

LICENCIATURA DE ENGENHARIA INFORMÁTICA E DE COMPUTADORES  
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

# GUIA DE ESTUDO



Versão ~ 24-03-2013

Semestres Incluídos ~ 1º e 2º semestre do 1º Ano

+/- 1º semestre do 2º Ano

Produzido por ~ André Reis

Contacto ~ [andre.filipe.reis@ist.utl.pt](mailto:andre.filipe.reis@ist.utl.pt)

# Índice

---

Introdução ao projecto .....	3
Onde encontrar ajuda .....	4
<b>1º Semestre</b>	
Álgebra Linear .....	6
Cálculo Diferencial e Integral I .....	11
Fundamentos da Programação .....	21
Sistemas Digitais.....	30
Teoria da Computação .....	34
<b>2º Semestre</b>	
Arquitectura de Computadores .....	38
Cálculo Diferencial e Integral II .....	39
Introdução aos Algoritmos e Estruturas de Dados.....	45
Matemática Discreta.....	50
Mecânica e Ondas.....	57
<b>3º Semestre</b>	
Análise Complexa e Equações Diferenciais.....	63
Electromagnetismo e Óptica.....	74

# Introdução ao projecto

---

Esta é uma forma que encontrei de tentar dar apoio aos alunos que ingressaram o IST recentemente, ou mesmo até a alunos mais antigos.

Vou tentar resumir e expor o método de estudo que adoptei, bem como alguns apontamentos que utilizei para estudar.

## **Copyrights**

É proibida a edição deste documento sem a minha autorização.

É apenas permitida a transmissão deste documento para fins educativos.

Esta transmissão deve ser feita via publica através do endereço:

[http://web.ist.utl.pt/andre.filipe.reis/Guia\\_De\\_Estudo-LEIC\\_by\\_Andre\\_Reis.pdf](http://web.ist.utl.pt/andre.filipe.reis/Guia_De_Estudo-LEIC_by_Andre_Reis.pdf)

Qualquer outro meio de transmissão deve ser restrito, ou seja de carácter privado.

É proibida a venda deste documento.

**Qualquer dúvida contactem-me.**

## **Aviso!**

- **É possível haver gralhas.** (podem contactar-me para futura correcção)
- **Cada aluno tem o seu método de estudo, e este deve adoptar/ melhorar e não cingir-se ao que eu redigirei.**

# Onde encontrar ajuda

---

**Tutor** – Um professor que é seleccionado para te acompanhar. - [tutorado.ist.utl.pt](http://tutorado.ist.utl.pt)

**Mentor** – Um aluno mais velho que é seleccionado para te acompanhar. - [nape.ist.utl.pt/mentorado](http://nape.ist.utl.pt/mentorado)

**Redes sociais** – facebook ([facebook.com/groups/leic.ist.2011](http://facebook.com/groups/leic.ist.2011))

**Fazer amigos** - (maneira + fácil -> praxe) - importante em todos os aspectos, encontrar colegas que ajudem e gostem de ser ajudados. **Mais tarde ou mais cedo vais precisar de colegas para formar grupos (projeto, etc).**

## **Os professores são bastante prestáveis!**

**Aulas de dúvidas** – como o nome indica, podes e deves utilizar estas aulas para apoio ao estudo.

**Aulas normais** - podes aproveitar qualquer aula para pedir ajuda aos professores da mesma.

**Mails** – na maioria dos casos obténs resposta de forma rápida e em conforto!

## **Sites com a matéria de várias cadeiras:**

[Academic.ieee-IST](http://Academic.ieee-IST) – vídeos a explicar, em português (feito no Campus Taguspark)

[Khanacademy.org](http://Khanacademy.org) – vídeos em Inglês

[Patrickjmt.com](http://Patrickjmt.com) – vídeos em Inglês, explica Calculo e Álgebra

[Wolframalpha.com](http://Wolframalpha.com) – uma super calculadora (Calculo e não só! )

## **Sites com serviços uteis:**

[Software para alunos do IST](http://Software para alunos do IST) – podes usufruir de alguns programas sendo aluno do IST. (Windows, office, Mathematica, etc)

[DropBox](http://DropBox) – Com uma conta aqui, poderás partilhar pastas e ficheiros com quem quiseres. Ideal para Backup de Projecto. (alternativa - [Google Drive](http://Google Drive) )

[Doodle](#) – Queres combinar data para fazer um trabalho? Aqui podes fazer uma espécie de *poll*, em que quem tu convidas, pode escolher o horário que prefere.

[Google Calendar](#) – a tua melhor agenda! Podes associar o teu telemóvel à conta, e programar para seres **notificado por SMS, e não pagas nada!**. Podes ainda sincronizar com o calendário de avaliações/aulas dado no:

**Fénix -> Estudante -> Consultar: Sincronizar -> Calendário de testes.**

1º Ano

1º Semestre

# Álgebra Linear

*para 14 valores*

[Youtube Matmania - Álgebra Linear](#)

[Youtube pramos - Algebra Linear](#)

[Exercícios Resolvidos de Aulas Práticas + Livros](#)

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas e práticas. (++) importante)

Fazer os exercícios das práticas antes da aula. (++) importante)

Resolver testes dos anos anteriores. (++) importante)

Livro – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica penso que o da bibliografia seja bom.

# ALGEBRA

- $A_{n \times n}$  é singular se não é invertível.  $\det = 0$
- Se  $\det A = 0$ , A não tem inversa, i.e. é singular
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $((A^T)^{-1}) = (A^{-1})^T$
- $\text{car}(A) = \text{car}(A')$
- Numa matriz quadrada A se:  $A^T = A \rightarrow$  Simétrica  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
- $A \cdot A^{-1} = I_n \quad A^T = -A \rightarrow$  Anti-simétrica  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof } A)^T$
- $H_i = \frac{\det(C_i)}{\det A}$  (Rever)  $Ax = b$
- $\text{cof } A = \sum (-1)^{i+j} (\det A_{ij})$

Nuc A

→ complemento ortogonal do nucleo:

• por eq cartesianas:  $\text{Nuc}(A) = \{(x, y, z) : x + y + 3z = 0, y + z = 0\}$

• paramétricamente  $\text{Nuc}(A) = \{z(-1, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow L(-1, -1, 1)$

resolver-se pelo MEG...

$Ax = 0$  é determinado  $\Leftrightarrow \text{car } A = n^{\circ}$  de ineqs  $\Leftrightarrow A$  non invertível  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$   
 $\Leftrightarrow \text{Nuc}(A) = 0$   
 $\Leftrightarrow$  não singular

$$\sin(2u) = 2 \sin(u) \cos(u)$$

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 1 - \cos(2u)$$

L. Independente → Têm como único solução  $0 = u = y = z = w$

L. Dependentes → Têm mais que uma solução / dependem uns dos outros, ou seja, obtém-se as soluções de outras

Nulidade  $\dim(\text{Nuc } A) = n^{\circ}$  de colunas - car A

$$\text{ex: } N_3 = \frac{1}{2}N_1 - \frac{1}{2}N_2$$

$$\dim = \text{car } A \Rightarrow (2 \text{ pivots} \Rightarrow \dim A = 2)$$

$$\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$$

$$\dim(\text{Lin } A) + \dim(\text{Nuc } A) = n$$

$$\dim \text{Lin } B = \dim \text{Col } B = r = n^{\circ} \text{ max de lin e col.}$$

Máx

Colineares, um <sup>vector</sup> está contido no recto gerado pelo outro  
 Coplanores, um deles está no plano gerado pelos outros dois, <sup>assumidos não colineares</sup>  
 SÃO LINEARMENTE DEPENDENTES SE:

Em  $\mathbb{K}^m$ , seja  $m \times n$  de linhas,  $n$  vectores.

$\text{can}(A) \leq m < n$ ,  $w_1, w_n \in A$ . São L.D

$$\left[ \begin{array}{cccc} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad 2\text{ pivôs} \Rightarrow \text{rank} = 2$$

$$\text{Nuc}(A) = \{(x, y, z, w) : -x + 3y + 2w = 0, 2y + 2z = 0\} =$$

$$= \{(-3z + 2w, -z, z, w), z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{2(-3, -1, 1, 0) + w(2, 0, 0, 1), z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= 2 \underbrace{\{(-3, -1, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}}_{\text{Base Nuc}(A)}$$

$$\text{Lin}(A) = \mathcal{L}\{(-1, 3, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\}$$

Base Lin(A) / linhas obtidas

$$\text{Col}(A) = \mathcal{L}\{(-1, 0, -1), (3, 2, 3)\}$$

base Col(A) / colunas originais que não são pivôs em A

Conjunto - Soluções do sistema

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (z, 3 - 2z, z) = (0, 3, 0) + (1, -2, 1)z$$

$$S = (0, 3, 0) + \mathcal{L}\{(1, -2, 1)\}$$

Encontrou bases do Nuc A

Matriz  $\xrightarrow{\text{MEO}}$  igualar a 0  $\Rightarrow$  eq. contradições:

Igualar 1 icog livre a 1 e os restantes livres a 0, e assim sucessivamente.

$$P_2 \rightarrow ax^2 + bx + c = p(x)$$

Base Canónica

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \text{de } \mathbb{R}^n$$

# ALGEBRA

2.0

- $\det(A) =$  produto dos valores próprios
- multiplicidade geométrica de um valor próprio: ( $n^{\circ}$  de blocos de jordan)
- multiplicidade algébrica de um valor próprio:  
 $m_a(\lambda_0) =$   
 $=$  soma de  $m_a$  (de todos os valores prop.) = Tam. da matriz =  $n$
- Valores próprios de  $A$ ; são as raízes de  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$
- Vectors próprios de um valor próprio  $(\lambda_0)$ :  $E_{\lambda_0} = \text{Nuc}(A - \lambda_0 I)$
- Soma dos valores próprios de  $A$  = soma dos elementos na diagonal principal de  $A$   
 $\text{trace}(A)$

$$\tilde{A} = S^{-1} A S$$

É diagonalizável se for possível obter uma base de vectores próprios  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de  $3 \times 3$

$\uparrow$  matriz diagonalizante  
 $\downarrow$  matriz diagonalizada

$$A = \begin{pmatrix} \text{valores} & (1 & 0 & 0) \\ \text{próprios} & (0 & 2 & 0) \\ \text{na diagonal} & (0 & 0 & 2) \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$S = \begin{pmatrix} \text{vectores} & (-1 & 1 & 1) \\ \text{próprios} & (1 & 1 & 0) \\ & (1 & 0 & 1) \end{pmatrix}$$

- Vector próprio generalizado: já temos vectores(s) calculados de um valor próprio entao  $(A - \lambda_0 I) v.g =$  soma dos vectores associados ao  $\lambda_0$

Para dar o vector de Jordan non-nula  $\rightarrow (A - 2I) N_1 = N_2 \Leftrightarrow AN_1 = N_2 + 2N_1$

matriz de Jordan non-nula  $\rightarrow (A - 2I) N_1 = 0 \Leftrightarrow AN_1 = 2N_1$

- 
- $V \in W$  espacos lineares  $T: V \rightarrow W$  é linear se
- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
  - $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Matriz simétrica  $A = A^T$   $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz anti-simétrica  $A^T = -A$   $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Hermitiana  $\bar{A}^T = A$   $\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$ , Real

Matriz Anti-Hermitiana  $\bar{A}^T = -A$   $\begin{pmatrix} i & 1+2i \\ -1+2i & 3i \end{pmatrix}$ , may puro

• Projeções Ortogonais de um vetor, notação:

F.O. de se em  $y$

$$P(x) = \frac{\langle x, y \rangle y}{\|y\|^2}$$

Propriedades, produto interno:  $\mathbb{R}$

• Linear

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

• Simétrica  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

• Define Positiva:  $\varphi \langle x, x \rangle > 0$ , para  $x \neq 0$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

• Linear

• Hermitiana

• Define Positiva

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

• Determinar dimensão e encontrar base ortogonal de um espaço  $V$   
Com os vetores, através do MEG,  $\dim = \text{cor } \tilde{A}$ , a cadeia linear

distância de um vetor  $(N_1, N_2, N_3)$  para  $(M_1, M_2, M_3)$  é dada por  $\cos \theta$  entre  $(N_1, N_2, N_3)$  e  $(M_1, M_2, M_3)$

$$M_1 = N_1$$

$$M_2 = N_2 - \frac{\langle N_2, M_1 \rangle M_1}{\|M_1\|^2}$$

$$\tilde{M}_1 = \frac{M_1}{\|M_1\|}$$

$$M_3 = N_3 - \frac{\langle N_3, M_1 \rangle M_1 - \langle N_3, M_2 \rangle M_2}{\|M_2\|^2}$$

$$P(n) = \langle x, \tilde{M}_1 \rangle \tilde{M}_1 + \langle x, \tilde{M}_2 \rangle \tilde{M}_2 + \langle x, \tilde{M}_3 \rangle \tilde{M}_3$$

$$\text{Distância} = \|x - P(x)\|$$

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

# Cálculo Diferencial e Integral I

*para 11 valores*

Módulos de Matemática – Fazer revisão do importante dado no Secundário

Lista de Exercícios com Resolução

Textos apoios às aulas - Prof. Amélia Bastos

Primitivas-Racionais

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas e práticas. (++ importante)

Fazer os exercícios das práticas antes da aula. (++ importante)

Resolver testes dos anos anteriores. (++ importante)

Livro – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica penso que o da bibliografia seja bom.

Recorri sim, foi a uma sebenta com testes e exames resolvidos.

# DERIVADAS

## • Derivada de composta:

Seja  $y$  diferenciável em  $a$   
e  $f$  diferenciável em  $M(a)$   
Então  $f(y(a))$  é diferenciável em  $a$

$$[f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x))$$

$$\text{ex: } [\sin\left(\frac{1}{x}\right)]'$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \cos(u(x))$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\text{ex: } (x^3)' = 3x^2 \cdot 1$$

$$(\sin x)' = \cos(x)$$

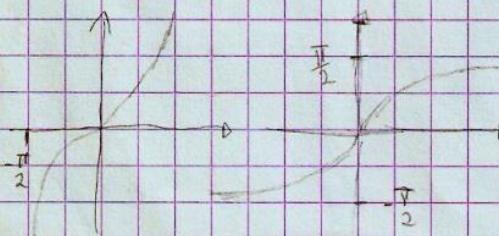
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{u'}{\cos^2 x}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(\ln x)' = \frac{x'}{x}$$

$$\tan x$$



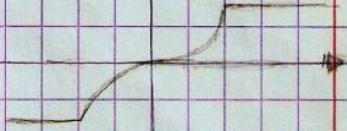
arctg x

↳ é o ângulo cujo  
tangente é x

arcsin x

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$$



$$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$$

# PRIMITIVA (AO Integro)

©MEIST Todos os direitos reservados

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

$$\int u^k \cdot u' = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u + C$$

$$\int u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$$

$$\int u' \cos u \, du = \sin(u) + C$$

$$\int -u' \sin u = \cos u$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsen u$$

$$\int -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u$$

$$\int u' e^u = e^u$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} = \tan u$$

Por partes:

$$\text{Primitiva } \int u'(u) \cdot v(u) \, du = u(u) \cdot v(u) - \int u(u) \cdot v'(u) \, du$$

$$\text{Temos que } \int_a^b u(u) \cdot v(u) \, du = [u(u) \cdot v(u)]_a^b - \int_a^b u(u) \cdot v'(u) \, du$$

Por substituições:

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuo em  $[a, b]$  e

$u: [c, d] \rightarrow [a, b]$ , bijetiva, diferenciável e derivada integrável em  $[c, d]$

$$F(t) = \int f(u(t)) \cdot u'(t) \, dt \text{ então } F(u^{-1}(u)) \text{ é}$$

uma primitiva de  $f$ . i.e.

$$F(u^{-1}(u)) = \int f(u) \, du$$

$$\int_a^b f(u) \, du = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(u)) \cdot u'(u) \, du$$

a transportar

# de funções trigonométricas $\int \sin^n(x) \cos^m(x)$

• n ou m ímpar

$$\int \sin^{(2k+1)}(u) \cdot \cos^m(u) du =$$

$$= \int \sin(u) \cdot \sin^{2k}(u) \cos^m(u) = \int \sin(u) [1 - \cos^2(u)]^k \cos^m(u) du$$

• n e m são pares

$$\int \sin^{2k}(u) \cos^{2l}(u) du = \int [\sin^2(u)]^k \cdot [\cos^2(u)]^l du =$$

$$= \int \left[ \frac{1 - \cos(2u)}{2} \right]^k \cdot \left[ \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right]^l du$$

$$\text{ex} \quad \int \frac{1}{(t+1)t^2}$$

$$1 = A t^2 + B t(t+1) + C(t+1)$$

$$\begin{cases} C = 1 \\ B + C = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(t+1)} + \int \frac{(-1)}{t} + \int \frac{1}{t^2}$$

# Sucessões

$M_n$  é majorada/minorada) se o seu CD e majorado/minorado)

$M_n$  é limitado se existe  $K = |M_n|$ ,  
K ten que ser constante ( $K \in \mathbb{R}^+$ )

$M_n$  é majorado; ex.  $V_n = n^{n+1}$

$$\Rightarrow n^{n+1} \geq \frac{n^{n+1}}{2^{n-1}} = \frac{n}{2} \quad \begin{array}{l} \text{se pegar no resto} \\ \text{e tentar se convergir} \\ \text{maior que.} \end{array}$$

Crescente  $M_n \leq M_{n+1}$  |  $\frac{M_{n+1}}{M_n} \geq 1$ ,  $M_0 > 0$ ,

$(n+1)!$

=  $n!(n+1)$  Decrescente  $M_n \geq M_{n+1}$  |  $\frac{M_{n+1}}{M_n} \leq 1$ ,  $M_0 \neq 0$

Monótona se é crescente ou decrescente

Convergência:  $M_n \rightarrow a$ ,  $\Rightarrow \lim M_n = a$   
ou seja, tem limite

$$\lim (h_n + y_n) = \lim (h_n) \pm \lim (y_n)$$

$$\lim (h_n \cdot y_n) = \lim (h_n) \cdot \lim (y_n)$$

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \sqrt[n]{\lim v_n}$$

• Tem limite  $\Rightarrow$  é convergente

• convergente  $\Rightarrow$  é limitada  $\Rightarrow$  convergente

Teorema das Sucessões Enquadradas

$$y_n \leq h_n \leq z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se  $\lim y_n = \lim z_n = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

$h_n$  é convergente e  $\lim h_n = a$

- Ex: se são compostos por frações limitadas (ex.  $\sin n / \cos n$ )

## Desigualdade de Bernoulli:

$$(1 + \kappa)^n \geq 1 + \kappa n$$

$$\lim (\ln y_n) = \text{se } \lim u_n \rightarrow \infty \text{ e } \lim y_n \rightarrow \infty \\ \text{e não se verifica indeterminação}$$
$$= (\lim u_n) \ln y_n = \infty$$

ex  $\lim \left( \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{e}^{n+2} \right)^{\frac{2n+3}{n+2}} = e^2$

$$\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = \alpha \quad \text{se} \begin{cases} \alpha < 1 \text{ ento } \lim M_n = 0 \\ \alpha = 1 \text{ nd se conclui} \\ \alpha > 1 \text{ ento } \lim M_n = +\infty \end{cases}$$

Escala de sucessões  $n^0 \ll c^n \ll n! \ll n^n$ , para  $c > 1$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \rightarrow \text{ com } M_n = n$$

$$\rightarrow \lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = 0$$

$$(2n+2)! \\ = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$$

## Continuidade de Heine

$f$ , contínua em  $a \in D$ ,  $\forall u_n \in D$   
 $u_n \rightarrow a \rightarrow f(u_n) \rightarrow f(a)$

$$\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$$

## Bolzano - Weierstrass

Qualquer sucessão limitada (máximo e mínimo) tem  
subsucessão convergente

# CALCULO 2.0

## • Teorema Fundamental do Cálculo:

Seja  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$ , então  $g$  é diferenciável e

$$g'(u) = f(u) \quad g(u) = \int_1^u f(w) dw$$

## • 2º Teorema Fundamental do Cálculo / Regra de Barroso

Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $I^{(a, b)}$

$F$  uma primitiva de  $f$  int.:

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) \quad F(u) = \int_0^u f(t) dt$$

Séries é convergente?  $\Rightarrow \lim a_n = 0?$  /  $|r| < 1$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} r^n n^p$$

• Geometria de razão: se  $|r| < 1$ , sendo

(o razão é dada por:  $\sum a_n = \frac{1^{\text{º}} \text{ termo}}{1-r}$ )

• Se  $\lim a_n \neq 0$  entre a série  $\sum a_n$  é divergente.

→ de Dirichlet:

$$\text{forma: } \sum \frac{1}{n^p} \quad p > 0$$

$\sum \frac{1}{n^p}$   $\begin{cases} \text{Converge se } p > 1 \\ \text{Diverge se } p \leq 1 \end{cases}$

→ Critério de comparação:

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$$

• Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente ent. a série  $\sum a_n$  é convergente

• Se  $\sum a_n$  é divergente ent. a série  $b_n$  é divergente

→  $\sum a_n = \sum a'_n + S'$  se suas somas

• As duas convergentes:  $\sum (a_n + a'_n)$  é convergente  $\Rightarrow S + S'$

• Uma converge e outra diverge:  $\sum (a_n + a'_n)$  é divergente

• As duas divergentes: pode convergir ou não

•  $K \in \mathbb{R}$ ,  $\sum a_n$  (convergente),  $\sum K a_n$  é convergente e a soma é  $K S$ .

• Criterio de Alambert: Seja  $a_n \geq 0$

seu  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ ,  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$   
 • Se  $l < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente  
 • Se  $l > 1$  a série  $\sum a_n$  é divergente

$a_n \Rightarrow a_n \leq b_n$  (divergente, não se pode aplicar o critério de comparação)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, p < 1, b_n \text{ é divergente.}$$

Se  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ,  $f \in [0, +\infty]$ , não de mesma natureza.

• Criterio do Integral

Seja  $f$ , contínua positiva e decrescente,  
 a série  $\sum f$  é convergente se

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_1^K f(t) dt \text{ existe e é finito,}$$

caso contrário é divergente

• Criterio de Raiz

$\sum a_n$ , uma série de termos não negativos,  
 e  $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ ,  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- Se  $l < 1$  a série é convergente
- se  $l > 1$  a série é divergente

• Seja  $\sum |a_n|$  convergente, entao  $\sum a_n$  é convergente e:

$$|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$$

• Criterio de Leibniz

Seja  $a_n > 0$ , decrescente,  $a_n \rightarrow 0$

então  $\sum (-1)^n a_n$  é convergente  $\frac{(-1)^n}{n} / n \rightarrow 0$

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

$f$  é contínua em  $a$  se:  $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$   
 $a \in D$  um ponto isolado de  $D$

Teorema de Weierstrass:  
 I =  $[a, b]$  → intervalo limitado e fechado!

Se  $f$  é contínua em  $I$ , então  $f$  tem máximos e mínimos nesse intervalo.

