Integrais

Funsoẽs Integraiveis

Uma funsão f é integrável em [a,b], se:

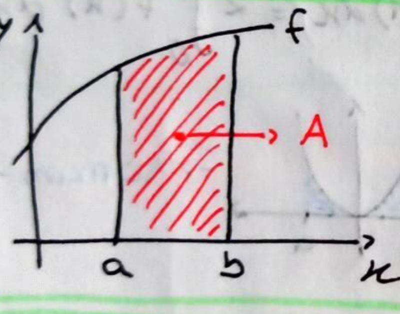
- for contínua em [a,b];

ou

- for limitada e com nº finito de pontos de descontinuidade

Definição

É um nº real positivo ($\mathbb{R}^+$) que coincide com o valor da área da região plana compreendida entre o gráfico de f e o eixo Ox.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Fórmula de Barrow

Sendo $F(x) = \int f(x)\,dx$

↳ F é uma primitiva de f em [a,b]

Propriedades

Sendo f e g integraveis em [a,b] e $k \in \mathbb{R}$:

1 O integral da soma é a soma dos integrais:

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

2 Multiplicação com constante

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

3 Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$:

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$$

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$:

$$\int_a^b f\,dx \geq 0$$

e o mesmo para $f(x) \leq 0$

4 Se $a \leq c \leq b$ ...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5 $a = b$:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

6 inverso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Teorema Fundamental do C.I.

Seja f continua em $[a,b]$, para cada $c \in [a,b]$:

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

F "retorna" o integral de f (de "a" a "c")

Teorema da Média

Seja f uma funsão continua em $[a,b]$, entaõ:

$$\exists c \in]a,b[: \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \times (b-a)$$

Ao valor de f(c) dá-se o nome de valor médio de f em $[a,b]$.

Integrasaõ por Partes

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

Fórmula da Primitiva por Partes

Nota: Se naõ dúvidas nas primitiva por partes, ir ver folha de primitiva.

Integrasaõ por Substituisaõ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(\tau))\,.\,\varphi'(\tau)\,d\tau$$

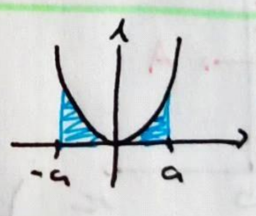
$x = \varphi(\tau)$

Os extremos do integral mudam, logo no final naõ temos de mudar para x.

Seja f uma funsão continua em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$:

se f é par:

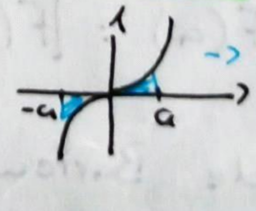
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



-> somam-se

se f é impar:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



-> anulam-se

Integração 2

Cálculo do Comprimento do Arco

- Seja f contínua e derivável em $[a,b]$, o comprimento do arco é:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Cálculo de Áreas

- Sejam f e g contínuas e integráveis num certo intervalo $[a,b]$, e $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Cálculo de Derivada

- Sejam g_1 e g_2 diferenciáveis...

$$\boxed{\left[\int_{g_1}^{g_2} f(t)\,dt\right]' = g_2' \times f(g_2) - g_1' \times f(g_1)}$$

ex: 11

Exercícios de provar que está entre a e b:
Começar com $c \leq x \leq d$ e desenvolver até chegar à expressão com integral

ex: 7

Integração Imprópria

- 1ª Espécie - extremos ∞
- 2ª Espécie - função não contínua no intervalo dos extremos

Estudar a sua natureza e dizer se é convergente ou divergente.

- Convergente - integral finito
- Divergente - não existe ou é infinito

1ª Espécie

- Intervalo do integral é ilimitado.

Como resolver:
→ Passar o extremo infinito a w e escrever limite
→ Resolver o integral com w
→ Resolver o limite

Nota: se os extremos forem $-\infty$ e $+\infty$, separar em zero.

2ª Espécie

- Função não definida no intervalo dos extremos do integral.

