \bmod n}$

$\boxed{ax + ny = c - b}$

Só tem soluções em $\mathbb{Z}$ se $mdc(a,n) \mid (c-b)$

Basta resolver o Euclides e usar a eq. diofantina:

$$\boxed{x = x_1 + \frac{n}{d}t, \ t \in \mathbb{Z}}$$

↳ tem d soluções em $\mathbb{Z}_n$

Simplificar

1. Calcular $mdc(a,n) = d$ e ver se $d \mid b$.

Regra 1

se $k \mid a, b, n, \ldots$

$$\boxed{a \equiv b \bmod n \iff \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \bmod \frac{n}{k}}$$

Regra 2

se k e n são coprimos, ...

$$\boxed{ka \equiv kb \bmod n \iff a \equiv b \bmod n}$$

Resolver equações *

1- Calcular mdc(a, n)

| c-b tem soluções

∤ c-b impossível

2- Simplificar

Se necessário, calcular inverso da a (mod n) e multiplicar por ambos os lados

3- Determinar os d soluções possíveis em mod n

* $\boxed{ax + b \equiv c \bmod n}$

Sistema de Equações

Provar que é solução

1 ↳ Substituir pelo x e verificar se as equações são verdadeiras.

Resolução por Substituição

1- Simplificar...

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 4 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \end{cases}$$

1ª -> $x = 1+3t \quad , t \in \mathbb{Z}$

2- Substituir na 2ª:

$1+3t \equiv 4 \bmod 5$

...

$t = 1+5s \quad , s \in \mathbb{Z}$

$x = 1+3t$

$= 1+3(1+5s)$

$= 4+15s$

3- Substituir na 3ª ...

$4+15s \equiv 4 \bmod 7$

...

$s = 7k \quad , k \in \mathbb{Z}$

4- logo

$x = 4+15(7k)$

$= 4+105k$

$\boxed{mmc(3,5,7) = 105}$

É possível se...

$\boxed{mdc(n_i, n_j) \mid a_j - a_i}$

Teorema Chinês dos Restos

a_i	n_i	N_i	x_i
1	3	35	$35x_1 \equiv 1 \bmod 3$
4	5	21	$21x_2 \equiv 1 \bmod 5$
4	7	15	$15x_3 \equiv 1 \bmod 7$

↳ resolver todas as x_i...

$\boxed{x = a_1 N_1 x_1 + \ldots + a_i N_i x_i \bmod 105}$

$\equiv 4 \bmod 105$

Atenção: só se $n_1 \ldots n_i$ são coprimos 2 a 2

Relações Binárias e Matrizes

Relação Binária

- Subconjunto de $A \times B$

$\boxed{\rho \subseteq A \times B}$

- $a\rho b$ se $(a,b) \in \rho$
- $a \not\rho b$ se $(a,b) \notin \rho$

Matriz

$M_{m\times n}$ — m linha, n coluna

Entradas de Matriz

- i - linha
- j - coluna

(i, j)

$M_{ij} = ?$

ex: $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$M_{11} = 3 \mid M_{21} = 1$

Matriz Booleana

1 se $a_i \rho b_j$

0 se $a_i \not\rho b_j$

ex:

$M_{\rho_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

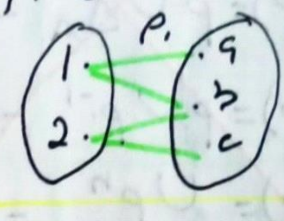
$\rho_1 = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c)\}$

$A = [2]$ $B = \{a,b,c\}$

Diagrama Sagital

$A = [2]$ $B = \{a,b,c\}$

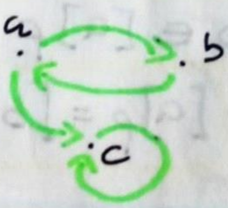
$\rho_1 = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c)\}$



Digrafo

$A = [2]$ $B = \{a,b,c\}$

$\rho = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,c)\}$



Operações

- $\rho \cap \sigma$ - interseção
- $\rho \cup \sigma$ - união
- $\rho \setminus \sigma$ - exceto
- $\bar{\rho}$ - complementar
- $\rho \oplus \sigma$ - soma booleana

Usa-se nas matrizes e diagramas

Relação Inversa

$\rho = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\ldots$

$\rho^{-1} = \{(b_1,a_1),(b_2,a_2)\ldots$

troca as coordenadas

Matriz Transposta

$M_{\rho^{-1}} = (M_\rho)^T$

Relação Composição

$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \in A \times C : a\rho b\sigma c\}$

