

Introdução à Modelagem

Avaliação A2 - Parte 1

Henrique Kiraly e André Massa
Fundação Getúlio Vargas

Introdução

O objetivo deste relatório é detalhar o procedimento para a realização do trabalho e suas devidas conclusões.

A atividade foi inteiramente desenvolvida em Python, utilizando as bibliotecas `NetworkX`, `Matplotlib`, `Random`, `Statistics` e `Community_louvain`. Cada rede foi construída com três cenários distintos para fins de comparação, os quais serviram de base para os comentários gerais apresentados em cada subseção.

Por fim, o método da construção de cada modelo pode apresentar divergência, até mesmo em modelos semelhantes, em decorrência do modo que cada autor escreveu o código em questão. Os códigos estão disponíveis em https://github.com/andre-massa/grafos_modelagem.

1 Parte I

1.1 Modelo de Erdős-Rényi

O modelo em questão refere-se a uma rede aleatória, cuja estrutura depende exclusivamente da quantidade de nós e da probabilidade de conexão entre eles. Essa probabilidade é válida de forma geral para todos os nós da rede.

Ao se aumentar a quantidade de nós na rede mantendo-se constante a probabilidade de conexão, observa-se um acréscimo considerável no desvio padrão do grau dos nós, em comparação ao cenário inverso. Esse comportamento está de acordo com a teoria do modelo de Erdős-Rényi, uma vez que o grau dos nós segue uma distribuição binomial. Tal característica pode ser observada intuitivamente nos histogramas gerados, cuja variância aumenta proporcionalmente com o número de nós, o que implica também em um aumento do desvio padrão.

Mantendo-se a probabilidade constante e variando a população não observou-se mudança na densidade da rede, exceto na terceira casa decimal, como é evidenciado no cenário II e III. No entanto, com a variação da probabilidade e constante população, é percebido um padrão: a densidade é extremamente próxima da probabilidade de conexão entre os nós da rede. O mesmo ocorre com o coeficiente de clustering.

Os experimentos mostraram que dada uma rede com probabilidade de conexão p entre os nós e uma rede com probabilidade n , sendo $p > n$, o caminho médio na primeira rede é menor, favorecendo o que era esperado, pois essa medida se refere a distância média mais curta entre os pares de nós presentes na rede. Logo, quanto maior a probabilidade de conexão, maior será o número de conexões médio, implicando em uma distância menor entre os nós.

Como esperado para o modelo em questão, a modularidade obtida foi baixa, indicando ausência de comunidades bem definidas. Esse comportamento é consistente com a natureza aleatória do modelo, no qual as conexões são estabelecidas independentemente da posição dos nós na estrutura global da rede. Por isso, algoritmos de detecção de comunidades tendem a não identificar grupos coesos com alta densidade interna de ligações, resultando em valores de modularidade próximos de zero.

1.1.1 Cenário I

- Nós: 20
- Probabilidade de conexão: 60%

Modelo de Erdős-Rényi

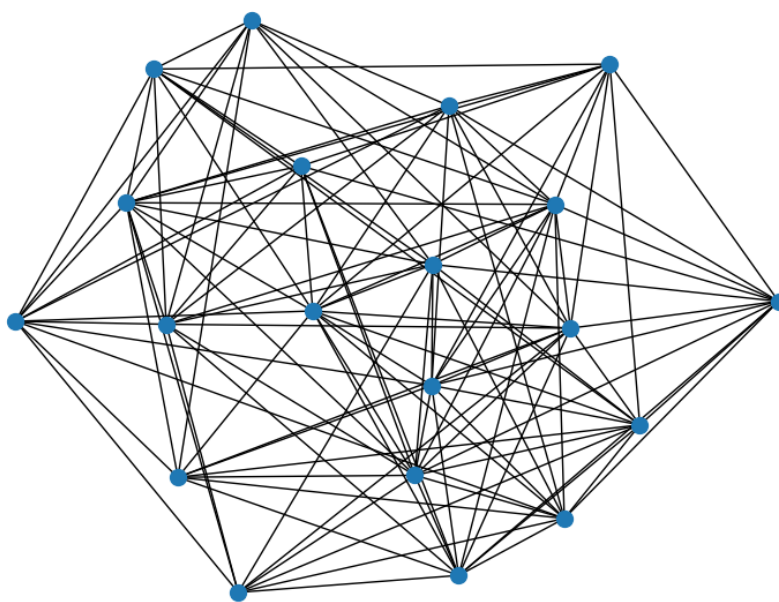


Figura 1: Grafo

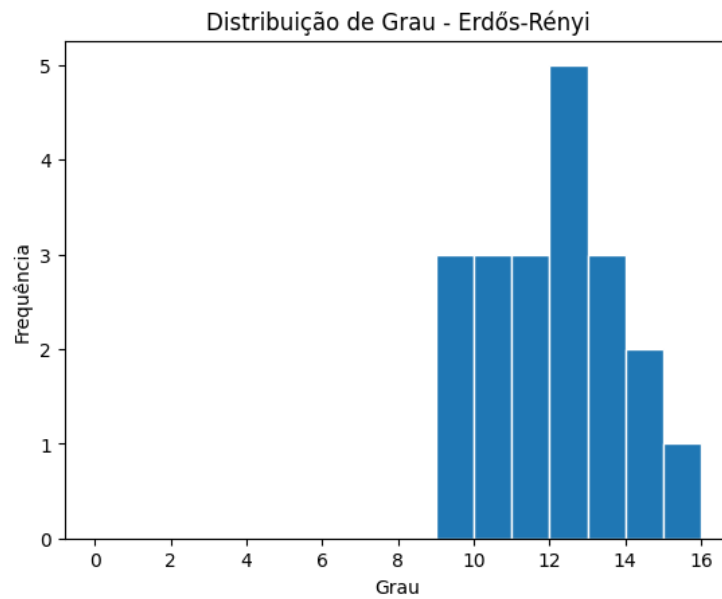


Figura 2: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 11.60
3 Desvio padrão: 1.759186414825121
4 Densidade da rede: 0.6105
5 Caminho médio: 1.39
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 20
9 Coeficiente de clustering: 0.6157120657120657
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.1170
```

1.1.2 Cenário II

- Nós: 20
- Probabilidade de conexão: 80%

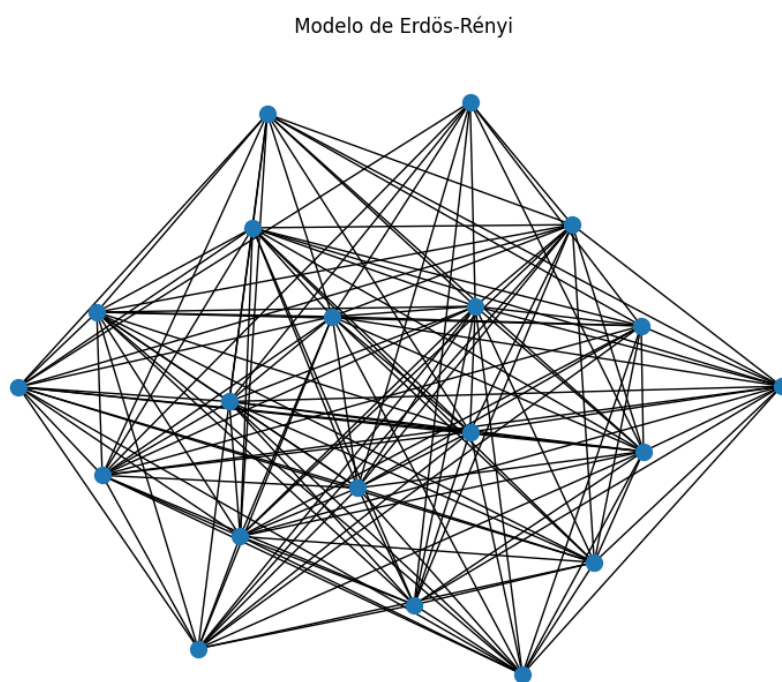


Figura 3: Grafo

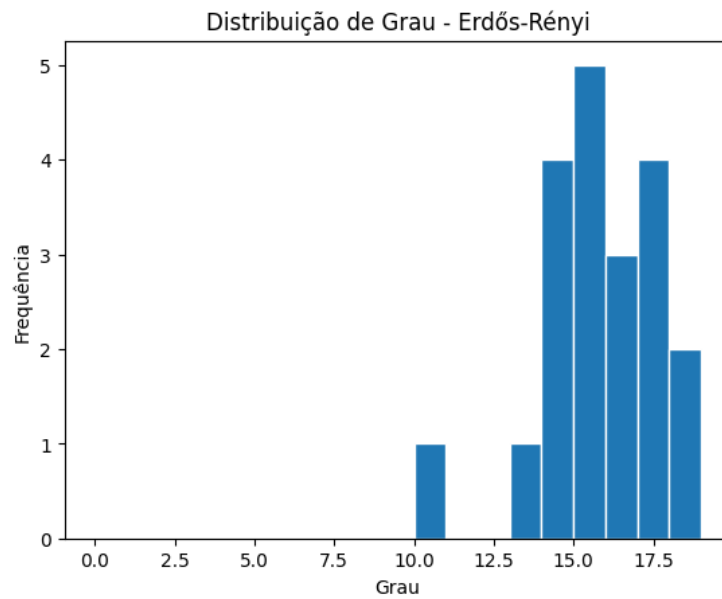


Figura 4: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 15.30
3 Desvio padrão: 1.8945906376340316
4 Densidade da rede: 0.8053
5 Caminho médio: 1.19
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 20
9 Coeficiente de clustering: 0.8033154672125262
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.0298
```