Como resolver:
→ Se $f \in [a,b[$:

$$\boxed{\int_a^b f(x) = \lim_{w \to b^-} \int_a^w f(x)}$$

→ Se $f \in]a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x) = \lim_{w \to a^+} \int_w^b f(x)}$$

3ª Espécie / Mistos

- Podem decompor-se na soma de integrais impróprios de 1ª e 2ª espécie.

- São convergentes se todos os integrais em que se decompõe tbm o forem.

Primitivas

Definiçã

Chama-se primitiva de f, qualquer F(x) que...

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Regras

Primitiva da soma:

$$\int (f+g)\,dx = \int f + \int g$$

Primitiva com constante:

$$\int a.f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

Primitivas Imediatas *

→ Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

→ Se $\alpha = -1$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

* ver tabela de Primitivas Imediatas

Primitivas por Partes

Desenvolver até ser imediata...

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

* Nota

Função Racional

Imprópria - Grau N $\geq$ Grau D

Própria - Grau N $<$ Grau D

Primitivas de F.R.

Com F.R.I.

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \rightarrow \text{F.R.P.}$$

↳ Fazer divisão inteira

↳ Primitivar Parcela a Parcela

Com F.R.P.

a) Decompor D(x) em fatores

b1) α é raiz simples de D(x)

$$\frac{a}{x-\alpha}$$

b2) β é raiz múltipla de D(x)

$$\frac{a_1}{x-\beta} + \frac{a_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x-\beta)^k}$$

b_3) $D(x)$ tem fator de 2º Grau sem raízes

$\boxed{ax^2+bx+c} \rightarrow D(x)$

origina $\boxed{\dfrac{ax+b}{ax^2+bx+c}}$

c) Encontrar coeficientes:

c_1) Agrupar os elementos do mesmo grau

c_2) Substituir x pelas raízes

c_3) Dar valores a x distinto das raízes

*** Nota:**

$\underbrace{\text{Polinómio}}_{v} \times \underbrace{\text{Primitiva Imediata}}_{u'}$

$\underbrace{\text{Polinómio}}_{u'} \times \underbrace{\text{Não Imediata}}_{v}$

Primitivas por Substituição

① $x = \Phi(\tau) \rightarrow x$ = função de τ

② $x' = \Phi'(\tau) \rightarrow$ "o preço a pagar"

③ $\tau = \Phi^{-1}(x) \rightarrow \tau$ = função de x

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\Phi(\tau)) \cdot \Phi'(\tau)\, d\tau}$$

Casos Específicos

Ⓐ F. Racionais de e^x

$\boxed{\tau = e^x}$ $\quad x = \ln(\tau)$

Ⓑ Quociente com raiz

$\boxed{\sqrt[k]{ax+b} = \tau}$ $\quad ax+b = \tau^k$

Ⓒ Quociente de $(ax+b)^{p/q}$

$\alpha = m.m.c.(q_1, \dots, q_n)$

$\boxed{\tau^\alpha = ax+b}$

Ⓓ Quociente com $\ln(x)$

$\boxed{\tau = \ln x}$ $\quad x = e^\tau$

Ⓔ Raiz de quadrática

ex: $\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{\begin{array}{l} x = \operatorname{sen}\tau \\ \tau = \operatorname{arcsen}(x) \end{array}}$

$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\tau}$

Cálculo

Somatórios

$$\sum_{k=1}^{n} 2k$$ → desde k atén de 2k

Propriedades:

- Somatório da soma = Soma dos somatórios
- Retirar as constantes para fora

$$\sum_{k=i}^{j} (a_{k+1} - a_k) = a_{j+1} - a_i$$

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = \sum_{k=-j}^{-i} a_{-k}$$

Trigonometria

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$tg^2 x + 1 = sen^2(x)$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sen(2x) = 2 \, sen \, cos$

$cos(2\alpha) = cos^2 - sen^2$

$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \, cos - sen \, sen$

$sen(\alpha+\beta) = sen \, cos + sen \, cos$

Função Módulo

$f(x) = |x|$ → $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \longmapsto |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & se \ x \geq 0 \\ -x, & se \ x < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Prolongamentos