$f$  é diferenciável em  $a$  ( $a \in D \cap D'$ ) com derivate  $f'(a)$   
 se existe e é finito

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a}$$

$f$  é diferenciável em  $a$  se

$$f'_e(a) = f'_d(a)$$

$f$  é prolongável em  $a$  ( $a \in D' \setminus D$ )  
 por continuidade no  $a$  se existir  $F = D \cup \{a\}$   
 se existe e é finito  $\lim_{n \rightarrow a} f(n)$

Continuidade de funções compostas

se  $y$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $y$   
 fog é contínua em  $a$ .

Teorema de Rolle

- contínua em  $[a, b]$
- diferenciável em  $(a, b)$
- $f'(c) = f'(b)$

(o gráfico)

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, b > a$$

$$\Rightarrow f'(c) = f(b) - f(a)$$

composto

Justificativa: pq  $f$  é composta num produto/soma/composição  
 de funções deriváveis

# Regras de L'Hopital

se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \text{ind } \frac{0}{0}$  ou  $\text{ind } \frac{\infty}{\infty}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} =$$

# Fundamentos da Programação

para 18 valores

## Método de Estudo

Assistir/tomar atenção às aulas teóricas e práticas. (++importante)

Tira uma manhã ou tarde do fim-de-semana para fazer os exercícios da próxima aula prática (++ imp), e dar uma revisão á teoria dada na semana. (+ imp)

Resolver testes dos anos anteriores.- **Parte teórica bastante parecida** (++ imp)

Criar exercícios tu mesmo(a). (+ importante)

**Livro** – recorri ao livro de FP – Scheme, explica bem a parte teórica da matéria e tem alguns algoritmos interessantes a saber.

## Apontamentos para o 1º Teste (inclui alguns dados em Scheme)

### Relação entre um procedimento e um processo computacional:

Um procedimento pode ser considerado como a especificação da evolução local de um processo computacional. Por evolução local entenda-se que o procedimento define, em cada instante, o comportamento do processo computacional, ou seja, especifica como construir cada estágio do processo a partir do estágio anterior.

### Tipos abstractos de informação

Permite separar a parte do programa que lida com dados da parte do programa que lida com a representação dos dados. É constituída por 4 grandes passos. Origina a abstracção de dados.

### Definição recursiva? Quais as partes que a compõem?

**Resposta:**

Uma definição diz-se *recursiva*, se a entidade que está a ser definida for definida em termos

de si própria.

As definições recursivas são constituídas por duas partes distintas:

(a) Uma *parte básica*, ou *caso terminal*, a qual constitui a versão mais simples do problema

para o qual a solução é conhecida.

(b) Uma *parte recursiva*, ou *caso geral*, na qual o problema é definido em termos de uma versão mais simples de si próprio.

**Diga o que é um bloco e quais as regras que estão associadas à sua construção.**

**Resposta:**

Um *bloco* corresponde a uma sequência de instruções. A importância dos blocos provém

das seguintes regras informais:

(a) Cada bloco deve corresponder a um subproblema que o procedimento correspondente

tem de resolver. Este aspecto permite modularizar o programa.

(b) O algoritmo usado por um bloco está escondido do resto do programa. Isto permite

controlar a complexidade do programa.

(c) Toda a informação definida dentro de um bloco pertence a esse bloco, e só pode ser

usada por esse bloco e pelos blocos definidos dentro dele. Isto permite a protecção efectiva da informação definida em cada bloco da utilização não autorizada por parte de outros blocos.

**Ordem de crescimento de um processo:**

Corresponde a uma medida grosseira do modo como o processo consome recursos (espaço ou tempo) à medida que o grau de dificuldade do problema cresce. A importância do seu estudo corresponde a poder comparar o consumo de recursos para soluções alternativas para o mesmo problema.

**Procedimento de ordem superior:**

Procedimento que recebe outros procedimentos como parâmetros ou cujo valor é um procedimento. Os procedimentos de ordem superior permitem capturar abstracções que não são representáveis por procedimentos normais.

$R(n)$  – R recurso tempo/espaço – n dimensão do problema

## Mais apontamentos: (NÃO FORAM FEITOS POR MIM! )

**Algoritmo:** sequência de instruções com vista à resolução de um determinado problema.

**Programa:** um algoritmo escrito numa linguagem de programação, isto é, uma linguagem que o computador entende.

**Processo computacional:** um ente imaterial que ocorre no computador quando um programa está a ser executado, e cuja evolução é ditada pelo programa.

**Programas em Scheme** – sequência de formas

**Sintaxe:** conjunto de regras que determina as frases válidas da Linguagem

**Semântica:** atribuição de um significado às frases da linguagem.

**BNF:** Símbolos não-terminais: designam componentes da linguagem: entre “<” e “>”. Ex:  
<forma>

**Símbolos terminais:** aparecem em frases da linguagem: aparecem por si só: Ex: + ( )

“:: -“ lê-se é definido como ; “|” representa uma alternativa ; “\*” 0 ou mais ocorrências  
“+” 1 ou mais ocorrências

**Definição Recursiva:**

**Parte básica ou caso terminal:** que corresponde à versão mais simples do problema

**Parte recursiva ou caso geral:** a solução do problema é expressa em termos da solução de uma versão mais simples do problema

**Ambiente** – conjunto de associações entre nomes e objetos computacionais

**Abstracção procedimental** – consistem em separar “o que” o procedimento faz de “como o faz”.

**Ambiente local** – um ambiente que é criado durante a avaliação de uma combinação e que deixa de existir quando essa avaliação termina.

**Processo recursivo** – fase de expansão referente à construção de uma cadeia de operações adiadas – fase de contração correspondente à realização das operações adiadas.

**Processo linear** – cresce linearmente com um dada parâmetro

**Processo iterativo** – variáveis de estado, regras para atualização de variáveis de estado, condições de paragem.

**Ordem de crescimento** – grau de dificuldade ou dimensão do problema – parâmetro do qual dependem os recursos consumidos.

**R(n)** – R recurso tempo/espaço – n dimensão do problema

**Ordem de crescimento dos recursos utilizados por um processo** – medida grosseira dos recursos consumidos por um processo em função da dimensão do problema

**Linguagem estruturada em blocos** – programa é uma hierarquia de blocos, toda a informação declarada num bloco só pode ser usada nesse bloco.

**Variáveis locais em relação a um bloco** – são as declaradas nesse bloco (inclui parâmetros formais)

**Variáveis globais** – são as declaradas no ambiente global

**Variáveis livres em relação a um bloco** – variáveis utilizáveis nesse bloco mas que não foram declaradas no bloco ou no ambiente global

**Domínio de um nome:** gama de instruções onde o nome pode ser utilizado. Nas Línguagens de Programação estruturadas em blocos, o domínio de um nome é o bloco onde o nome é declarado e todos os blocos interiores, onde não seja declarado o mesmo nome.

**Parâmetros formais** – argumentos/variáveis desconhecidos usados num procedimento.  
Concretos – valores atribuídos aos formais e com os quais interactua o procedimento.

**Programa computacional** - Um ente imaterial que existe dentro de um computador durante a execução de um programa, e cuja evolução ao longo do tempo é dada pelo programa.

**Algoritmo** - Uma sequência de dados bem definida e sem ambiguidades, que, sendo seguida mecanicamente, permite atingir um dado objectivo / sequência de instruções (finitas) <sup>analgua</sup>

**Procedimento** - Uma sequência de instruções escritas numa linguagem de programação que definem como atingir um dado objectivo

**ESCREVE** **MIX**: Um procedimento corresponde a um algoritmo escrito numa linguagem de programação. A execução de um procedimento origina um processo computacional.

**Procedimento recursivo** - usa-se a si próprio. (define-se em termos de si próprio)

- **Programa Recursivo** - Durante a sua execução surgem operações adiadas. Existe uma fase de expressões (operadiços) e fase combinação (execução das op.)
  - **Programa Iterativo** - ao longo da execução há ~~for~~ uma actualização das variáveis (aparecem nos comb.)
- Parâmetros**: **Formais** → correspondem aos argumentos utilizados no corpo da expressão.

**Concreteiros** → (aparecem numa combinação) correspondem aos valores que são usados pelo procedimento correspondente é primeira subexp. da combinação.

→ Os parâmetros concretos são associados aos parâmetros formais  
 $\uparrow PF \quad \uparrow PC$   
 $(\lambda x. (+ x)) 2$

**Prédicado** - operações que produz resultados do tipo lógico ( $\neg$ ,  $=$ ,  $\rightarrow$ )

**Operações numéricas** -  $+$ ,  $\times$ ,  $\sin$ , remainder

**Operações lógicas** -  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$

**Programa** é um algoritmo escrito numa linguagem de programação.

**Tipo de informações** - é uma coleção de objectos, membros do tipo e uma coleção de operações (sobre os membros do tipo)

~~4 passos na def: tipos abstratos de info~~  
~~Definição de tipos abstratos de info~~

## **Apontamentos para o 2º Teste –**

(conceitos a cinza não foram leccionados no meu ano)

### **Diga o que caracteriza a programação imperativa**

A programação imperativa baseia-se no conceito de efeito. Em programação imperativa, um programa é considerado como uma sequência de instruções, cada uma das quais produz um efeito.

### **Distinga entre programação imperativa e programação funcional.**

A programação imperativa funciona à base de efeitos. Em programação imperativa, um programa é considerado como uma sequência de comandos, ou de instruções, que realizam efeitos. Neste tipo de programação, a programação imperativa, a ordem da execução dos comandos é crucial para o bom funcionamento do programa.

A programação funcional considera um programa como uma composição de funções matemáticas as quais devolvem valores.

### **Distinga o comportamento FIFO ("first in first out") do comportamento LIFO ("last in first out"). Quais os tipos de informação que correspondem a cada um destes comportamentos?**

“FIFO” designa o tipo de comportamento em que o primeiro elemento a entrar numa estrutura de informação será também o primeiro elemento a sair. As filas são a estrutura de informação que seguem este tipo de comportamento. De forma diferente, “LIFO” designa o tipo de comportamento em que o último elemento a entrar numa estrutura de informação será o primeiro elemento a sair. As pilhas são a estrutura de informação que seguem este tipo de comportamento.

### **Diga o que é um ponteiro. Qual a característica que distingue um ponteiro dos outros tipos de informação?**

Um ponteiro é qualquer coisa que aponta. Ao passo que com a utilização de outros tipos de informação, estamos fundamentalmente interessados no valor das entidades, com ponteiros, não estamos interessados no valor do ponteiro, mas sim no valor para onde ele aponta.

### **Diga o que significa um objecto computacional ser um cidadão de primeira classe.**

Um objecto computacional é um cidadão de primeira classe se:

Puder ser nomeado.

Puder ser passado como argumento a um procedimento.

Puder ser devolvido por um procedimento.

Puder fazer parte de uma estrutura de informação.

Uma classe corresponde a uma coleção de objectos com as mesmas variáveis de estado e com o mesmo comportamento. As classes podem ter subclasses que correspondem a especializações dos seus elementos. As subclasses herdam as variáveis de estado e os métodos das superclasses, salvo indicação em contrário. Por exemplo, podemos definir uma classe correspondente ao comportamento de uma conta bancária genérica. Eventuais subclasses correspondem a contas com características específicas, por exemplo uma conta ordenado ou uma conta jovem. O mecanismo de herança corresponde, por exemplo, a dizer que as características de uma conta bancária genérica se mantêm numa conta ordenado a não ser que sejam explicitamente alteradas.

**Comente a seguinte expressão: “A documentação de um programa deve ser efectuada após o código terminado, para garantir que não existem erros nessa mesma documentação”.**

A documentação de um programa começa com a análise do problema e estende-se ao longo de todo o seu desenvolvimento. É totalmente incorrecto afirmar que a documentação de um programa deve ser efectuada após o código terminado.