1.1.3 Cenário III

- Nós: 80
- Probabilidade de conexão: 80%

Modelo de Erdős-Rényi

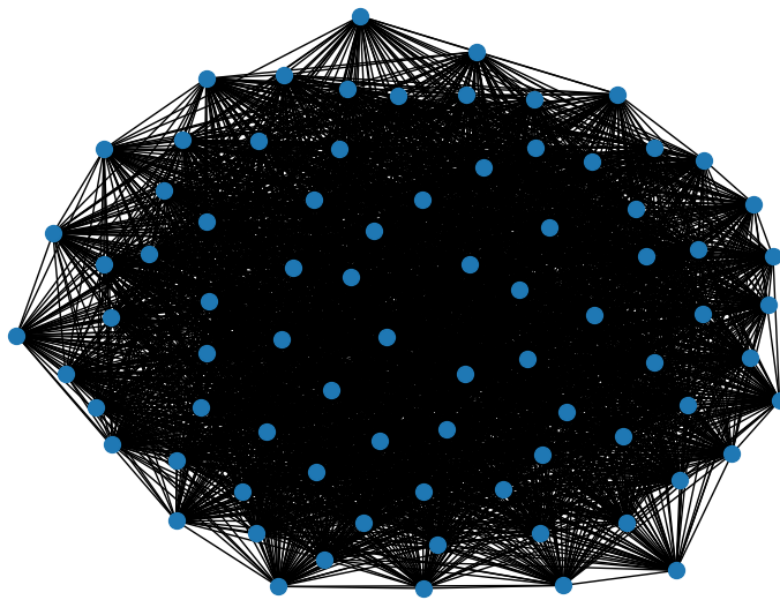


Figura 5: Grafo

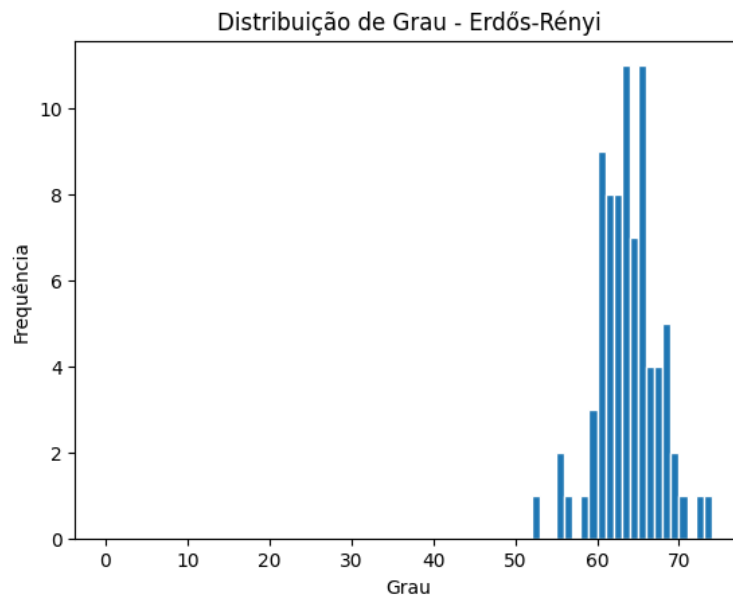


Figura 6: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 63.23
3 Desvio padrão: 3.673287080352357
4 Densidade da rede: 0.8003
5 Caminho médio: 1.20
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 80
9 Coeficiente de clustering: 0.8009341644116488
10 Hubs encontrados: [8, 43]
11 Número de hubs: 2
12 Modularidade: 0.0319
```

1.1.4 Distribuição

- Nós: 10000
- Probabilidade de conexão: 90%

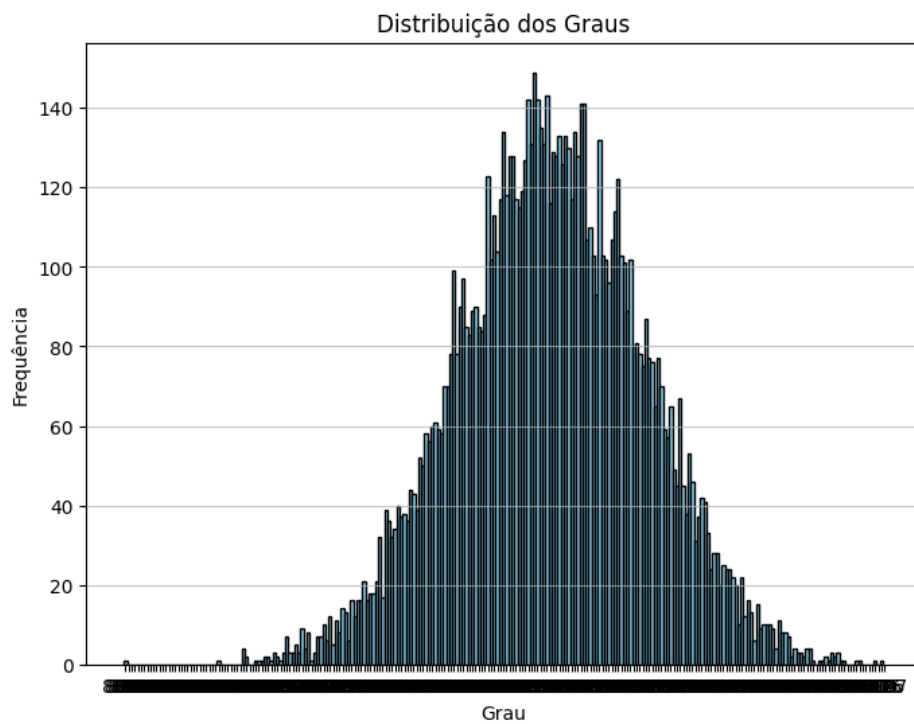


Figura 7: Histograma

1.2 Modelo de Watts-Strogatz

Este modelo possui como característica a construção de uma rede em anel, onde cada nó é conectado com um número par de vizinhos, com a probabilidade p de uma aresta conectando um nó com o seu vizinho ser redirecionada para um nó aleatório. Portanto, quando $p = 100\%$ a rede se torna completamente aleatória.

Para a investigação acerca do comportamento da rede foram feitos três cenários, explorando casos extremos, indo de $p = 1\%$ a $p = 100\%$, com o objetivo de avaliar como esse parâmetro afeta a transição para o regime de mundo pequeno, além de analisar a mudança, especialmente, do coeficiente de clustering e do caminho médio.

Com $p = 1\%$, a rede se manteve fortemente estruturada, com coeficiente de clustering extremamente alto (0.9853) e densidade quase total (0.9842). Curiosamente, o caminho médio já era muito baixo (1.02), o que demonstra que pequenas perturbações na estrutura regular foram suficientes para encurtar significativamente as distâncias entre os nós.

À medida que p foi aumentado para 50%, observou-se uma queda no clustering (para 0.7803) e uma leve elevação no caminho médio (para 1.23), embora ambos os valores ainda permaneçam em patamares baixos. Nesse cenário, é possível afirmar que a rede apresentava um comportamento híbrido, nem completamente aleatória, nem completamente regular. A densidade reduziu-se para 0.7737, e a modularidade apresentou um leve aumento (0.0533), evidenciando uma modificação na sua ordem original, caminhando para a aleatoriedade total.

Com $p = 100\%$, todas as arestas foram redirecionadas, levando a uma rede totalmente aleatória. O clustering caiu consideravelmente para 0.5468, e o caminho médio aumentou para 1.47. Embora ainda curto (dado o número reduzido de nós), esse aumento reflete a perda de estrutura local. A densidade diminuiu para 0.5263, e a modularidade aumentou ligeiramente (0.1588), o que pode indicar agrupamentos ocasionais gerados aleatoriamente. Notou-se, também, o surgimento de um hub, sendo implicação da aleatoriedade.

Em síntese, foi possível identificar que, quanto menor a probabilidade de redirecionamento das arestas, menor tende a ser a modularidade, o caminho médio e o diâmetro; por outro lado, maior será o coeficiente de clustering e a densidade. O que está de acordo com o esperado, visto que a regularidade da rede é inversamente proporcional à probabilidade.

1.2.1 Cenário I

- Nós: 20
- Vizinhos: 10
- Probabilidade de redirecionamento de uma aresta: 1%

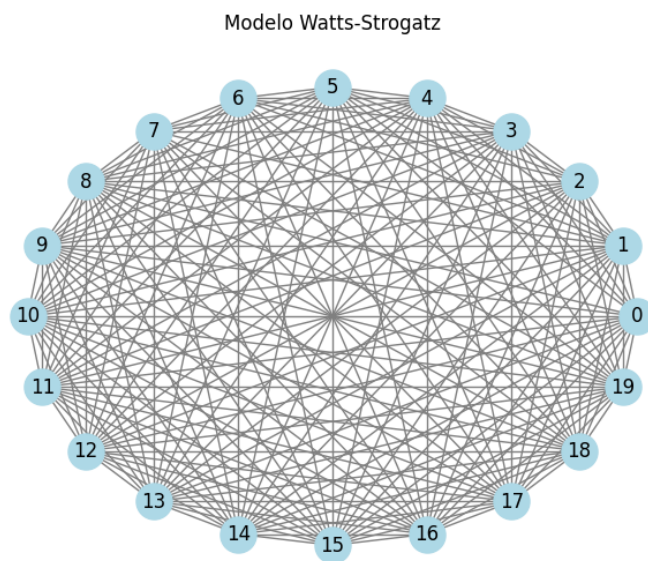


Figura 8: Grafo

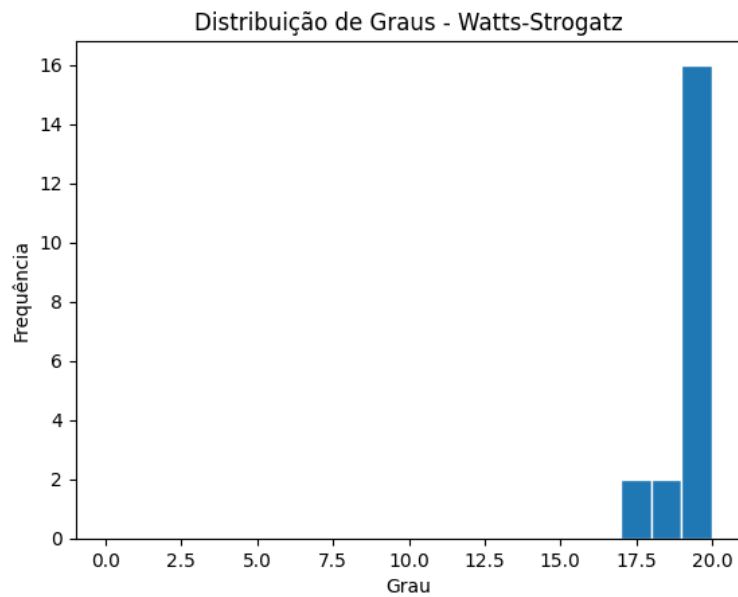


Figura 9: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 10.26
3 Desvio padrão: 3.4669529627397315
4 Densidade da rede: 0.4664
5 Caminho médio: 2.10
6 Diâmetro: 5
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 23
9 Coeficiente de clustering: 0.8447817882600495
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.3105
```

