Instituto Politécnico de Leiria

Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Matemática Discreta - Componente PL

EI (D+PL)

Ano letivo 2018/2019 - 2.º Sem. Ficha prática 6

Grafos orientados

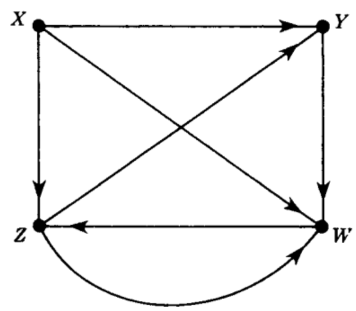
Definições Gerais

Definição 1 *Um **grafo orientado** G é um par formado por um conjunto V, não vazio, cujos elementos são designados por **vértices** de G, e por um conjunto $E \subseteq V \times V$ de pares ordenados (u, v) designados por **arestas** orientadas de G.*

Exemplo 1 *Consideremos o grafo $G = G(V, E)$ onde*

$$V = \{X, Y, Z, W\} \text{ e } E = \{(X, Y), (X, Z), (X, W), (Y, W), (Z, Y), (Z, W), (W, Z)\}.$$

Graficamente o grafo G pode ser representado da seguinte forma:



Definição 2 *Seja $\gamma = (u, v)$ uma aresta do grafo $G = G(V, E)$. Dizemos que a aresta γ tem origem em u e término em v ou que o vértice u é um **antecessor** de v e o vértice v é um **sucessor** de u.*

Definição 3 *O conjunto de todos os sucessores de um vértice u é definido por*

$$suc(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$$

*e é designado por **lista de adjacências** ou por **lista de sucessores de** u.*

Exemplo 2 *No grafo do exemplo anterior, podemos verificar que $suc(X) = \{Y, Z, W\}$ e que $suc(Z) = \{Y, W\}$.*

Definição 4 *Consideremos o grafo orientado $G = G(V, E)$ e $u \in V$. O **grau de saída** de um vértice u é igual ao número de arestas que têm origem em u e representa-se por $d^+(u)$; o **grau de entrada** de um vértice u é igual ao número de arestas que terminam em u e representa-se por $d^-(u)$.*

Definição 5 *Se $d^-(u) = 0$, o vértice u diz-se uma **fonte;** se $d^+(u) = 0$, o vértice u diz-se um **poço** (ou **sumidouro**); se os graus de saída e entrada de um vértice u forem ambos iguais a 0, o vértice u diz-se um **vértice isolado.***

Teorema 1 *Considere o grafo orientado $G = G(V, E)$, em que V tem n vértices. Então,*

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(u_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(u_i) = |E|,$$

sendo $|E|$ o número de arestas do grafo G.

Caminhos

Definição 6 *Considere o grafo orientado $G = G(V, E)$. Um **caminho** P do grafo G é uma sequência alternada de vértices e de arestas (respeitando o sentido indicado nas arestas). Quando não existir risco de ambiguidade, podemos descrever o caminho indicando apenas a sequência de vértices.*

Definição 7 *Seja P um caminho de um grafo orientado $G = G(V, E)$.*

*1) O **comprimento** de P é igual ao número de aresta que fazem parte do caminho;*

*2) Um **caminho simples** é um caminho com vértices distintos;*

*3) Um **caminho fechado** é um caminho que inicia e termina no mesmo vértice;*

*4) Um **caminho gerador** é um caminho que contém todos os vértices do grafo;*

*5) Um **ciclo** é um caminho fechado de comprimento superior ou igual a 3, com todos os vértices distintos à exceção do primeiro e do último, que coincidem;*

*6) Um **semicaminho** é uma sequência alternada de vértices e arestas em que pode ser ignorado o sentido indicado em alguma(s) aresta(s);*

*7) Um vértice v diz-se **alcançável** a partir de u se existir pelo menos um caminho de u para v.*

Conectividade

Definição 8 *Um grafo orientado $G = G(V, E)$ diz-se:*
*1) **Fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices u e v de G, u é alcançavel a partir de v <u>e</u> v é alcancável a partir de u.*

*2) **Unilateralmente conexo** se para quaisquer dois vértices (distintos) u e v de G, u é alcançavel a partir de v <u>ou</u> v é alcancável a partir de u.*

*3) **Fracamente conexo** se para quaisquer dois vértices u e v de G, existe um semicaminho que liga u a v.*

*Se um grafo não verificar qualquer uma das condições anteriores, dizemos que o grafo é **desconexo**.*

Proposição 1 *Considere o grafo orientado finito $G = G(V, E)$.*

*1) G é **fortemente conexo** se e só se G tem um caminho gerador fechado;*

*2) G é **unilateralmente conexo** se e só se G tem um caminho gerador;*

*3) G é **fracamente conexo** se e só se G tem um semicaminho gerador.*

Matriz de adjacência

Definição 9 *Considere o grafo orientado $G = G(V, E)$, sem arestas múltiplas, em que V tem n vértices. O grafo G pode ser representado por uma matriz quadrada A, de dimensão $n \times n$, em que o elemento a_{ij} da matriz A é dado por*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existir uma aresta do vértice } v_i \text{ para o vértice } v_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

*À matriz A chamamos **matriz de adjacência** do grafo G (ou matriz de bits ou matriz booleana).*

Nota 1 *Na construção da matriz A é necessário ter em atenção a ordenação dos vértices do grafo G.*

Seja k um inteiro positivo e A a matriz de adjacência do grafo G. Através da matriz A^k é possível determinar quantos caminhos de comprimento k existem do vértice v_i para o vértice v_j.