$M_{\sigma\rho} = M_\rho \otimes \sigma$

Propriedades:

$(\phi \circ \sigma) \circ \rho = \phi \circ (\sigma \circ \rho)$

$(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$

Relação Potência

ρ^n

$\rho^1 = \rho$

$\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$

Diagonal/Identidade de A

$\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$

Relação Reflexiva

$\boxed{\forall a \in A, a\rho a}$

$M_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Relação Simétrica

$\boxed{\forall a,b \in A, a\rho b \Rightarrow b\rho a}$

$\rho = \rho^{-1}$

$M_\rho = M_{\rho^{-1}} = (M_\rho)^T$

Relação Transitiva

$\boxed{\forall a,b,c \in A, a\rho b \rho c \Rightarrow a\rho c}$

Relação de Equivalência

Simultaneamente:
- Reflexiva
- Simétrica
- Transitiva

Ex.: Δ_A, A^2

Relação Anti-simétrica

se $\boxed{a\rho b \rho a} \Rightarrow a = b$

se $\boxed{a\rho b}$ e $a \neq b$, logo $b \not\rho a$

Fechos

Não Sai

~~Relação que contém pares ordenados em falta e os de ρ~~

~~$\boxed{R(\rho) = \rho \cup \Delta_A}$ - Reflexiva~~

~~$\boxed{S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}}$ - Simétrica~~

~~$\boxed{T(\rho) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho^n}$ - Transitiva~~

Classe de Equivalência

$\boxed{[a]_\rho = \{x \in A : x\rho a \vee a\rho x\}}$

Se $\boxed{b \in [a]\rho}$ então $\boxed{[a]_\rho = [b]_\rho}$

Conjunto Quociente

$\boxed{A/\rho = \{[a]\rho : a \in A\}}$

↳ Partição de A

Relação de Ordem

Simultaneamente:
- Reflexiva
- Anti-simétrica
- Transitiva

CPO

Conjunto Parcialmente Ordenado

$\boxed{(A, \rho)}$ → relação ρ em A

a e b são comparáveis se $a\rho b$ ou $b\rho a$

se $a \not\rho b$ e $b \not\rho a$, então são não comparáveis

Cadeia

todos os elementos são comparáveis

Anticadeia

todos os elementos são não comparáveis

CTO

(A, ρ) e A é cadeia

Comprimento

$\boxed{\ell(x)}$ é o nº de elementos de x

altura $\boxed{> \ell}$ das cadeias

largura $\boxed{\not> \ell}$ das anticadeias

Teoria dos Grafos

Definição

- Grafo não orientado → é um par (V, A), onde V é o conjunto de vértices e A o de arestas → não tem setas
- Grafo Orientado / Digrafo
  ↳ tem setas e tbm tem (V, A)

ex: $V = \{$Odivelas, Senhor Roubado, ...$\}$

$A = \{\{$Odivelas, Senhor Rou.$\}, \{.., ..\} ...\}$

↳ Metro é não orientado

Classificação

- Orientado
  - N: não orientado
  - S: digrafo

	Laços?	A. Mult.?
Simples	Não	Não
Multigrafo	Não	Sim
Pseudografo	Sim	Sim

Ordem e Tamanho

$\boxed{\text{ordem } n = \#V}$

nº de vértices

$\boxed{\text{tamanho } m = \#A\ *}$

nº de arestas

* laço conta como aresta

Nota: Sempre que aparecer "*" depois de um título, significa que está relacionado com grafos não orientados!

G. Não Orientados *

- Se uma (ou +) aresta liga u e v, então u e v são adjacentes
  a aresta é incidente em u e v
- Se uma aresta é incidente apenas num vértice então chama-se laço/loop.
- G tem arestas múltiplas se tiver duas arestas distintas incidentes no mesmo par de vértices

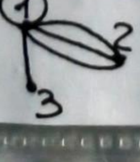
Multiplicidade e Grau *

- multiplicidade de $\{u, v\}$:
  - nº de arestas incidentes em u e v
  - dobro do nº de laços (se $u = v$)
- vizinhança de u:
  $N(u) = \{v \in V : u \text{ e } v \text{ são adjacentes}\}$
- grau de v:
  $d(v) = \text{Arestas} + 2\,\text{Laços}$
  incidentes em v

Matriz de Adjacências * (* outra forma)

- do Tipo $n \times n$, onde n são o nº de vértices
  ↳ m_{ij} = multiplicidade de $\{v_i, v_j\}$

ex



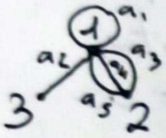
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Incidência * *2