1.2.2 Cenário II

- Nós: 20
- Vizinhos: 10
- Probabilidade de redirecionamento de uma aresta: 50%

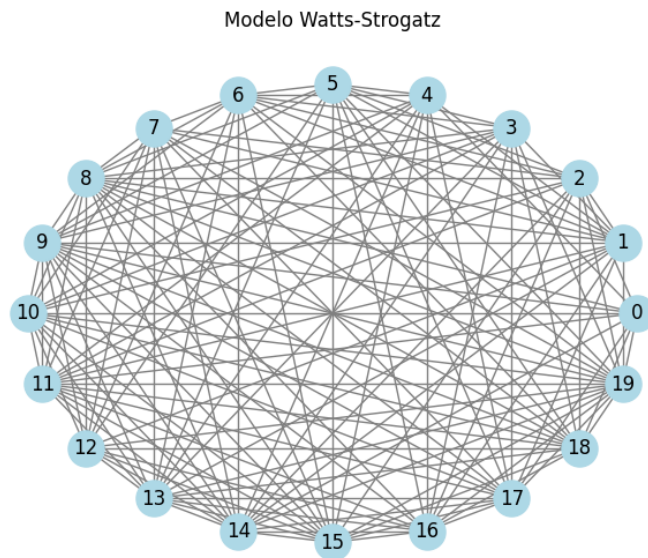


Figura 10: Grafo

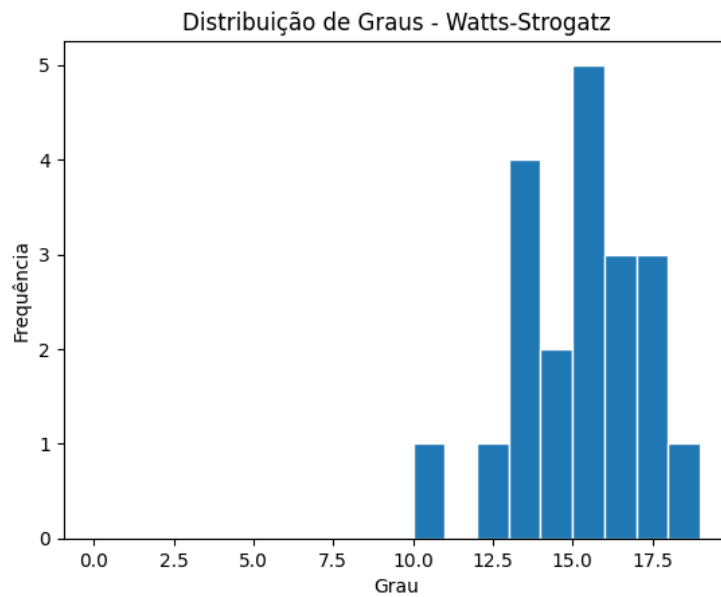


Figura 11: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 13.20
3 Desvio padrão: 2.7644357947251903
4 Densidade da rede: 0.6947
5 Caminho médio: 1.31
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente:20
9 Coeficiente de clustering: 0.740343741226094
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.0851
```

1.2.3 Cenário III

- Nós: 20
- Vizinhos: 10
- Probabilidade de redirecionamento de uma aresta: 100%

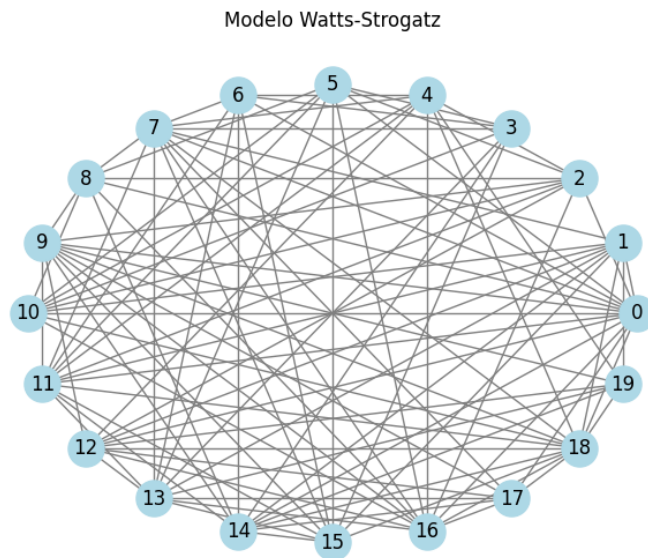


Figura 12: Grafo

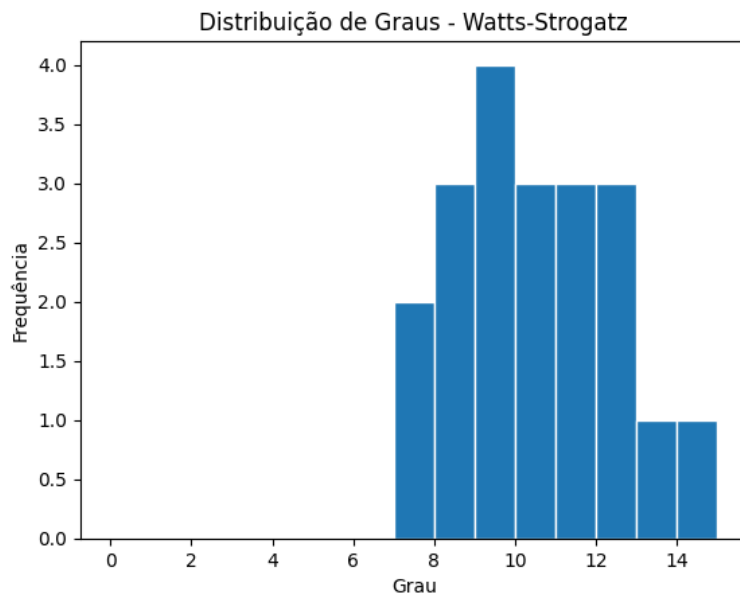


Figura 13: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 10.00
3 Desvio padrão: 1.9735087641318605
4 Densidade da rede: 0.5263
5 Caminho médio: 1.47
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 20
9 Coeficiente de clustering: 0.5468081918081917
10 Hubs encontrados: [0]
11 Número de hubs: 1
12 Modularidade: 0.1588
```

1.3 Rede aleatória com comunidades

É seguro dizer que este modelo é um caso particular do primeiro. A diferença entre eles consiste na possibilidade de estabelecer probabilidades específicas de conexão entre os nós das comunidades e os nós das outras comunidades. Ao variar o tamanho dos grupos e as probabilidades de conexão intra e entre comunidades, foi possível observar mudanças significativas nas métricas de grau, densidade, modularidade, clustering e diâmetro.

O grau médio foi diretamente influenciado pela quantidade de conexões internas e externas. Redes com maior separação entre comunidades apresentaram grau médio mais baixo (≈ 10), como é o exemplo do primeiro cenário, enquanto aquelas com mais conexões entre grupos alcançaram valores superiores a 13, como o cenário 3. O desvio padrão do grau foi mais elevado em redes com comunidades isoladas, indicando maior variação no número de conexões por nó.

A densidade variou de 0,39 a 0,69. Redes com muitas conexões entre comunidades foram mais densas, mas não necessariamente mais modulares. Isso reforça que a densidade, isoladamente, não indica presença de estrutura comunitária.

O coeficiente de clustering, elevado em todos os casos (0,73 a 0,84), indicou forte coesão interna. Já a modularidade foi a métrica mais sensível à separação entre grupos: quando as comunidades estavam bem definidas e pouco conectadas entre si, a modularidade foi alta, atingindo o valor de $\approx 0,41$. No entanto, quando os grupos estavam fortemente interligados, ela caiu para valores muito baixos ($\approx 0,08$).

O diâmetro, bem como o caminho médio também indicaram a conectividade das redes. A rede mais conectada possuiu um diâmetro de 2 e um caminho médio de 1.31, em contraste com a menos conectada, em termos de densidade, que apresentou um diâmetro de 3 e um caminho médio de 1.72. No entanto, é curioso notar que a rede com maior modularidade não foi a que apresentou o maior diâmetro. Mesmo com modularidade elevada, houve conexões entre as comunidades que favoreceram a diminuição da distância entre nós.

Todas as redes permaneceram conexas, e não houve identificação de hubs, o que está de acordo com a natureza não-preferencial do modelo.

Em resumo, as métricas analisadas mostram que a presença ou ausência de comunidades estruturadas depende fortemente da diferença entre as conexões internas e externas. A modularidade e o clustering foram os melhores

indicadores da segmentação da rede, enquanto grau, densidade e distância serviram como medidas auxiliares, na tentativa de conseguir identificar padrões.

1.3.1 Cenário I

- Número de comunidades: 2
- Nós:
 - A: 15
 - B: 5
- Probabilidade de conexão:
 - $A \rightarrow A$: 90%
 - $A \rightarrow B$: 1%
 - $B \rightarrow A$: 1%
 - $B \rightarrow B$: 80%