**Quando é que se diz que um objecto tem estado? O que caracteriza o estado de um objecto?**

Um objecto tem estado quando o seu comportamento depende da sua história. O estado de um objecto é caracterizado por um conjunto de variáveis chamadas variáveis de estado.

**Em que condições se diz que uma variável está não ligada (“unbound”) num dado ambiente?**

Uma variável está não ligada num ambiente quando não existe um valor para essa variável

em nenhum dos enquadramentos correspondentes a esse ambiente.

**Diga como se chama e em que consiste o método de gestão de memória usado pelo Scheme.**

O método de gestão de memória usado pelo Scheme chama-se "recolha de lixo" (de "garbage

collection"), e consiste em duas fases:

Na primeira fase, a fase de marcação, todas as células inicialmente atribuídas ao amontoado que são acessíveis a partir do ambiente global ou de informação mantida pelo interpretador são marcadas como não sendo lixo.

Na segunda fase, a fase de varrimento, todas as células inicialmente atribuídas ao amontoado são inspeccionadas, e as que não estiverem marcadas como não sendo lixo são devolvidas ao amontoado.

**Quando se diz que um objecto computacional corresponde a lixo? Explique a necessidade do mecanismo de recolha de lixo.**

Quando o espaço de memória correspondente a um objecto computacional deixa de ser acessível este espaço passa a designar-se por *lixo*.

O mecanismo de recolha de lixo é necessário pois a geração de lixo pode esgotar o espaço de memória que está atribuído a um programa.

**Garbage collection:**

É lançado automaticamente pelo Scheme.

É constituído por duas fases.

É importante quando se utilizam estruturas dinâmicas.

**Diga o que é um procedimento de ordem superior. E quais são as suas vantagens.**

Um procedimento de ordem superior **ou funcional** é um procedimento que recebe procedimentos como argumentos ou um procedimento que devolve procedimentos. As vantagens dos procedimentos de ordem superior são as de capturarem abstracções mais potentes do que os procedimentos normais.

**Em programação podemos ter erros sintácticos e erros semânticos. Defina cada um deles e dê exemplos.**

Um erro sintáctico resulta da não conformidade do programa com as regras de sintaxe da linguagem usada. Exemplo:

```
(define x)
```

Um erro semântico resulta do facto do programa, sintaticamente correcto, ter um significado diferente do significado pretendido pelo programador. Exemplo:

```
(define (media x y)
      (+ x (/ y 2)))
```

**Como se define o ambiente associado a um enquadramento?**

O ambiente associado a um enquadramento é constituído por uma sequência de enquadramentos

começando pelo próprio enquadramento, pelo seu enquadramento envolvente, pelo enquadramento envolvente deste, e assim sucessivamente.

**O que é um enquadramento? Qual a restrição que lhe é imposta?**

Um enquadramento é constituído por um conjunto (possivelmente vazio) de ligações.

Uma

ligação associa um nome a um valor.

Num enquadramento não podem existir duas ligações distintas para o mesmo nome.

**Enuncie e explique cada um dos tópicos que são habitualmente focados na documentação de utilização que acompanha um programa.**

A documentação de utilização tem a finalidade de fornecer ao utilizador a informação necessária para a correcta utilização do programa. Esta documentação inclui normalmente o seguinte:

Descrição do que o programa faz. Nesta descrição pode estar incluída a área geral de aplicação do programa e uma descrição precisa do seu comportamento.

Descrição do processo de utilização do programa. Deve ser explicado claramente ao utilizador do programa o que ele deve fazer, de modo a poder utilizar o programa.

Descrição da informação necessária ao bom funcionamento do programa. Uma vez o programa em execução, vai ser necessário fornecer-lhe certa informação para ser manipulada. A forma dessa informação é descrita nesta parte da documentação.

Descrição da informação produzida pelo programa, incluindo por vezes a explicação de mensagens de erro.

Descrição, em termos não técnicos, das limitações do programa.

**Diga quais as fases por que passa o desenvolvimento de um programa e o que se faz em cada uma delas.**

**Análise do problema.** O programador, juntamente com o cliente, estuda o problema a resolver com o objectivo de determinar exactamente o que o programa deve fazer.

**Desenvolvimento de uma solução.** Determinação de como vai ser resolvido o problema.

**Desenvolvimento de um algoritmo** e definição abstracta dos tipos de informação usados. Deve usar-se a metodologia do topo para a base.

**Codificação da solução.** Tradução do algoritmo para uma linguagem de programação, e implementação dos tipos de informação. Depuração, i.e., correcção de erros sintácticos e semânticos.

**Testes.** Definição de uma bateria de testes com o objectivo de “garantir” que o programa funciona correctamente em todas as situações possíveis.

**Manutenção.** Fase que decorre depois do programa estar em funcionamento. A manutenção é necessária por dois tipos de razões: a descoberta de erros ou a necessidade de introduzir modificações e actualizações nas especificações do programa.

Em relação à metodologia de desenvolvimento de programas pode dizer-se que:

Na fase da programação da solução decide-se a representação para as estruturas de informação.

A depuração lida com erros semânticos e erros sintácticos.

A fase de testes nunca permite garantir a ausência completa de erros.

**Diga o que é um efeito. Qual o comportamento de um procedimento baseado em efeitos?**

Um efeito corresponde à alteração de qualquer entidade associada a um processo computacional.

Assim, um procedimento baseado em efeitos comporta-se alterando sequencialmente algumas das entidades (por exemplo, atribuindo valores a variáveis, alterando estruturas, escrevendo objectos). Num procedimento baseado em efeitos, é mais importante saber quais as entidades que este altera do que o valor que este devolve.

**Explique a diferença entre o método de passagem de parâmetros por valor e por referência.**

Na passagem por valor o valor do parâmetro concreto é associado ao parâmetro formal. Na passagem por referência a localização em memória do parâmetro concreto é associada ao parâmetro formal.

**Explique a diferença entre o método de passagem de parâmetros por valor e por referência. Explique estes dois métodos com exemplos em Scheme.**

Quando um parâmetro é **passado por valor**, o valor do parâmetro concreto é avaliado, e esse valor é associado com o parâmetro formal correspondente. A única ligação entre os parâmetros concretos e os parâmetros formais é uma associação unidireccional de valores

(do ponto de avaliação para o procedimento). A passagem por valor constitui o método de passagem por omissão em Scheme. Um parâmetro formal em que seja utilizada a passagem por valor comporta-se, dentro do bloco associado ao seu procedimento, como um nome local que é inicializado com o início da avaliação do procedimento.

Quando um parâmetro é **passado por referência**, o que é associado ao parâmetro formal correspondente não é o valor do parâmetro concreto, mas sim o "contentor" que contém o seu valor. Utilizando passagem por referência, os parâmetros formais e os parâmetros concretos vão *partilhar* o mesmo local (dentro da memória do computador) e, consequentemente, qualquer modificação feita aos parâmetros formais reflecte-se nos parâmetros concretos.

Um parâmetro formal em que seja utilizada a passagem por referência corresponde à *mesma variável* que o parâmetro concreto correspondente, apenas, eventualmente, com outro nome. A passagem por referência em Scheme é utilizada, por exemplo, quando os parâmetros concretos correspondem a caixas ou a vectores.

**Diga quais as características das filas como tipo de informação. O que as distingue das listas?**

As filas são estruturas de informação constituídas por uma sequência de elementos. Os elementos da fila são retirados pela ordem em que foram colocados. A diferença em relação às listas corresponde ao facto de numa lista se poder adicionar ou remover um elemento de qualquer posição da lista, ao passo que nas filas apenas se pode introduzir um elemento no fim da fila e remover o elemento no início da fila.

**Explique o que são as barreiras de abstracção criadas por um tipo de informação e quais os inconvenientes de não as respeitar.**

As barreiras de abstracção são uma camada conceptual que é estabelecida ao criar um novo tipo de informação, a qual apenas permite aceder aos elementos do tipo através das suas operações básicas.

Os inconvenientes de não a respeitar correspondem a perder a abstracção correspondente ao tipo de informação e à dependência do código desenvolvido das decisões sobre a representação do tipo.

A utilização da abstracção de dados permite melhorar a tarefa de desenvolvimento de programas, a facilidade de leitura de um programa e torna os programas independentes da representação escolhida para os tipos de informação.

**Na definição de um tipo de informação, diga o que é o anonimato da representação e qual a sua importância.**

O anonimato da representação corresponde ao conceito de que o módulo correspondente à implementação de um tipo de informação guarda como segredo o modo escolhido para representar os elementos do tipo. A importância deste conceito advém do facto de apenas ser possível aceder aos elementos do tipo é através das operações básicas definidas dentro do módulo que corresponde ao tipo.

# Sistemas Digitais

*para 16 valores*

[Enunciados de Testes e Exames - LEIC](#) (2011/2012)

[Enunciados de Testes e Exame – Eng. Electrotécnica e de Comp](#) – **Hardcore MODE** –

Se já fizeste todos os testes anteriores de LEIC, e quiseres mais entretenimento aqui estão mais. **A Probabilidade de teres alta nota é over 9000. ^^**

[Labs de SD](#) – falta só a resolução do 1o – **password: leic**

## Programas e Tutoriais

[Xilinx](#) – **como instalar o Xilinx**, feito por professores da FCT – **password: leic**

[Logic.ly](#) – Simulador de circuitos bem simples e apelativo. Senão: **restrito em circuitos integrados.** ( [Versao online](#) )

[Simulador de mapas de Karnaug](#) – calcula mapas de Karnaugh

## Método de Estudo

Assistir/tomar atenção às aulas teóricas. (+importante)

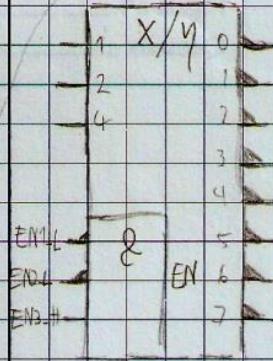
Começa a tratar os laboratórios com antecedência, no mínimo 1 semana antes. (+++++ importante) – grau dificuldade: 1 < 2 << 3 < 4 <<< 5

Acompanhar teóricas. – revê ao fim-de-semana, pois é dada bastante matéria por semana. (++ importante)

[Livro \(serve par SD e Acom- cadeira 2sem\)](#) – comprei o livro, não recorri muito, mas quando não entendia algo, este permitia consolidar bem a coisa.

## Apontamentos para o 1º e 2º teste

**Descodificadores** - é um circuito combinatório que permite, para uma combinação de entradas, activar uma e só uma saída.

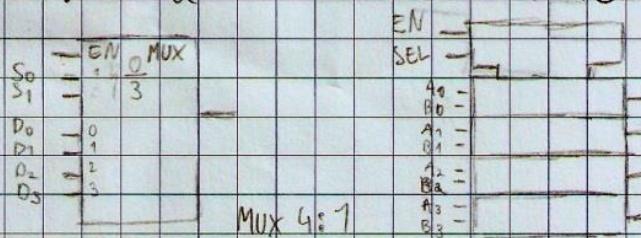


Dec 3:8

**Codificadores** - é um circuito combinatório que permite, para uma activação de uma entrada, gerar o polovão de código correspondente a essa entrada. n bits (saídas) tem  $2^n$  entradas.



**Multiplexores** - é um circuito combinatório que permite encaminhar uma de n entradas de dados para a saída (especificada pelo sinal) de selecção.



**Saídas Tri-State** - possuem um enable, que quando inactivo coloca as saídas num estado de alta impedância, não havendo passagem de corrente.