Teorema 2 *Seja k um inteiro positivo e A a matriz de adjacência do grafo G. Então $a_k(i, j)$, o elemento que se encontra na linha i e coluna j da matriz A^k, indica o número de caminhos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j.*

Matriz de caminhos / alcançabilidade

Definição 10 *Seja $G(V, E)$ um grafo orientado, sem arestas múltiplas, em que V tem n vértices. A **matriz de caminhos** ou **alcançabilidade** de G é matriz quadrada $P = [p_{ij}]_{n\times n}$ em que o elemento p_{ij} da matriz P é dado por*

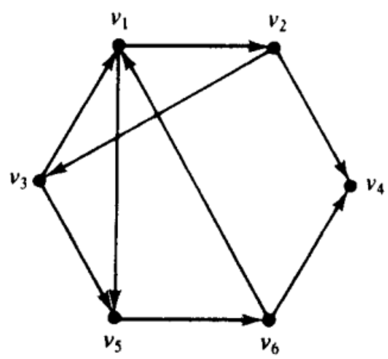
$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se existir um caminho de } v_i \text{ para } v_j \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases} .$$

Teorema 3 *Seja A a matriz de adjacência do grafo G com n vértices. Então a matriz de caminhos P e a matriz B_n têm entradas não nulas nas mesmas posições, onde*

$$B_n = A + A^2 + ... + A^n.$$

Exercícios propostos

1. Considere o grafo G representado na seguinte figura:

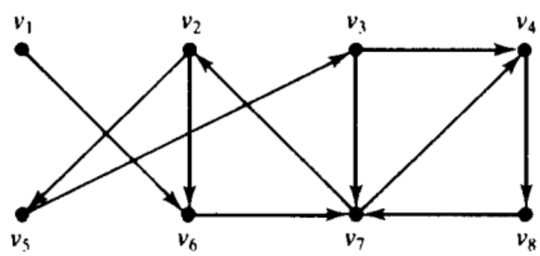


   (a) Determine a matriz de adjacência do grafo G e denote-a por A.

   (b) Usando a função "`grafo`" fornecida pelo professor, obtenha a representação gráfica do grafo G, semelhante à da figura anterior.

   (c) Através da matriz de adjacência A do grafo G, estude a conectividade do grafo G.

2. Considere o grafo G representado na figura seguinte:



   (a) Determine:

      i. a matriz de adjacência do grafo G e denote-a por A;

      ii. a matriz que permite identificar o número de caminhos de comprimento menor ou igual a 8, do vértice v_i para o vértice v_j do grafo G, com $1 \leq i, j \leq 8$.

      iii. a matriz de caminhos (ou matriz de alcançabilidade) do grafo G e denote-a por P.

   (b) Construa um algoritmo que, através da matriz de adjacência de um grafo orientado, conclua sobre a conectividade desse grafo. Aplique o algoritmo ao grafo dado.

3. Construa uma função com o nome "$\texttt{graus}(A, i)$", onde A é a matriz de adjacência de um grafo, que devolva os graus de saída e de entrada do vértice v_i. Aplique esta função a alguns dos vértices dos grafos dos exercícios 1 e 2.

4. Construa uma função com o nome "$\texttt{poço}(A)$", onde A é a matriz de adjacência de um grafo que não tem vértices isolados, que indique se um grafo tem poços e, em caso afirmativo, indique quais são esses poços. Aplique esta função aos grafos dos exercícios 1 e 2.

5. Construa uma função com o nome "$\texttt{caminho\_compK}(A, k, i, j)$", onde A é a matriz de adjacência de um grafo, que indique o número de caminhos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j. Aplique esta função aos grafos dos exercícios 1 e 2.

6. Uma determinada companhia aérea voa diariamente entre os seguintes destinos:

Atlanta $\longrightarrow$ Houston	Chicago $\longrightarrow$ Miami	Houston $\longrightarrow$ Atlanta
Boston $\longrightarrow$ Chicago	Denver $\longrightarrow$ Boston	Miami $\longrightarrow$ Boston
Boston $\longrightarrow$ Denver	Denver $\longrightarrow$ Reno	Reno $\longrightarrow$ Chicago

   (a) Descrevendo as rotas desta companhia aérea através de um grafo $G = G(V, E)$ sendo

   $$V = \{\text{Atlanta, Boston, Chicago, Denver, Houston, Miami, Reno}\},$$

   determine a sua matriz de adjacência e denote-a por A.

   (b) Por observação da matriz A e efetuando os cálculos no Scilab que considerar convenientes, indique, justificando, se por esta companhia aérea:

      i. É possível apanhar um voo direto de Miami para Chicago?
      ii. É possível voar de Boston para Atlanta?
      iii. É possível voar de Miami para Chicago? Fazendo um mínimo de quantas escalas?
      iv. É possível voar de Denver para Miami fazendo duas escalas? De quantas formas diferentes?
      v. Existe(m) pares origem $\longrightarrow$ destino que exijam uma viagem com o mínimo de 3 escalas?