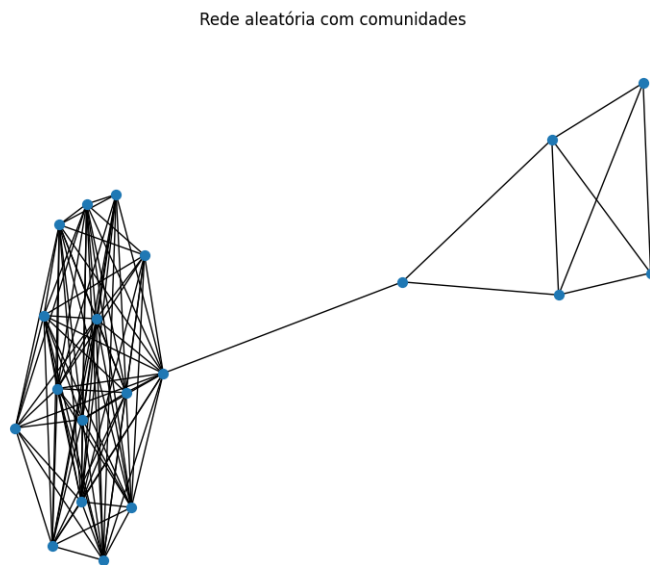


Figura 14: Grafo

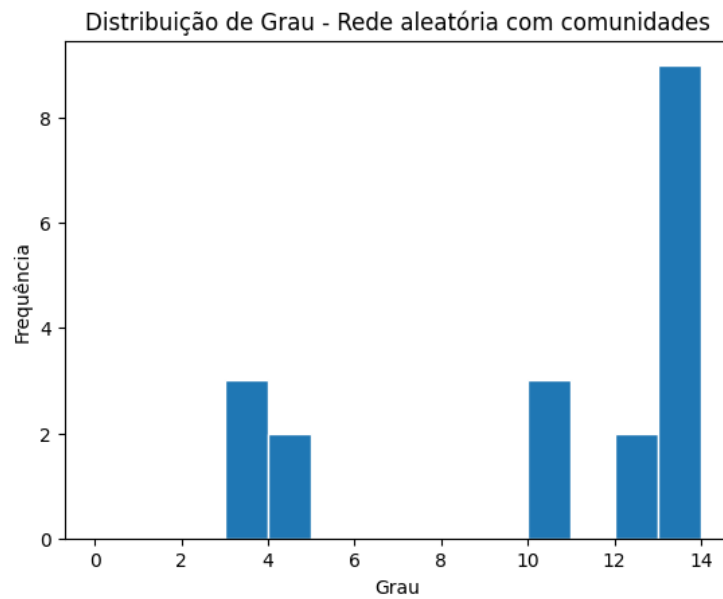


Figura 15: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 10.26
3 Desvio padrão: 3.4669529627397315
4 Densidade da rede: 0.4664
5 Caminho médio: 2.10
6 Diâmetro: 5
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 23
9 Coeficiente de clustering: 0.8447817882600495
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.3105
```

1.3.2 Cenário II

- Número de comunidades: 2
- Nós:
 - A: 15
 - B: 5
- Probabilidade de conexão:
 - $A \rightarrow A$: 90%
 - $A \rightarrow B$: 40%
 - $B \rightarrow A$: 30%
 - $B \rightarrow B$: 80%

Rede aleatória com comunidades

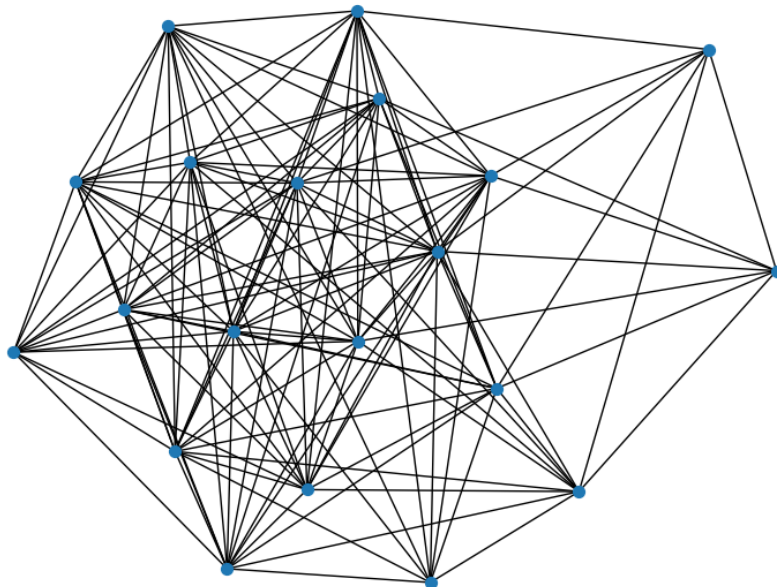


Figura 16: Grafo

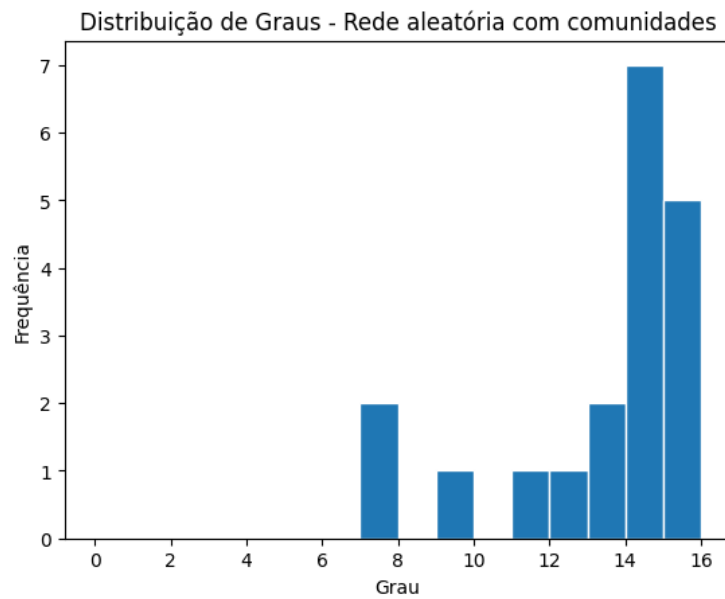


Figura 17: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 13.20
3 Desvio padrão: 2.7644357947251903
4 Densidade da rede: 0.6947
5 Caminho médio: 1.31
6 Diâmetro: 2
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 20
9 Coeficiente de clustering: 0.740343741226094
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.0851
```

1.3.3 Cenário III

- Número de comunidades: 3
- Nós:
 - A: 15
 - B: 5
 - C: 10
- Probabilidade de conexão:
 - $A \rightarrow A$: 90%
 - $A \rightarrow B$: 10%
 - $A \rightarrow C$: 5%
 - $B \rightarrow A$: 5%
 - $B \rightarrow B$: 95%
 - $B \rightarrow C$: 10%
 - $C \rightarrow A$: 1%
 - $C \rightarrow B$: 1%
 - $C \rightarrow C$: 100%

Rede aleatória com comunidades

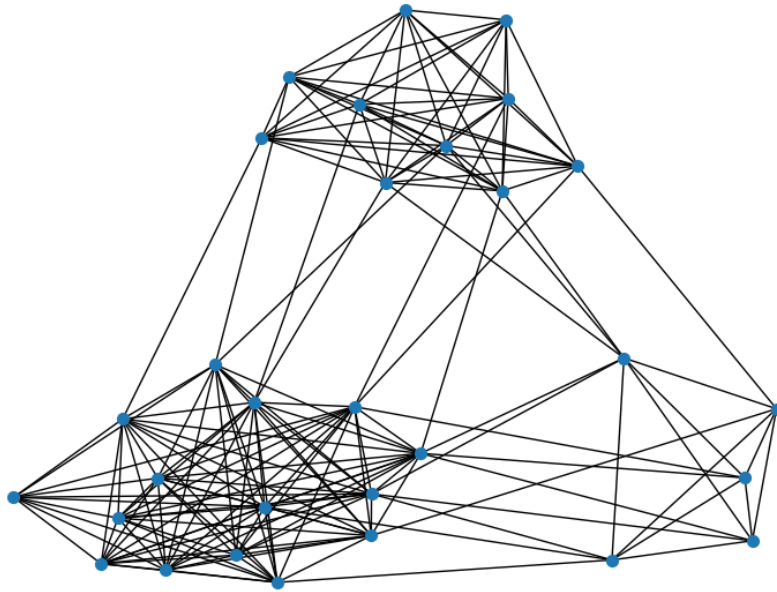


Figura 18: Grafo

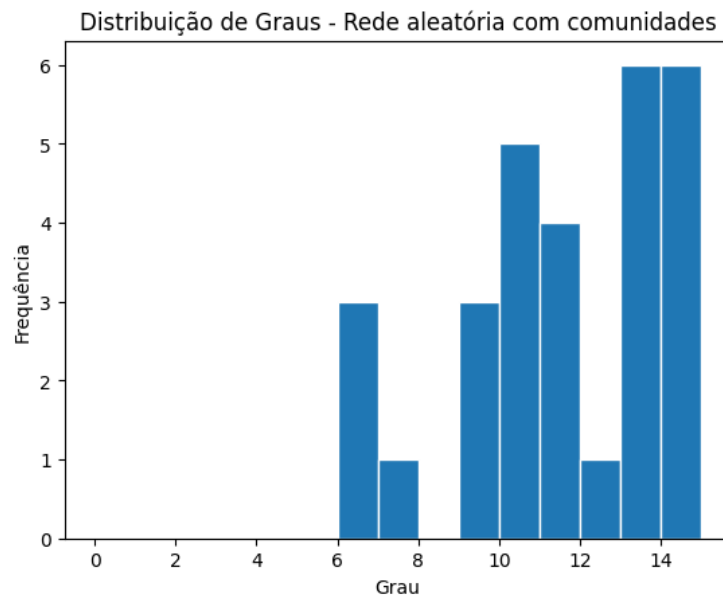


Figura 19: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 11.33
3 Desvio padrão: 2.8567323186168294
4 Densidade da rede: 0.3908
5 Caminho médio: 1.72
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente:30
9 Coeficiente de clustering: 0.7349764124764125
10 Hubs encontrados: []
11 Número de hubs: 0
12 Modularidade: 0.4106
```

1.4 Modelo de anexão uniforme

Nesse modelo, com base em uma rede inicial, nesse caso totalmente conectada, e novos nós que serão adicionados à rede, todos os nós existentes possuem a mesma probabilidade de receber ligações dos nós adicionais.

No primeiro cenário, a rede cresceu de forma relativamente contida, com cada novo nó estabelecendo, em média, apenas quatro ligações. Isso resultou em uma estrutura com grau médio moderado (8.17) e densidade baixa (0.1384), características que apontam para uma rede esparsa. O caminho médio (2.23), diâmetro (5) foram os mais altos entre os três casos, indicando que a rede possui distâncias médias mais longas entre os nós, o que é esperado visto a baixa conectividade dos novos nós. Além disso, a modularidade, nesse caso, foi a maior dentre os três casos, em virtude da esparsidade da rede. Ao longo dos cenários, com o aumento da possibilidade de ligações realizadas por um novo nó, a modularidade, logicamente, decaiu. O clustering foi o mais baixo da comparação (0.2047), mostrando que a chance de formação de triângulos ainda é limitada. No entanto, mesmo com essa estrutura simples e sem preferência na anexação, quatro hubs foram identificados, em decorrência da aleatoriedade.

Com o aumento no número de conexões, o grau médio subiu para 12.33, e a densidade aumentou consideravelmente (0.2090). Esses valores sinalizam que a rede se tornou mais conectada, e isso se reflete diretamente nas demais métricas: o caminho médio caiu para 1.89 e o diâmetro reduziu para 3. O clustering aumentou (0.2996), refletindo maior formação de agrupamentos locais. A rede ficou mais interligada, o que naturalmente facilita a formação de triângulos. Entretanto, a modularidade caiu para 0.2111, dado a maior conectividade da rede. Os hubs se mantiveram em número (4), mas a desigualdade no grau não aumentou muito, pois a anexação continua sendo aleatória. Ou seja, não importa o quanto a rede cresce — sem preferência, os nós não têm incentivo estrutural para se destacarem de forma consistente.

No terceiro caso, com a maior média de conexões por novo nó, a rede se tornou claramente mais densa e integrada. O grau médio chegou a 15.03, e a densidade foi a mais alta entre os três (0.2548). Isso produziu uma rede compacta, com caminho médio de apenas 1.81 e diâmetro 3 — métricas que refletem uma alta eficiência de acesso entre os nós. O clustering subiu para 0.3328, revelando uma forte presença de ligações locais. Contudo, a modularidade caiu para 0.1495. Curiosamente, apenas 3 hubs foram identificados, o menor número entre os três cenários. Isso tende a mostrar uma característica

observada do modelo de anexação uniforme: mesmo em redes maiores e mais densas, os hubs não se formam com consistência, porque nenhum nó é preferido — o crescimento é distribuído, e as desigualdades, se surgirem, são fruto de sorte estatística.

1.4.1 Cenário I

- Nós: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 4

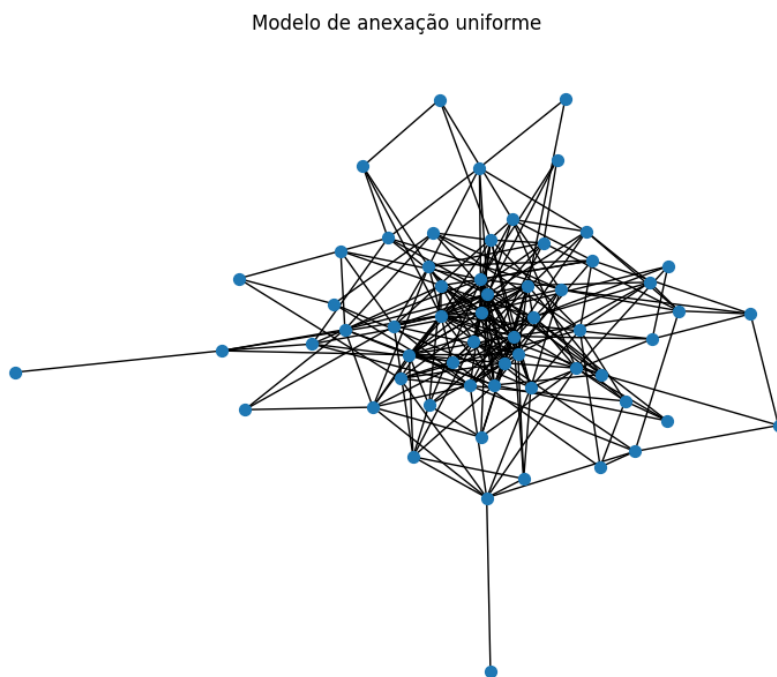


Figura 20: Grafo

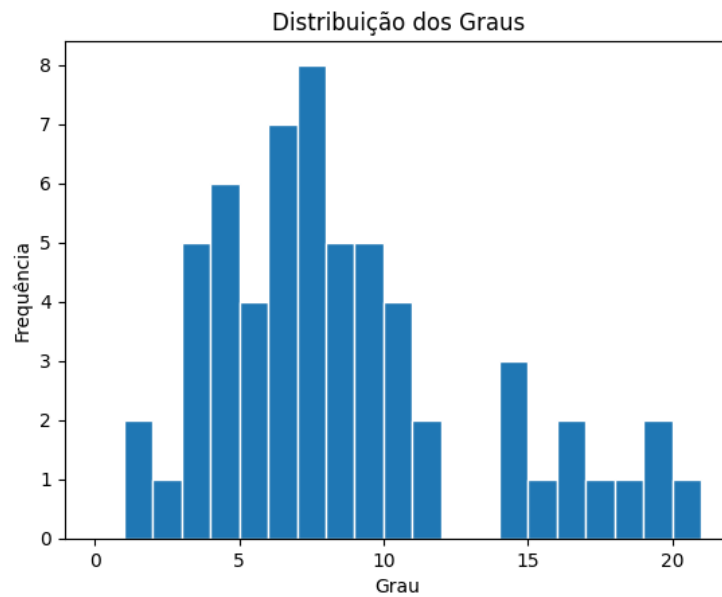


Figura 21: Histograma