- atenção a ordenação de vértices e arestas
- tipo $\boxed{n \times m}$ (n é ordem e m o tamanho)

$\boxed{m_{ij}}$ → 2 se for loop em v;
→ 1 se for incidente em v;
→ 0 se não for incidente

ex:



$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lema do Aperto de Mãos *

- A soma do grau de todos os vértices é o dobro do cardinal de A.

$$\boxed{\sum_{v \in V} d(v) = 2\#A}$$

*1 loop conta como aresta

* Matriz de Adjacência

- Soma das entradas da linha/ /coluna = grau do vértice (d(v))
- Soma de todas as entradas da matriz = 2#A

*2 Matriz de Incidência

- $\sum$ entradas da linha = grau d(v)
- $\sum$ entradas da coluna = 2
- $\sum$ entradas = 2#A

tudo só sobre * orientados

Grafos Orientados *

Grau e Multiplicidade *

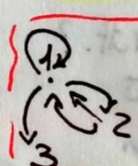
- grau de entrada de v: $\boxed{d^e(v) = \text{arestas q acabam em } v}$
- grau de saída de v: $\boxed{d^s(v) = \text{arestas q saiem de } v}$
- multiplicidade do par (u, v) do # de arestas que saiem em u e entram em v

$$\boxed{\sum d^e = \sum d^s = \#A}$$

Matriz Adjacência *

$\boxed{m_{ij} = \text{multiplicidade do par } (v_i, v_j)}$

#arestas do tipo $v_i \to v_j$



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -> ex

- $\sum$ entradas da linha = $d^s(v_i)$
- $\sum$ entradas da coluna = $d^e(v_i)$
- $\sum$ entradas = #A

Inverso do Grafo Simples

$$\boxed{\overline{G}_A = \frac{n(n-1)}{2} - G_A} \text{ arestas}$$

Teoria dos Grafos 2

Grafo Simples

- Não tem loops
- Não tem arestas múltiplas

- Não Orientado $\boxed{a_i = \{u, v\}}$
- Orientado $\boxed{a_i = (u, v)}$

aresta de
- liga u e v
- vai de u para v

Grafo Regular *

- Todos os vértices têm o mesmo grau.
- Diz-se que $\boxed{G \text{ é } \underbrace{d}_{\text{grau}} \text{-regular}}$

Grafo Completo → K_n *

- Qualquer vértice é adjacente aos restantes;
- Representa-se por $\boxed{K_n}$ → nº de V
- é $\boxed{(n-1)\text{-regular}}$
- tem tamanho $\boxed{\frac{n \times (n-1)}{2}}$

Ciclo com n vértices → C_n *

- $n \geq 3$
- representa-se por $\boxed{C_n}$
- tem vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ e arestas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \boxed{\{v_{n-1}, v_n\}}, \{v_n, v_1\}$
- é $\boxed{2\text{-regular}}$ e tem
- tamanho $\boxed{n}$

Roda de ordem n → W_n *

- ciclo de ordem $\boxed{n-1}$
- todos os vértices são ligados a um outro vértice
- não é regular
- tamanho $\boxed{(n-1)+(n-1) = 2(n-1)}$

Grafo bipartido completo → $K_{m,n}$ *

$$\boxed{\begin{array}{l} V = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\} \\ A = \{\{u_i, v_j\} : i \in [m] ; j \in [n]\} \end{array}}$$

- tem ordem $\boxed{m+n}$
- tem tamanho $\boxed{m \times n}$
- regular se $\boxed{m = n}$

Grafo bipartido *

- existe partição de V com 2 conjuntos Z e W, tais que uma aresta tem vértices de ambos os conjuntos, nunca do mesmo.

C_n é bipartido se for n par

Sequências de graus *

Seja G de ordem n, a sequência é o $\boxed{n\text{-uplo}}$ cujas coordenadas são os graus por ordem decrescente

ex: K_5 → (4,4,4,4,4)
C_n → (2,2,…,2)
$K_{4,2}$ → (4,4,2,2,2,2)

Subgrafos

- Orientados ou Não, G e H:
- H é subgrafo de G se
  $V_H \subseteq V_G$ e $A_H \subseteq A_G$
- H é subgrafo gerador se é subgrafo e $V_H = V_G$

Isomorfismo

Nos grafos é irrelevante:
↳ o tamanho das arestas;
↳ o local dos vértices;

- Grafos são isomorfos se tiverem desenhos diferentes mas são o mesmo grafo
- Se são isomorfos ent. têm:
  - ordem e tamanho =
  - msma sequência =
  - msmos subgrafos =
  - msma matriz de adjacência e incidência