1. Provar que é contínua no domínio;
2. Calcular limites laterais
3. Defenir prolongamento numa função por ramos

$$f \in C^k(A)$$

f tem derivadas contínuas até à ordem k no subconjunto A

$$\frac{cos x}{sen x} = \frac{1}{tg x} = cotg x$$

$$(cotg(u))' = -\frac{u'}{sen^2 u}$$

Indeterminações

0^0, ∞^0, 1^∞

Nota: Em caso de indeterminação 1^∞, passar a base a exponencial, usar a potência de potência e usar regra de Cauchy

Fórmulas úteis

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\alpha)\right)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cancel{\text{sen}}\,\cos(2\alpha)\right)$$

Calcular nº de soluções reais

- Bolzano
- Derivar

Nota: todos os polinómios de grau ímpar têm pelo menos uma solução

Derivada da inversa

$$\boxed{(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}}$$

Fórmulas trigonométricas importantes

$$1-\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$\sec^2\alpha - 1 = \text{tg}^2\alpha$$

Produto de uma função limitada com uma que tende para zero é zero

Função	Domínio	C.D.
arc sen	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arc cos	$[-1,1]$	$[0, \pi]$
arc tg	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
arc cotg	$\mathbb{R}$	$]0, \pi[$

Atendendo a que a derivada da função composta é o produto das derivadas das funções iniciais, ou seja, que, se tomarmos $u = u(x)$, teremos

$$\boxed{\left(f(u(x)\right)' = f'\left(u(x)\right).u'(x),}$$

reformulamos a tabela das primitivas imediatas:

FUNÇÃO	PRIMITIVA
$u^{\alpha}.u' \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$u'e^{u}$	$e^{u} + C$
$u' \sin u$	$-\cos u + C$
$u' \cos u$	$\sin u + C$
$u' \sec^2 u$	$\tan u + C$
$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u + C$
$u' \sec u \tan u$	$\sec u + C$
$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u + C$
$u' \sec u$	$\ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotan} u\rvert + C$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u + C$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u + C$

→ No Form.

→ Não está no Form.

Nota

$\operatorname{cotg} = \dfrac{1}{tg} = \dfrac{cos}{sen}$

$\sec = \dfrac{1}{cos}$

$\operatorname{cosec} = \dfrac{1}{sen}$

Tabela de Primitivas Imediatas

Tabela de primitivas imediatas (onde C designa uma constante real arbitrária):

FUNÇÃO	PRIMITIVA
0	C
1	$x + C$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\mathrm{cosec}^2\, x$	$-\mathrm{cotg}\, x + C$
$\sec x . \mathrm{tg}\, x$	$\sec x + C$
$\mathrm{cosec}\, x . \mathrm{cotg}\, x$	$-\mathrm{cosec}\, x + C$
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\mathrm{cosec}\, x$	$-\ln\lvert\mathrm{cosec}\, x + \mathrm{cotan}\, x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

Teorema de Rolle

Seja f:

- Contínua em [a,b]
- Diferenciável em]a,b[

$f(a) = f(b)$

$$\boxed{\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0}$$

Corolário 1

- Entre 2 zeros de f existe pelo menos 1 zero de f'

Corolário 2

Entre 2 zeros consecutivos de f', existe no máximo 1 zero de f

Regra de Cauchy

- f e g contínuas e deriváveis em [a,b]

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]}$$

Nota: tbm se usa qnd:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ldots = 0 \,/\, \lim_{x \to \infty} = \ldots = \infty \,/\, \lim_{x \to a} = \ldots = \infty$

Teorema de Lagrange

- f é contínua em [a,b]
- f é diferenciável em]a,b[

$$\boxed{\exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Corolário 1

$$\boxed{\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0}$$

f é estritamente crescente em [a,b]

Corolário 2

$$\boxed{\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0}$$

f é estritamente decrescente

Corolário 3

$$\boxed{\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0}$$

f é constante em [a,b]

Corolário 4

$$\boxed{f'(x) = g'(x),\ \forall x \in]a,b[}$$

f-g é constante em [a,b]

Nota: $g'(x) = \boxed{[f(u)]' = f'(u) \times u'}$

Exercícios Lagrange ("Prova")

1º Definir função e intervalo com x

2º Aplicar Lagrange

3º intervalos: ex: $0 < c < x$ ...