```

1 Saída:
2 Grau médio: 8.17
3 Desvio padrão: 4.723424019001135
4 Densidade da rede: 0.1384
5 Caminho médio: 2.23
6 Diâmetro: 5
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.20472515559202858
10 Hubs encontrados: [6, 7, 8, 9]
11 Número de hubs: 4
12 Modularidade: 0.2557

```

1.4.2 Cenário II

- Nós: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 6

Modelo de anexação uniforme

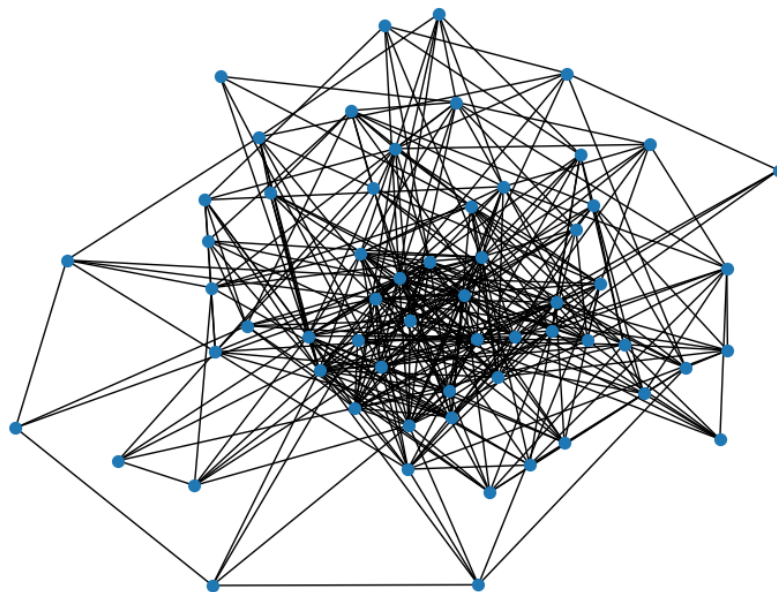


Figura 22: Grafo

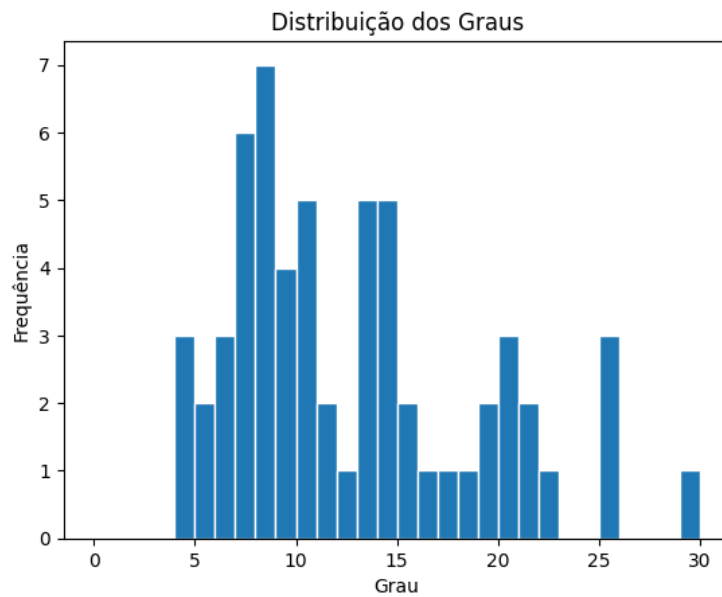


Figura 23: Histograma

```

1 Saída:
2 Grau médio: 12.33
3 Desvio padrão: 6.0776519402927836
4 Densidade da rede: 0.2090
5 Caminho médio: 1.89
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.2995850679949645
10 Hubs encontrados: [0, 1, 3, 6]
11 Número de hubs: 4
12 Modularidade: 0.2111

```

1.4.3 Cenário III

- Nós: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 8

Modelo de anexação uniforme

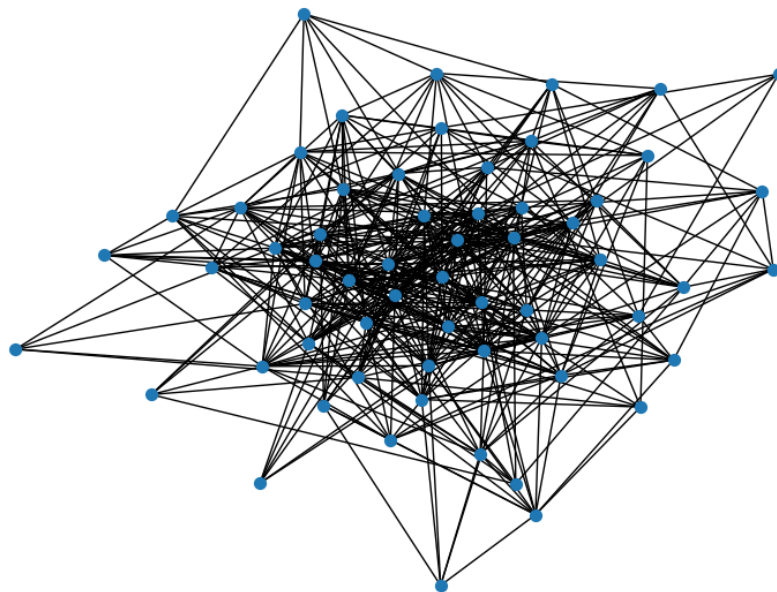


Figura 24: Grafo

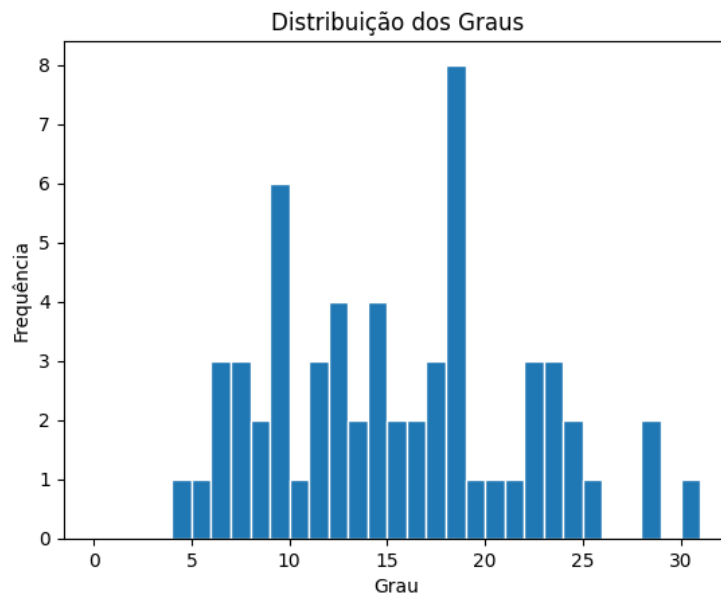


Figura 25: Histograma

```

1 Saída:
2 Grau médio: 15.03
3 Desvio padrão: 6.401712341550095
4 Densidade da rede: 0.2548
5 Caminho médio: 1.81
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente:60
9 Coeficiente de clustering: 0.3328542063883715
10 Hubs encontrados: [0, 3, 4]
11 Número de hubs: 3
12 Modularidade: 0.1495

```


1.5 Modelo de Barabási-Albert

Dada uma rede inicial, este modelo se caracteriza por apresentar uma probabilidade de conexão entre cada nó existente e novos nós que serão inseridos na rede. Essa probabilidade é proporcional à quantidade de nós que ele possui conexão antes da entrada do novo nó.

Para elaboração desse modelo foi considerado uma rede totalmente conectada, com 10 nós iniciais e outros 50 nós sendo adicionados, variando apenas a quantidade de ligações que os novos nós realizarão ao adentrarem à rede. No entanto, como seria muito legal se fosse feito, e assim foi, a quantidade de ligações de novos nós não foi universal, mas individual.

No primeiro cenário, cada novo nó estabeleceu entre 1 e 2 conexões. Isso gerou uma rede esparsa, com grau médio de apenas 4.00 e baixa densidade (0.0678). Ainda assim, o desvio padrão do grau foi relativamente elevado (5.05), o que indica que já havia desigualdade significativa na conectividade dos nós, condizente com a ideia de hubs. De fato, cinco nós se destacaram como hubs, sugerindo que o mecanismo de reforço preferencial operou mesmo com poucas conexões por nó. O clustering foi moderadamente baixo (0.259), como esperado para redes pouco densas. O caminho médio (2.60) e o diâmetro (5) foram os mais altos entre os cenários, refletindo maior dispersão entre os nós.

No segundo cenário, com cada novo nó conectando-se a 3 ou 4 nós, a rede tornou-se mais densa (0.1130) e o grau médio aumentou para 6.67. O clustering também cresceu, alcançando 0.381, o que indica maior formação de triângulos e conexões locais. O caminho médio reduziu-se para 2.25 e o diâmetro caiu para 3, revelando uma rede mais compacta e eficiente. O número de hubs também aumentou levemente, com seis nós se destacando por seu alto grau. Esses resultados são coerentes com a dinâmica do modelo, em que aumentar o número de conexões por novo nó intensifica a desigualdade de grau, reforçando a formação de nós altamente conectados.

No terceiro cenário, os novos nós realizavam entre 5 e 6 conexões. A rede resultante apresentou o maior grau médio (9.77) e a maior densidade (0.1655) entre todos os cenários. Curiosamente, o coeficiente de clustering teve uma leve queda em relação ao cenário anterior (0.334), o que pode ser explicado pela concentração das novas conexões nos nós centrais, reduzindo a chance de criar triângulos locais. O caminho médio foi o menor observado (2.00), e o diâmetro permaneceu igual ao segundo cenário (3), confirmando que a rede tornou-se ainda mais eficiente em termos de conectividade global.

Cinco hubs foram identificados, o que mostra que, apesar de mais conexões por nó, a formação de hubs não cresceu proporcionalmente — sugerindo que a distribuição de grau se “espalhou” um pouco mais entre os nós mais conectados.

No que se refere à modularidade, ela foi mais alta no primeiro cenário (0.3745), decaindo no segundo (0.2548) e no terceiro (0.2069). Isso sugere que, em redes mais esparsas, há uma maior tendência de formar agrupamentos relativamente bem definidos.

1.5.1 Cenário I

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Quantidade de ligações que um novo nó estabelece ao entrar na rede:
 $1 \leq x \leq 2$

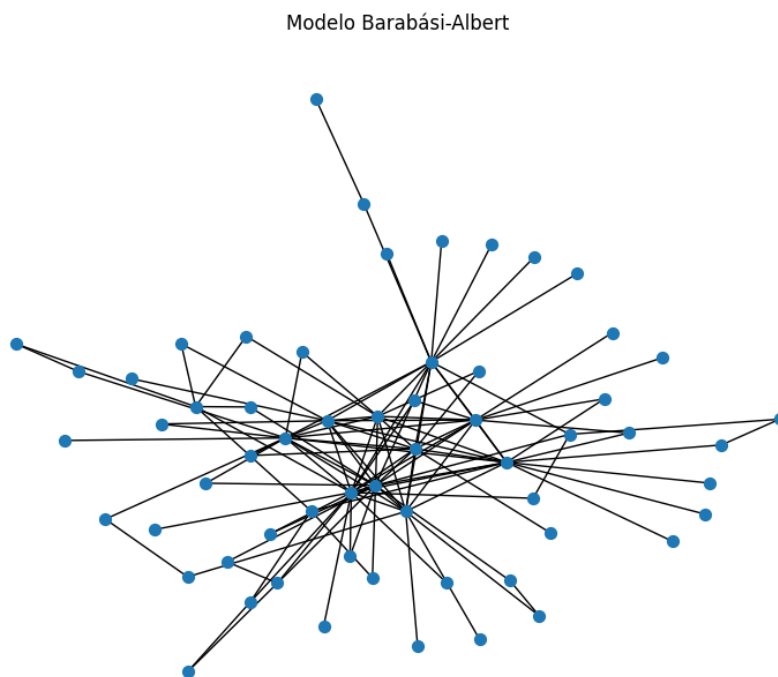


Figura 26: Grafo

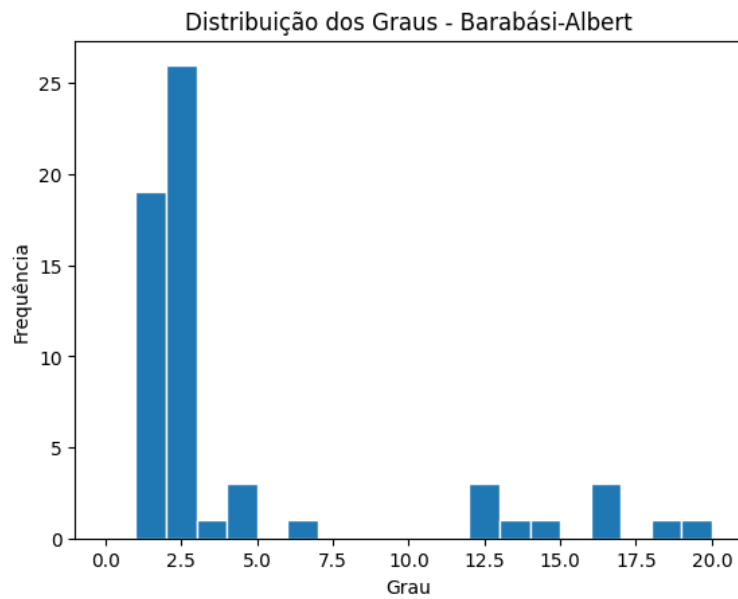


Figura 27: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 4.00
3 Desvio padrão: 5.052269166306716
4 Densidade da rede: 0.0678
5 Caminho médio: 2.60
6 Diâmetro: 5
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.25948320613568293
10 Hubs encontrados: [3, 4, 6, 7, 8]
11 Número de hubs: 5
12 Modularidade: 0.3745
```