**Over flow** - ocorre sempre que o ultimo transportado é diferente do penultimo.

**Absorção**  $x + \bar{y}y = x$

**Redundância**  $x + \bar{x}y = x + y$

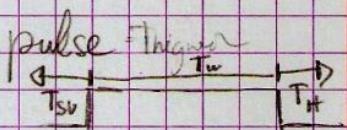
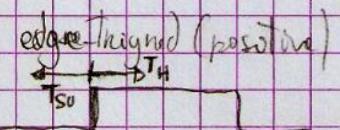
**Adjacência**  $xy + \bar{x}\bar{y} = x$

— a transportar

# Sistemas Digitais 2.0

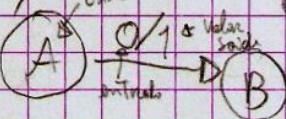
$$\text{Número de estados} = 2^{(\text{nº bits para codificar saídas} + \text{nº de entradas})} \times (\text{nº de saídas})$$

$J$	$K$	Saída
0	0	Hold
0	1	Reset
1	0	Set
1	1	Toggle



$$\text{nº de Estados} \leq 2^N \rightarrow N = \text{nº de flip-flops}$$

Máquinas → Mealy → A saída está em função não só do estado como também das entradas

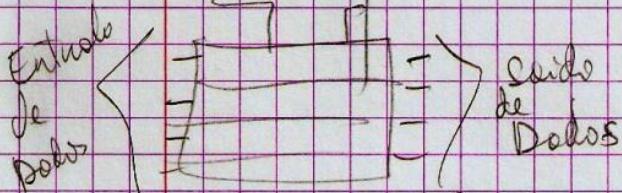
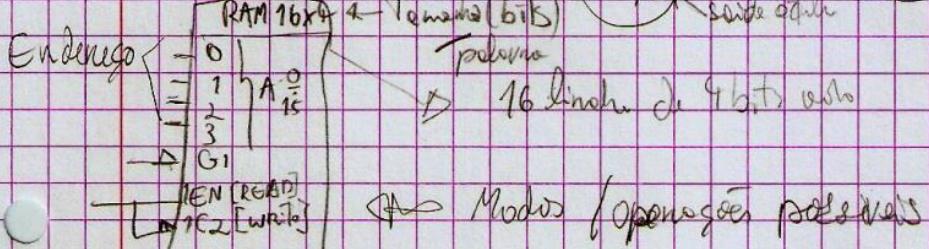


Moore

nº de saídas

A → B

Entrada & saída



Aumentar número de colunas (ex 4 → 8 bits)

→ criar outra RAM igual com os entradas de coluna copiadas

Aumentar nº de linhas (ex 16 → 32 linhas)

→ criar outra RAM igual com o endereço da coluna copiado

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

• Not

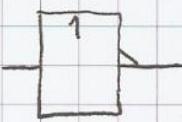
TB

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

Log.ignome



Esg. Elect.



• And

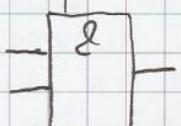
TB

	x	y	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Log.



Esg. El



• Or

TB

	x	y	$x + y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Log



Esg. Elect

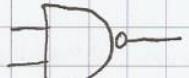


• Nand

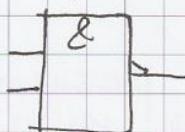
TB

	x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Log



Esg. Elec

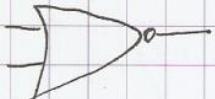


• Nor

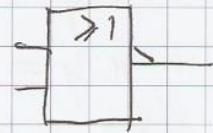
TB

	x	y	$\overline{x + y}$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Log



Esg. E



• Xor

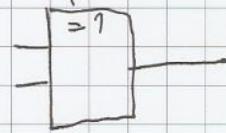
TB

	x	y	$x \oplus y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Log



Esg. E



a transportar \_\_\_\_\_

# Teoria da Computação

*para 14 valores*

## Método de Estudo

Assistir/tomar atenção às aulas teóricas e práticas. (++importante)

Para estudar para os testes, resolver alguns dos exercícios das aulas práticas e depois os testes anteriores.(++ importante)

Ler alguns apontamentos teóricos que o professor disponibiliza, permitem tirar mais que 15/ 16 valores à cadeira. (importante)

**Livro** – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica penso que o da bibliografia seja bom.

## Apontamentos para a matéria do Lema de Pumping

## Lema de Pumping

Se  $L$  é uma linguagem regular, então existe um número  $p > 0$ , tal que todo o  $s \in L$  tem  $|s| \geq p$  se escreve como  $s = xyz$  e

a)  $xy^iz \in L, \forall i \in \mathbb{N}$

b)  $|y| > 0$

c)  $|xyz| \leq p$

Exercício-Tipo: Ver se a linguagem é regular...

- Supõe-se que a linguagem é regular
- anota-se os p. a. da linguagem
- arranja-se forma de não pertencer à linguagem  
 $xyyz \neq uz$

Automato de pilha é um sextuplo,

$$A = \langle Q, \Sigma, T, \delta, q_0, F \rangle$$
 em que  
(Q - estados),  $\Sigma$  - alfabeto,  $T$  - alfabeto da pilha

- Uma linguagem diz-se livre de contexto se existir um automato de pilha que a reconhece.

Gramática livre de contexto é um quadruplo,

$$G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$$
,  
V → simb. não terminais  
 $\Sigma$  → simb. terminais  
R → Regras  
S → simb. inicial

- Uma linguagem  $L$ , diz-se gerada por uma gramática  $G$ , e escrita  $L(G)$ , se  $L = \{ w \in \Sigma^* \mid S \xrightarrow{*} w \}$
- Uma linguagem é livre de contexto se admite gramática livre de contexto.

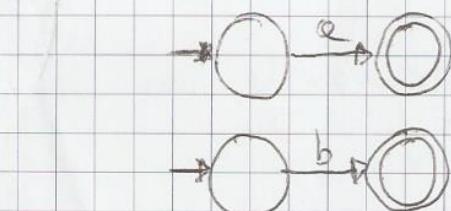
Uma gramática livre de contexto diz-se regular se os suas produções são de uma das seguintes formas:

$$A \xrightarrow{*} bB$$

$$A \xrightarrow{*} E$$

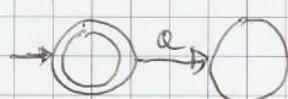
— a transportar

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_



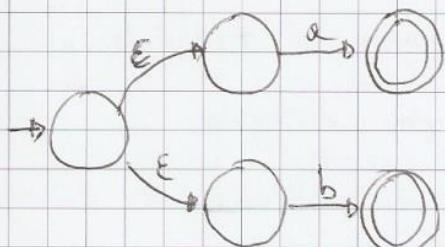
Complementação:

$\bar{a}$



União

$a \cup b$

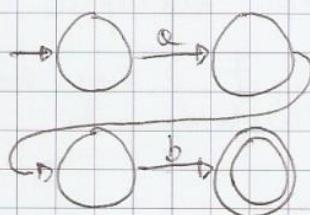


Intersection

$$A \cap B = \bar{A} \cup \bar{B}$$

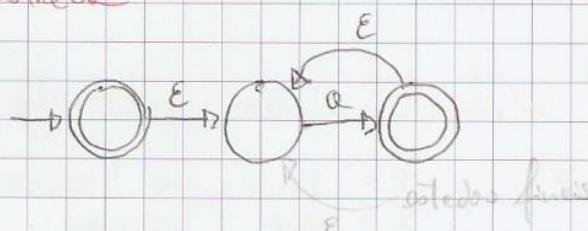
Concatenação

$$a \cdot b = ab$$



Operações estrela

$A^*$



Função

$$\ast, \circ, \cup$$

$$A \cdot \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset^\ast = \epsilon$$

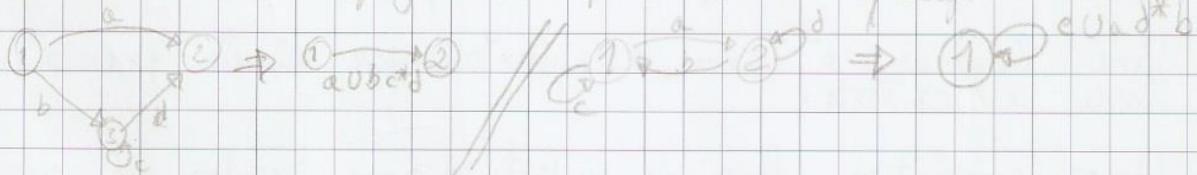
$$\epsilon A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$\epsilon \cup A = \epsilon \cup A$$

Um Autômato Generalizado é um Quintuplo:  $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_{start}, q_{accept} \rangle$

O adicionamento de uma nova função é um autômato que adiciona essa função para  $\Sigma$  e a 'qaccept'



1º Ano

2º Semestre

# Arquitectura de Computadores

*para 16 valores*

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas. (+importante)

Preparar as aulas dos LABs com antecedência (>1 semana), combina com o teu grupo, um dia da semana para isso. (++ importante) – qqr duvida vai a qqr LAB perguntar!

Rever aulas (LABs) de preparação para teste e resolver testes dos anos anteriores. (+++ importante)

Livro (serve par SD e Acom- cadeira 2sem) – comprei o livro, recorri mais para a parte de exemplo em ASSEMBLY , e também, qualquer duvida teórica está lá bem explicita.

# Cálculo Diferencial e Integral III

*para 12 valores*

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas e práticas. (++ importante)

Fazer os exercícios das práticas antes da aula. (++ importante)

Resolver testes dos anos anteriores. (++ importante)

**Livro** – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica penso que o da bibliografia seja bom.

Recorri sim, foi a uma sebenta com testes e exames resolvidos.

## Apontamentos para 1º e 2º testes

# CDI 2 - 1º teste

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

Estudar continuidade de funções:

- Justificar que é contínua no domínio exceto o ponto que dão.

- Calcular o limite da função para esse ponto.  
(Judas):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

• As dependem de  $\theta$ , mas é contínua nesse ponto.

• Vamos estudar o valor do limite para certas  $y$  / ex:  $y = n^2$

ex:  $g(n, y, z) = (\sqrt[n]{y}, e^{nyz})$

$$Jg = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial n} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial n} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Derivadas parciais

Jacobiano:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

Ondianle:

$$(a, b, c)$$

- Derivada de funções compostas

$$D(f \circ g)(u) = Df(g(u)) \cdot Dg(u)$$

$D_v f(u)$

↑ Derivada direcional  $\rightarrow$  derivada de  $f$ , no ponto  $x$ , produto com o vetor  $v$ .

Matriz Hessiana de  $f$

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial y} * \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial n} * & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

\* Só iguais pelo  
 Lema de Schurz  
 (linhas diagonais)  
 a transportar

Equações da recta normal a  $f$ , no ponto  $(a, b, c)$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (a, b, c) + t \cdot \vec{P}_g(a, b, c)\}, t \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = D \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

Plano tangente

$$(x-a, y-b, z-c) \cdot Dg(a, b, c) = 0$$

$$\text{ex: } (1, 0, -1) \quad x - z = 0$$

Pontos de Estacionariedade / críticos de  $f$

a) fazer derivadas parciais e igualar a zero, resolver

b) calcular matriz hessiana

c) Para cada ponto calculado em a) substituir na  $H_f$  e calcular valores próprios.

$$\text{ex: } f(x, y) = x^3 + y^3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow (6x - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \text{valores próprios}$$

Sinais v.p:

$++ \rightarrow$  ponto mínimo de  $f$

$-- \rightarrow$  ponto máximo de  $f$

$+- \rightarrow$  ponto sela de  $f$

A direção de maior crescimento de uma função é dada pelo gradiente de mesma no ponto.