Percursos

Num grafo $G=(V,A)$:

- caminho/passeio de comprimento k toda a sequência de arestas consecutivas (vértice em comum ou $a_i \rightarrow a_{i+1}$)
- caminho fechado/circuito começa e acaba no mm vértice
- caminho simples, nenhuma aresta é repetida

ciclo, caminho fechado e simples.

na Matriz

Se G é um grafo simples:

$(M^k)_{ij}$ = nº de caminhos de comprimento k de v_i para v_j

Multiplicação de Matrizes

- Seja A $m \times p$ e B $p \times n$, a matriz produto de A por B, AB, é do tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 2+3\times 0 & 1\times 6+3(-2) & 1(4)+3(1) \\ 5(2)+(-3)(0) & 5(6)+(-3)(-2) & 5(4)+(-3)(1) \end{bmatrix}$$

Grafos 3

Conectividade * Não Orientado

Grafo é:

→ conexo -> existe caminho entre tds os vértices

→ disconexo -> caso contrário

Componentes conexas

↳ subgrafos conexos maximais, ou seja, não estejam contidos em outros subgrafos

Ponte / aresta de corte

↳ aresta que se removida produz outra componente conexa

Conectividade * Orientados

Grafo é:

→ fortemente conexo -> existe um caminho q passa por todos

→ fracamente conexo -> grafo suporte (ñ orientado) é conexo

Caminhos Eulerianos *

Ciclo euleriano - ciclo que contem todas as arestas do grafo
↳ grafo euleriano

Caminho euleriano - caminho simples que tem tds as arestas, mas não é fechado
↳ grafo semi-euleriano

Teorema de Euler

Grafo é:

→ Euleriano -> tds têm o mesmo grau par

→ Semi-eulerianos -> tiver 2 graus ímpares

Nota: pode ñ ser nenhum

Algoritmo de Hierholzer

Input: grafo conexo
Output: ciclo euleriano

1 -> Determinar graus

2 -> Se nº vértices de g ímpar for >0, ent. não é euleriano

*

3 -> Toma-se o ciclo Y a começar e acabar em v
↳ Removem-se todas as arestas Y de A

4 -> Se A = ∅, então retorna E
↳ senão, volta a 3.

* escolhe-se o vértice v; E := v

Algoritmo de Fleury

Input: Grafo Conexo
Output: ciclo / caminho euleriano / semi

1 -> Determinar graus

2 -> Se nº vértices com grau ímpar for ≠0 ou ≠ 2, não é nada

3 -> Se tem 2 de grau ímpar escolhe-se um; se não, escolhe-se random
E := v

4 -> Se não existem arestas incidentes: E
↳ Se existir 1, E := Ew
↳ Se existir +1, escolhe-se a q não é ponte

Grafo Ponderado

- Orientado ou não;
- Cada aresta tem valor associado -> $\boxed{\text{peso/custo}}$

$$\boxed{G = (V, A, P)}$$

ex: $\boxed{P(\{a,b\}) = x}$

Caminho mais curto/barato

- caminho entre 2 vértices cuja soma dos pesos for o menor entre esses vértices

---

Algoritmo de Dijkstra

1-> O peso de v_1 com 0, e os outros ∞;

2-> Identificam-se os vizinhos de v e calcula-se o peso de v a v_1 e atualiza-se caso seja menor

3-> Escolhe-se o menor que ainda não foi atual

4-> Faz-se o mesmo até $\boxed{u = v_n}$

- Também se pode fazer a tabela (ver slides)

Árvore

-> Grafo não orientado conexo no qual não existem ciclos

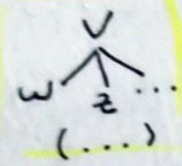
-> Tem n-1 arestas;

-> Se remover qualquer aresta fica desconexo;

-> A junção de outra aresta produz um ciclo;

Árvore enraizada com raiz v

é:



Floresta - conjunto de árvores

Folha - vértice de grau 1

Estrela - todos são folhas exceto 1

Código de Prüfer

• Tendo uma árvore com os vértices etiquetados de 1 a n, o seu código de Prüfer é:

• Cada coluna é uma aresta;

1. 1ª Coluna: 2ª linha é a folha de menor etiqueta
   1ª linha o seu vértice adjacente
2. Remover essa aresta e repetir até sobrar uma aresta
3. O código são as n-2 entradas superiores

Descodificar Prüfer

1. 1ª Coluna / 2ª linha é o menor inteiro q n̄ está na sequência
2. Ignorando a 1ª, faz-se o mesmo na segunda, sem repetir o vértice adicionado
3. A coluna n-1 tem os 2 menores dígitos q não estão na 1ª linha, o menor é na 2ª.