1.5.2 Cenário II

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Quantidade de ligações que um novo nó estabelece ao entrar na rede:
 $3 \leq x \leq 4$

Modelo Barabási-Albert

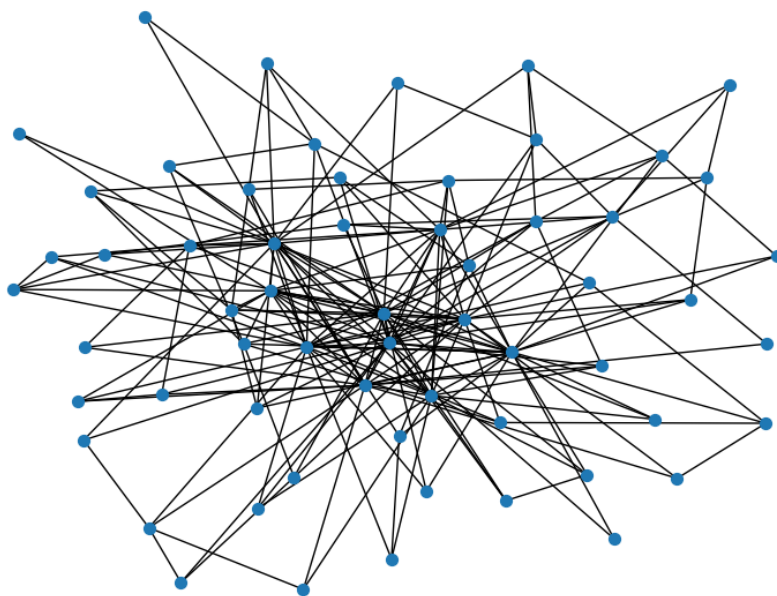


Figura 28: Grafo

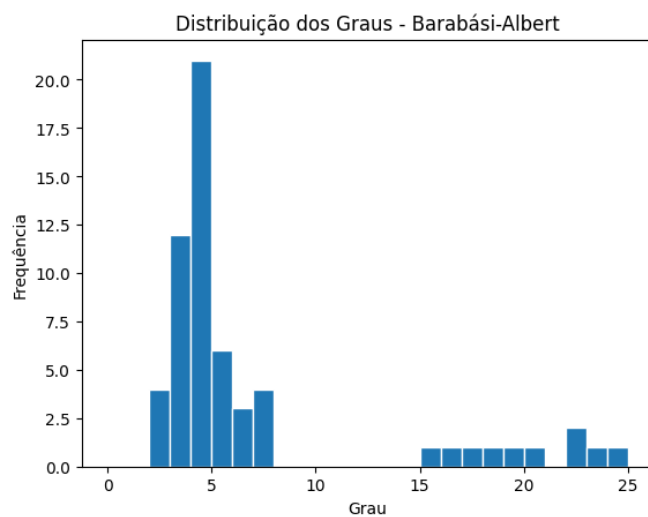


Figura 29: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 6.67
3 Desvio padrão: 6.072071845521522
4 Densidade da rede: 0.1130
5 Caminho médio: 2.25
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente:60
9 Coeficiente de clustering: 0.3812520442034845
10 Hubs encontrados: [0, 2, 3, 6, 8, 9]
11 Número de hubs: 6
12 Modularidade: 0.2548
```

1.5.3 Cenário III

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Quantidade de ligações que um novo nó estabelece ao entrar na rede:
 $5 \leq x \leq 6$

Modelo Barabási-Albert

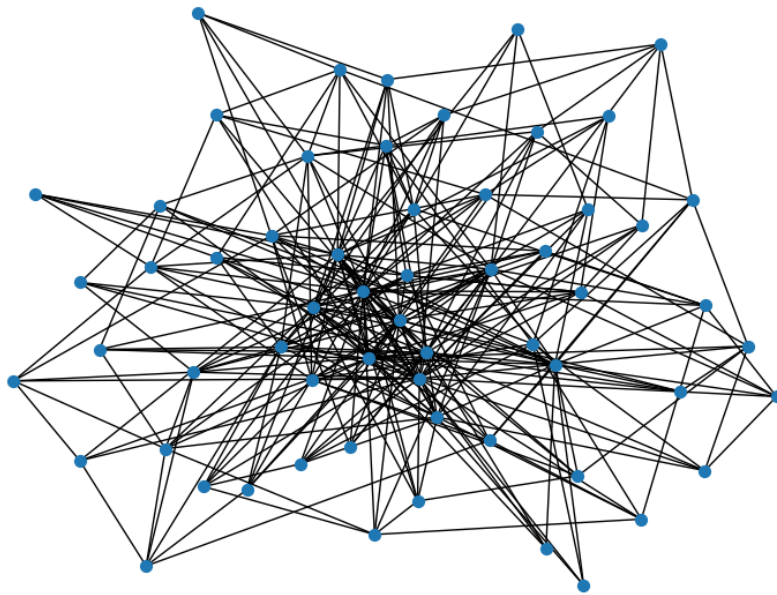


Figura 30: Grafo

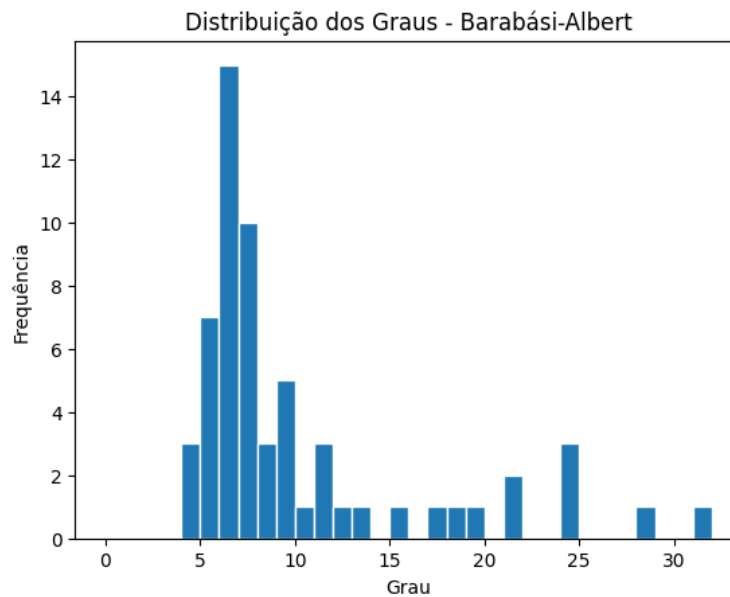


Figura 31: Histograma