4º "Brincar" até encontrar a Derivada

5º Achar e provar

Fórmula de MacLaurin

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

Dada a função f com n derivadas no ponto 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\lim_{x \to 0} R_n(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

Nota: Qundo o polinómio é de grau n $f(x) = p_n(x)$ e $R_n(x) = 0$

Forma de Lagrange

Se f tem drivada de n+1, numa vizinhança 0, então...

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Onde c está situado entre 0 e x

Fórmula de Taylor → de ordem n no ponto a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$\lim_{x \to a} R_n(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ → Forma de Lagrange

Teorema

$f^{(p)}(a) \neq 0$

→ se p é par

- máximo se $f^{(p)}(a) < 0$
- mínimo se $f^{(p)}(a) > 0$

se p é ímpar

não tem extremo no ponto a

Corolário

$f'(a) = 0$

a é denominado de ponto estacionário / crítico.

Formulário - Funções

T. de Bolzano-Cauchy → $f(a) < k < f(b)$ ou $f(b) < k < f(a)$

$\exists c \in]a,b[: f(c) = k$

T. Bolzano:
- Corolário ($f(a) \cdot f(b)$...
- Criar função nova

Corolário → $f(a) \cdot f(b) < 0$ → $\exists x \in]a,b[: f(x) = 0$

T. de Weierstrass → f é contínua em $[a,b]$ $a<b$, logo tem máximo e mínimo absolutos

Derivadas:

$2' = 0$

$(2x)' = 2$

$(x^2)' = 2x$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, n \in \mathbb{N}$

$(u \circ g)' = g' \times u'(g)$

f''	+	−
f	∪	∩

→ Q. de Concavidades

f'	+	−
f	↗	↘

→ Q. de Monotonia

Derivada no Ponto por Definição

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Assintotas Verticais

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \boxed{\pm \infty} \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \boxed{\pm \infty} \end{array}\right\} \boxed{x = a}$$

Assintotas Não Verticais

$$\boxed{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \to \boxed{\begin{array}{l} m = 0 \to A.H. \\ m \neq 0 \to A.O. \end{array}}$$

$$\boxed{b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m.x}$$

Estudo Completo de Função:

- Dominio;
- Continuidade;
- Zeros;
- Imagem do zero;
- Assintotas;
- Monotonia e extremos;
- Sentido das Concavidades;
- Contradominio;
- Esboço do gráfico.

Função Par

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Função Ímpar

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Derivada de função por ramos:

→ fazer as duas derivadas e fazer por definição a do ponto de separação

Assintotas de função por ramos:

- fazer verticais normais e no ponto de separação;
- fazer não verticais para $+\infty$ e $-\infty$;

$$\boxed{f(x) = b + \frac{k}{x - c}}$$

$\boxed{x = c}$ e $\boxed{y = b}$

↳ Assintotas

$$\boxed{\begin{array}{l} f: D_f \longrightarrow B^* \\ \quad x \longmapsto f(x) \end{array}}$$

*B - Conjunto de chegada

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (3x + 2) \right] = 0}$$

↳ $\boxed{y = 3x + 2 \to A.O.}$

Formulário - Exponenciais e Logarítmicas

Juros Compostos

$$C_n = C_0 . \left(1 + \frac{r}{100 \times T}\right)^{n \times T}$$

$n \to$ nº de anos
r %
$T \to$ quantas vezes ao ano

Número de Neper (ou Euler) é irracional $\simeq 2,7183$

$\hookrightarrow$ $$e^k = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$$

Função Exponencial

$\hookrightarrow$ $a^x, \; x \in \mathbb{R} \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$a > 1 \to$ Crescente

$0 < a < 1 \to$ Decrescente

Equações e Inequações

$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$

$a^{x_1} >_a x_2 \iff x_1 > x_2$

Potenciação

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^1 = a$

$a^x . a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^x . b^x = (a.b)^x$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$(a^x)^y = a^{x.y}$