# CO82 - 2º Teste

Integral do trabalho:

$$\int F(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \text{trabalho} \neq 0 \\ \text{não é quando} \\ \text{é fechado} \end{array} \right.$$

Número: \_\_\_\_\_  
Curso: \_\_\_\_\_  
Página nº: \_\_\_\_\_  
Questão: \_\_\_\_\_

Teorema de Green (trabalho e área)  $F = (P, Q, R)$

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy$$

se for constante

área

trabalho

$$\text{se } F \text{ for fechado} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \oint_{\partial D} P dx + Q dy = 0$$

Fluxo de um campo vectorial  $F$ , através de uma superfície  $S$ , segundo a normal  $\nu$ .

$$\iint_S F \cdot \nu = \iint_T F(g(u, v)) \sqrt{\det Dg^T Dg} du dv \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Produto interno:} \\ (a, b, c)(u, v, z) = \\ = au + bv + cz \end{array} \right.$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Divergência de } F \\ \text{e ext.} \end{array} \right.$$

Téorema da Divergência: (Fluxo <sup>nos bordos</sup> <sub>normal</sub> <sub>& exterior</sub>)

$$\iint_D \operatorname{div} F dx dy dz = \iint_{\partial D} F \cdot \nu_{\text{ext}}$$

$\partial D$ : conjuntos  $\perp$  a  $F$  fluxo

exemplo  $F = (0, 0, R)$ , não contém os horizontais (verticais)

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ u & v & z \end{vmatrix}$$

$$= (bz - yc) - (az - vc) + (av - ub)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \times B = -B \times A \\ A \times A = 0 \end{array} \right.$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{array} \right.$$

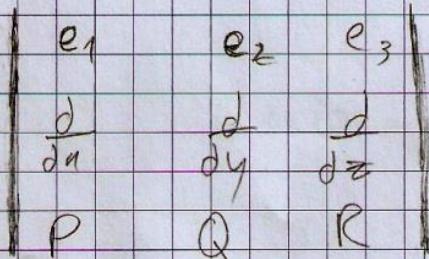
$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \\ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{array} \right.$$

a transportar

## Rotacional

$$\mathbf{F} = (P, Q, R)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$



se  $\text{rot } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}$  é fechado  
(irrotacional)

## Teorema de Stokes

(Fluxo do rotacional e Trabalho no bordo)

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad * \text{paramétricos}$$

→ bordo da superfície

a)  $\oint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  | soluções: determinar  $S$ , tq  $T \subset \partial S$   
dados  $\mathbf{F} \in T$

$$b) \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad | \text{soluções: determinar } \partial S$$

dados  $\mathbf{F} \in S$

c) Quando  $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{F}$   $\rightarrow \text{div } (\text{rot } \mathbf{F}) = 0$   
pode fazer-se:

Sendo  $D\varphi = \mathbf{F}$ , o trabalho de  $\mathbf{F}$  ao longo de um caminho  $\mathbf{g}$   
 $\rightarrow \mathbf{F}$  é um campo gradiente conservativo  $\mathbf{g}$ ,  
 $t \in [n, K]$

Logo, pelo T.F. do Cálculo para integrais de linhas

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(g(K)) - \varphi(g(n))$$

Vai-se uma variação de para ser descrita no vizinho de um ponto  $(a, b, c)$ , como, por exemplo:  $\mathbf{f}(y) = (x(y), z(y))$ ,

det  $D_{y,z} \mathbf{F}(a, b, c) = \det \begin{matrix} m & n \\ w & K \end{matrix} = j$ , se este for  $\neq 0$   
pode-se escrever

a transportar

neste caso, calcular  $f'(0) =$

$$- [D_{y,z} f(a, b, c)]^{-1} D_y F(a, b, c)$$

# CDI 2 - 2º Teste V.2

© AEIST Todos os direitos reservados

Número:	_____
Curso:	_____
Página nº:	_____
Questão:	_____

Massa

$$\iint_A \sigma(u, y, z)$$

$\sigma$  → densidade  
 $A$  → conjunto

$$- [D_{xy} f(a, b, c)]^{-1} \cdot D_z f(a, b, c) = g'(z)$$

Graças

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial n} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = \iint_D P dn + Q dy$$

Área  
Trabalho

Definição

$$F \cdot \iint_S F \cdot P = \iint_T F(g(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right| du dv \text{ Fluxo}$$

Divergência

$$\iint_D \operatorname{div} F = \iint_D F \cdot \hat{n} dt$$

Fluxo de  
Banda

Stokes

$$\iint_D \operatorname{rot} G \cdot \hat{n} = \oint_{\partial D} G \cdot dy$$

Fluxo lateral  
Transf. no band

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$$

$$F = (P, Q, R)$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

G

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ n & y & z \end{vmatrix}$$

$$\text{Produto escalar } (a, b, c) \times (n, y, z) =$$

$$\text{Prod. iten. } \rightarrow ax + by + cz$$

a transportar

$$y = f(u, v)$$

$$Df(C_{\alpha, \beta}) = -[Dg(a, b)]^{-1} \cdot D_{u, v} g(a, b)$$

# Introdução aos Algoritmos e Estruturas de Dados

*para 19 valores*

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas. (+importante)

Preparar as aulas dos LABs com antecedência, combina com o teu grupo, um dia da semana para isso. (++) importante) Voltar a fazer os exercícios dos LABs sozinho(a) - (++) importante)

Rever aulas (LABs) de preparação para teste e resolver testes dos anos anteriores.

(++) importante)

**Livro** – não recorri a nenhum livro. O livro do Luís Damas não é muito recomendado, pelo contrário temos o livro de Sedgewick, que é a nossa “bíblia” do C.

## Programas

[valgrind.org](http://valgrind.org) – Detalha a gestão de memória do teu programa. - utilizado: 2º parte projecto – malloc VS free.

## Apontamentos para 1º e 2º testes

16bits	int	%d	
32bits	long	%ld	espaço para reservado de virgula
	float	%f	
	double	%f	1,0e 2
Strings	char	%s	
	ascii	%c	espaço para o direito da vírgula

size of ();  
int e;

e = getchar(); lê o prox caractere do flux stream

putchar(x); escreve o caractere cujo código ASCII é o numero interno passado como argumento

!= EOF , != '\n'

echo e coloca '\0'

\n	ASCII
\t	
\0	'0' → 48d 'A' → 65d + 40h 'a' → 97d + 32d = 61h

typedef struct {

tipos x;

} Nome;

Operadores:  
Aritméticos: + - \* / %

relacionais

divisão + resto

Relacionais > >= < <= == !=

Lógicos ! && ||

not and or

short < int < long < float < double < long double

conversão: xl = (int) 2.34;

Operações bit a bit

&

!

^

<<

>>

~

and\*

or

xor

shift left\*

shift right\*

complemento de 1  
 $xl = -xl - 1$

— a transportar

0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

Adicionais

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

Inserção Sort  $O(n^2)$  baralhos cortos  
1º passo, colocar à esq o menor

Selection Sort  $O(n^2)$

Quick Sort  $O(n^2)$

Heap Sort  $(n \log n)$  ordenação de consultado:

Per fix up (varre dois filhos, escuta maior, caso seja menor que pai, troca) repete sempre do fim para o heap cada vez que ocorre uma troca

Merge Sort  $O(n \log n)$

Bubble Sort  $O(N^2)$  faz trocas adjacentes, dire → esq, levando o digito menor

Shell Sort (ajuda)

Counting Sort  $O(N+M)$  aux. de  $t$  auxiliar para o resultado

Radix Sort

array[n]	1 3 0 2 4 1 2
$t[Max+1]$	0 1 2 2 1 1
$t[Max+1]$	0 1 2 3 5 6 6 7
aux[n]	1 1 1 1 1 1 1

Break - acaba com: for; while; do-while; switch / continue;

```
if (exp)
  <inst1>;
else <inst2>;
```

```
switch (x) {
  case 1:
    <inst1>; (break);
  default:
    <inst2>;
```

```
do {
  <inst>
} while (exp);
for pés novos, 1K inst
```

Expressões Condicionais:

```
if (a > b)
  return a;
else
  return b;  $\rightarrow$  return (a > b ? a : b);
```

a transportar —

## AED - 2º Teste

#include  
std::vector

tipo \* variável = (tipo \*) malloc ( sizeof(Tipo) \* N );  
free ( ponteiro para o 1º posição de memória a liberar );

realloc (

tipo \* variável = (tipo \*) realloc ( ponteiro old , novo size );  
- se size new < size old - copia até caber  
C.C - deixa o resto sem ser inicializado

ponteiro ++ ; → Incrementa / decrementa na dimensão  
do tipo para o qual aponta.

tipo \* variável [ ] → Tabela de ponteiros para tipo

tipo \*\* variável → ponteiro para ponteiros

Ponteiro para funções

int some ( int a, int b ) { return a+b; }

int (\* ptr) ( int, int );  
ptr = some;

struct item {  
 int value;  
 struct item \* next; };

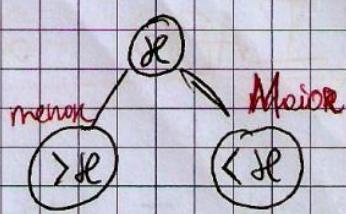
TypeDef struct item Item;  
TypeDef struct item \* Item \*ptr;

Traversais árvore:

Pre-orden:  
Post-orden:  
In-orden:

h l r  
l r h  
l h r

## BST - Árvores Binárias

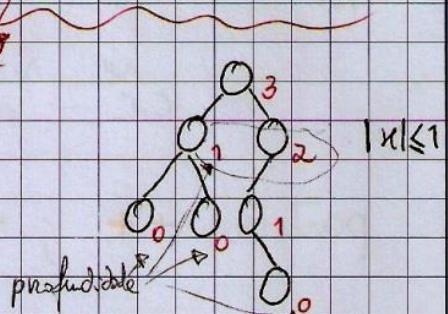


Número: \_\_\_\_\_  
Curso: \_\_\_\_\_  
Página nº: \_\_\_\_\_  
Questão: \_\_\_\_\_

rot Left:  $x = h \rightarrow r;$   
 $h \rightarrow r = x \rightarrow l;$   
 $x \rightarrow l = h;$

rot Right:  $x = h \rightarrow l$   
 $h \rightarrow l = x \rightarrow r;$   
 $x \rightarrow r = h;$

AVL -



## HASHTABLE

Colisões?

- Encadeamento Extenso (insere no inicio de uma lista)
- Procurar Linear (incrementa indice até encontrar um disponível)
- Double hashing (funções que calcula o incremento no indice de colisões)

→ Procura em Largura Primário

cria lista de prioridade com origem, teste origem

adicionando os vértices adjacentes à lista

tratamento (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

de prioridade (em caso de empate) segundo uma ordem

## BFS

$$\begin{cases} d[\text{vértice}] = \infty \\ \pi[\text{vértice}] = \text{Null} \end{cases}$$

$$\text{a origem: } d[0] = 0$$

$$\pi[0] = \text{Null}$$

## DFS

$$\begin{cases} d[\text{vértice}] = \infty \\ f[\text{vértice}] = \infty \\ \pi[\text{vértice}] = \text{Null} \end{cases}$$

$$\text{origem } \rightarrow d = 1$$

$$f = \text{definir}$$

$$\pi = \text{Null}$$

$$d = \text{definir}$$

$$a \text{ transportar}$$

# Matemática Discreta

*para 18 valores*

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas e práticas. (++) importante)

Resolver alguns dos exercícios das aulas práticas e testes dos anos anteriores.  
(++) importante)

[Livro](#) – não recorri a nenhum livro.