```
1 Saída:
2 Grau médio: 9.77
3 Desvio padrão: 6.452871300638102
4 Densidade da rede: 0.1655
5 Caminho médio: 2.00
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.33463354932668915
10 Hubs encontrados: [0, 2, 3, 7, 8]
11 Número de hubs: 5
12 Modularidade: 0.2069
```

1.6 Modelo de Price

O modelo de Price representa uma generalização do crescimento preferencial ao permitir que novos nós se conectem tanto de forma preferencial quanto aleatória. Para investigar os efeitos da intensidade da preferência na formação da estrutura da rede, foram simulados três cenários com diferentes médias de ligação e proporções de anexação preferencial.

No primeiro cenário, com 10 nós iniciais, 50 novos nós e média de 4 conexões por novo nó, sendo 70% delas baseadas em conexão preferencial, a rede apresentou um grau médio de 8.17 e uma densidade moderada (0.1384). O desvio padrão do grau (5.61) revela a presença de desigualdade, ainda que não extrema. O clustering foi razoavelmente alto (0.2815), o que indica que, apesar da aleatoriedade parcial, houve formação de triângulos locais. Três hubs foram detectados, o que sugere que a preferência por grau já foi suficiente para fazer alguns nós se destacarem, embora não de forma muito explícita. A modularidade foi a mais alta entre os cenários (0.2558), coerente com a menor densidade e maior separação estrutural entre agrupamentos, o que facilita a detecção de comunidades.

No segundo cenário, a média de conexões por novo nó aumentou para 6, mantendo a proporção preferencial em 70%. Como resultado, a rede tornou-se mais densa (densidade de 0.1949) e o grau médio cresceu para 11.50. O clustering também aumentou para 0.2931, enquanto o caminho médio caiu para 1.92 e o diâmetro para 3. O desvio padrão do grau aumentou para 6.29, mantendo a tendência de desigualdade, mas ainda dentro de uma faixa moderada. Três hubs foram novamente identificados, sugerindo que, embora a rede esteja mais conectada, o mecanismo preferencial não foi forte o suficiente para gerar uma concentração acentuada de grau em poucos nós. A modularidade caiu para 0.1995, conforme a densidade aumentou.

No terceiro cenário, a estrutura da rede permaneceu idêntica em número de nós e ligações, mas com a proporção preferencial aumentada para 90%. Com essa mudança, o grau médio (11.50) e a densidade (0.1949) se mantiveram, mas houve um leve aumento no desvio padrão do grau (6.36), refletindo uma maior desigualdade. Isso se confirmou com a presença de cinco hubs, o maior número entre os cenários, o que mostra que, ao aumentar a influência do grau na anexação, a probabilidade de alguns nós se tornarem significativamente mais conectados também cresce. Curiosamente, o coeficiente de clustering (0.2929) se manteve praticamente inalterado em relação ao cenário anterior, o que indica que a coesão local não foi afetada significa-

tivamente. A modularidade (0.1952) manteve-se em queda, o que é esperado em redes com alta densidade e menor separação entre comunidades.

1.6.1 Cenário I

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 4
- Proporção preferencial: 0.7

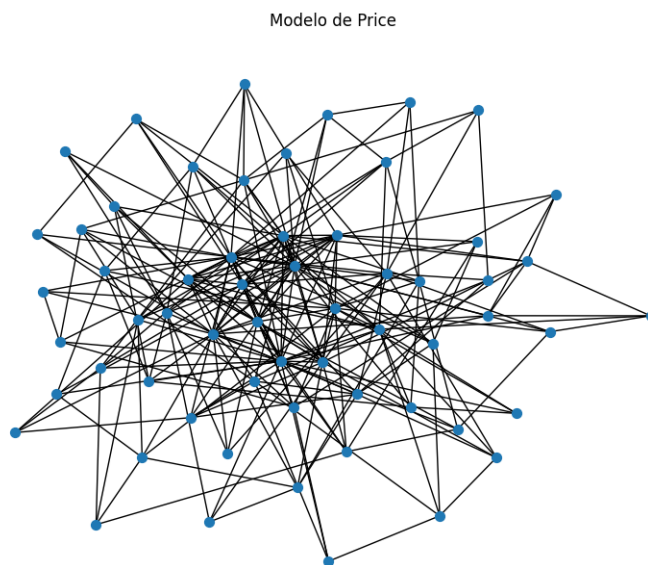


Figura 32: Grafo

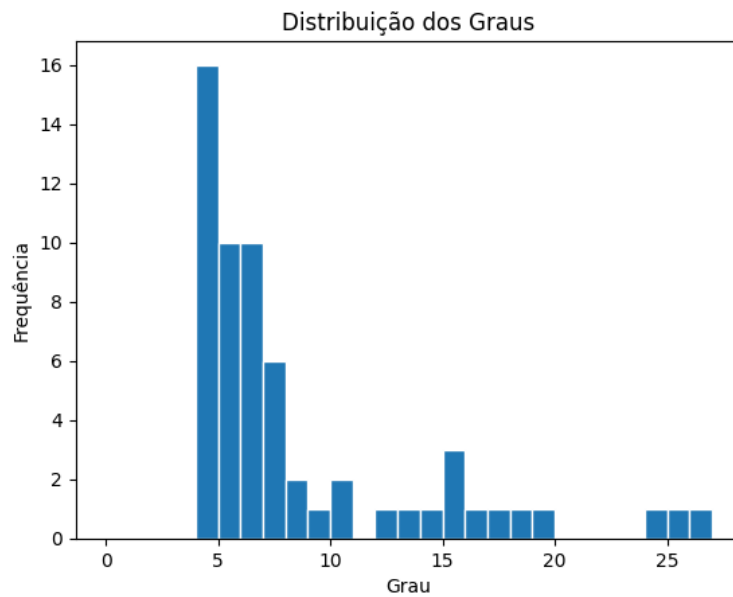


Figura 33: Grafo

```

1 Saída:
2 Grau médio: 8.17
3 Desvio padrão: 5.61223441609872
4 Densidade da rede: 0.1384
5 Caminho médio: 2.15
6 Diâmetro: 4
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.28146882713015436
10 Hubs encontrados: [0, 5, 7]
11 Número de hubs: 3
12 Modularidade: 0.2558

```

1.6.2 Cenário II

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 6
- Proporção preferencial: 0.7

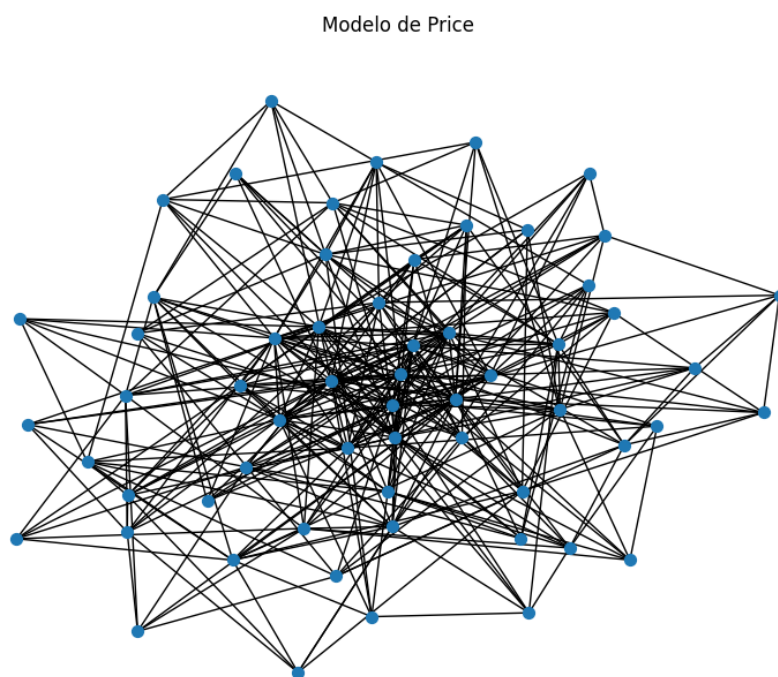


Figura 34: Grafo

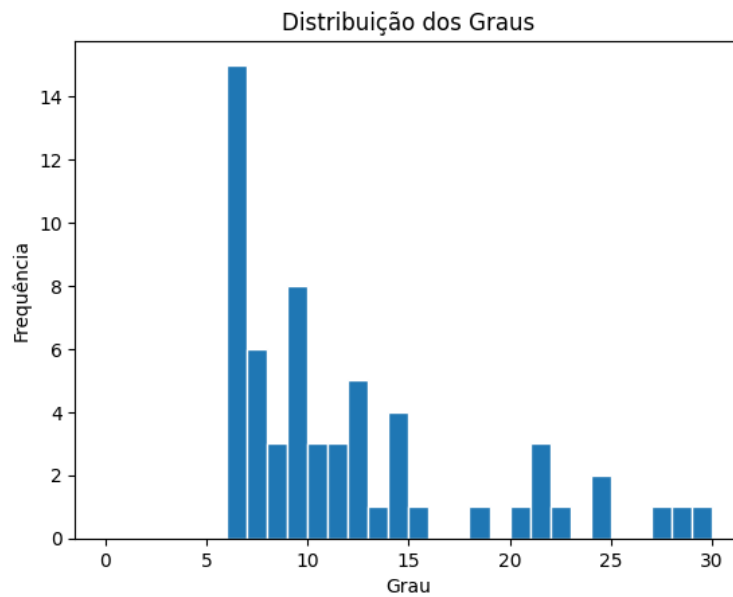


Figura 35: Grafo

```
1 Saída:
2 Grau médio: 11.50
3 Desvio padrão: 6.29366105629509
4 Densidade da rede: 0.1949
5 Caminho médio: 1.92
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.2931064856770192
10 Hubs encontrados: [0, 4, 8]
11 Número de hubs: 3
12 Modularidade: 0.1995
```

1.6.3 Cenário III

- Nós iniciais: 10
- Novos nós: 50
- Média de ligações que os novos nós farão: 6
- Proporção preferencial: 0.9

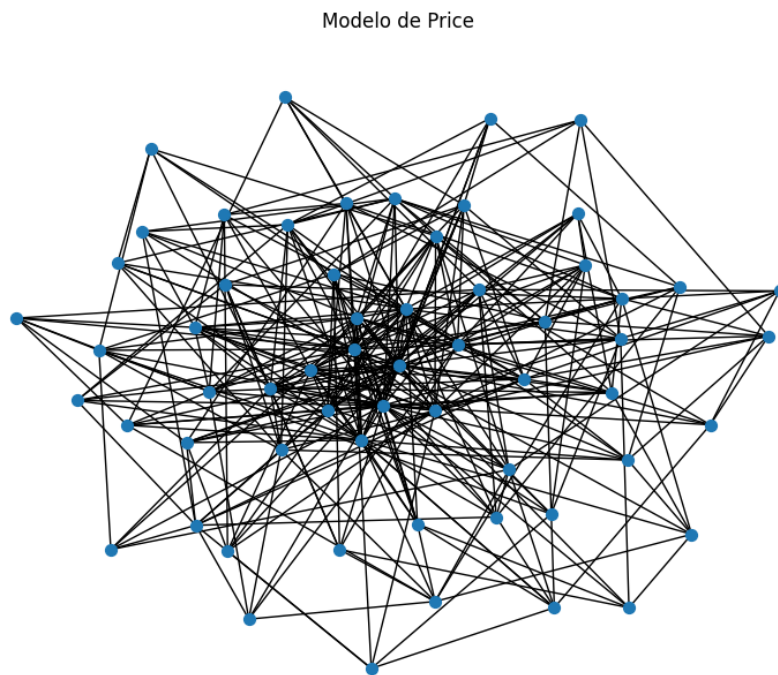


Figura 36: Grafo

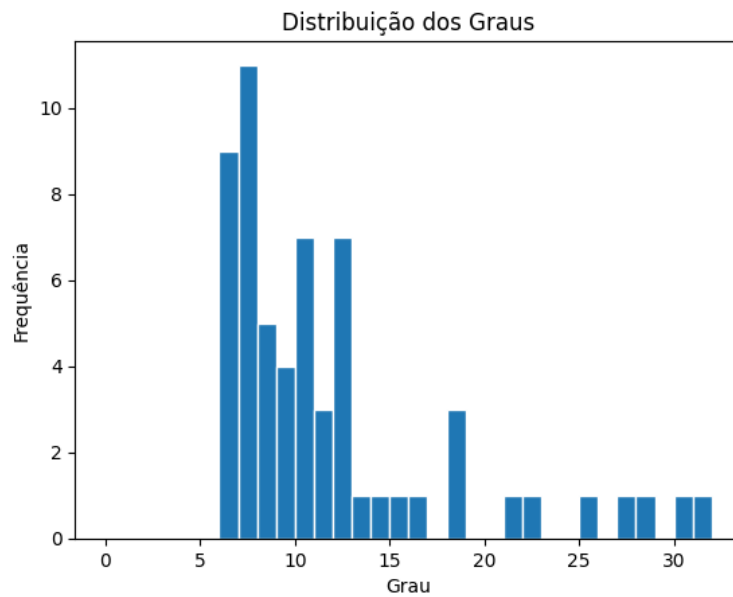


Figura 37: Grafo