Árvores Geradora / Suporte

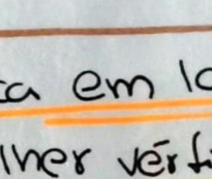
-> Qualquer subgrafo gerador que seja uma árvore;

mesmos vértices

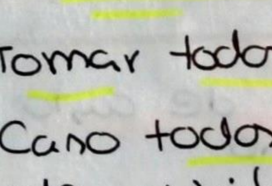
Busca em largura

1. Escolher vértice v, considerando a ordem das etiquetas
2. Tomar todas as arestas incidentes
3. Caso todos os vértices tenham sido visitados, temos a árvore
4. Caso contrário, ordena-se com as etiquetas, os adjacentes
5. Repetir nunca fazendo ciclos

Ex:



a partir de 1:



Busca em Profundidade

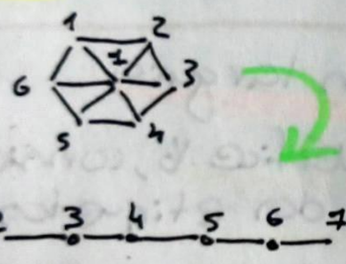
1- Escolher qualquer vértice;

2- Tomar um caminho tão longo como possível, a começar em v_0, sem repetir vértices;

3- Caso todos tenham sido vizitados, já está.

4- Caso contrário, escolhe-se
5 o vértice mais próximo do último no caminho, que seja adjacente a um não visitado e repete-se

ex:



Árvore geradora de custo mínimo

- Soma dos pesos seja o mínimo
- tbm existe para o custo máx.

Algoritmo de Prim

1. Escolher vértice v_0 qualquer;
2. Escolher o vértice adjacente que tem o menor peso;
3. Podemos criar tabela;

Algoritmo de Kruskal

1. Tomam-se todos os vértices;
2. Escolhem-se, sucessivamente, arestas com o menor custo até chegar a n-1 arestas
3. Podemos criar tabela;

Grafos 5

Grafos Planares

- Conexo (orient. ou ~~N~~)
- Sem interseções de arestas

Representação planar é o grafo na forma planar

Fórmula de Euler

A representação planar divide o plano em regiões;

$\boxed{\underbrace{\#R}_{} = \#A - \#V + 2}$

↳ nº de regiões

C_n e W_n são planares

$C_n \downarrow 2R$, $W_n \downarrow nR$

Regiões e Arestas

- Numa representação planar qualquer aresta é:
  - fronteira de 2 regiões

    ou
  - contida numa região

Grau das Regiões

$\boxed{d(R) = \#A_f + 2\#A_c}$

- soma das arestas fronteira com o dobro das contidas

$\boxed{\sum d(R_n) = 2\#A}$

- somatório dos graus é $2\#A$

Corolário 1

Seja $G=(V,A)$, simples conexo e planar com $\#V \geq 3$:

$\boxed{\#A \leq 3\#V - 6}$

Corolário 2

Com as condições acima, se G tbm não tem ciclos de comprimento 3:

$\boxed{\#A \leq 2\#V - 4}$

Corolário 3

Se G é simples, conexo e planar, então tem pelo menos um vértice v de $d(v) \leq 5$

Coloração

- Atribuição de cores aos vértices de modo a que os adjacentes têm cores distintas

Número Cromático $\chi(G)$ é o menor nº de cores necessária para colorir G

$\chi(K_n) = n$

$\chi(K_{m,n}) = 2$

$\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$\chi(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n \text{ par} \\ 3 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

Propriedades de $\chi(G)$

Se $\boxed{\chi(G) = 1}$ → G é desconexo, não tem arestas

Se $\boxed{\chi(G) = 2}$ → G é bipartido

Se $\boxed{\chi(G) = n}$ → $G = K_n$

Teorema das 4 Cores

Se G é plana, então $\boxed{\chi(G) \leq 4}$

Grafo Dual de Mapa

↳ V são as regiões do mapa

↳ vértices são adjacentes se as regiões têm o forem

Algoritmo de Welsh-Powell

Input: Grafo $G = (V, A)$

Output: coloração de G

1. Ordenar vértices por ordem decrescente de grau $(v_1, \ldots v_n)$

2. Atribui-se a cor de w a todos aqueles que não são adjacentes a w nem aos quais já se atribuiu a cor de w.

3. Remove-se $w(v_1)$ da lista decrescente e repete-se até estar pintada.