## Apontamentos para o 1º, 2º, 3º e 4º teste

$$\frac{m}{n} \stackrel{q}{\sim}$$

$$m = n \times q + r$$

Se  $r=0$        $m$  é divisível por  $n$   
 $n$  é múltiplo de  $m$   
 $m$  divide  $n$

$$m \bmod n = \text{mod}(m, n)$$

Em  $\mathbb{Z}_m$   $a$  tem inverso para a multiplicação se  $\text{mdc}(a, m) = 1$

$$\text{mdc}(m, n) = p^m + d^n$$

$$\text{se } \text{mdc}(m, n) = 1$$

$$\text{então } m^{-1} \equiv_n c$$

$$\varphi(p) = p-1, \quad p \text{ primo}, \quad \varphi(p) = \text{nº elementos inteiros } \not\equiv p$$

Teo. Euler  $a, n$  tq  $\text{mdc}(a, n) = 1$  /  $n = p$  primo  
 $a^{q(n)} \equiv_n 1$   $a^{p-1} \equiv_p 1$

$$\text{RSA: } n = p \times q$$

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$

$$a \times b \equiv \varphi(n)^{-1}$$

$(n, a)$  chave pública

$(n, b)$  chave privada

$$u(x) = \text{mod}(x^a, n) = y$$

$$v(y) = \text{mod}(y^b, n) = x$$

$$\begin{cases} n = 7 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 7 \\ k_1 &= 0 \\ N_1 &= 9 \\ N_1^{-1} &= 9^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= 9 \\ k_2 &= 3 \\ N_2 &= 7 \\ N_2^{-1} &= 7^{-1} \end{aligned}$$

$N$

$$s = \text{mod}(x \times + \times \times, N)$$

$$\text{solução: } x = s + Nk, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{mod}(a, n) = \text{mod}(b, n) \text{ se } a \cdot b \text{ é múltiplo de } n$$

## M0 2º Teste

$$\sum_{k=0}^n c + rk = \left(c + \frac{rn}{2}\right)(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^n cr^k = c \left( \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right)$$

$$\sum_{k=0}^n c = c(n+1)$$

Verificar assintoticamente uma quantidade de

calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{expressão reduzida}}{O(h)} = y$$

para  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists k$ ,  $n \geq k$  |  $\frac{\text{exp red}}{\text{ordem de grandeza}} - y < \epsilon$

Exemplo McLaren

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \int_0^n k^3 + e_n \text{ erro}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3$$

$$e_{n-1} = \sum_{n=0}^{n-1} k^3 - \frac{(n-1)^4}{4}$$

$$= \frac{n^4}{4} + e_n$$

$$e_n = \sum_{k=0}^n k^3 - \frac{n^4}{4}$$

obtenha expressão  
e<sub>n-1</sub>

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^3 + n^3 - \frac{n^4}{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3 - (n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^4}{4} + n^3 - \frac{n^4}{4}$$

$$e_n = \sum_{k=0}^n \left( \frac{(n-1)^4}{4} + n^3 - \frac{n^4}{4} \right)$$

$$\text{Logo } \sum_{k=0}^n k^3 = e_n + \frac{n^4}{4}$$

a transportar

Pentametered do some

- se for polinômio

$$\sum_{K=0}^n K^3$$

$$\sum_{k=0}^n k^4 + (n+1)^4$$

## MD - 3º Teste

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

$$\alpha = 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$G_\alpha(n) = \frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i x^i$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$G_\alpha(n) = \frac{1}{(1-\alpha x)^2}$$

$$\alpha = 1, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1,$$

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha x^n}$$

exemplo: multiplo 2  
 $\alpha = 1, 0, 1, 0, 1, \dots$   
 $G_\alpha(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Deslocamento:

$$\alpha = \underbrace{0, \dots, 0}_K, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \Rightarrow x^K G_\alpha$$

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

$$\alpha = a^\circ, a^1, a^2, \dots$$

$$G_\alpha(n) = \frac{1}{1-a x^n} = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i x^{ni}$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)$$

$$\sum_{i=0}^n a + b i = \left( a + \frac{b \cdot n}{a} \right) (n+1)$$

para convolução  $x = a y$

$$P(h(k) = L_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(h(k) = L_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(h(k) = L_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(X_i=1) &= (P(h(k)=L_1, h(k_i)=L_1) + \\ &+ P(h(k)=L_2, h(k_i)=L_2) + \\ &+ P(h(k)=L_3, h(k_i)=L_3)) \end{aligned}$$

Independentes, logo:

$$P(X_i=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$P(X_i=0) = 1 - P(X_i=1) = \underline{\underline{\frac{11}{18}}}$$

$$\begin{aligned} G_{X_i}(z) &= P(X_i=0) \cdot 1^0 + P(X_i=1)z^1 + P(X_i=2)z^2 + \dots = \\ &= \underline{\underline{\frac{11}{18}}} + \underline{\underline{\frac{7n}{18}}} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$E_{NC} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{11}{18} + \frac{7n}{18} \right) = \left( \frac{11}{18} + \frac{7n}{18} \right)^n = G_{NC}$$

$$G_{NC}(n) = \frac{7n}{18} \left( \frac{11}{18} + \frac{7n}{18} \right)^{n-1}$$

$$G_{NC}'(1) = E(NC) = \frac{7n}{18}$$

$$V(n) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

a transportar

# TESTE 4 MD

$$Z_n^k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

~~TFD<sub>2</sub> → {1, -1}~~

~~TFD<sub>4</sub> → {1, i, -1, -i}~~

~~TFD<sub>8</sub> → {1,  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $i$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ , -1,  $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ ,  $-i$ ,  $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ }~~

(par + reiz. impor, par - reiz. impor)

ex: TFD<sub>2</sub> → (x+1y, x-1y) reiz {1}

TFD<sub>1</sub>(x) =  $\cancel{x}$  TFD<sub>1</sub>(y) =  $\cancel{y}$

Calcular prodílio de polinómios de fomuo equivalente:  $p = (1, -2+3i, -5, -2-3i)$

\* 1º passo:  $n = \text{grau máx} (t+x) = 2^k$   
 $q = -4n^2 - 5n + 3 \rightarrow \text{TFD}_4(3, -5, -4, 0) = (-6, 7-5i, 4, 7+5i)$

\* 2º passo: multiplicar polív - e - ponto  $(-6, 1+3i, -20, 1-3i)$

\* 3º passo: Calcular o TFD inverso do 2º passo  
ex:  $\text{TFD}_4^{-1}(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{4} \text{TFD}_4(1, 4, 3, 2) = p \cdot q$

$$152 \times 31 \Rightarrow \begin{cases} 152 = 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 2 \\ 31 = 3n + 1 \end{cases} \rightarrow n^2 + 5n + 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 16 \times 10^2 + 11 \times 10 + 2 = 1712 \\ 1712 \end{array} \right.$$

$$B(g, g') = \frac{\text{mmc}(td(g), td(g')) \cdot g}{td(g)} - \frac{\text{mmc}(td(g), td(g')) \cdot g'}{td(g')}$$

ordenar polinómios

$$\underbrace{M_1}_{n=2} M_2 + \underbrace{M_2^2}_{n=2}, \quad \text{mtz } n, \text{ quando } n=n$$

# Mecânica e Ondas

*para 15 valores*

Testes MO – 2011/2012 - **password: leic**

## Método de Estudo

Acompanhar teóricas e práticas. (+++ importante)

Resolver alguns dos exercícios das aulas práticas e testes dos anos anteriores.  
(++ importante)

Livro (MO e EO) – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica o da bibliografia (Physics for Scientists and Engineers - R. A. Serway, J. W. Jewett) é bastante bom e recomendado.

Os apontamentos da professora eram bastante explícitos.

**Nota:** No meu ano foi permitido utilizar máquina de calcular científica, informa-te disso.

## Apontamentos para o 2º e 3º teste

# M.O. - 2º teste

## • Momento Linear:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

conservação do momento linear:  $\Delta p = 0$

→ colisão elástica:

$$\text{conservação de energia cinética: } E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$1. m_1 = m_2 \Rightarrow N_{1f} = 0 \text{ e } N_{2f} = N_1;$$

$$2. m_2 \ll m_1 \Rightarrow N_{1f} = -N_1; \quad N_{2f} \approx 0$$

→ colisão perfeitamente inelástica:

$$1. m_1 = m_2 \Rightarrow N_{2i} = 0 \Rightarrow N_f = \sum N_i \Rightarrow E_{c,f} \text{ é mínimo}$$

$$P_{\text{total}} = 0$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(por final ambos os  
partículas ficam com  
a mesma velocidade)

## • Corpo Rígido:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Momento de força

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I \alpha$$

distância entre o ponto de rotação

aceleração angular

$$= \tau \cdot F \cdot \sin \theta$$

momento inercial

ponto de referência (região mais densa)

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{\sum m_i \ddot{x}_i}{M_{\text{total}}} =$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M_{\text{total}}}$$

$$N_t = \omega r = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Omega_t = \alpha \cdot r$$

$$I = m(r)^2$$

Momento angular: momento linear

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$$

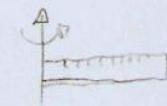
$$\text{Se } \vec{M} \text{ (momento de força)} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ (momento angular)} = \text{constante}$$

$$\vec{N}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{N}_i = \vec{N}_0 + \vec{g}t = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{T}{m \omega t}}}$$

$$\ddot{\Omega}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\omega}_i = \frac{1}{M} \sum \text{Força total sobre todos os partículas}$$

$$I_{\text{regua}} = \frac{ML^2}{3} = \frac{\lambda L^3}{3}$$

$$\lambda = \frac{M}{L} \rightarrow \text{comprimento}$$



$$I_{\text{varinha}} = \frac{ML^2}{12}$$

desloca-se pelo ângulo

$$\Delta y = \pi \theta$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{I}{2} \omega^2$$

# Momento de Inercia

$$I = m r^2$$

$$\frac{I_{\text{disc}}}{2} < I_{\text{total}} < \frac{1}{2} m (r_{\text{ext}}^2 + r_{\text{int.}}^2)$$

$$\frac{M r^2}{2} < M r^2$$

desarrollando, se obtiene:

$$N_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2gH_{\text{max}}}{1 + \frac{I}{mr^2}}}$$

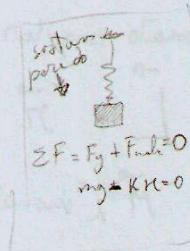
Sistema en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

## Oscilaciones

Mole:  $E_p = \frac{1}{2} K x^2$  const. elástica de mola ( $N/m$ )  
 $F = -Kx = m \cdot a$



Oscilación:  $\ddot{x} + \omega_p^2 \cdot x = 0$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

frecuencia propia del sistema  $T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

$x(t) = A \cos(\omega_p t + \delta)$   
A = amplitud,  $\omega_p$  = frecuencia propia del sistema

$$\delta = \arctan \left( -\frac{1}{\omega_p} \cdot \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right)$$

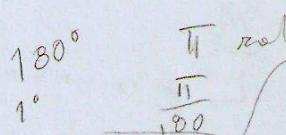
$\dot{x}(t) = v(t) = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \delta)$

elongación de la mola

$$R = \frac{mg}{K} \quad (F_g + F_m)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{m}} \quad C_s = \frac{\ln 2}{b}$$

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$



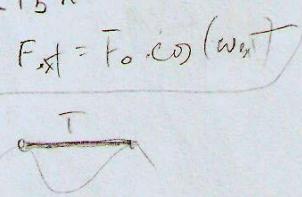
Oscilación de amplitud constante  
 $\omega_0 \neq 0, T \neq 0, \theta \neq 0, \dot{\theta} \neq 0$