```
1 Saída:
2 Grau médio: 11.50
3 Desvio padrão: 6.357965776375281
4 Densidade da rede: 0.1949
5 Caminho médio: 1.91
6 Diâmetro: 3
7 Rede conexa. Número de componentes conectados: 1
8 Rede conexa. Tamanho do maior componente: 60
9 Coeficiente de clustering: 0.292976349445858
10 Hubs encontrados: [1, 5, 6, 8, 9]
11 Número de hubs: 5
12 Modularidade: 0.1952
```

2 Parte II

Nas quatro versões da rede que analisamos (A, B, C e D), foram adicionadas arestas entre alguns pontos para analisar o efeito em cada nó.

Observando o nó 1: ele fica bem no centro, com apenas dois vizinhos consegue alcançar qualquer outro ponto em, no máximo, dois saltos. Por isso seu *closeness* é sempre o mais alto e praticamente não muda quando criamos atalhos em outras partes da rede. O que se altera é o *betweenness* — a quantidade de rotas que dependem dele. Na rede original (A) muitos passavam por 1; quando ligamos 5-36 ou 9-40, uma parte desse tráfego encontra caminhos alternativos e o nó 1 fica menos “utilizado”, embora continue sendo o centro natural da malha.

O nó 2 é a outra metade da ponte entre os dois grandes blocos. Ele começa como o maior *betweenness*. Assim que surgem a nova aresta 5-36, várias rotas deixam de atravessar 2 e seu *betweenness* cai em torno de 30%. Os demais indicadores quase não se mexem, porque o grau dele permanece três ligações e sua posição física na rede não muda.

O nó 5 ganha destaque assim que conectamos 5-36 (redes B e C). O novo vizinho aumenta o grau, reduz distâncias médias e faz algumas rotas passarem por ele; isso eleva o *closeness*, *betweenness* e, sobretudo, o PageRank — afinal, ele passa a receber links tanto de *endpoints* próximas quanto do cluster onde vive o nó 36. Quando a aresta é criada do lado oposto (9-40), o efeito em 5 é neutro: nada piora, mas ele deixa de ser o “favorito”.

O espelho desse movimento acontece com o nó 9. Isolado, ele já tinha o PageRank mais alto porque duas folhas (17 e 18) despejam todo o seu peso nele. Ao conectar 9-40 (redes C e D), 9 recebe um vizinho extra, encurta caminhos até o outro lado e ainda capta fluxos que antes passavam por 2. Resultado: grau, *closeness*, *betweenness* e PageRank sobem juntos, tornando-o o nó mais valorizado nas configurações C e D.

Por fim, o nó 17 continua sendo a folha clássica: só um vizinho (9) e nenhuma rota depende dele. Seus números permanecem os mais baixos em todas as métricas. O único ganho perceptível é um discreto aumento de *closeness* nas redes onde 9 recebe atalho, simplesmente porque o caminho de 17 até o bloco oposto fica um salto mais curto.

Tabela 1: Estatísticas descritivas dos indicadores da rede

	Grau	Closeness	Betweenness	PageRank
count	63	63	63	63
mean	0,0317	0,1562	0,0916	0,0159
std	0,0161	0,0293	0,1518	0,0069
min	0,0161	0,1351	0	0,0093
25%	0,0161	0,1351	0	0,0093
50%	0,0161	0,1351	0	0,0093
75%	0,0484	0,1558	0,064	0,0232
max	0,0484	0,2403	0,6267	0,0244

Tabela 2: Tabela Comparativa de Centralidades (Nós de Interesse)

Nó	Grau				Closeness				Betweenness				PageRank			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0,0323	0,0323	0,0323	0,0323	0,2403	0,2403	0,2403	0,2403	0,5082	0,2708	0,2708	0,3723	0,0136	0,0134	0,0133	0,0135
2	0,0484	0,0484	0,0484	0,0484	0,2394	0,2460	0,2460	0,2422	0,6267	0,4484	0,4484	0,5161	0,0197	0,0195	0,0193	0,0196
5	0,0484	0,0645	0,0645	0,0484	0,1818	0,2331	0,2331	0,2026	0,1824	0,3051	0,2782	0,1883	0,0220	0,0271	0,0259	0,0210
9	0,0484	0,0484	0,0645	0,0645	0,1558	0,1920	0,1956	0,1956	0,0640	0,0640	0,0862	0,1507	0,0244	0,0235	0,0280	0,0290
17	0,0161	0,0161	0,0161	0,0161	0,1351	0,1615	0,1640	0,1640	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0093	0,0090	0,0083	0,0086

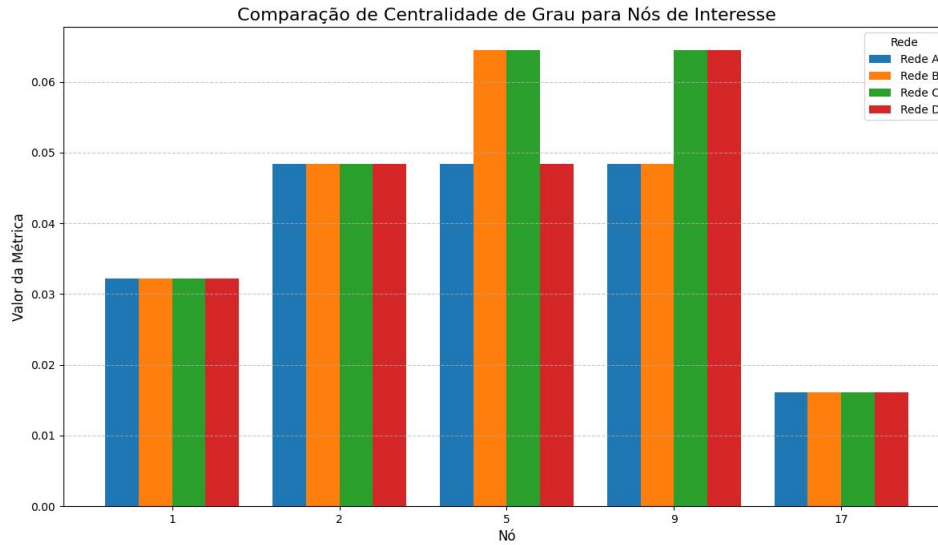


Figura 38: Comparação de grau

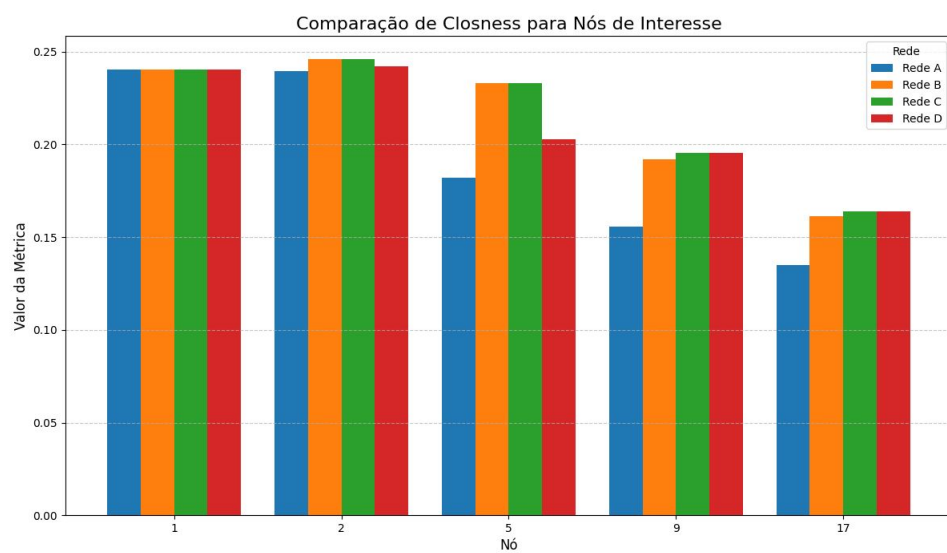


Figura 39: Comparação de closeness

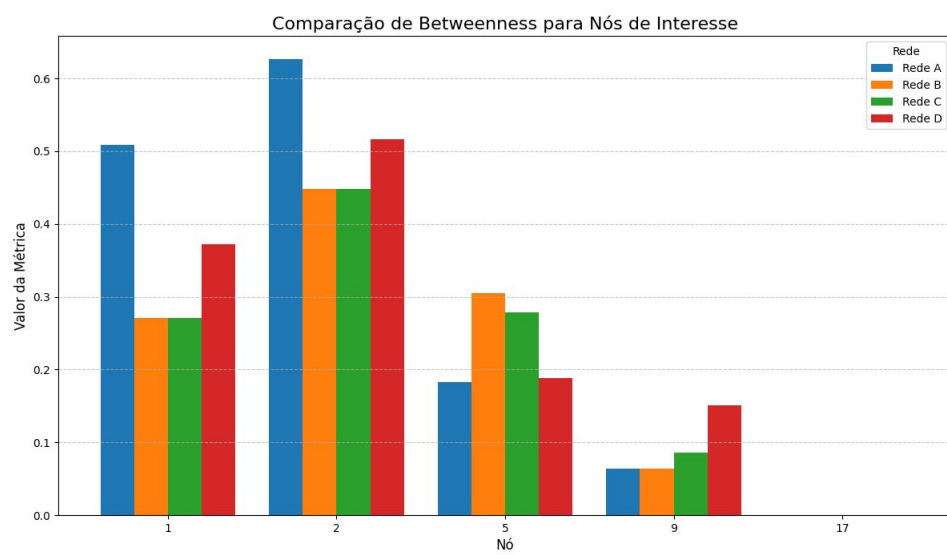


Figura 40: Comparação de betweenness

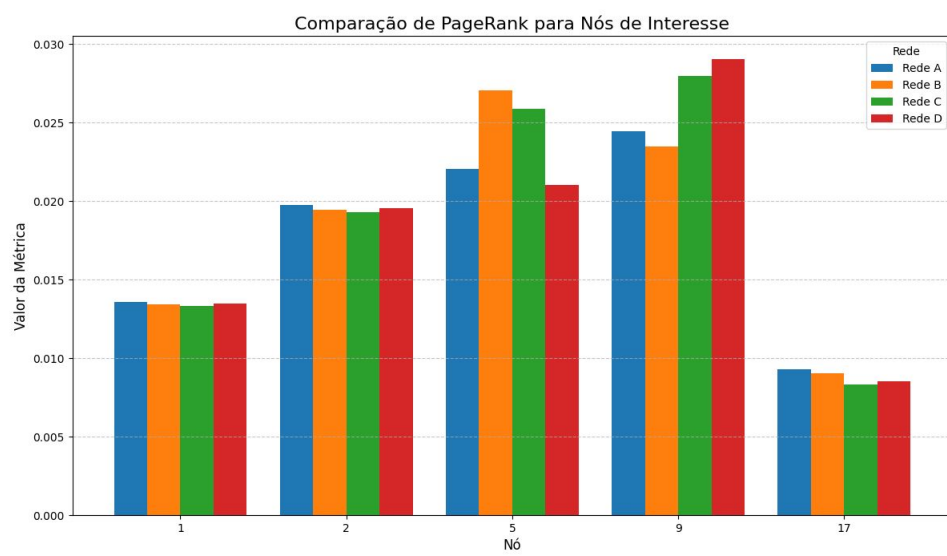


Figura 41: Comparação de pagerank