Limite Notável

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Derivada de Exponencial

$(e^x)' = e^x \longrightarrow$ igual

$(e^u)' = e^u \times u'$

Propriedades Logarítmicas

$\log_a(x) = y \iff a^y = x$

$\log_a(a^y) = y$

$a^{\log_a(x)} = x$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\lim(\log) = \log(\lim)$

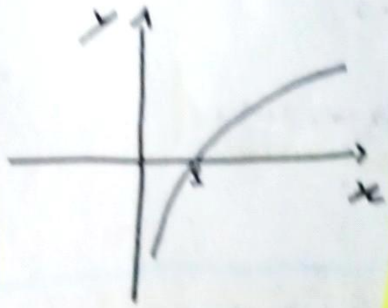
$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

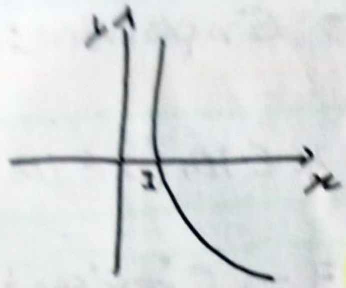
$y . \log_a(x) = \log_a(x^y)$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Gráficos Logarítmicos

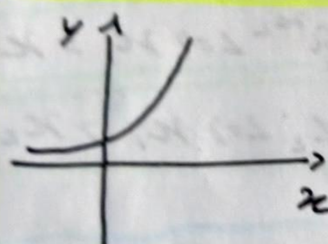


$y = \log_a(x)$, $a > 1$		
$D = \mathbb{R}^+$	$D' = \mathbb{R}$	zero: $\{1\}$
$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$	$\lim_{x \to 0^+} = -\infty$	A.V. $\to x = 0$

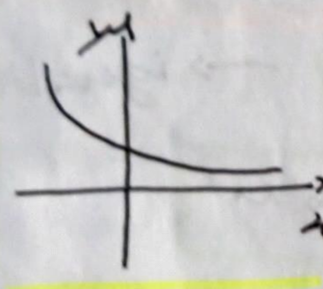


$y = \log_a(x)$, $0 < a < 1$		
$D = \mathbb{R}^+$	$D' = \mathbb{R}$	zero: $\{1\}$
$\lim_{x \to +\infty} = -\infty$	$\lim_{x \to 0} = +\infty$	A.V. $\to x = 0$

Gráficos Exponenciais



$y = a^x$, $a > 1$	
$D = \mathbb{R}$	$D' = \mathbb{R}^+$
$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} = 0$



$y = a^x$, $0 < a < 1$	
$D = \mathbb{R}$	$D' = \mathbb{R}^+$
$\lim_{x \to +\infty} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} = +\infty$

Limites Notáveis

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^p}\right) = +\infty \quad p \in \mathbb{R}$$

Derivadas

$$(a^x)' = a^x \times \ln(a)$$

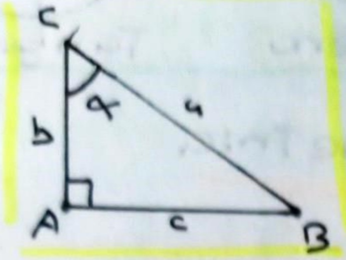
$$(a^u)' = u' \times a^u \times \ln(a)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Formulário - Trigonometria

Seno, Cosseno e Tangente



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$$ $$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$ $$tg\,\alpha = \frac{c}{b}$$

Tabela Trigonométrica

	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fórmulas

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Mais fórmulas

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right\}\text{Cosseno}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\end{aligned}\right\}\text{Seno}$$

$$\operatorname{sen}(2\beta) = 2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)$$
$$\cos(2\beta) = \cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta)$$

→ Fórmulas da Duplicação

Equações Trigonométricas

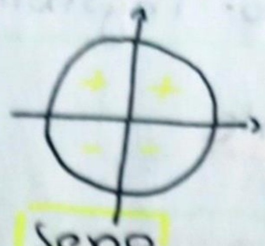
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \lor x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$tg\,x = tg\,\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Limite Notável