Fuerza =  $-b \dot{x}$  proporcional a velocidad  
 $m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$  coeficiente de fricción de la fuerza de tensión

$$m + K \rightarrow T$$

$$K + T \rightarrow m$$

redondear redondear



# MD. 3º Teste

frequência angular  $\omega = 2\pi f$  ;  $f = \frac{1}{T}$

número de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v}$  ;  $v = \frac{\omega}{k} = \lambda f$

densidade  $M = \frac{m}{L}$   
Evolução da onda (n)  $\vec{D}(K, t) = A \sin(Kx - \omega t)$

penfil da onda  
( $x_1 = x_2 + \Delta x$ ,  $\Delta x = m\lambda$ )  
tensão da corda ( $N$ )  $T = v^2 \mu = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot \mu$  densidade linear

Potência ( $w$ )  $\equiv \frac{\Delta Em}{\Delta t} = \frac{E_{el, max}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\mu} \cdot \pi^2 \omega^2 \mu \sin^2(Kx - \omega t)$

Harmonicos  
Comprimento de onda  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
frequência  $f_n = n f_1 = \frac{n \cdot v}{2L}$  no de harmônico

Nodos  $f_n = m \frac{\lambda_n}{2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n$

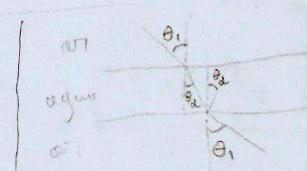
velocidade  $v = f_n \lambda_n$ , ex  $\Rightarrow N = f_1 \cdot \lambda_1$

Tensão  $T = v^2 \mu$

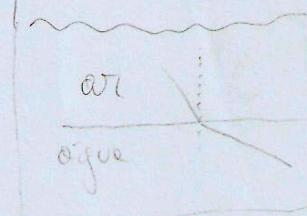
Snell-Descartes (refração)

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

ângulo crítico  $\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)$



LUZ



SOM

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{gas} \cdot V_{gas} = \rho_{água} \cdot V_{água} \text{ deslocada}$$

# Fluidos

$$m = \rho \cdot \text{Volume}$$

$$P_{\text{res}} = m \cdot g$$

$$\rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

Equação de Bernoulli

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g h = \text{const}$$

No líquido dentro do recipiente = 0

$$v_{\text{forma}} = \sqrt{2g(h - d)}$$

$$P = \rho g h$$

$$F_y = P_y \times A = P_y \times L dy = (\rho g h + P_{\text{atm}}) \cdot L dy$$

$$F_{\text{total}} = \int_0^h F_y = \rho g L \frac{h^2}{2} + P_{\text{atm}} \cdot L \cdot h$$

$$A_{m1} = A_{m2}$$

$$[A_1 v_1 = A_2 v_2] \rightarrow \text{água é incompressível}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

2º Ano

## 3º Semestre

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

*para 15 valores*

## Método de Estudo

Assistir e acompanhar teóricas e práticas. (++) importante)

Fazer os exercícios das práticas antes da aula. (++) importante)

Resolver testes dos anos anteriores. (++) importante)

Livro – não recorri a nenhum livro, mas para completar ou esclarecer alguma dúvida teórica penso que o da bibliografia seja bom.

Recorri sim, foi a uma sebenta com testes e exames resolvidos.

Links:

[Toda a matéria academic.ieee-ist.org](#)

[Teorema dos Resíduos MUITO BEM EXPLICADO \[ inglês \]](#)

[Fichas e Testes](#)

[Aulas de ACED dadas pelo professor Pedro Girão no IST !!](#)

## Apontamentos para 1º e 2º testes

# 1. ACE D 1

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$|z \cdot w| = (|z| \cdot |w|)$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \leftarrow \text{Desigualdade triangular}$$

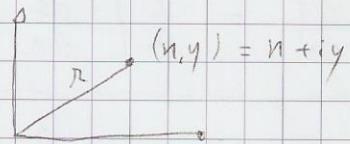
$$r = |x + iy| \geq 0$$

$$x = r \cos(\phi) \quad y = r \sin(\phi)$$

$$x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi}$$

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$



Função Holomorfa: (~~quando:~~)  $\equiv$  F. Analítica

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z-h) - f(z)}{h} \text{ existe}$$

Ou . aplica-se as equações de Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$f$  e  $g$  são holomorfas,  $f'(z), g'(z)$  existem, então  $f+g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  são holomorfas

Ou

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$H = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$Y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Se  $f$  é Inteira, então é diferenciável em todos os pontos do domínio:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(n+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right] / \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

Seja  $u(n,y)$  uma função de classe  $C^2$ , num aberto, dize-se que  $u$  é Harmônica quando:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Eq de Laplace

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = n$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y$$

## Séries

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{ch}(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

## Geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$R = 1 > |z|$$

a transportar

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

# 1. ACED 2

Número: \_\_\_\_\_  
Curso: \_\_\_\_\_  
Página nº: \_\_\_\_\_  
Questão: \_\_\_\_\_

a. Séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Raio de Convergência:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ou

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad |z - z_0| < R$$

Fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Integral de  $f(z)$  ao longo de  $\gamma(t)$  (CDI 2)

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (a \leq t \leq b)$$

\* Se  $\Omega$  é simplesmente conexo  $\rightarrow$  Não tem buracos

# END CDI II

Fórmula Integral de Cauchy

Sendo  $f$  uma função holomorfa:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\text{Disco}(c, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Disco( $c, r$ )  
centro  $\Rightarrow$   $\uparrow$  raio

$$\frac{d}{dz} \left( \sum f(z) \right) = \sum \left( \frac{d}{dz} f(z) \right)$$

$$\int \left( \sum f(z) \right) = \sum \int f(z)$$

## Série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

 Singolaridades (buracos indefinidos) 

- Removível

Se cede  $b_n = 0$

Ex:  $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$

→ a singularidade,  $z=0$ , é removível

- Polo de ordem K

Se  $b_K \neq 0$  e  $b_{K+n} = 0$ ,  $n > 0$

não depara  
por mais o "z" em  
evidência

\* Polo de ordem 1 - polo simples

Ex:  $\frac{1 - \cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) \right] = \frac{\left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right)}{z^3}$

→ a singularidade,  $z=0$ , é um polo de ordem 1

- Essencial (não é nenhuma das outras XD)

Se cede  $b_n \neq 0$

Ex:  $\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{5!} - \dots$

# 1. ACED 3

## Resíduos

Sendo  $P$ , uma singularidade de ordem  $n$   
de  $f(z)$ .

$$\text{Res}_f(P) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-P)^n \cdot f(P)]$$

Se  $\exists_0$  for resíduo essencial é o coeficiente do termo  $\frac{1}{z-z_0}$   
sendo  $\gamma$  curva de Jordan:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}_f(P_j)$$

$P_j$  no interior de  $\gamma$

Usual:  $P_j$  são as singularidades  
dentro de um círculo  $\gamma$

## Teorema dos Resíduos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}_f(P_j) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(P_j)$$

Número de voltas que o caminho  $\gamma$  dê em volta de  $P$

$$\text{Ind}_{\gamma}(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-p}$$

# Random SH\*T

$$f(z) = \frac{P(z)}{g(z)}, \quad f \text{ tem um polo simples em } z_1$$

se  $\begin{cases} g(z_1) = 0 \\ p(z_1) \neq 0 \\ g'(z_1) \neq 0 \end{cases}$

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{p(z_1)}{g'(z_1)}$$

Para resoio = 1

$$\begin{aligned} z &= e^{it} \\ \text{mudança de变換} &\quad z' = ie^{it} \quad \left| \begin{array}{l} dz = iz dt \\ \frac{dz}{iz} = dt \end{array} \right. \\ \text{de变換} &\quad = iz \end{aligned}$$

## ACEED 4

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

Função par (simetria eixo y)  $f(z) = f(-z)$

Função ímpar (simetria origem)  $\rightarrow$  sobre uma recta de zeros

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(s) dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$$

Determinar  $f(t)$ :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = g(s)$$

$$f(t) = \text{Res}\left\{ g(s) \cdot e^{st}, s = \text{Singularidade} \right\} + \text{outros}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{delta de Dirac} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$$

Convolução:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \mathcal{L}\{f\} \times \mathcal{L}\{g\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t f(t-u) g(u) du \right] dt \end{aligned}$$

Equação exato

$$M + N \frac{dy}{dx} = f$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Fator Integrande

$$\frac{M'}{M} = - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial M}{\partial y}} - \frac{N \frac{\partial S}{\partial x} - M \frac{\partial S}{\partial y}}{M}$$

Equação Linear com coeficientes constantes

$$a y'' + b y' + c y = b \quad (\text{combinação de exponenciais e ou polinómios})$$

Sol. geral = S. eq. homog. + S. eq. particular

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + m_1 y_1 + m_2 y_2$$

$$y_1, y_2 + \text{Exp} [\text{raiz de eq Homogénea} \times t] = e^{\lambda t}$$

$$m_1' = \frac{-y_2 b}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad m_2' = \frac{-y_1 b}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

primitivar  $m_1'$  e  $m_2'$   $\rightarrow m_1$  e  $m_2$

$$\det(A) = (1.5.9 + 4.8.3 + 7.2.6) - (7.5.3 + 4.2.9 + 1.8.6) = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A$$

a transportar

Número: \_\_\_\_\_  
 Curso: \_\_\_\_\_  
 Página nº: \_\_\_\_\_  
 Questão: \_\_\_\_\_

# ACED 5

$$f(x) = xe \text{ em } [-L, L]$$

Série de Fourier  $\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Lipshitziana

Se  $\frac{df}{dy}$  é contínuo em  $\mathbb{R}$ , então  $f$  é lipshitziana relativa a  $y$ .

Verificar  $e^{At} = e^t M$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} e^t M \text{ vai ser igual a } A e^t M - x |$$

## § Eq Linear 1º Ordem

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = b(t)$$

 $\lambda \rightarrow \text{const.}$ 

$$y' + \lambda y = b(t)$$

Sol. eq homogênea  $\Rightarrow y' = -\lambda y \Leftrightarrow y = K e^{-\lambda t}$ exemplo  $b(t) = e^{-t}$ ,  $\lambda = 2$ 

$$e^{2t}(y' + 2y) = e^{2t} \cdot e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{2t}y) = e^t$$

$$e^{2t}y = e^t + A \Leftrightarrow y = e^{-t} + Ae^{-2t}$$

S. aux.p.

S. aux.H

## Eq Diferenciais (2º Ordem) -

→ Coeficientes Const

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = b(t)$$

sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes da eq Homog.

$$S. eq Homog = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

caso  $\lambda_1$  tenha multiplicidade 2  $\Rightarrow c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t}$ • Raízes Imaginárias ( $\pm 3i$ ) exemploSol.  $c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$   
Homogênea• Aniquiladores

const	$\rightarrow D$
$t$	$\rightarrow D^2$
$e^{\alpha t}$	$\rightarrow (D - \alpha)$
$t e^{\alpha t}$	$\rightarrow$

# Electromagnetismo e Óptica

*para 14 valores*

## Método de Estudo

Tal como em Mecânica e Ondas, há uma grande diferença se tiveste-te ou não Física no Secundário. Pelo menos metade da matéria foi lá dada. Se assim não foi contigo, é conveniente aplicares-te mais a esta cadeira do que eu vou descrever.

Para não variar, é muito provável que o primeiro teste calhe em cima de entregas de projectos, portanto prepara-te!

Assistir e acompanhar teóricas. (+importante)

Preparar as aulas dos LABs com antecedência (>1 semana), combina com o teu grupo, um dia da semana para isso. (++ importante) – qqr duvida vai a qqr LAB perguntar!

Resolver testes dos anos anteriores. (+++ importante)

**Livro** – o livro do Serway é muito bom, apesar de não o ter utilizado muito.