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] = 1$$



Seno

Cosseno

Tangente

Derivadas das Funsoẽs Trigonometria

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$
$$\operatorname{sen}' u = u' \times \cos u$$

→ Derivadas da funsaõ Seno

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$
$$\cos' u = -u' \times \operatorname{sen} u$$

→ Derivadas da funsaõ Cosseno

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\operatorname{tg}' u = \frac{u'}{\cos^2 x}$$

→ Derivadas da funsaõ tangente

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$D = \mathbb{R}$ $D' = [-1, 1]$

Maximizantes: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Minimizantes: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Zeros: $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = \cos x$

$D = \mathbb{R}$ $D' = [-1, 1]$

Maximizantes: $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Minimizantes: $\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Zeros: $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Par: $\cos(-x) = \cos(x)$

$f(x) = \operatorname{tg}(x)$

$D = \mathbb{R} / \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \dots\}$

$D' = \mathbb{R}$

Zeros: $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Propriedade 1

$a \operatorname{sen}(bx + c) + d$

ou

$a \cos(bx + c) + d$

$D' = [d - |a|; d + |a|]$

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$

Propriedade 2

$a \operatorname{tg}(bx + c) + d$

$D' = \mathbb{R}$

$$p = \frac{\pi}{|b|}$$

Topologia em $\mathbb{R}$

Vizinhança

$a \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0$

$\boxed{V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$

Ponto Isolado

$a \in B$:

$\boxed{V_\varepsilon(a) \cap B = \{a\}}$

Ponto Interior

$int(B) \Rightarrow \boxed{\exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(a) \subset B}$

Ponto Exterior

$ext(B)$ – $\boxed{\exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R} \setminus B}$

Ponto Fronteiro

$fr(B)$ – $V_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset \ \wedge$
$\wedge \ V_\varepsilon(a) \cap \mathbb{R} \setminus B \neq \emptyset$

Aderência

$\boxed{\overline{B} = int(B) + fr(B)}$

$\boxed{int(B) = B}$ – Aberto

$\boxed{\overline{B} = B}$ – Fechado

Ponto de Acumulação

ex: $B = [-1, 0] \cup \{5\}$

$B' = [-1, 0]$

Derivado de B → Conjunto de P. de A.

Majorante / Majorado / Supremo

Majorante → $\boxed{\forall x \in B, \ x \leq c}$

Se tiver majorante, o conjunto é majorado

Supremo → menor majorante

→ $sup(B) \in B$ → $\boxed{max(B)}$

Minorante / Minorado / Ínfimo

Minorante → $\boxed{\forall x \in B, \ c \leq x}$

Se tiver minorante, o conjunto é minorado

Ínfimo → maior minorante

→ $inf(B) \in B$ → $\boxed{min(B)}$

Limitado = Majorado + Minorado

Tabela de derivadas e Regras de derivação

a) Regras de derivação

Supondo que $u(x)$, $v(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis:

Derivada da soma $(u+v)' = u' + v'$
Derivada do produto $(uv)' = u'v + uv'$ Caso particular $(kv)' = kv'$
Derivada do quociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
Derivada da função composta $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$
Derivada da função inversa $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \boxed{\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$ com $b = f(a)$

b) Tabela de derivadas das funções elementares

Função	Derivada
k (constante)	0
x	1
x^{α} (com $\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

c) Tabela de derivadas das funções elementares envolvendo composições de funções

Sendo $u(x)$ uma função derivável:

Função	Derivada
u^{α} (com $\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^{u}	$e^{u}u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u$
$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$u'u^\alpha$, com $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert + c$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$arctg(u) + c$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u) + c$
$u'a^u$	$\frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$
$u' \sec^2(u)$	$tg(u) + c$
$u' cosec^2(u)$	$-cotg(u) + c$
$u' \sec(u)$	$\ln \lvert \sec(u) + tg(u) \rvert + c$

Primitiva por partes	$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
Primitiva por substituição	$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$